Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ ИМЕНИ ГУМАРБЕКА ДАУКЕЕВА

Кафедра инженерной экологии и безопасности жизнедеятельности

ТЕОРИЯ И ТЕХНИКА ИНЖЕНЕРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Конспект лекций
для магистрантов специальности
6М073100 – Безопасность жизнедеятельности и защита окружающей среды

Алматы 2021

СОСТАВИТЕЛЬ: Н.Г. Приходько. Теория и техника инженерного эксперимента. Конспект лекций для магистрантов специальности 6М073100 – Безопасность жизнедеятельности и защита окружающей среды. – Алматы: АУЭС, 2021. – 52 с

Конспект лекций содержит материал в соответствии с программой курса и позволит магистрантам изучить основное его содержание в кратком изложении.

Конспект лекций предназначен для магистрантов очной формы обучения.

Ил. 11, библиогр. – 11 назв.

Рецензент: к.п.н., доц. Саламатина А.М.

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи им. Гумарбека Даукеева» на 2021 г.

© НАО «Алматинский университет энергетики и связи им. Гумарбека Даукеева», 2021г.

Введение

Дисциплина «Теория и техника инженерного эксперимента» рассматривает понятие эксперимента, как метода получения информации о явлении или процессе. В ней представлено общее понятие об эксперименте и порядок проведения экспериментов, даётся представление о моделировании и подобии, о физических основах измерений, о математической обработке результатов эксперимента, о видах и средствах измерения физических величин.

Целью изучения дисциплины является получение теоретических и практических знаний по вопросам теории и техники эксперимента и математической обработки полученных экспериментальных результатов.

По окончании курса магистрант должен иметь представление об экспериментах, опытах и испытаниях в научных исследованиях и в промышленном производстве, о последовательности и плане эксперимента, о построении моделей, о погрешностях измерения.

Кроме того, магистрант должен знать практический смысл эксперимента, физические основы измерений, математическую обработку результатов экспериментальных исследований.

Уметь применять теорию и технику эксперимента при проведении исследовательской работы, а также владеть методами математической обработки результатов испытаний.

1. Понятие об опытах и испытаниях в научных исследованиях и в промышленном производстве

Существуют следующие понятия при проведении исследовательских работ: эксперимент, опыт и испытание.

Эксперимент – это обычно новое исследование, проводимое в управляемых условиях для подтверждения гипотезы. Экспериментатор активно взаимодействует с объектом и направляет его, что отличает данный процесс от наблюдения.

Опыт – основной метод исследования или воспроизведение какого-либо известного явления, или наблюдение нового явления в определенных условиях с целью изучения, исследования. Опыт также можно охарактеризовать как научный процесс, целенаправленное действие, при успешной реализации которого, подтверждается, или опровергается гипотеза. Опыт в отличие от эксперимента – это, как правило, повторение какого-то эксперимента с целью демонстрации какого-либо известного явления, например, в учебных целях.

Таким образом, различия между экспериментом и опытом незначительны. Эксперимент проводится впервые и призван подтвердить гипотезу, а опыт выполняется с заранее определённым результатом. И тот, и другой процесс протекает в управляемых условиях, при активном взаимодействии с объектом исследования.

При проведении эксперимента учёный, как правило, преследует определённую цель, которая является для него основной. Это способ проверки идей, подтверждение гипотезы, уже возникшей в представлении учёного. Опыт может выполняться без какой-то конкретной цели, спонтанно, и конечные результаты могут находиться в определённом диапазоне. Однако, приведённая разница в понятиях не является существенной, и данные категории вполне могут использоваться в качестве синонимов. Ведь их главная цель – активное участие в процессе, не простое наблюдение, а взаимодействие с объектом, его направление в определённое русло.

Таким образом, можно подвести итог: эксперимент призван подтвердить гипотезу, а опыт – закрепить её на практике; единичное исследование, как правило, называют экспериментом, множественное – опытом; при проведении эксперимента перед учёным уже возникла определённая цель, опыт может осуществляться спонтанно, наугад.

Испытание – это опытное определение характеристик объекта (количественных, качественных) при его непосредственном функционировании или при его моделировании с воздействием на него факторов по принятым правилам. Испытания обычно проводят с целью получения сведений, необходимых для принятия решения о соответствии объекта испытаний заданным требованиям. Также испытания проводят с научными целями, с целью изучения предмета, с целью установления цены изделия и т. д. Отдельные виды испытаний имеют исторически сложившиеся

названия: химический анализ, органолептический анализ, металлографические исследования, микробиологический анализ, геммологическая диагностика, измерение и др.

Объектом испытания является продукция или процессы (технология) ее производства. При этом в зависимости от вида продукции и целей испытаний объектом может быть как единичное изделие, так и партия. Испытания продукции осуществляют в процессе, либо по окончании ее производства, а так же при ее эксплуатации. Результатом испытаний являются не конкретные результаты измерений, а ответы типа «годен», «не годен», «соответствует», «не соответствует». Таким образом, цель испытаний заключается в оценке истинного значения определяемого параметра в заданных номинальных условиях испытаний.

Проведение испытаний конкретного объекта или продукции, как правило, проводят по заранее разработанным нормативным документам, которые устанавливают порядок проведения испытаний в соответствии с программой и методикой.

Программа испытаний – это обязательный документ, устанавливающий объект и цели испытаний: виды, последовательность и объем проводимых экспериментов; порядок, условия, место и сроки проведения испытаний; обеспечение и отчетность; ответственность за обеспечение и проведение испытаний.

Методика испытаний – обязательный документ, включающий в себя метод, средства и условия испытаний, отбор проб, алгоритмы выполнения операций по определению характеристик свойств объекта, формы представления данных и оценивания точности и достоверности результатов, требования техники безопасности и охраны окружающей среды.

Метод испытаний – установленные технические правила проведения испытания.

Протокол испытаний – документ, содержащий результаты испытаний и другую информацию, относящуюся к испытаниям.

Испытания классифицируют: по определяемым характеристикам (механические, прочностные, на электромагнитную совместимость, электрические, на надёжность и т. п.), по назначению (приёмо-сдаточные, периодические, клинические, заводские и т.п.). Также заводские испытания могут разделяться на приёмо-сдаточные, периодические, инспекционные, типовые. В свою очередь, в зависимости от объекта испытания, имеют место стендовые испытания (доводочные, предварительные, огневые, приемочные), полигонные испытания, натурные (например, летные), испытания с использованием моделей.

Качество испытания определяется достоверностью полученных сведений. Чем выше достоверность, тем выше качество. Для современного уровня развития технологий достаточным является получение результата испытаний с 95 % доверительной вероятностью. Однако в случаях, когда недостоверные результаты испытаний могут привести к значительным

рискам, используют более высокие доверительные вероятности. Качество испытания определяется проработанностью процедуры. Чем более подробно описаны условия проведения испытаний, тем выше воспроизводимость получаемых результатов.

В целом понятия и определения, применяемые при проведении исследовательской работы, будут встречаться на протяжении изучения всего курса. Большинство из них применяются как установившиеся технические понятия и термины, некоторые из которых приведены выше. В случае применения терминов и понятий, имеющих узкий смысл, они могут разными авторами интерпретироваться по-разному.

Основные этапы развития измерительных технологий. Бурное развитие электроники и радиосвязи в конце XIX века привело к возможности создания средств измерительной техники нового типа. В результате появились цифровые приборы с дискретной формой представления информации, реагирующие на малые входные сигналы, высокие частоты и высокоомные входы. Такая форма оказалась удобной для преобразования, передачи, хранения и обработки информации.

С появлением микропроцессоров и ПК перед измерительной техникой открылись широкие возможности. В результате расширилась область применения измерительной техники, улучшились их технические характеристики, повысилась надежность и быстродействие. Это позволило создать автоматические средства измерения и управления при проведении исследований, испытаний и контроле сложных объектов. Таким образом, измерительная техника прошла путь от показывающих, аналоговых, самопишущих, автоматических и цифровых приборов к информационно-измерительным системам.

Понятие о метрологии, стандартизации, сертификации. В основе создания средств измерений и измерительных технологий лежит метрология. Метрология (от греч. métron — мера и ...логия) – наука об измерениях, методах достижения их единства и требуемой точности. К основным проблемам метрологии относятся: общая теория измерений; образование единиц физических величин и их систем; методы и средства измерений; методы определения точности измерений (теория погрешностей измерений); основы обеспечения единства измерений и единообразия средств измерений (законодательная метрология); создание эталонов и образцовых средств измерений; методы передачи размеров единиц от эталонов образцовым и далее – рабочим средствам измерений.

Одним из направлений метрологии в настоящее время является проверка с помощью методов различного контроля соответствия изготовленной продукции стандарту, техническим условиям, чертежам и другой технической документации.

Стандарт, который может разрабатываться как производителями продукции, так и другими заинтересованными лицами, подлежит согласованию и утверждению в компетентных государственных органах в

соответствии с действующим законодательством.

После утверждения стандарт становится официальным изданием, содержащим комплекс норм, правил, требований к объекту стандартизации, которые устанавливают на основе достижений науки, техники и передового опыта. В частности он может устанавливать набор основных показателей потребительского свойства определенного товара, обеспечивающих конкурентоспособность и качество продукции (работ, услуг), взаимозаменяемость технических средств и т.п. Также в функции стандарта может входить требования по повышению уровня безопасности жизни и здоровья граждан, имущества и объектов с учётом риска возникновения чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера, повышение уровня экологической безопасности и т.п.

Сертификация (лат. certum facere – верно сделать) – это деятельность, направленная на подтверждение соответствия продукта требованиям всех нормативных документов. Сертификация – процедура, посредством проведения которой третья (независимая) сторона документально удостоверяет, что продукция или услуга соответствует установленным нормам.

2. Основные задачи исследовательской работы. Общие понятия об инженерном эксперименте.

Задачи исследовательской работы. Как правило, целесообразность проведения любой научно-исследовательской работы определяется её сформулированной целью. Поставленная цель должна быть реально достижимой при определённых экспериментальных условиях, которые приводятся в описании научной работы. Для реализации поставленной цели ставятся задачи, при выполнении которых поставленная цель достигается.

Научно-исследовательская работа может иметь прикладной или фундаментальный характер и включать, как теоретическую, так и экспериментальную части. Исследования теоретического плана могут завершаться формированием теории, не обязательно связанной с построением ее математического аппарата. Целью теоретического исследования является объяснение и обобщение результатов экспериментального исследования, выявление общих закономерностей и их формализация. Полученные теоретические результаты могут быть расширены на ряд подобных объектов без повторения всего объема исследований, а также на изучение объектов недоступных для непосредственного исследования.

Общие понятия об инженерном эксперименте. Термин «эксперимент» происходит от латинского слова «experimentum» – проба, опыт. В общем смысле, эксперимент – это метод познания в процессе наблюдения и исследования явлений или объектов в специально создаваемых и контролируемых условиях. Эксперимент, как правило, осуществляется на основе теории или гипотезы, определяющих постановку задачи и

интерпретацию результатов.

Инженерный эксперимент – это совокупность эмпирических опытов исследования с воздействием на изучаемый объект специальными средствами с целью получения необходимой информации о свойствах и особенностях этого объекта или явления. В качестве основной цели эксперимента может быть подтверждение или опровержение предполагаемых теоретических положений или гипотез, а также более широкое и глубокое изучение темы научного исследования. В этой связи эксперимент играет очень важную роль, как в науке, так и в инженерной практике, являясь источником познания и критерием истинности теорий и гипотез. Экспериментальная деятельность широко развита и проводится в исследовательских лабораториях, на действующем производстве, в медицинских клиниках и т.д.

Несмотря на большое различие объектов экспериментального исследования, методы экспериментальных исследований имеют много общего:

– вначале составляют план проведения эксперимента;

– определяют необходимое и достаточное количество контролируемых переменных с целью уменьшения объёма эксперимента;

– обеспечивают управляемый и контролируемый ход эксперимента;

– создают условия, исключающие влияние случайных внешних воздействий;

– оценивают точность полученных результатов с учётом погрешностей измерительных приборов;

– заключительным этапом любого эксперимента является обработка и анализ полученных результатов с их объяснением и интерпретацией, так как без этого экспериментальное исследование не имеет смысла.

Различают эксперименты естественные и искусственные. Естественные эксперименты характерны при изучении социальных или природных явлений. Искусственные эксперименты широко применяются во многих естественнонаучных исследованиях и, в зависимости от отрасли науки, разделяются на химические и физические эксперименты.

Эксперименты, в зависимости от цели проведения и форме представления полученных результатов, делятся на качественные и количественные.

Качественный эксперимент устанавливает сам факт наличия или отсутствия у объекта определенных свойств или характеристик, но при этом не даёт никаких количественных данных. В основном качественный эксперимент бывает проще количественного и зачастую проводится без специальной аппаратуры. Как правило, он не даёт количественных рекомендаций и не позволяет провести анализ поведения объекта в различных условиях. Это делает его неэффективным, так как в научной практике принято характеризовать поведение объекта числом и количественными зависимостями.

Количественный (измерительный) эксперимент обеспечивает получение

различных количественных показателей, позволяющих проанализировать свойства и поведение исследуемого объекта с учетом внешних воздействий, и сделать заключение.

По контролируемым величинам эксперименты разделяются на пассивные и активные.

Пассивный эксперимент – эксперимент, при котором не производится воздействие на объект исследования, а осуществляется пассивное наблюдение за процессом и производится регистрация результатов. При пассивном эксперименте определяется число необходимых опытов для решения поставленной задачи.

Активный эксперимент – эксперимент, при котором исследователь имеет возможность варьировать входными и выходными параметрами. Как правило, активный эксперимент проводится по заранее составленному плану.

По структуре проведения инженерные эксперименты подразделяется на натурные, модельные и имитационные (машинные).

