Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра «Электроника и робототехника»

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Конспект лекций для магистрантов специальности
6М071600 – Приборостроение

Алматы 2017

СОСТАВИТЕЛИ: Б.С. Байкенов, З.В. Абдулина. Нелинейные системы управления. Конспект лекций для магистрантов специальности 6М071600 – Приборостроение. – Алматы: АУЭС, 2017.– 92 с.

Конспект лекций предназначен для самостоятельного изучения курса «Нелинейные системы управления». В конспекте рассмотрены основные статитические характеристики нелинейных элементов, временные и частотные характеристики нелинейных систем, различные методы и критерии устойчивости замкнутых нелинейных систем управления.

Моделирование автоматизации технологического процесса производства реализовано в программных средах VisSim, MatLab и пакете прикладных программ Simulink.

Конспект лекций предназначен для студентов магистратуры специальности 6М071600 – Приборостроение.

Ил.-70, табл.-1, библиогр.-8

Рецензент: доцент Гали К.О.

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2017 г.

©НАО «Алматинский университет энергетики и связи», 2017 г

Введение

Конспект лекций составлен в целях закрепления лекционного материала и применения теории управления в задачах инженерного проектирования нелинейных систем автоматического управления.

В конспекте кратко изложены основы теории анализа нелинейных систем и оптимального управления. Описан математический аппарат исследования различных нелинейных систем автоматического регулирования, рассмотрены типовые нелинейности и их влияние на устойчивость и качественные показатели регулирования контролируемых параметров, методы гармонической линеаризации, фазовой плоскости, прямой метод Ляпунова и частотный критерий Попова для расчета устойчивости. замкнутых нелинейных систем, а также рассмотрены методы оптимального управления на основе критериев градиентного спуска и принципа максимума Понтрягина. Кратко изложены перспективные направления современной теории автоматического управления: анализу адаптивных систем, включая подсистемы интеллектуального управления - экспертные, фази-логики и искусственные нейронные сети.

Конспект может быть использован студентами магистратуры не только для специальности 6М071600 – Приборостроение, но и всех электротехнических специальностей АУЭС для самостоятельного изучения теории автоматического управления нелинейных систем при решении инженерных задач РГР, курсового и дипломного проектирования.

1 Лекция №1. Нелинейные автоматические системы

1.1 Особенности нелинейных систем

Нелинейной называется система, среди элементов которой есть хотя бы один с нелинейной зависимостью между его выходным и входным сигналами. В такой системе в большинстве случаев процессы не могут быть исследованы методами линейной теории. Кроме того, при исследовании систем с нелинейными элементами не может быть использован принцип суперпозиции.

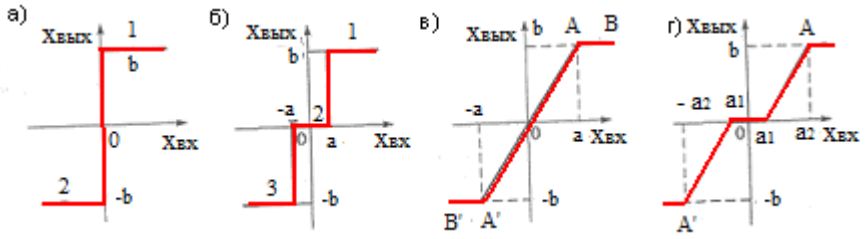
Для нелинейных систем характерна работа в режимах, принципиально неосуществимых в линейной системе:

- смена состояний равновесия в зависимости от начальных условий;
- автоколебания;
- дискретное изменение амплитуды сигналов;
- изменение частоты вынужденных колебаний;
- зависимость частоты автоколебаний от частоты внешнего воздействия;
- подавление слабого сигнала сильным.

Различают нелинейные элементы с гладкой нелинейной и с кусочно-линейной (рисунки 1.1 и 1.2) характеристиками.