Натурный эксперимент – эксперимент, который проводится на реальных объектах в условиях эксплуатации, а средства исследования непосредственно взаимодействуют с объектом исследования.

Модельный эксперимент – эксперимент, который проводится с моделью, соответствующей исследуемому объекту и является средством его экспериментального исследования.

Имитационный эксперимент – эксперимент, который является разновидностью модельного эксперимента, при котором соответствующие характеристики исследуемого объекта исследуются с помощью разработанных алгоритмов и программ моделирования. Отличается универсальностью и обладает широкой областью применения.

По стадии проведения инженерные эксперименты делятся на лабораторные, стендовые и промышленные.

Лабораторные эксперименты проводят в лабораторных условиях с применением приборов, моделирующих установок, стендов. При этом изучается не сам объект, а его образец. Они позволяют изучать общие закономерности различных явлений, процессов и производить проверку научных гипотез и теорий.

Стендовые эксперименты проводят с целью исследования вполне определённых процессов, имеющих место в исследуемом объекте. Результаты стендовых экспериментов позволяют определить недоработки, а также выработать рекомендации по их устранению и выработать правила эксплуатации объекта.

Промышленный эксперимент проводится на реально действующем объекте, например, с целью оптимизации существующего процесса или в случае производства нового изделия и может базироваться на данных лабораторных и стендовых экспериментов.

Определения и термины. В процессе изучения курса применяются установившиеся технические термины и определения, имеющие

общепринятый смысл. Они встречаются при изложении всего курса лекций. Термины, имеющие узкий смысл, разными авторами могут применяться в различном смысле.

При проведении эксперимента оборудование можно разделить на три части: экспериментальный образец, испытательная аппаратура, измерительные приборы.

Экспериментальный образец – это объект, который исследуют.

Испытательная аппаратура – это всё необходимое оборудование для проведения эксперимента, включая измерительные приборы и объект исследования.

Измерительные приборы – это инструменты, позволяющие воспринимать, считывать, записывать, обрабатывать и хранить информацию, полученную в процессе эксперимента.

План эксперимента – это предварительно продуманный и осмысленный ход проведения эксперимента с указанием контролируемых параметров и необходимой аппаратуры для их контроля.

В конечном итоге любой эксперимент, независимо от его сложности, заканчивается обработкой полученных данных с представлением результатов и выводов по объекту исследования. Экспериментальные результаты могут представляться в виде графиков, математических формул, таблиц, статистических данных или словесных описаний. Графическое представление зависимости параметра, например, от трёх переменных требует построения трёх графиков или применения изометрических координат. Представление более сложной зависимости графически не представляется возможным, что ограничивается наглядным восприятием человека. Выражение результата в виде математических формул позволяет учитывать большее количество переменных. Однако, в редких случаях и лишь в немногих экспериментах исследуется более трёх независимых переменных.

Статистическая обработка полученных результатов позволяет выявить значимость или причинную зависимость того или иного события, или показать вероятность его появления в будущем. Статистические показатели применяются для описания ошибок приборов или измерительных систем.

3. Общая характеристика объекта исследования

Объект исследования – условно изолированное целое, содержащее совокупность протекающих в нем процессов и средств их реализации.

Средства реализации – совокупность систем управления и контроля и связи между ними и исследуемым объектом.

Представление объекта исследования, как условно изолированное целое, осуществляется путём абстрагирования и идеализации, так как в природе не существует полностью изолированных объектов. Это позволяет отсеять второстепенное и выделить главное.

Можно представить объект исследования в виде модели « черный

ящик», общий вид которой показан на рисунке 1.

При этом внутренняя структура и характер связей между входными и выходными величинами исследователю, как правило, неизвестны. О них можно судить по значениям на выходе при определенных значениях на входе. Входные величины *X* принято называть факторами, выходные *Y* откликами, параметрами, реакцией, целевой функцией. Под входными величинами понимаем все, что оказывает влияние на выходные величины.

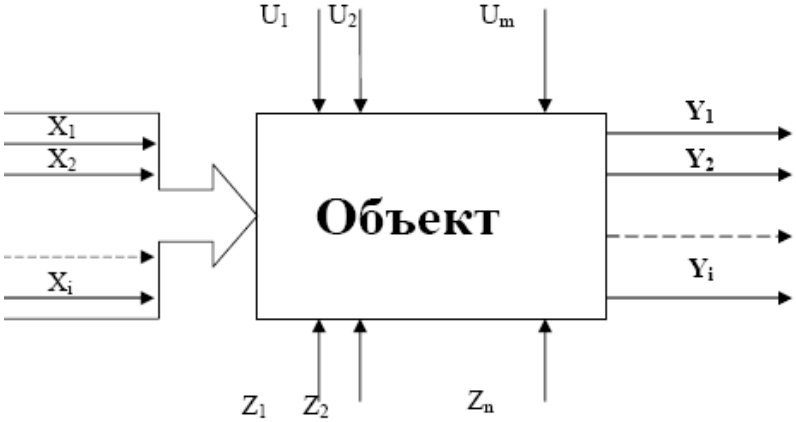

Рисунок 1 – Модель объекта исследования

Правильный выбор параметров и факторов в значительной степени предопределяет успех исследования. Стандартной методики не существует, и многое зависит от экспериментатора, его опыта и знания теории эксперимента, а также понимания объекта исследования.

Параметры и предъявляемые к ним требования. В качестве параметров в инженерном эксперименте, обычно, принимаются экономические величины – приведенные затраты, себестоимость, производительность труда и т.п.; или технические показатели – к.п.д., расход энергии, производительность машины, давление, напряжение и т.д.

Основные требования, предъявляемые к параметрам:

– должен оцениваться числом, т.е. быть количественным. Ранговые и условные показатели используются для оценки качественных показателей;

– допускается параметром проведение эксперимента при любом сочетании факторов и исключается вероятность взрыва или какой-либо другой форс-мажорной ситуации;

– конкретному сочетанию факторов должно соответствовать одно значение параметра с точностью до погрешности;

– параметр должен характеризовать объект всесторонне, т.е. быть универсальным;

– необходимо, чтобы параметр просто и легко вычислялся, т.е., имел простой экономический или физический смысл.

Желательно, чтобы параметр был единственным, так как оптимизировать объект можно только по одному параметру. Хотя исследовать объект и строить математические зависимости можно для различных

параметров. Если параметров несколько, то целесообразно выбирать один основной критерий, при том что остальные выступают в виде ограничений. В этом случае имеем многокритериальную задаче.

Факторы и предъявляемые к ним требования. Фактор – любая величина, влияющая на параметр и обладающая способностью изменяться независимо от других.

Факторы условно подразделяются на следующие 3 группы:

– контролируемые и управляемые, которые можно устанавливать и изменять при проведении эксперимента;

– контролируемые, но неуправляемые;

– неконтролируемые и неуправляемые.

К факторам предъявляются также и другие требования:

– *операциональность* – в какой именно точке и каким прибором будут измеряться;

– *совместимость* – при сочетании разных значений факторов эксперимент является безопасным;

– *управляемость* – можно менять значения по своему усмотрению;

– *точность* установления факторов должна быть выше точности определения параметра, по крайней мере, на порядок.

– *однозначность* – непосредственное воздействия фактора на объект исследования;

– *фактор* должен быть количественным.

Группа *U* включает в себя контролируемые факторы, которые не допускают целенаправленного изменения в ходе исследования. К ним можно отнести, например, условия окружающей среды, в которых проводятся эксперименты.

Группа *Z* образована контролируемыми и неконтролируемыми факторами. Они характеризуют возмущения, действующие на объект исследования, которые нельзя измерить количественно (например, неконтролируемые примеси в сырье, старение деталей и т.п.). Воздействие неконтролируемых факторов приводит к дрейфу характеристик во времени.

Основные свойства объекта исследования. Независимо от вида объекта исследования, они характеризуются вполне конкретными общими свойствами: сложностью, полнотой начальной информации, управляемостью и воспроизводимостью.

Сложность определяется состояниями объекта, которые проявляются и различаются при проведении исследований.

Априорная информация известная до начала исследования. Обычно в исследованиях нуждаются объекты, информация о которых ограничена.

Управляемость – это возможность изменять состояние объекта по усмотрению исследователя. В управляемых объектах можно изменять все входные величины. В частично управляемых системах можно ставить эксперимент, за неуправляемыми можно только наблюдать.

Воспроизводимость – способность объекта принимать одно и то же

состояние при одинаковых сочетаниях факторов. Чем выше воспроизводимость, чем проще выполнять эксперимент и тем достовернее его результаты.

При экспериментальном исследовании объекта, прежде всего, необходимо определить, в чем именно заключается задача. Процесс выделения «задачи», поддающейся математическому анализу, часто бывает продолжительным и требует владения многими навыками. Одновременно с постановкой задачи идет процесс определения основных или существенных особенностей явления. Этот процесс схематизации (идеализации) играет решающую роль, поскольку в реальном явлении участвует множество процессов, и оно чрезвычайно сложно. Некоторые процессы являются важными, другие – несущественными.

Очевидно, математической моделью объекта, изображенного на рисунке 1, может служить совокупность соотношений вида $Y=F(X_i, Z_i, U_i)$. Однако при построении модели такие соотношения практически получить невозможно. Поэтому вводятся ограничения, например, считают, что каждый из параметров может изменяться в определенных пределах, обусловленных верхней и нижней границами.

4. Моделирование и подобие

Моделирование – способ познания действительности с помощью моделей. *Модель* – материальный или мысленный объект, отображающий основные свойства объекта-оригинала. Моделирование позволяет с меньшими затратами получить более строгие результаты и избежать ряда погрешностей.

Мысленные модели бывают:

– наглядные;

– символические;

– математические.

Наглядные модели – мысленное представление, по которым могут создаваться иллюстрирующие их материальные объекты в виде наглядных аналогов, макетов.

Символические модели имеют вид условно-знаковых представлений: записи химических реакций, географические карты, состояния системы и пути переходов между ними, показанные в виде графов.

Математическая, в том числе *имитационная*, модели – наиболее важный вид моделей. Суть заключается в том, что основные процессы, происходящие в объекте исследования, записываются в виде математических уравнений и соотношений. Математическая модель с помощью алгоритмов и программ может быть представлена в виде имитационной модели. В последнее время широкое распространение получают визуальные имитационные модели, которые также как и имитационные модели позволяют проводить экспериментальные исследования. В зависимости от источника

информации, используемого при построении математической модели, различают аналитические (детерминированные) и статистические, или эмпирические модели.

Аналитические модели, как правило, представляются в виде систем уравнений различных типов, позволяющих очень точно описывать процессы, протекающие в системе. Статистические модели получают в результате статистической обработки эмпирической информации, собранной на исследуемом объекте. Статистические модели имеют, как правило, относительно простую структуру и часто представляются в виде полиномов. Область их применения ограничивается ближайшей окрестностью точек, в которых проводятся эксперименты.

Принято различать стационарные и динамические модели. Первые из них описывают не изменяющиеся во времени соотношения, характеризующие объект исследования. Вторые – переходные процессы, т.е. нестационарные состояния. И те, и другие модели могут относиться либо к статистическому, либо к физическому типу.

Компьютерное моделирование. Интенсивное развитие и широкое распространение персональных компьютеров открыло перед моделированием огромные перспективы для исследования процессов и явлений окружающего мира. Компьютерное моделирование – это в определенной степени, то же самое, описанное выше моделирование, но реализуемое с помощью компьютерной техники. Для компьютерного моделирования важно наличие определенного программного обеспечения. При этом программное обеспечение, средствами которого может осуществляться компьютерное моделирование, может быть как достаточно универсальным (например, обычные текстовые и графические процессоры), так и весьма специализированными, предназначенными лишь для определенного вида моделирования. Очень часто компьютеры используются для математического моделирования. Здесь их роль неоценима в выполнении численных операций, в то время как анализ задачи обычно является обязанностью самого исследователя.

Обычно в компьютерном моделировании различные виды моделирования дополняют друг друга. Так, если математическая формула очень сложна, что не дает явного представления об описываемых ею процессах, то на помощь приходят графические и имитационные модели. Компьютерная визуализация может быть намного дешевле реального создания натуральных моделей и позволяет многократно сократить затраты на разработку моделей по сравнению с некомпьютерными методами моделирования и проведением натурных испытаний. Оно делает возможным построение символьных компьютерных моделей объектов, для которых невозможно построить физические модели (например, моделей объектов, изучаемых в климатологии), а также является технологической основой систем автоматизированного проектирования.

С появлением мощных компьютеров распространилось графическое

моделирование на основе инженерных систем для создания чертежей, схем, графиков. Если система сложна, а требуется проследить за каждым ее элементом, то на помощь могут придти компьютерные имитационные модели. На компьютере можно воспроизвести последовательность временных событий, а потом обработать большой объем информации. В режиме вычислительного эксперимента исследователь имеет возможность, изменяя исходные данные, за относительно короткое время получить и сохранить в системе компьютерного моделирования большое число вариантов модели объекта. Однако следует четко понимать, что компьютер является хорошим инструментом для создания и исследования моделей, но он их не придумывает. Абстрактный анализ окружающего мира с целью воссоздания его в модели выполняет человек.

Компьютерное моделирование позволяет с помощью компьютерных устройств (3D-сканеров, 3D-принтеров и др.) строить символьные и физические модели объектов, изучаемых в науке (физике, химии и др.), создаваемых в технике (например, в авиастроении, робототехнике), медицине (например, в имплантологии, томографии), искусстве (например, в архитектуре, музыке) и других областях деятельности людей. Как правило, физические компьютерные модели изготавливаются на основе символьных моделей и являются прототипами моделируемых объектов (деталей и узлов машин, строительных конструкций и др.). Для изготовления прототипов применяются 3D-принтеры, реализующие технологии послойного формирования неплоских объектов. Символьные модели прототипов могут быть разработаны с помощью систем автоматизированного проектирования, 3D-сканеров или цифровых камер и фотограмметрического программного обеспечения.