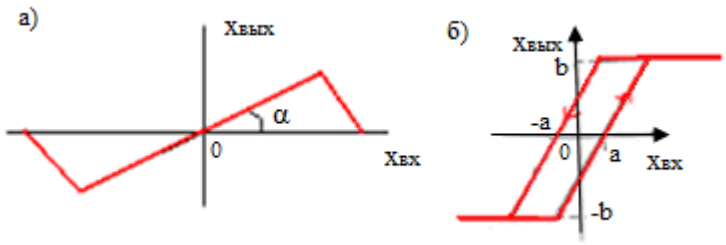
Все нелинейные характеристики могут быть разделены на: однозначные (рисунок 1.1) и неоднозначные (рисунок 1.2). Неоднозначная характеристика получается, если при увеличении входного сигнала выходная координата изменяется по одной зависимости, а при уменьшении входного сигнала — по другой.

Характеристики, показанные на рисунке 1.1, имеют линейные зоны и участки насыщения. Они свойственны устройствам с ограниченным изменением выходной координаты.



а – релейная; б – релейная с зоной нечувствительности; в – кусочно-линейная с насыщением; г – кусочно-линейная с насыщением и зоной нечувствительности.

Рисунок 1.1 – Типы нелинейных характеристик



а – типа дискриминатор; б - гистерезис с насыщением.

Рисунок 1.2 – Типы нелинейных характеристик

1.2 Методы исследования нелинейных систем

Динамические процессы нелинейной системы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Этот класс систем более широк, чем линейные системы, которые можно рассматривать, как частный случай нелинейных систем. Поэтому и динамические свойства нелинейных систем значительно разнообразнее, чем линейных. В них возможны незатухающие колебания, называемые автоколебаниями, устойчивость

движения и его характер зависят от начальных условий и внешних возмущений.

В нелинейных системах возможна устойчивость в малом, в большом и в целом. Устойчивость в малом означает устойчивость при сколь угодно малых отклонениях от исходного режима. Устойчивость в большом проявляется при конечных отклонениях, возможных по условиям работы. Система устойчива в целом, если она устойчива при неограниченных отклонениях от состояния равновесия.

Таким образом, нелинейные системы обладают рядом особенностей:

– зависимость свойств системы от положения точки равновесия.

На рисунке 1.3 видно, что при положении точки равновесия $x = x_{01}$ и подаче на вход НЭ синусоидального сигнала, выходной сигнал не изменяет форму; а при смене режима работы системы $x = x_{02}$ и при том же входном сигнале выходной сигнал НЭ становится постоянным;

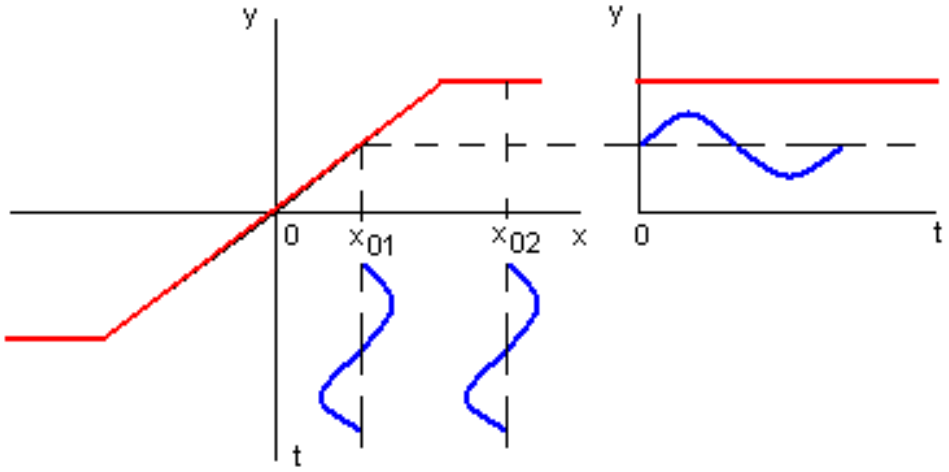


Рисунок 1.3 – Зависимость выходных сигналов НЭ от точки равновесия

– для нелинейных систем не сохраняется принцип суперпозиции;

– в нелинейных системах появляется режим автоколебаний.

При возникновении синусоидальной помехи на входе релейного элемента на выходе появляются прямоугольные импульсы с постоянной амплитудой;

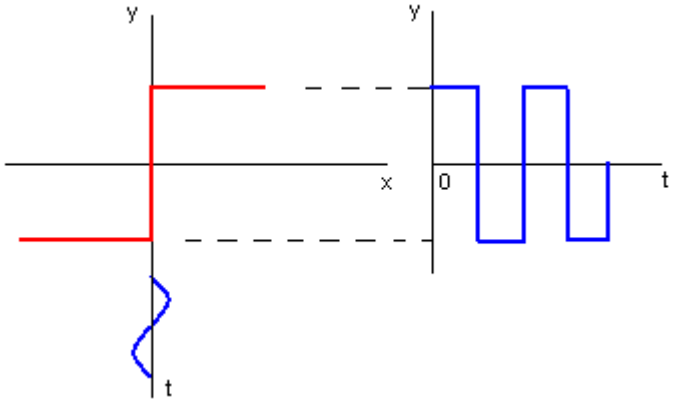


Рисунок 1.4 – Автоколебания на выходе релейного элемента

– нелинейные системы могут быть неустойчивы в малом и неустойчивы в большом.

В большинстве случаев нелинейную систему можно представить в виде соединения двух частей: линейной части (ЛЧ), описываемой линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, и нелинейного элемента (НЭ) (рисунок 1.5).

В качестве примера можно привести ранее рассмотренную структурную схему АСД, но уже как нелинейную. Система работает в 2-х режимах: захвата цели и слежения. Выходной сигнал У нелинейной системы зависит от ошибки входного и от вида нелинейности НЭ.

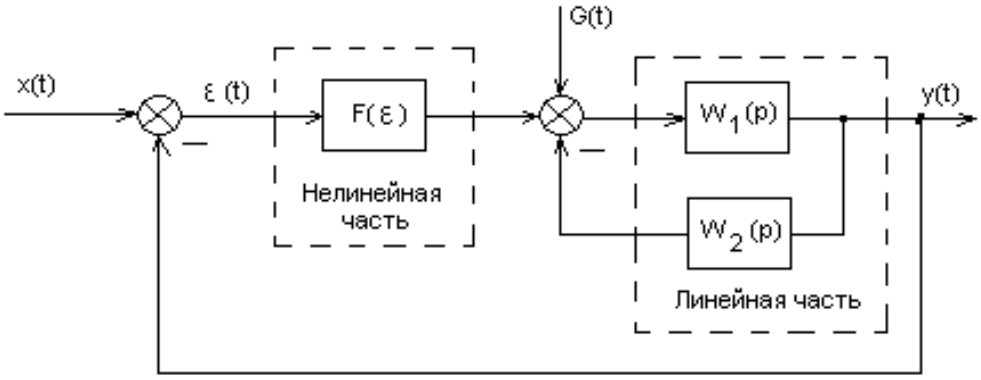


Рисунок 1.5 – Структурная схема АСД

Если принять x(t)=0 и G(t)=0, т.е. при отсутствии входного сигнала и помехи, структурную схему АСД можно представить в упрощенном виде (рисунок 1.6).

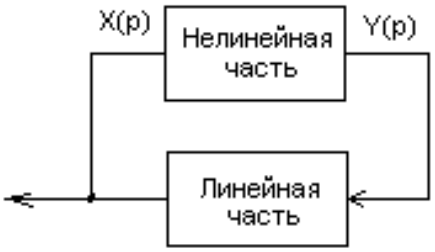


Рисунок 1.6 – Упрощенная структурная схема АСД

Входным сигналом НЭ является выходной X(p) линейной части системы, который, в свою очередь, определяется через ПФ линейной части по входному сигналу У(p), являющимся выходным НЭ. Выходные и входные сигналы линейной части системы связаны линейными дифференциальными уравнениями в виде ПФ:

$$x(p) = W_{ЛЧ} \cdot y(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} \cdot y(p). \qquad (1.1)$$

Далее расчет ведется в зависимости от применяемого метода.