Материальные модели символически делятся на натурные и физические.

Натурная модель это сам объект исследования. На натурной модели можно проводить стендовые и производственные эксперименты.

Физическая модель характеризуется тем, что, протекающие в ней физические процессы, аналогичны по природе процессам объекта-оригинала. Если физическая модель подобна оригиналу, то поставленный на ней эксперимент через масштабные коэффициенты может быть пересчитан на натуру. Полученная при этом информация будет соответствовать результатам натурного эксперимента. Исследование на физических моделях, например, позволяет ускорить или замедлить процессы, которые в реальных условиях протекают со скоростью, затрудняющей наблюдения.

При проведении эксперимента на натуре в большинстве случаев приходится отказываться от активного поиска оптимальных конструктивных решений, что сопряжено со значительными материальными и временными затратами (например, в самолетостроении, кораблестроении, строительстве плотин и т.д.).

Сознательное использование моделей позволяет с меньшими затратами

получить более строгие результаты и избежать ряда погрешностей. Важнейшим требованием, предъявляемым к моделям, является их подобие объектам-оригиналам.

Построение моделей. Построение физических или математических моделей проводят при следующей последовательности:

– первоначально из общего комплекса процессов, характеризующих объект, выделяют те, которые важны в данном исследовании и отражают основные свойства оригинала;

– затем создают общую описательную модель выделенных процессов. Выполняют словесное описание, классификацию и систематизацию, выполняют предварительные статистические оценки;

– на третьем этапе определяют параметры и устанавливают значимые факторы. С этой целью сложный объект разбивают на элементарные звенья. Для каждого звена определяют входные и выходные величины. Оценивают весомость каждого фактора, выделяют значимые факторы и отбрасывают второстепенные;

– на четвертом этапе создают математическую модель объекта. Для чего составляют уравнения, описывающие процессы в звеньях, устанавливают и записывают уравнения связей и соотношений, выбирают метод решения;

– на заключительном этапе решают уравнения, наиболее подходящим способом. Натурные и физические объекты можно создавать на основе математических моделей.

Сущность подобия. Два объекта подобны, если характеристики одного могут быть получены путем пересчета характеристик другого. Различают абсолютное и практическое подобие:

– первое требует тождества всех процессов в объектах в пространстве и во времени;

– второе требует подобия только тех процессов, которые существенны для данного исследования.

Теория подобия позволяет значительно уменьшать трудовые и материальные затраты, сокращать сроки проектирования и внедрения объектов в производство, позволяет выбирать оптимальные (рациональные) значения геометрических, силовых и других параметров машин.

Учение о подобии возникло более ста пятидесяти лет назад. В 1686 г. И. Ньютоном было высказано гениальное предвидение, а в 1848 г. Ж. Бертраном была сформулирована первая теорема подобия для механических систем о существовании инвариантов подобия. Исходя из математического выражения второго закона Ньютона, Бертран показал, что у подобных явлений есть комплекс, имеющий одно и то же значение в сходственных точках подобных явлений. Этот комплекс называется *инвариантом*, или *критерием* механического подобия.

Различают, в общем случае, три вида подобия:

– геометрическое;

– кинематическое;

– динамическое.

Геометрическое подобие наиболее простое, требующее, чтобы линейные размеры натуры и модели находились в постоянном соотношении, т.е. модель повторяет натуру в определенном масштабе.

Это требование можно записать в виде

$$\frac{L_n}{L_m} = k_L$$

где k_L - масштабный множитель.

Для площадей (S) и объемов (V)

$$\frac{S_n}{S_m} = k_L^2; \qquad \frac{V_n}{V_m} = k_L^3$$

Применительно к физическим явлениям элементарные представления геометрического подобия расширяются и распространяются на все величины, характеризующие данный процесс. Если учесть, что они могут изменяться как во времени, так и в пространстве, образуя поля, то возникает понятие о временном подобии и подобии полей, называемое *кинематическим подобием*. В механике жидкости оно сводится к подобию полей скоростей в потоках, движущихся в геометрически подобных каналах.

И наконец, имея в виду, что механическое движение происходит под действием сил, вводится понятие *динамического подобия*, которое требует, чтобы в соответствующих точках натуры и модели силы находились в постоянном соотношении.

Рассмотрим простейший пример. Известно, что движение любой механической системы подчиняется закону Ньютона

$$F = m\frac{du}{dt} \qquad (1)$$

Для двух подобных систем можно записать

$$F_1 = m_1\frac{du_1}{dt_1} \text{ и } F_2 = m_2\frac{du_2}{dt_2}$$

Разделив первое на второе получим:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1}{m_2}\frac{du_1}{du_2}\frac{dt_2}{dt_1} \text{ либо } \frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1}{m_2}\frac{u_1}{u_2}\frac{t_2}{t_1}$$

Имея в виду, что $= \rho V \cong \rho L^3$ имеем

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\rho_1 L_1^3 u_1 t_2}{\rho_2 L_2^3 u_2 t_1}$$

По смыслу L/t есть скорость, поэтому

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\rho_1 L_1^2 u_1^2}{\rho_2 L_2^2 u_2^2} \qquad (2)$$

либо

$$\frac{F_1}{\rho_1 L_1^2 u_1^2} = \frac{F_2}{\rho_2 L_2^2 u_2^2} \qquad (3)$$

Очевидно, что полученные комплексы безразмерны.

Таким образом, для двух подобных систем сохраняется числовое равенство безразмерных комплексов $\frac{F}{\rho L^2 u^2}$. Кратко это условие можно записать так: $\frac{F}{\rho L^2 u^2} = \text{idem}$. В честь Ньютона этот комплекс обозначается двумя первыми буквами его фамилии, т.е.

$$Ne = \frac{F}{\rho L^2 u^2} \qquad (4)$$

и называют числом подобия Ньютона, а выражение Ne = idem – основным законом динамического подобия механических систем (законом Ньютона).

Величины L и u, входящие в (4), называются определяющим линейным размером и определяющей скоростью. При проведении опытов они выбираются экспериментатором произвольно, исходя из удобства их измерения.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы. Во-первых, при проектировании и построении модели обязательно должно соблюдаться правило: модель должна быть геометрически подобна натуре. Во-вторых, для обеспечения динамического подобия не требуется, чтобы все величины, определяющие характер процесса в натурном объекте, были численно равны аналогичным величинам в модели. Достаточным является равенство безразмерных комплексов, составленных из этих величин для натуры и модели, называемых числами подобия.

В результате такого подхода появляются преимущества в практическом плане. Из математической статистики известно, что число опытов, которое

необходимо поставить для того, чтобы получить закономерность, достоверно описывающую какое-то физическое явление, определяется из соотношения:

$$N = \sigma^k \qquad (5)$$

где σ - число экспериментальных точек, которое необходимо снять для обеспечения представительности опыта (σ_{min} = 5); k – число величин, подлежащих варьированию в опытах.

Таким образом, минимальное число опытов

$$N = 5^k \qquad (6)$$

Если в опытах варьируется число Ньютона (например, за счет изменения скорости), то k = 1 и N = 5, но если изучать влияние каждой из величин (ρ, u, L), то k = 3 и число опытов N = 125. Следовательно, использование числа подобия в качестве своеобразной «обобщенной переменной» позволяет уменьшить число необходимых опытов в 25 раз, а если для надежности принять σ = 10, то в 100 раз.

И наконец, в-третьих, можно ответить на вопрос о том, какие величины следует измерять в опытах и как переносить результаты на натурный объект. Так как при проведении опытов необходимо обеспечить равенство чисел подобия натуры и модели, то ясно, что измерению подлежат лишь те величины, которые входят в эти числа.

По результатам измерений можно вычислить числа подобия модели и, исходя из равенства их числам подобия натуры, произвести пересчет.

Для практической реализации теории подобия необходимо подбирать числа подобия, характеризующие изучаемый процесс либо явление. Подбор необходимых чисел подобия обеспечивают основные *теоремы подобия*.

Теоремы подобия. *Первая теорема подобия*, которая носит имена Ньютона и Бертрана, звучит так:

– в природе существуют только те подобные явления, у которых критерии одинаковы, т.е., для явлений, подобных в том или ином смысле, существуют одинаковые критерии подобия.

После вывода началось практическое применение первой теоремы для обработки опытных данных в так называемых критериях подобия. О.Рейнольдс выразил закон движения жидкости по трубам одной общей формулой, названной впоследствии критерием Рейнольдса. Оказалось возможным объединить таким путем все численные данные опытов по гидравлическому сопротивлению, проведенными различными исследователями на воде, воздухе, паре, различных маслах и т.д. Фруд, изучая мореходные качества судов на моделях, представил результаты опытов в виде критериального уравнения, которые можно было распространить на суда, подобные по своей геометрической конфигурации испытанным моделям.

Выдающийся русский ученый Н.Е.Жуковский положил теорию подобия в основу критериальной обработки опытов над моделями самолетов, продуваемых в аэродинамической трубе, для того, чтобы результаты опытов можно было перевести на подобные моделям самолеты.

Если бы уравнение физического процесса можно было составить из инвариантов подобия, то это было бы общее уравнение, одинаковое для всех подобных явлений.

Вторая теорема подобия носит имя американского ученого Букингэма и устанавливает возможность такого преобразования физических уравнений:

– полное уравнение физического процесса, может быть представлено зависимостью между критериями подобия, т.е. зависимостью между безразмерными величинами, полученными определенным образом из уравнения процесса.

Первая и вторая теоремы были выведены из предположения, что подобие явлений уже установленный факт. Обе теоремы устанавливают свойства подобных явлений, но они не указывают способа для определения подобия этих явлений.

Третья теорема подобия, которая носит имена М.В. Кирпичева и А.А. Гухмана, позволяет определять признаки, по которым можно устанавливать подобие явлений:

– необходимыми и достаточными условиями для создания подобия является пропорциональность сходственных параметров, входящих в условия однозначности, и равенство критериев подобия сопоставляемых явлений.

К условиям однозначности относятся следующие, не зависящие от механизма самого явления:

– геометрические свойства системы, в которой протекает процесс;
– физические параметры среды и тел, образующих систему;
– начальное состояние системы (начальные условия);
– условия на границах системы (граничные или краевые условия);
– взаимодействие объекта и внешней среды.

Процессы в объекте исследования описываются в общем случае системой дифференциальных уравнений связи между факторами и параметром. Необходимым условием подобия двух объектов является одинаковый вид системы уравнений. Только в этом случае характер процессов в объектах может быть одинаковым и их можно отнести к одному классу. Подобие кроме сходства систем уравнений предъявляет к объектам требования однозначности.

Критерии подобия, π – теорема. *Критерии подобия* – безразмерные комбинации, которые составлены из физических величин, описывающих процессы в исследуемых объектах.

Принято обозначать критерии подобия буквой π. В соответствии с теорией подобия при экспериментах необходимо измерять все величины, входящие в критерий. Обрабатывать результаты следует в виде зависимостей между критериями подобия. Полученные таким образом зависимости будут

справедливы не только для данного эксперимента, но и для всех подобных объектов.

Вторую теорему подобия часто называют π – теоремой. Однако π-теорема является более информативной и имеет прикладной характер.

В соответствии с π-теоремой, если процесс в объекте характеризуется m фундаментальными физическими величинами, для выражения размерностей которых используется k основных единиц, то этот процесс можно описать m-k безразмерными комбинациями, составленными из этих величин.

Из теоремы следуют два важных практических вывода:

– *первый* – уравнения, описывающие физические процессы, могут быть выражены уравнениями связи между безразмерными комбинациями – критериями подобия. Последние уравнения будут справедливы для всех подобных объектов;

– *второй* - число независимых критериев равно m-k. Оно меньше числа размерных физических переменных на число основных единиц. Таким образом, число переменных, описывающих процесс, уменьшается. Это приводит к уменьшению объема экспериментальных исследований и делает результаты более наглядными.

5. Физические основы измерений. Погрешности измерений

Виды измерений. Измерение – определение опытным путём значения физической величины с помощью специальных технических средств. В результате измерения получают величину, которую сравнивают с однородной физической величиной, значение которой принято за единицу. Результат измерения выражается числом. Следовательно, для осуществления измерения необходимо выполнить следующие операции: выбрать единицу физической величины, сравнить с ней измеряемое значение и зафиксировать результат сравнения.

Измерения, в зависимости от способа получения результатов, бывают:

– прямые;

– косвенные;

– совокупные;

– совместные.

Прямыми называются измерения, при которых искомое значение физической величины (y) находят непосредственно в результате опытных данных. Прямые измерения можно выразить формулой $y = x$, где y – искомое значение измеряемой величины, x – значение, непосредственно получаемое из опытных данных. Примером прямого измерения является определение линейных размеров образца с помощью линейки.

Косвенными называются измерения, при которых искомое значение физической величины (y) определяется по известной зависимости между этой величиной и величинами x_1 , x_2 , x_3 ,…x_n , получаемых прямым измерением. Соответственно, значение измеряемой величины находят в результате расчёта

по формуле $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$. Примером косвенного измерения является определение потребляемой мощности *(P)* с помощью показаний амперметра и вольтметра по формуле $P = U \cdot I$, где U и I – показания, соответственно вольтметра и амперметра.

Совокупными называются одновременные измерения нескольких одноимённых величин, при которых искомое значение величин находят решением системы уравнений, составленных из результатов прямых измерений различных сочетаний этих величин. Пример совокупного измерения – определение сопротивлений резисторов, соединённых треугольником, путём измерений сопротивлений цепи между различными вершинами с последующим решением системы уравнений, содержащих искомые и измеренные величины.

Совместными называются одновременные измерения нескольких не одноимённых величин для нахождения зависимости между ними. Пример совместного измерения – установление температурной зависимости сопротивления резистора по формуле: $R_t = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t + \beta \cdot t^2)$. Измеряя сопротивления резистора при трёх различных температурах, составляют систему трёх уравнений, решением которых находят параметры R_0, α, и β.

Измерения выполняют с однократными и многократными наблюдениями, которое зависит от объекта исследования, свойств средств измерений и других обстоятельств. Наблюдение – это экспериментальная операция, выполняемая в процессе измерения, в результате которой получают одно из группы значений величины. В случае многократных наблюдений для получения результата требуется статистическая обработка результатов измерений.

Основными характеристиками измерений являются:

– принцип;
– метод;
– погрешность;
– точность;
– правильность;
– достоверность.

Принцип измерений – это физическое явление или совокупность явлений, на чём базируется измерение. Например, определение массы тела взвешиванием основано на использовании пропорциональности массы *(m)* и силы тяжести (F_T): $m = F_T / g$.

Метод измерений – представляет собой обязательный порядок действий, определяющий данный тип измерений независимо от принципа действия.

Погрешность измерений – отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины.

Точность измерений – характеристика измерений, отражающая близость их результатов к истинному значению измеряемой величины.

Правильность измерений – качество измерений, отражающее близость к нулю систематической погрешности.

Достоверность измерений – степень доверия к результатам измерений. Измерения, для которых известны вероятностные характеристики отклонения результатов от истинного значения, относятся к категории достоверных.

Наряду с основными характеристиками измерений применяются понятия *сходимости* и *воспроизводимости* измерений.

Сходимость измерений отражает близость друг к другу результатов измерений, выполненных в одинаковых условиях.

Воспроизводимость измерений отражает близость друг к другу результатов измерений, выполненных при различных условиях (в разное время, в разных местах и т. д.).

Погрешности измерений. Результат каждого измерения содержит погрешность, которая возникает в результате несовершенства средств и методов измерений, воздействия внешних факторов и многих других причин. Поэтому задачей эксперимента является не только определение неизвестной величины *(x)*, но и нахождение интервала $[x_{изм} - \Delta x, \ldots x_{изм} + \Delta x]$, в котором с заданной вероятностью α находится истинное значение ($A_{ист}$) измеряемой величины,

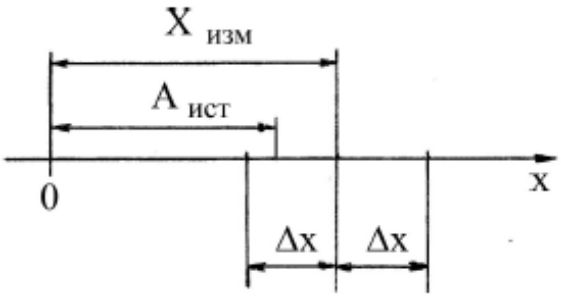

рисунок 2.

Рисунок 2 – Вероятностный интервал, в котором находится истинное значение измеряемой величины

Погрешность измерения всегда является суммарной, обусловленная рядом факторов, влияющих на результат измерений. При вычислении погрешности необходимо определится с составляющими суммарной погрешности, и выявить закономерности и причины появления этих составляющих с целью нахождения способов уменьшения влияния погрешностей на результаты измерений.

В зависимости от закономерности проявления различают *случайные, систематические* и *грубые погрешности (промахи).*

Случайной называется составляющая погрешности, изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины,

величина и знак которой не могут быть точно предсказаны. Поэтому случайную погрешность нельзя скорректировать. Случайную погрешность невозможно устранить, однако величину случайной погрешности можно оценить и найти способ её уменьшения. Оценить случайную погрешность удаётся путём математической обработки данных повторных измерений на основе теории вероятности.

Систематической называется составляющая погрешности, остающаяся постоянной или закономерным образом изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величины. Причинами систематической погрешности являются, главным образом, несовершенство метода, средства или объекта измерения. Систематические погрешности можно разделить на следующие группы.

Ошибки, природа которых известна и величина может быть достаточно точно определена. Такие ошибки могут быть устранены введением поправок. Величина поправок, которые имеет смысл вводить, устанавливается в зависимости от величин других ошибок, сопровождающих измерение. Существует правило, согласно которому поправка, величина которой не превышает 0,5 % от средней квадратичной погрешности результата измерений, не вводится.

Ошибки известного происхождения, но неизвестной величины. К ним относятся погрешности измерительных приборов. Максимальные погрешности измерительных линеек, микрометров и некоторых других приборов иногда наносят на самих приборах, как показано на рисунке 3, или указывают в прилагаемом к прибору паспорте. Цена деления шкалы измерительных приборов должна быть согласована с возможностями самого прибора. Поэтому нецелесообразно пытаться на глаз оценивать доли деления, если они не отмечены на шкале

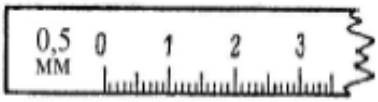

Рисунок 3 – Пример приведения максимальной погрешности, нанесённой на линейку

Систематические ошибки такого типа не могут быть исключены, но их наибольшее значение может быть установлено и учтено при определении суммарной погрешности.

К третьей группе систематических погрешностей относятся *ошибки*, о существовании которых экспериментатор не подозревает, хотя их величина может быть значительной. Чаще всего они проявляются при сложных измерениях, когда величина, которая считается определённой с высокой точностью, содержит значительную погрешность. Например, при определении плотности, как отношении массы тела к его объёму, измерение объёма может содержать существенную погрешность, если в образце имеются полости. Одним из наиболее надёжных способов убедиться в отсутствии таких погрешностей является проведение измерений другим методом и в других

условиях.

Систематическая *погрешность* может быть обусловлена свойствами объекта измерений. Например, такая погрешность имеет место при измерении диаметра цилиндра, сечение которого имеет форму, отличную от круга. Измерение диаметра цилиндра в нескольких направлениях не даёт уверенности в том, что его сечение является действительно круговым, но позволяет получить значение, более пригодное для характеристики размеров цилиндра.

В отсутствие систематических ошибок случайные ошибки служат причиной разброса результатов измерений относительно истинного значения, что показано на рисунке 4а. Наличие систематической погрешности приводит к тому, что результаты измерений будут разбросаны относительно не истинного, а смещённого значения, как показано на рисунке 4б. Таким образом, если случайные погрешности определяют достоверность результата, то систематические погрешности устойчиво его искажают. Поэтому отсутствие систематических погрешностей или то, что они пренебрежимо малы, необходимо доказать.

а б

Рисунок 4 – Разброс результатов измерений от истинного значения при отсутствии (а) и при наличии систематической погрешности (б)

Можно выделить следующие основные способы исключения или учёта систематических погрешностей:

– устранение источников погрешности до начала эксперимента (профилактика погрешностей);

– исключение погрешностей в процессе измерения;

– внесение поправок в результат измерения.

Промахами, к которым относятся также грубые погрешности, называются погрешности измерений, существенно превышающие по своему значению оправдываемые объективными условиями измерений систематические или случайные погрешности. Основными причинами грубой погрешности являются неправильное или небрежное считывание показаний, дефекты средств измерений, незнание или пренебрежение источниками погрешности, случайное, сильное внешнее воздействие (помеха). Наличие грубой погрешности выявляется при обработке результатов измерений. При этом они отбрасываются из рассмотрения путём отбрасывания результатов наблюдений, содержащих грубые погрешности.

По форме числового представления погрешности делятся на абсолютные

и относительные.

Абсолютная погрешность – это разность между результатом измерения и его истинным значением:

$$x = x - a,$$

где x – результат измерения, a – истинное значение.

Однако абсолютная погрешность не отражает качества измерений: например, абсолютная погрешность 1 мм при измерении размеров помещения свидетельствует о высоком качестве измерения, та же погрешность совершенно неприемлема при измерении диаметра тонкой проволоки.

Критерием качества измерения является отношение абсолютной погрешности к окончательному результату измерения:

$$\delta = (\Delta x / a) \cdot 100\%.$$

Это отношение безразмерно. Величину δ называют *относительной погрешностью* и используют как в абсолютном, так и в процентном выражении. *Относительная погрешность* – это погрешность, приходящаяся на единицу измеренной величины, обычно выраженной в процентах. Высокой точности измерения соответствует малое значение относительной погрешности.

6. Случайные величины и их характеристики. Доверительный интервал и доверительная вероятность. Оценка погрешности при косвенных измерениях

Случайные погрешности и их распределение. Для того, чтобы выявить случайную погрешность измерений, необходимо повторить измерение несколько раз. Если каждое измерение дает заметные от других результаты, мы имеем дело с ситуацией, когда случайная погрешность играет существенную роль.

Наиболее вероятным значением измеряемой величины из серии измерений является ее среднее значение. Рассеивание измеряемой величины относительно ее среднего значения определяется величиной средней квадратической погрешности отдельного измерения.

Пусть в измерительном эксперименте в результате независимых и равноточных измерений постоянной величины a получены значения x_1 x_2,…, x_n.

Абсолютные погрешности $\Delta x_i = x_i - a$, рассматривают как случайные величины. При этом независимость измерений понимается как взаимная независимость случайных величин Δx_i, а равноточность – как подчинение величин Δx_i одному и тому же закону распределения (к тому же измерения сделаны одним и тем же методом и с одинаковой степенью тщательности).

В качестве оценки неизвестной величины a по данным измерений обычно

$\bar{x}$

берут среднее арифметическое результатов измерений:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Дисперсия отдельных измерений

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2}{n-1}$$

чаще всего неизвестна, и для ее оценки используется величина

$$S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}.$$

Среднюю квадратическую (стандартную) погрешность σ находят по формуле

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2},$$

для ее оценки вычисляется величина

$$S_n = \sqrt{S_n^2} .$$

В действительности мы всегда вычисляем не σ, а S_n, которые тем ближе к σ, чем больше n :

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} S_n .$$

Обычно принимается, что погрешности подчиняются нормальному закону
распределения случайных величин. При этом предполагается:

– погрешности измерений могут принимать непрерывный ряд значений;

– при большом числе наблюдений погрешности равных значений, но разных знаков встречаются одинаково часто;

– частота появления погрешностей уменьшается с увеличением величин погрешностей. Иначе говоря, большие ошибки наблюдаются реже, чем малые.

Эти предположения приводят к закону распределения погрешностей, описываемому формулой Гаусса:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}} .$$

Форма кривых Гаусса зависит от величин σ. Чем больше σ, тем больше рассеивание случайной погрешности. На рисунке 5 представлены кривые

Гаусса для трех значений σ. С помощью этих кривых можно установить, насколько часто должны появляться ошибки той или иной величины.

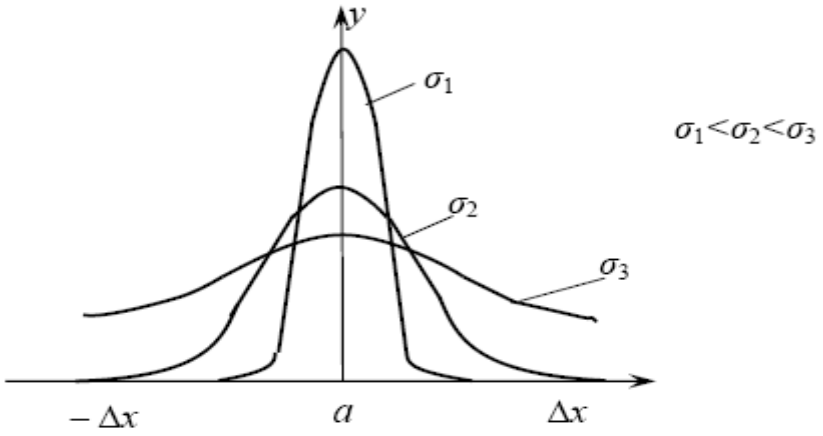

Рисунок 5 – Кривые нормального распределения

Чем больше разброс экспериментальных значений, тем больше величина σ, тем более пологой является кривая распределения и тем ниже её максимум, но при этом площадь под кривой (согласно условию нормировки) остается без изменения.

Как показывают расчёты, вероятность появления результатов измерений, отклоняющихся от своего истинного значения не более, чем на $\pm\sigma$, равна P = 0,6827. Вероятность того, что результаты не выходят за пределы $\pm 2\sigma$, составляет 0,9545, а за пределы $\pm 3\sigma$ – 0,9973.

Отсюда свойство нормального закона распределения случайных величин − рассеивание случайной величины в основном (с вероятностью P=0,997) укладывается на участке, $3\sigma \pm a$ где a – математическое ожидание. Следовательно, зная a и σ, можно приблизительно указать интервал ее практически возможных значений (размах). Такой способ оценки диапазона значений случайной величины называется *правилом "трех сигм"*.

Частота отклонений на $\pm 3\sigma$ и более очень мала и составляет меньше 0,27% от числа всех наблюдений. Такие отклонения называют *промахами*. Отсюда вытекает правило выявления промахов. Результаты, выходящие за пределы интервала $\pm 3\sigma$, считаются промахами.

Нормальный закон справедлив, когда случайная величина x подвержена влиянию множества факторов, но каждый из них не оказывает преобладающего действия. Если в процессе измерения присутствуют только случайные погрешности (а систематические малы), то в качестве теоретической основы статистической обработки результатов при достаточно большом числе наблюдений (n > 15) можно принять закон нормального распределения случайных величин.

Средняя квадратическая погрешность среднего арифметического равна средней квадратической погрешности отдельного результата, деленная на корень квадратный из числа измерений:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}},$$

где S_n – средняя квадратичная погрешность отдельного измерения.

Это рассуждение относится лишь к измерениям, при которых точность ре-

зультата полностью определяется случайной ошибкой. В этих условиях, выбрав n достаточно большим, можно существенно уменьшить ошибку результата.