Исследование нелинейных систем имеет следующие цели, связанные с анализом и синтезом систем: анализ устойчивости, определение возможности автоколебаний, их частоты и амплитуды, определение показателей качества, синтез устройств управления.

В зависимости от конкретной цели возможно применение различных методов анализа:

1) Метод гармонической линеаризации и гармонического баланса. Нелинейный элемент (НЭ) заменятся линейным, у которого выходной сигнал У равен 1-й гармоники НЭ. Метод позволяет определить возможность автоколебаний, их частоту, амплитуду и устойчивость.

2) Метод фазовой плоскости. На плоскости строятся фазовые траектории для каждого линейного участка нелинейности, затем их соединяют. Метод позволяет определить устойчивость, наличие автоколебательных режимов, их частоту и амплитуду для систем, с достаточной точностью описываемых уравнениями 2-го порядка.

3) Метод статической линеаризации. Нелинейное звено заменяется линейным, чтобы математическое ожидание и дисперсия были одинаковы: для НЛ и для линейного звена.

4) Прямой метод А.М. Ляпунова позволяет оценить устойчивость нелинейной системы в целом.

5) Метод В.М. Попова дает достаточные условия абсолютной устойчивости.

Рассмотрим только 1, 2, 4 и 5 методы анализа нелинейных систем.

2 Лекция №2. Метод гармонической линеаризации

Для определения зависимости между входными и выходными сигналами НЭ воспользуемся:

$$x(p) = W_{ЛЧ} \cdot y(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} \cdot y(p). \qquad (2.1)$$

Рассмотрим наиболее простой случай, когда выходной сигнал НЭ зависит от входного в виде функции F(x,dx/dt) двух параметров: текущего значения входного сигнала x(t) и его производной dx/dt.

Если на вход НЭ подать синусоидальный сигнал с амплитудой *a:*

$$\text{x = a sin}\omega\text{t, то } \frac{dx}{dt} = px = a\omega\cos\omega t. \qquad (2.2)$$

Если приближенно взять в расчет только один параметр X функции F и разложить ее в ряд, то получим:

$$y(t) = F(x) = F(a\sin\omega t) = C_0 + D_1\sin\omega t + C_1\cos\omega t + \ldots \textit{высшие гармоники}, \quad (2.3)$$

где $C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(a\sin\omega t)d\omega t = 0$ - постоянная и равна в виду периодичности подинтегральной функции sin.

Из формулы (2.2) можно выразить значения sin и cos как:

$$\sin\omega t = \frac{x}{a}; \qquad \cos\omega t = \frac{px}{a\omega}. \quad (2.4)$$

Тогда (2.3) можно записать как:

$$y = q(a)x + \frac{\dot{q}(a)px}{\omega}, \quad (2.5)$$

где $q = \frac{D_1}{a} = \frac{1}{a\pi}\int_0^{2\pi} F(a\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi; \qquad \dot{q} = \frac{C_1}{a} = \frac{1}{a\pi}\int_0^{2\pi} F(a\sin\varphi)\cos\varphi d\varphi.$

Для большинства нелинейных характеристик $\dot{q} = 0$, тогда (2.5) имеет вид:

$$y = q(a)\cdot x, \quad (2.6)$$

где q(a) – коэффициент гармонической линеаризации.

Нелинейный элемент заменяется линейным с выходным сигналом F(asinφ), равным амплитуде первой гармоники D_1.

Для примера найдем коэффициент гармонической линеаризации q(a) для нелинейного звена, имеющего релейную характеристику.