При практической работе очень важно строго разграничивать применение средней квадратичной ошибки отдельного измерения S_n и средней квадратичной среднего арифметического S_x.

В тех случаях, когда требуется характеризовать точность применяемого способа измерений, следует характеризовать его ошибкой S_n.

S_x применяется всегда, когда нужно оценить погрешность того числа, которое получили в результате всех произведенных измерений.

Если описываем метод, которым производились измерения, то должны указать именно эту последнюю ошибку. Зная ее, можно выбрать нужное число измерений, чтобы, пользуясь вышеприведенной формулой, получить желаемую случайную погрешность окончательного результата измерений.

При выборе нужного числа измерений предполагаем, что систематическая ошибка метода достаточно мала.

Доверительный интервал и доверительная вероятность. Вероятность того, что истинное значение измеряемой величины лежит внутри некоторого интервала, называется *доверительной вероятностью,* или *коэффициентом надежности,* а сам интервал - *доверительным интервалом.* Каждой доверительной вероятности соответствует свой доверительный интервал. В частности, доверительной вероятности 0,68 соответствует доверительный интервал от (a - S_n) до (a + S_n). Однако это утверждение справедливо только при достаточно большом числе измерений (более 10), да и вероятность 0,68 не представляется достаточно надежной – примерно в каждой из трех серий измерений a может оказаться за пределами доверительного интервала. Для получения большей уверенности в том, что значение измеряемой величины лежат внутри доверительного интервала, обычно задаются доверительной вероятностью (0,95–0,99). Доверительный интервал для заданной доверительной вероятности α с учетом влияния числа измерений n можно найти, умножив стандартное отклонение среднего арифметического на так называемый *коэффициент Стьюдента* $t_{\alpha n}$. Коэффициенты Стьюдента для ряда значений α и n приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Коэффициенты Стьюдента $t_{\alpha n}$

Число измерений, n	Доверительная вероятность, α			
	0,67	0.90	0,95	0,99
2	2,0	6,3	12,7	63,7
4	1,3	2,4	3,2	5,8
5	1,2	2,1	2,8	4,6

6	1,2	2,0	2,6	4,0
10	1,1	1,8	2,3	3,3
100	1,0	1,7	2,0	2,6

Окончательно, для измеряемой величины *a* при заданной доверительной вероятности *α* и числе измерений *n* получается условие

$$\overline{a} - t_{\alpha n} S_{\overline{a}} < a < \overline{a} + t_{\alpha n} S_{\overline{a}} .$$

Величину $\Delta a_{сл} = t_{\alpha n} S_{\overline{a}}$ мы будем называть *случайной погрешностью* величины *a*.

Из таблицы 1 видно: коэффициент Стьюдента тем больше, чем больше доверительная вероятность. Таким образом, случайная погрешность $\Delta a_{сл}=t_{\alpha,n}\cdot S_a$ не является самостоятельной (независимой величиной) – её значение определяется выбором доверительной вероятности.

Значение вероятности *α* обычно выбирают в пределах от 0,900 до 0,999 в зависимости от степени ответственности за результаты измерений. С увеличением доверительной вероятности границы доверительного интервала неизбежно расширяются (возрастает неопределённость результата измерений).

С другой стороны, случайная погрешность уменьшается с ростом числа измерений *n* по закону обратной пропорциональности $\sqrt{n}$. Число измерений имеет смысл увеличивать для уменьшения случайной погрешности (если таковая обнаруживается), пока случайная погрешность не станет меньше систематической.

Результат измерения *a* представляется с указанием характеристик погрешности $\Delta a_{сл}$ и *α*, например, в виде

$$a = a_{ср} \pm \Delta a_{сл};\ \alpha = 0{,}95.$$

Надёжность *α* = 0,95 считается достаточной для представления результатов большинства научных исследований.

Оценка погрешности при косвенных измерениях. Оценка погрешностей при косвенных измерениях основывается на следующих предположениях:

– относительные погрешности величин, полученных прямыми измерениями и участвующих в расчете искомой величины, должны быть малы и не должны превышать, желательно, 10%;

– для погрешностей всех величин, участвующих в расчете, принята одна и та же доверительная вероятность. Эту же доверительную вероятность будет иметь и погрешность искомой величины;

– наиболее вероятное значение искомой величины получается, если для ее расчета используются наиболее вероятные значения исходных величин, т.е. их средние арифметические значения.

Погрешность в случае одной исходной величины. Нахождение погрешности величины при ее косвенном измерении, в одних случаях, удобно начинать с абсолютной погрешности, в других – с относительной.

Абсолютная погрешность. Пусть искомая величина y, измеряемая косвенно зависит только от одной величины a, полученной прямым измерением. Границы интервала, в котором с заданной вероятностью лежит величина a, определяются средним арифметическим значением $a_{ср}$ и полной абсолютной погрешностью Δa величины a. Это значит, что значение a может лежать внутри интервала с границами $a_{ср} \pm \Delta a$.

При косвенном измерении для величины $y(a)$ такие границы будут определяться ее наиболее вероятным значением $y_{ср} = y(a_{ср})$ и погрешностью Δy, т.е. значения y лежат внутри интервала с границами $y_{ср} \pm \Delta y$. Верхней границей для y (при монотонном возрастании) будет значение, соответствующее верхней границе a, т.е. значение $y_{ср} + \Delta y = y(a_{ср} + \Delta a)$. Таким образом, абсолютная погрешность Δy величины y имеет вид приращения функции $y(a)$, вызванного приращением ее аргумента a на величину Δa его абсолютной погрешности. Следовательно, можно воспользоваться правилами дифференциального исчисления, согласно которому при малых значениях Δa
приращение Δy можно приближенно выразить в виде

$$\Delta y = \frac{dy}{da}\Delta a \,. \qquad (1)$$

Здесь dy/da - производная по a функции $y(a)$ при $a = a_{ср}$.

Таким образом, абсолютная погрешность окончательного результата может быть вычислена с помощью формулы (1), причем доверительная вероятность соответствует той доверительной вероятности, которую имеет Δa.

Относительная погрешность. Чтобы найти относительную погрешность значения y, поделим (1) на y и примем во внимание, что $1/y \cdot dy/da$ представляет собой производную по a натурального логарифма y. В результате получится

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{y}\frac{dy}{da}\Delta a = \frac{d(\ln y)}{da}\Delta a \,. \qquad (2)$$

Если в это выражение подставить $a = a_{ср}$ и $y = y_{ср}$, то его значение и будет относительной погрешностью величины y.

Погрешность в случае нескольких исходных величин. В общем случае в формулу, по которой вычисляется величина y, измеряемая косвенно, может входить несколько исходных величин a, b, c, ... , для которых прямыми измерениями получены средние значения a, b , c, ... и полные абсолютные погрешности Δa , Δb, Δc, ... Нахождение погрешности Δy величины y в этом случае основывается на следующих предположениях:

– наличие погрешности одной из исходных величин не влечет за собой обязательного появления погрешностей других исходных величин, т.е. погрешности различных величин, найденных прямыми измерениями, представляют собой независимые случайные числа;

– при нахождении общей погрешности искомой величины складываться должны квадраты ее частных погрешностей так, как это делается для нахождения полной абсолютной погрешности прямого измерения, обусловленной независимыми между собой случайной и приборной погрешностями.

Абсолютная погрешность. Согласно первому предположению, для нахождения любой частной погрешности величины y такое же, как и в том случае, когда y зависит только от одной исходной величины. Но при дифференцировании в формуле (1) следует брать частную производную y по данной исходной величине, так как предположение об отсутствии погрешностей у других исходных величин соответствует постоянству этих величин.

Таким образом, частные погрешности Δy_a, Δy_b, Δy_c, ... величины $y(a,b,c,...)$ вычисляются по формулам

$$(\Delta y)_a = \frac{\partial y}{\partial a}\Delta a, \quad (\Delta y)_b = \frac{\partial y}{\partial b}\Delta b, \quad (\Delta y)_c = \frac{\partial y}{\partial c}\Delta c, \ldots \qquad (3)$$

Здесь в выражения (3), полученные в результате дифференцирования, следует подставить средние арифметические значения $a_{ср}$, $b_{ср}$, $c_{ср}$, ... исходных величин a , b , c, ...

Абсолютная погрешность величины y, обусловленная всеми частными погрешностями, как это следует из второго предположения, равна

$$\Delta y = \sqrt{(\Delta y)_a^2 + (\Delta y)_b^2 + (\Delta y)_c^2 + \ldots} \qquad (4)$$

или

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial a}\Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial c}\Delta c\right)^2 + \ldots}\ . \qquad (5)$$

Так как выражения (3) для частных погрешностей могут быть довольно громоздкими, то легче сначала по формулам (3) найти их численные значения, а затем воспользоваться формулой (4). Формулу же (5) вообще при этом писать не требуется.

Относительная погрешность. Вычисление относительной погрешности $\Delta y/y$ величины y, измеряемой косвенно, в случае ее зависимости от несколько исходных величин a, b, c, ... аналогично вычислению абсолютной погрешности с тем лишь отличием, что для нахождения частных

относительных погрешностей берутся частные производные от натурального логарифма $y(a,b,c,...)$:

$$\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_a = \frac{\partial(\ln y)}{\partial a}\Delta a, \qquad \left(\frac{\Delta y}{y}\right)_b = \frac{\partial(\ln y)}{\partial b}\Delta b,$$
$$\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_c = \frac{\partial(\ln y)}{\partial c}\Delta c, \ldots \tag{6}$$

После дифференцирования сюда следует подставить на место величин a, b, c, ... их средние арифметические значения $a_{ср}$, $b_{ср}$, $c_{ср}$, ...

Относительная погрешность, обусловленная всеми частными погрешностями (6), вычисляется по формуле

$$\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_a^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)_b^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)_c^2 + \ldots} \tag{7}$$

Погрешности табличных значений. Если в формулу для вычисления величины, измеряемой косвенно, входят величины, значения которых берутся из математических или физических таблиц, то их вклады в погрешность искомой величины учитываются на общих основаниях на ряду с погрешностями величин, полученных прямыми измерениями.

Если для физических величин, приводимых в справочниках, указываются погрешности, то под ними, как правило, подразумеваются стандартные отклонения, имеющие доверительную вероятность 0,67. Для того, чтобы доверительная вероятность составляла 0,95, значения этих погрешностей следует умножать на два.

Если для величин, приводимых в физических или математических справочниках, погрешность не указана, то подразумевается, что погрешность не превышает половины единицы последнего разряда числа. Например, в значении синуса 0,479 последняя цифра 9 стоит в разряде тысячных. Поэтому погрешность данного значения не превышает 0,0005 с доверительной вероятностью 1.

В случаях, когда для расчетов используются калькуляторы или компьютеры, погрешности математических величин (числа π, значений тригонометрических функций и т.п.) учитывать не следует – они пренебрежимо малы по сравнению с погрешностями измеряемых величин.

7. Погрешности средств измерений. Класс точности средств измерений. Суммарная погрешность измерений

Основными метрологическими характеристиками средств измерений являются: погрешность; градуировочная характеристика; чувствительность; порог чувствительности; цена деления шкалы; диапазон измерений; вариация показаний; вариация выходного сигнала; динамическая характеристика.

Существует более широкий перечень нормируемых метрологических характеристик средств измерений, основанный на применении вероятностно-статистических характеристик, а именно: математического ожидания; среднеквадратического отклонения; предела допускаемого значения среднеквадратического отклонения. Нормирование перечисленных характеристик, с одной стороны, позволяет получить наиболее вероятные значения результатов измерений, близкие к действительным значениям, а с другой – требует значительных материальных затрат на их получение и подтверждение, в связи с чем в настоящее время они получили ограниченное распространение.

Номенклатура нормируемых метрологических характеристик должна быть достаточна для оценки инструментальной погрешности измерения.

С целью характеристики погрешностей средств измерений используется класс точности, который определяется в зависимости от следующих показателей: основных и дополнительных погрешностей, вариации и порога чувствительности. Класс точности определяет пределы допускаемых основных абсолютных, относительных и приведенных погрешностей.

Приборная погрешность. Приборная погрешность, имеющая систематический характер, является паспортной характеристикой прибора. Она определяется для всей совокупности приборов данного вида путем сравнения показаний приборов исследуемой партии с показаниями эталонного прибора (путем градуировки). За значение приборной погрешности принимается наибольшее из полученных значений.

При работе с отдельным прибором конкретная величина приборной погрешности неизвестна, но заключена в известных пределах, которые указываются в паспортных данных прибора.

Для стрелочных электроизмерительных приборов погрешность определяется классом точности. Стрелочные электроизмерительные приборы по величине допустимой погрешности делятся на *классы точности*, которые обозначаются на шкалах приборов цифрами 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0 (цифры могут быть помещены в кружок или ромбик). Класс точности показывает величину допустимой погрешности в процентах от значения измеряемой величины, соответствующего отклонению стрелки до последнего деления шкалы. Например, если у прибора последнее деление шкалы 300 В, а класс его точности 0,5, то допустимая погрешность равна 0,5% от 300 В, или 300x0,5/100 В = 1,5 В. Такая же допустимая погрешность 1,5 В будет и для любого другого значения, измеряемого по этой шкале.

Класс точности большинства приборов равен максимально возможной относительной погрешности прибора, выраженной в процентах от величины верхнего предела шкалы. Значение класса точности такого прибора маркируется рядом с его шкалой в виде числа (не обведенного в кружок или звездочку!).

Обозначим класс точности ε_{max}. Исходя из определения,

$$\varepsilon_{max} = \frac{\Delta x_i^{приб}}{x_{max}} \cdot 100\%,$$

где $\Delta x_i^{приб}$ - максимальная приборная погрешность i-го измерения, x_{max} - величина шкалы измерительного прибора.

Отсюда следует, что

$$\Delta x_i^{приб} = \frac{\varepsilon_{max} \cdot x_{max}}{100},$$

а максимальная относительная приборная погрешность i-го измерения вычисляется по формуле

$$\varepsilon_i^{приб} = \frac{\varepsilon_{max} \cdot x_{max}}{x_i^{приб}} \quad (\%).$$

Так, например, у вольтметра класса точности 0,2, предназначенного для измерения напряжения до V_{max} = 300 В, максимальная относительная приборная погрешность у верхнего предела измерений равна 0,2%. А при измерении напряжения V = 50 В максимальная относительная погрешность возрастает до величины 1,2%. Следовательно, при измерении вблизи нуля (в первой половине шкалы) значительно уменьшается точность измерения. Измерения в начальной части шкалы нежелательны.

Приборные погрешности, определяемые по приведенным формулам, представляют максимально возможную ошибку прибора. Ошибка конкретного измерения может быть меньше. Если класс точности не указан, то за приборную погрешность можно принять половину цены наименьшего деления на шкале. Обычно эта величина находится в согласии с классом точности.

Погрешность цифровых электроизмерительных приборов обычно указывается в паспорте прибора. Цифровые электроизмерительные и прочие приборы имеют, как правило, допустимую погрешность, составляющую 1-2 единицы последнего индицируемого разряда.

Если сведений о допустимой приборной погрешности не имеется, то в качестве нее можно принять половину наименьшего деления шкалы прибора или половину наименьшего значения измеряемой величины, которое еще можно найти при помощи этого прибора. Например, при измерении длины линейкой с миллиметровыми делениями за допустимую погрешность принимается 0,5 мм.

Допустимые погрешности, приведенные здесь, относятся к точности изготовления самого прибора. При измерении же прибором в ряде случаев

погрешность может быть заметно больше. Например, из-за трудности отсчета на глаз десятых долей миллиметра погрешность при измерении металлической линейкой может составлять 0,2-0,3 мм, хотя сама линейка изготовлена с точностью до 0,1 мм. При измерении секундомером небольших промежутков времени (менее 5 минут) погрешность определяется не точностью хода секундомера, а запаздыванием при включении и выключении, и составляет обычно 0,2-0,4 с. Подобные погрешности рассматриваются не как приборные, а как случайные.

Полная погрешность и сложение погрешностей. В теории вероятностей показывается, что в тех случаях, когда погрешности вызываются несколькими независимыми друг от друга случайными причинами, то складываются не сами погрешности, а их квадраты. Поэтому полная абсолютная погрешность Δa измеряемой величины через ее случайную $\Delta a_{сл}$ и приборную $\Delta a_{пр}$ погрешности выражается формулой

$$\Delta a = \sqrt{\Delta a_{сл}^2 + \Delta a_{пр}^2} \ .$$

Здесь предполагается, что погрешностям $\Delta a_{сл}$ и $\Delta a_{пр}$ соответствуют приблизительно одинаковые доверительные вероятности. Такую же доверительную вероятность будет иметь и Δa. Из формулы следует, что в случае, когда одна из погрешностей $\Delta a_{сл}$ или $\Delta a_{пр}$ даже в небольшое число раз меньше другой, то ее вклад в полную погрешность оказывается незначительным. В частности, если одна из погрешностей составляет менее 1/5 другой, то ее квадрат будет уже менее 1/25 квадрата другой, а вклад в полную погрешность - менее 1/50. Ясно, что в таком случае меньшей погрешностью можно пренебречь.

В некоторых случаях при многократных измерениях получается одно и то же значение измеряемой величины. Это означает, что случайная погрешность не превышает наименьшего значения, которое может быть измерено данным прибором. В таких случаях полная погрешность целиком определяется допустимой приборной погрешностью.

8. Математическая обработка результатов опыта. Графический способ представления результатов эксперимента. Интерполяция и экстраполяция. Анализ результатов эксперимента

Запись приближенных чисел. Поскольку значения физических величин, полученные в результате измерений, имеют погрешности, они выражаются не точными, а приближенными числами. **Незначащими цифрами** приближенного числа называются нули, стоящие слева в десятичных дробях до первой отличной от нуля цифры, и нули, поставленные в конце числа, вместо цифр, отброшенных при округлении. Остальные цифры называются **значащими.** Например, в числе 0,0123 значащие цифры 1,2,3; в числе 508000, полученном округлением числа 507893, три нуля - незначащие (незначащие

нули подчеркнуты). В конце числа могут быть и значащие нули. Так, например, во втором числе выражения 5 км = 5000 м нули не заменяют отброшенные при округлении цифры, а выражают точное соотношение между единицами длины.

Для того, чтобы числа не содержали незначащих нулей, их принято записывать в показательной (экспоненциальной) форме с запятой после первой значащей цифры. В этом случае числа предыдущих примеров имеют вид: $0{,}00123 = 1{,}23 \cdot 10^{-2}$; $508000 = 5{,}08 \cdot 10^{5}$. Значащие нули при такой записи не отбрасываются: 5 км = $5{,}000 \cdot 10^{3}$ м.

В числах, выражающих значения, для которых указана погрешность, последняя цифра (*сомнительная*) стоит в том же разряде, что и первая значащая цифра погрешности. Цифры, находящиеся в следующих разрядах как самого числа, так и его погрешности, должны быть отброшены как *неверные* по правилам округления, причем погрешность округляют всегда в сторону увеличения. Таким образом, сама погрешность содержит только одну значащую цифру. Однако, если первая цифра погрешности единица, то в погрешности оставляют две цифры, а в самом числе сохраняют лишний разряд. Наконец, если данное число не является окончательным результатом, а будет участвовать в каких-либо вычислениях, то в нем, как и в его погрешности сохраняют лишний разряд.

Запись окончательного результата измерения. В записи окончательного результата измерения должны содержаться:

– название измеряемой величины и ее буквенное обозначение;

– наиболее вероятное значение измеряемой величины, т.е. значение, получающееся в результате отсчета по прибору, если измерение проводилось однократно, или среднее арифметическое этих отсчетов, если измерение проводилось несколько раз;

– полная абсолютная погрешность измеряемой величины;

– единица измерения, в которой выражена измеряемая величина и ее полная абсолютная погрешность;

– доверительная вероятность результата;

– относительная погрешность, выраженная в виде десятичной дроби или в процентах.

При записи результата измерения следует соблюдать приведенные выше правила записи приближенных чисел.

Построение графиков по экспериментальным данным. Результаты экспериментов обычно представляют как в виде таблиц, так и в графической форме. Графики используют для различных целей.

Во-первых, графики строят для определения некоторых величин – угол наклона линейной зависимости или отрезок, отсекаемый на координатной оси.

Во-вторых, графики используют для повышения наглядности представления результатов. Графики позволяют также наглядно сравнивать экспериментальные результаты с теоретической кривой.

В-третьих, с помощью графиков устанавливают эмпирическое

соотношение между двумя величинами.

При построении графиков принято придерживаться следующих основных правил.

По горизонтальной оси откладывают независимую переменную, то есть величину, значения которой задаёт сам экспериментатор, а по вертикальной оси – величину, которую определяют в ходе эксперимента. Таким образом, по горизонтальной оси откладывают причину, а по вертикальной оси – следствие.

При построении графиков следует разумно выбирать масштаб, чтобы экспериментальные точки располагались на всей площади листа. На рисунке 6а масштаб выбран неверно, и экспериментальные точки расположились в правом нижнем углу рисунка.

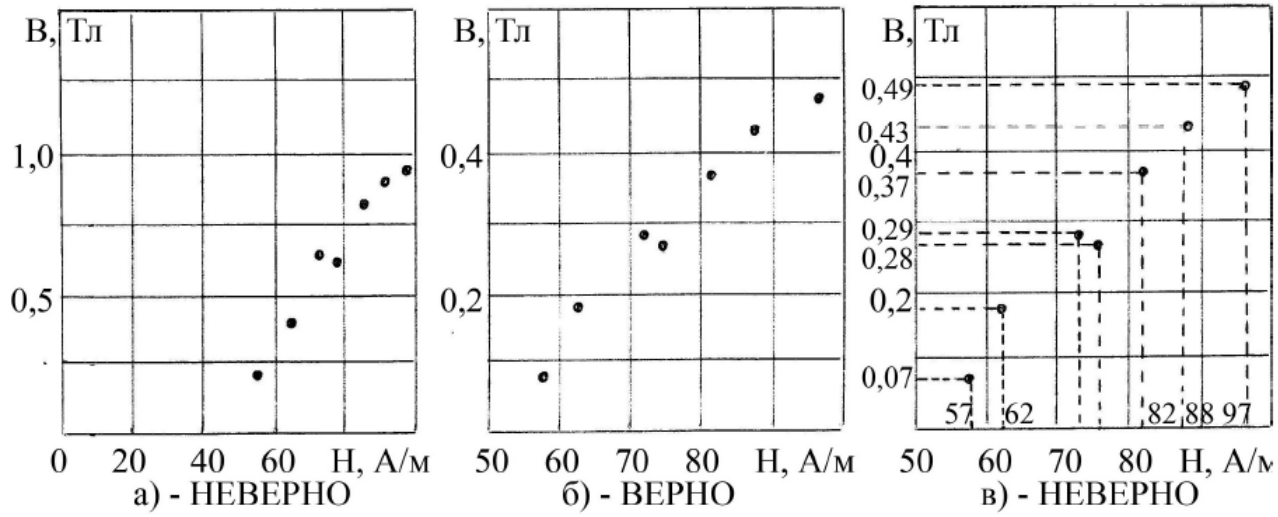

Рисунок 6 – Построение графиков с указанием масштаба

Чтобы этого избежать, следует выбрать более крупный масштаб по оси ординат и сместить нуль на оси абсцисс, как это сделано на рисунке 6б. Масштаб должен быть удобным. Клеточка графика может соответствовать, например, 0,1; 0,2; 0,5; 1; 2; 5; 10 единицам измеряемой величины, но не должна соответствовать, например, 3; 2,4; 7; 9 единицам величины. Оси градуируют равномерно.

Точки, наносимые на графики, следует изображать чётко и ясно. Никаких линий и отметок, поясняющих построение точек наносить нельзя, поскольку это загромождает рисунок и мешает анализу результата. Недопустимо наносить на оси значения координат точек, как это показано на рисунке 6в.

Точки, полученные в разных условиях (например, при нагревании и охлаждении) следует обозначать разными символами. Это помогает обнаружить новые явления.

На рисунке 7а показано неверное, а на рисунке 7б – верное обозначение точек, соответствующих результатам, полученным в разных условиях. На левом графике виден только разброс точек, а правый график показывает, что

разброс точек невелик, но точки, полученные при нагревании и охлаждении, лежат на разных кривых.

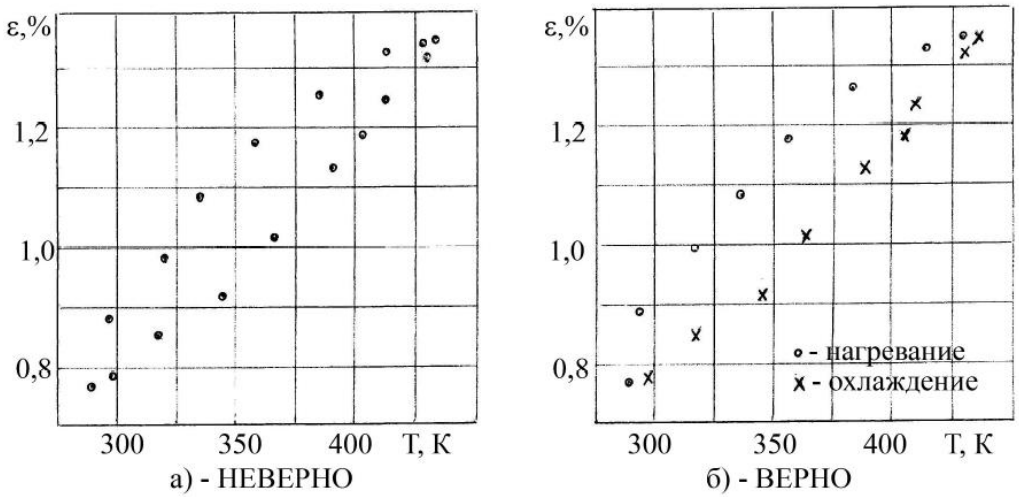

Рисунок 7 – Обозначение точек, соответствующих результатам, полученных в разных условиях

Вид символов, изображающих экспериментальные результаты, зависит от того, известна ли их случайная погрешность. Если погрешность неизвестна, результат изображают точками. Если погрешность известна, результат следует изображать не точками, а крестами. Полуразмер креста по горизонтали должен быть равен погрешности по оси абсцисс, а вертикальный полуразмер – погрешности по оси ординат. Если одна из ошибок вследствие её малости не может быть изображена графически, результаты изображают линиями, вытянутыми в том направлении, где погрешность больше.

Таким образом, экспериментальные данные наносят на график с указанием ошибки, после чего проводят наиболее правдоподобную кривую, учитывая:

– положение экспериментальных точек;

– соображения о том, как должна вести себя кривая при значениях аргумента, близком к нулю и при больших значениях аргумента;

– проходит ли кривая через начало координат;

– пересекает ли координатные оси, касается ли их и другое.

Наиболее просто и надёжно по экспериментальным точкам можно провести прямую линию ($y = a \cdot x + b$) . Поэтому если зависимость оказывается нелинейной, в ряде случаев вводят новую переменную так, чтобы исследуемая зависимость оказалась линейной. Преобразование эмпирической формул $y=f(x,y,z)$ к виду $y = a \cdot x + b$ путём замены переменной называется выравниванием.

Построение линии по экспериментальным данным может быть выполнено несколькими способами.

Первый способ заключается в том, что экспериментальные точки соединяют прямыми линиями и затем проводят плавную кривую так, чтобы

выполнялось равенство $\sum_{i=1}^{n} S'_i = \sum_{i=1}^{n} S''_i$, где S'_i и S''_i – площади между плавной

кривой и ломаной линией, расположенные соответственно ниже и выше этой линии, рисунок 8.

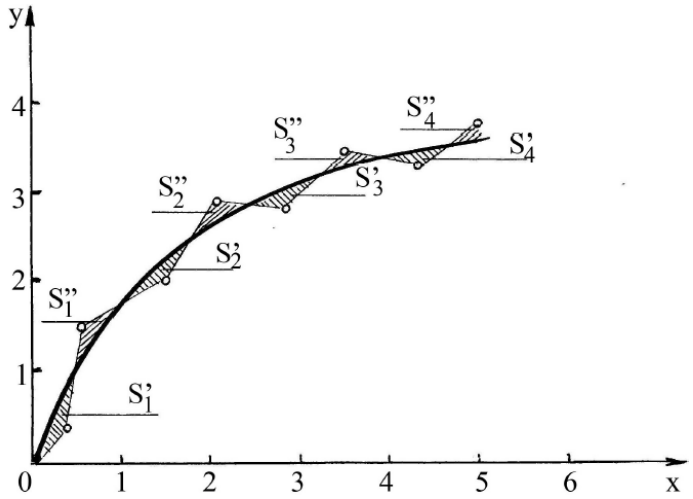

Рисунок 8 – Правило построения графика первым способом

Недостаток метода связан с необходимостью удаления ломаной линии после построения графика.

При использовании второго способа около каждой экспериментальной точки строят прямоугольник со сторонами $2\Delta x$ и $2\Delta y$. Затем проводят плавную кривую так, чтобы она проходила через все построенные прямоугольники, рисунок 9.

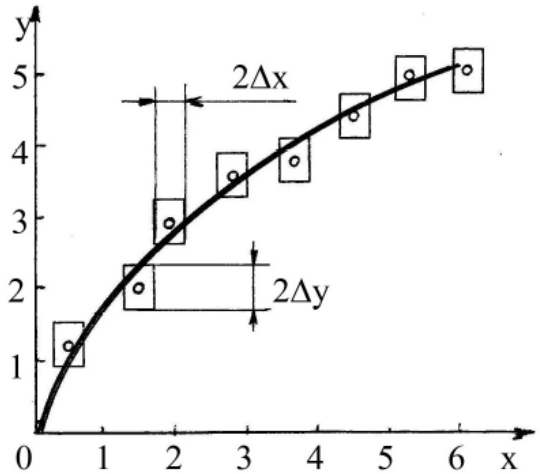

Рисунок 9 – Правило построения графика вторым способом

Если одна из погрешностей настолько мала, что её трудно изобразить графически (например, погрешность аргумента), на графике погрешность изображают в виде отрезка, рисунок 10.

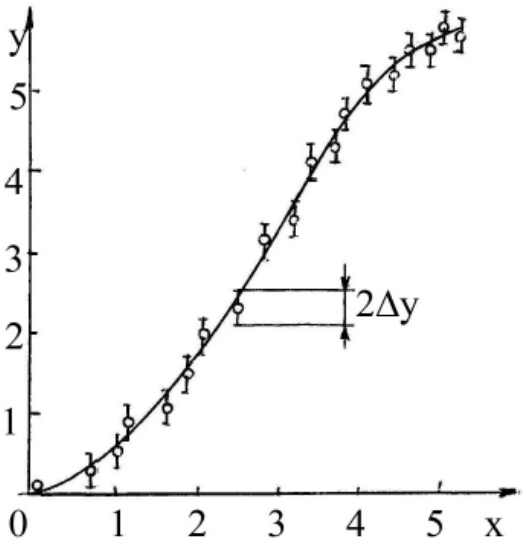

Рисунок 10 – Правило построения графика вторым способом

Более строгим и математически обоснованным является третий способ построения графиков, основанный на использовании метода наименьших квадратов. В этом случае результирующая плавная кривая $y = f(x)$ проводится так, чтобы выполнялось условие:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \min$$

где δ_i – отклонения отдельных ординат кривой $y = f(x)$ от точек, соответствующих конкретным значениям x_i, рисунок 11.

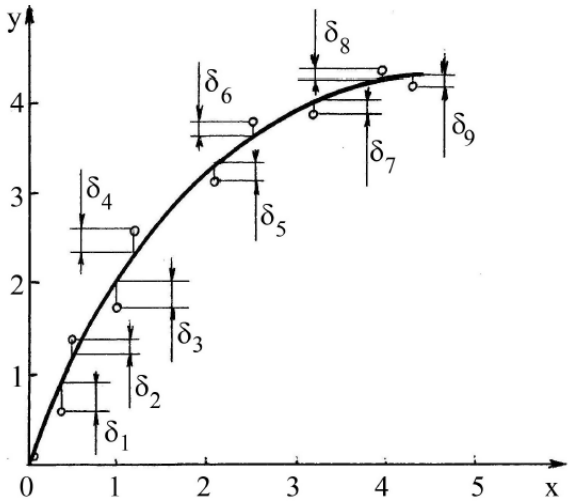

Рисунок 11 – Правило построения графика с использованием метода наименьших квадратов

Экспериментальная кривая должна по возможности сглаживать «шум». Сглаживание будет тем более точным и надёжным, чем больше экспериментальных точек использовано для построения графика и определения коэффициентов исследуемой зависимости.

Интерполяция и экстраполяция. Так как значения аргумента X и функции Y в проведённом эксперименте дискретны (исключая случаи, когда они записаны автоматически на диаграммную ленту), возникает необходимость на основе имеющихся данных получить сведения об объекте измерения в промежуточных точках (интерполяция) или даже вне изученного диапазона (экстраполяция).

Рассмотрим простейший метод *линейной интерполяции.*

Пусть имеется ряд значений величин X и Y, полученный в результате совместных измерений, и требуется получить значение Y_i, соответствующее заданному промежуточному значению X_i, находящемуся между известными значениями X_1 и X_2. Полагаем, что в узком интервале $\Delta X = X_2 - X_1$ изменение функции $Y(X)$ от Y_1 до Y_2 происходит *линейно.* Находим среднюю скорость изменения функции $\Delta Y/\Delta X$ на этом интервале и затем искомое значение

$$Y_i = Y_1 \pm(\Delta Y/\Delta X) \cdot \Delta X_i ,$$

где ΔX_i – промежуток от X_1 до X_i или от X_i до X_2 соответственно; знак плюс соответствует возрастанию, а знак минус – убыванию функции в рассматриваемом интервале ΔX изменения аргумента.

Линейная экстраполяция проводится подобным образом.

Когда экспериментальные данные представлены на диаграмме и через экспериментальные точки проведена наилучшая линия, процедура интерполяции упрощается и результат получается более точным. Однако в случае с резко выраженной нелинейностью графическое интерполирование не даёт желаемой точности. Для повышения точности применяют интерполяционные формулы.

При экстраполяции закономерность поведения объекта распространяется на неизученную область, иногда недоступную для наблюдений. Так, измерение максимальной силы тока I_m (тока короткого замыкания) через свинцово-кислотный аккумулятор может вывести его из строя, тогда как экстраполируя нагрузочную характеристику до пересечения с осью I, легко получаем значение I_m, рисунок 12.

Значения, получаемые при экстраполяции, менее надёжны, чем при интерполяции, ввиду того что гипотеза о сохранении закономерности за пределами изученной области не всегда оправдывается. Тем не менее, процедура экстраполяции широко используется при прогнозировании явлений в физике, экономике и других науках.

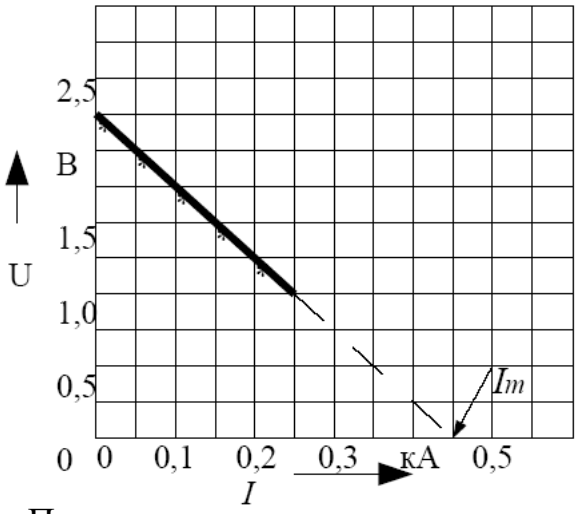

Рисунок 12 – Пример проведения экстраполяции на графике

В случае, когда экспериментальные данные обработаны методом наименьших квадратов и получено уравнение, наилучшим образом описывающее результаты эксперимента, любые недостающие данные внутри или вне исследованного диапазона могут быть получены непосредственно из уравнения.

Анализ результатов эксперимента и формулирование выводов. После того как эксперимент закончен, искомые величины и границы доверительных интервалов получены, начинается важнейшая часть работы – анализ результатов, их интерпретация в рамках принятой математической модели наблюдаемого явления. Любой эксперимент ставится не только с целью определить значения искомых величин с точностью, достаточной для решения поставленной измерительной задачи, но и в большинстве случаев для того, чтобы сопоставить опытные данные со значениями, полученными из предшествующих экспериментов, или со справочными данными. Поскольку даже при многократных измерениях число их ограничено, экспериментальный результат есть величина случайная, и вопрос о совпадении результатов (или их несовпадении), об изменении (или постоянстве) наблюдаемых величин в зависимости от изменения влияющих параметров решается с учётом погрешностей. В учебной лаборатории случаи несовпадения экспериментального результата с теоретическим или табличным происходят не из-за того, что измерительные приборы недостаточно точны, а из-за неполного соответствия принятой модели реальному физическому явлению.

Анализ результатов сводится в основном к выяснению следующих вопросов.

– совпадает ли полученное значение с известным из предшествующих экспериментов или с предсказанным теорией?;

– изменяется ли наблюдаемая величина или остаётся постоянной; уменьшается она или увеличивается при изменении влияющих факторов; зависимость между измеряемыми величинами линейная или нелинейная,

изменение монотонное или немонотонное (с экстремумом)?;

– удовлетворяет ли ход кривой на диаграмме предполагаемому до опыта закону (линейному, логарифмическому, экспоненциальному или какому другому)?

Статистическая обработка результатов измерений, нахождение границ доверительных интервалов, составление таблиц, построение диаграмм – это неотъемлемая часть любого исследования, открывающая возможность анализа результатов, т. е. сравнения полученных значений:

– с табличными, или с теоретически рассчитанными, или с измеренными другим методом;

– распознавания закономерностей в соотношениях измеренных величин, формулировки их взаимосвязи;

– анализа диаграмм с целью проверки соответствия графиков изучаемому закону;

– выявления недостатков установки или методики измерений, которыми можно объяснить отклонения измеренных величин от предсказанных теорией.

9. Виды, методы и средства измерений. Метрологические характеристики средств измерений

Измерением называется опытное определение численного значения физической величины в принятых единицах с помощью специальных технических средств измерений.

Результаты измерений - это численное значение физической величины в принятых единицах, полученное путем измерения.

Средствами измерения называют технические средства, используемые при измерениях и имеющие нормированные метрологические характеристики. Основными видами средств измерений являются: меры, измерительные приборы, измерительные преобразователи, измерительные устройства, информационные измерительные системы. Нормированные метрологические характеристики у технических средств необходимы для того, чтобы определить погрешность измерения.

Мера – это средство измерения, предназначенное для воспроизведения физической величины определенного размера, выраженного в принятых единицах. Например, гиря – мера массы, измерительный резистор – мера электрического сопротивления, линейка – мера длины и т.д.

Измерительный прибор – средство измерения, предназначенное для выработки сигнала измерительной информации в форме, доступной для непосредственного восприятия. *По характеру показаний* различают показывающие измерительные приборы и регистрирующие.

Показывающие измерительные приборы – приборы, допускающие только отсчитывание показаний.

Регистрирующие измерительные приборы – приборы, в которых предусмотрена возможность регистрации показаний. Регистрирующий

прибор, в котором запись показаний осуществляется в форме диаграммы, называют самопищущим, а прибор, в котором предусмотрено печатание показаний в цифровой форме, называют печатающим.

По форме представления показаний различают аналоговые измерительные приборы и цифровые.

Аналоговые измерительные приборы – приборы, представляющие информацию в виде непрерывной функции измеряемой величины.

Цифровые измерительные приборы - приборы, представляющие информацию в виде отдельных дискретных сигналов в цифровой форме.

Измерительный преобразователь – это средство измерения, предназначенное для выработки сигнала измерительной информации в форме, удобной для обработки, хранения, дальнейшего преобразования или передачи, но недоступной для непосредственного восприятия. В зависимости от назначения и выполняемых функций измерительные преобразователи подразделяют на первичные, промежуточные, передающие, масштабные и т.д.

Измерительное устройство – это средство измерения, включающее измерительные приборы и измерительные преобразователи.

Информационные измерительные системы – это средство измерения с многоканальными измерениями и контролем, а иногда и с обработкой информации по заданному алгоритму.

Средства измерения **в зависимости от их назначения** делят на три категории: рабочие, образцовые, эталоны.

Рабочими называют средства измерения, применяемые для повседневных измерений. Их подразделяют на лабораторные и технические. Лабораторные средства измерения обладают повышенной точностью.

Образцовые средства измерений предназначены для поверки и градуировки рабочих мер, измерительных приборов и преобразователей.

Эталоны предназначены для воспроизводства и хранения единиц измерения с наивысшей точностью, достижимой на данном уровне развития науки и техники.

Измерения **в зависимости от предъявляемых требований к точности результатов** подразделяют на лабораторные и технические.

Лабораторные измерения отличаются повышенной точностью и производятся при выполнении НИР, а также при поверках измерительных приборов.

Технические измерения обладают относительно невысокой точностью и выполняются для контроля работы различных устройств.

Любое измерение базируется на каких-либо физических явлениях.

Принципом измерения называется совокупность физических явлений, на которых основаны измерения.

Методом измерений называют совокупность приемов использования средств измерения и принципов измерений. Различают два основных метода измерений: метод непосредственной оценки и метод сравнения с мерой.

Метод непосредственной оценки заключается в определении искомой

величины по отсчетному устройству измерительного прибора.

Метод сравнения с мерой состоит в том, что измеряемую величину сопоставляют со значением, воспроизводимым соответствующей мерой. Сопоставление может быть непосредственным или через другие величины, однозначно связанные с измеряемой величиной и величиной, воспроизводимой мерой. При непосредственном сопоставлении метод сравнения еще называют методом противопоставления, а при сопоставлении через другие величины – методом опосредственного сравнения или методом замещения.

По способу проведения измерения метод сравнения подразделяют на нулевой метод, разностный или дифференциальный метод и метод совпадения.

Нулевой метод заключается в том, что эффект воздействия измеряемой величины полностью уравновешивается эффектом воздействия известной величины. Примером нулевого метода измерения является измерение массы с помощью рычажных весов.

В **разностном или дифференциальном методе** полного уравновешивания не происходит, и разность между сравниваемыми величинами оценивается измерительным прибором. Значение измеряемой величины определяется в этом случае не только значением, воспроизводимым мерой, но и показаниями прибора.

Метод совпадения заключается в том, что уровень какого-либо сигнала, однозначно связанного со значением искомой величины, сопоставляется с уровнем такого же сигнала, но определяемого соответствующей мерой. По совпадению уровней этих сигналов судят о значении измеряемой величины.

Метрологическими характеристиками средств измерений называют характеристики, которые дают возможность судить об их пригодности для измерения в определенном диапазоне с определенной точностью.

Важнейшими метрологическими характеристиками являются: *диапазон измерений, погрешности средств измерения, порог чувствительности измерительного прибора или преобразователя, вариация измерительного прибора или преобразователя.*

Внутри *диапазона измерения* связь между сигналами на входе X и выходе У средств измерения определяется зависимостью У=f(X), которая называется статической характеристикой средств измерения. У показывающих приборов статическая характеристика зафиксирована шкалой, поэтому эту зависимость называют еще уравнением шкалы прибора.

Наряду с *погрешностями средств измерения*, часто оперируют приведенными погрешностями, которые представляют собой отношение абсолютной погрешности к диапазону измерения (диапазону преобразования).

Для всех средств измерения устанавливаются пределы допускаемых основной и дополнительной погрешностей.

Пределом допускаемой основной погрешности называют наибольшую (без учета знака) основную погрешность средства измерения, при которой оно

еще будет признано годным и допущено к эксплуатации.

Пределом допускаемой дополнительной погрешности называют наибольшую дополнительную погрешность средства измерения, при которой оно еще будет признано годным и допущено к эксплуатации

Порогом чувствительности называют наименьшее изменение значения измеряемой величины, способное вызвать малейшее доступное для регистрации изменение показания измерительного прибора или выходного сигнала преобразователя.

Вариацией измерительного прибора или преобразователя называют наибольшую разность в показаниях прибора или наибольшую разность между выходными сигналами преобразователя, соответствующими одному и тому же значению входного сигнала, но полученными в одном случае при плавном увеличении, а в другом – при плавном уменьшении значения измеряемой величины.

Рассмотренные метрологические характеристики средств измерений позволяют оценить их пригодность для измерений величин в статических условиях, т.е. когда величины не меняются во времени.

В исследовательской практике очень часто возникает необходимость в измерении величин, меняющихся во времени, т.е. в динамических условиях. Результаты таких измерений искажаются дополнительной погрешностью, обусловленной динамичностью условий. Эта составляющая погрешности называется динамической погрешностью и представляет собой разность между погрешностью средств измерений в динамических условиях и соответствующей погрешностью в статических условиях. Причиной появления динамической погрешности является инертность средств измерения. Вследствие этой инертности происходит запаздывание в показаниях при регистрации мгновенных значений измеряемой величины.

Основные способы измерения температуры. Температура – это параметр теплового состояния, представляющий собой физическую величину, которая характеризует степень нагретости тела. Степень нагретости тела обусловлена его внутренней энергией.

Необходимо отметить, что температура - понятие статическое и применимо только для макроскопических тел, представляющих собой совокупность достаточно большого числа молекул.

Непосредственно измерить температуру невозможно. Температура измеряется косвенным путем с использованием температурной зависимости какого-либо физического свойства термометрического тела. В качестве термометрического тела используются тела, у которых удобные для непосредственного измерения физические свойства однозначно зависят от температуры. Такими физическими свойствами являются, в частности, объемное расширение ртути, изменение давления газов и т.д.

При измерении температуры какого-либо тела термометрическое тело должно быть с ним в тепловом контакте. В этом случае с течением времени наступает тепловое равновесие между ними, т.е. температура этих тел

выравнивается. Такой способ измерения температуры, при котором измеряемая температура тела определяется по совпадающей с ней температуре термометрического тела, называется контактным способом измерения температуры. Возможные расхождения между этими значениями температуры составляют методическую погрешность контактного способа измерения температуры.

Вообще в природе нет идеально подходящих рабочих тел, термометрические свойства которых удовлетворяли бы предъявляемым требованиям во всем диапазоне измерения температуры. Поэтому температуру, измеряемую термометром, шкала которого построена на допущении линейной температурной зависимости термометрических свойств какого-либо тела, называют условной температурой, а шкалу – условной температурной шкалой.

Примером условной температурной шкалы является известная стоградусная шкала Цельсия. В ней принят линейный закон температурного расширения ртути, а в качестве основных точек шкалы используются точка таяния льда (0^oC) и точка кипения воды (100^oC) при нормальном давлении.

Термодинамическая температурная шкала, предложенная Кельвином, основана на втором законе термодинамике и не зависит от термометрических свойств тела. Построение шкалы опирается на следующие положения термодинамики: если в прямом обратимом цикле Карно к рабочему телу подводится теплота Q_1 с высокой температурой T_1 и отводится теплота Q_2 к источнику с низкой температурой T_2, то отношение T_1/T_2 равно отношению Q_1/Q_2 независимо от природы рабочего тела. Эта зависимость позволяет построить шкалу, опираясь только на одну постоянную или реперную точку с температурой T_0. Пусть температура источников теплоты $T_2=T_0$, а $T_1=T$, причем T неизвестна. Если между этими источниками осуществить прямой обратимый цикл Карно и измерить количество подводимой Q_1 и отводимой теплоты Q_2, то неизвестную температуру можно определить по формуле $T=T_0 \cdot Q_1/Q_2$.

Таким же способом можно произвести градуирование температурной шкалы.

В качестве единственной реперной точки для Международной термодинамической температурной шкалы принята тройная точка воды и ей присвоено значение температуры 273,16 К. Выбор этой точки объясняется тем, что она может быть воспроизведена с высокой точностью – погрешность не превысит 0,0001 К, что значительно меньше погрешности воспроизведения точек таяния льда и кипения воды.

Кельвином называется единица измерения термодинамической температурной шкалы, определяемая как 1/273,16 часть температурного интервала между тройной точкой воды и абсолютным нулем. Такой выбор единицы обеспечивает равенство единиц в термодинамической и стоградусной шкалах: температурный интервал в 1 К равен интервалу в 1^oC.

Температура по термодинамической и практической температурным

шкалам может быть выражена в Кельвинах (К), когда она отсчитывается от абсолютного нуля, и в градусах Цельсия (°С), когда она отсчитывается от точки таяния льда. Связь между этими температурами выражается формулой T=t+273,15, где T – температура в К; t – температура в °С.

Точка таяния льда на 0,01 К ниже тройной точки воды и поэтому 0°С соответствует 273,15 К.

По принципу действия, в зависимости термометрического тела, контактные термометры делятся на следующие виды.

Термометры, основанные на тепловом расширении вещества. Используются с термометрическим телом в жидком состоянии (например, ртутные жидко-стеклянные термометры) и в твердом состоянии – биметаллические, действие которых основано на различии коэффициентов линейного теплового расширения двух материалов (например, инвар – латунь, инвар – сталь).

Термометры, основанные на измерении давления вещества. Это манометрические термометры, которые представляют собой замкнутую герметичную термосистему, состоящую из термобаллона, манометрической пружины и соединяющего их капилляра. Действие термометра основано на температурной зависимости давления газа (например, азота) или жидкости, заполняющих герметичную термосистему, или на температурной зависимости упругости термосистемы. Изменение температуры термобаллона вызывает перемещение пружины, соответствующее измеряемой температуре. Манометрические термометры выпускаются как технические приборы для измерения температуры от -150°С до +600°С в зависимости от природы термометрического вещества. Манометрические термометры применяются для измерения температуры газообразных и жидких сред.

Термометры, основанные на температурной зависимости термо-ЭДС. К ним относятся термоэлектрические термометры или термопары.

Термометры, основанные на температурной зависимости электрического сопротивления вещества. К ним относятся электрические термометры сопротивления.

Кроме контактных термометров на практике широко применяются также пирометры излучения**.**

Измерение температуры тел с помощью пирометров излучения. Пирометрами или просто пирометрами называют приборы для измерения температуры тел по тепловому излучению. Измерение температуры тел пирометрами основано на использовании законов и свойств теплового излучения.

Особенностью методов пирометрии является то, что информация об измеряемой температуре передается неконтактным способом. Ввиду этого удается избежать искажений температурного поля объекта измерений, так как не требуется непосредственного соприкосновения термоприемника с телом.

По характеру получения информации различают пирометры для локального измерения температуры участка поверхности тела и пирометры

для анализа температурных полей (тепловизоры).

По принципу действия пирометры для локального измерения температуры подразделяются на яркостные, цветовые и радиационные.

Тепловизоры. Измерение низких температур (ниже 400-500°С) обычными яркостными и цветовыми пирометрами в видимой части спектра осуществить практически невозможно. В соответствии с законом Планка интенсивность излучения при низких температурах и длинах волн, меньших 0,7 мкм, становится настолько малой, что измерить ее чрезвычайно трудно. В инфракрасной же области спектра (λ=0,76…1000 мкм) интенсивность излучения значительно выше.

Современные средства позволяют трансформировать невидимое инфракрасное излучение тел в видимое и создать приборы нового типа – тепловизоры, которые обеспечивают визуализацию теплового поля нагретых объектов. Для современных тепловизоров характерны большое разнообразие схем и конструкций, широкий диапазон областей их применения. Диапазон температур, измеряемых современными тепловизорами, составляет от -20°С до 900 °С.

Список литературы

1. Бояршинова А.К., Фишер А.С. Теория инженерного эксперимента. Текст лекций. – Челябинск: ЮУрГУ, 2006.

2. Яворский В.А. Планирование научного эксперимента и обработка экспериментальных данных. Методические указания к лабораторным работам. – М: МФТУ, 2011.

3. Ларионов А.Н., Чернышёв В.В., Ларионова Н.Н. Погрешности измерения физических величин. Учебное пособие для вузов. – Воронеж: ВГУ, 2009.

4. Горлач В.В., Егоров В.Л., Иванов Н.А. Обработка, представление, интерпретация результатов измерений. Учебное пособие. – Омск: СибАДИ, 2006.

5. Пустовалов Г.Е. Погрешности измерений Методическая разработка по общему физическому практикуму. – М: МГУ, 2001.

6. Боев В.Д., Сыпченко Р.П. Компьютерное моделирование. – ИНТУИТ. РУ, 2010.

7. Булавин Л.А., Выгорницкий Н.В., Лебовка Н.И. Компьютерное моделирование физических систем. – Долгопрудный: Изд. Дом “Интеллект”, 2011.

8. Майер Р.В. Компьютерное моделирование: моделирование как метод научного познания. Компьютерные модели и их виды // Научный электронный архив. URL: http://econf.rae.ru/article/6722 .

Интернет ресурсы:

9. https://www.twirpx.com/file/101735/

10. https://search.rsl.ru/ru/record/01004051495

11. https://litmy.ru/knigi/tehnicheskie_nauki/291375-teoriya-inzhenernogo-eksperimenta.html

Содержание

Введение	3
1.Понятие об опытах и испытаниях в научных исследованиях и в промышленном производстве	4
2.Основные задачи исследовательской работы. Общие понятия об инженерном эксперименте	7
3.Общая характеристика обьекта	10
4.Моделирование и подобие	13
5.Физические основы измерений.Погрешности измерений	21
6.Случайные величины и их характеристики. Доверительный интервал и доверительная вероятность . Оценка погрешности при косвенных измерениях	26
7.Погрешности средств измерений .Класс точности средств измерений Суммарная погрешность измерений	34
8.Математическая обработка результатов опыта.Графический способ представления результатов эксперимента .Интерполяция и экстраполяция .Анализ результатов эксперимента	36
9.Виды,методы и средства измерений . Метрологические характеристики и средств измерений	44
Список литературы	51

Сводный план на 2020 г., поз. 120

Приходько Николай Георгиевич

ТЕОРИЯ И ТЕХНИКА ИНЖЕНЕРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Конспект лекций для магистрантов специальности
6М073100 – Безопасность жизнедеятельности и защита окружающей среды

Редактор: Жанабаева Е.Б.
Специалист по стандартизации: Ануарбек Ж.А.

Подписано в печать ___.___.___. Формат 60x84 1/16
Тираж 100 экз. Бумага типографская № 1
Объем 3,2 уч.-изд. л. Заказ ___ Цена 1600 тг.

Копировально-множительное бюро
некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013, Алматы, ул. Байтурсынова, 126/1