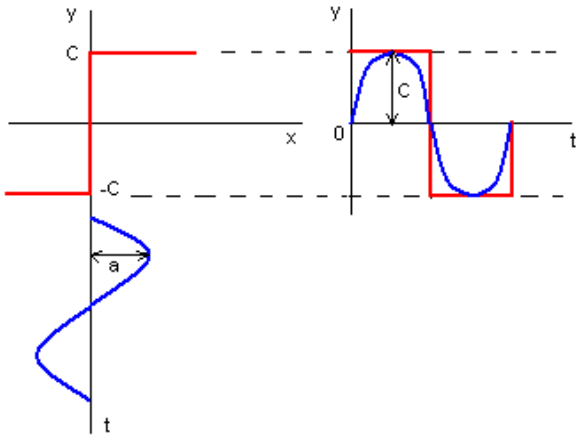


Рисунок 2.1 – Релейная характеристика звена

На рисунке 2.1 видно, что максимальное значение выходного сигнала y_{max} = C, т.е. величине полочки C релейного элемента (справочные данные элемента). От величины входного сигнала (с амплитудой a) величина выходного сигнала не зависит и всегда постоянна, равная C.

В соответствии с выражением (2.5):

$$q = \frac{1}{a\pi}\int_0^{2\pi} F(a\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi = \frac{2}{a\pi}\int_0^{\pi} C\sin\varphi d\varphi = \frac{2C}{a\pi}\left(-\cos\varphi\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{4C}{a\pi}. \qquad (2.7)$$

Зависимость коэффициента q от амплитуды входного сигнала *a* носит нелинейный характер (рисунок 2.2).

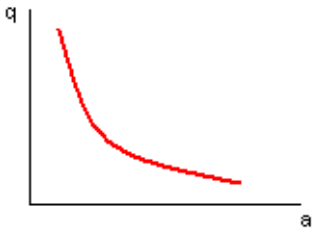


Рисунок 2.2 – Вид зависимости q(a) от a

2.1 Исследование нелинейной системы частотной автоподстройки

Структурная схема частотной автоподстройки представлена на рисунке 2.3.

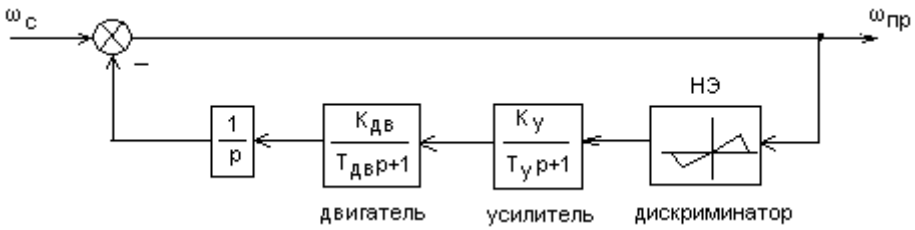


Рисунок 2.3 – Структурная схема нелинейной системы

Характеристика НЭ представлена на рисунке 2.4.

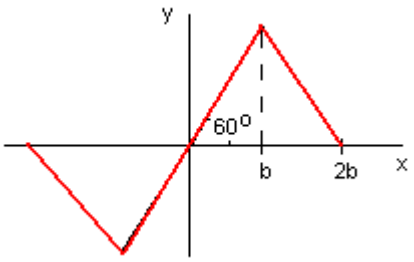


Рисунок 2.4 – Характеристика НЭ

В структурную схеме выделим линейную и нелинейную части.

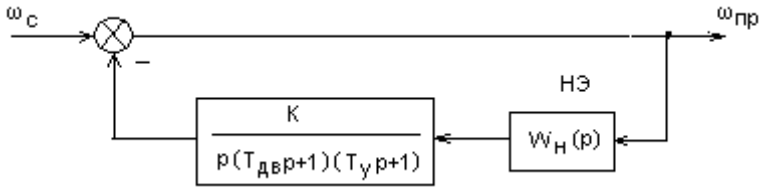


Рисунок 2.5 – Структурная схема преобразованной системы

Из таблицы известно, что $W_н(p)$ или коэффициент гармонической линеаризации q для этого типа нелинейности равен:

$$W_H(p) = q = \alpha\left[\frac{4}{\pi}\left(\arcsin\frac{b}{a} + \frac{b}{a}\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right) - 1\right],$$

где α – коэффициент усиления линейной части характеристики НЭ;
a – амплитуда входного сигнала.

ПФ линейной части системы равна:

$$W_Л(p) = \frac{K}{p(T_y p+1)(T_{дв} p+1)},$$

где $K = K_y \cdot K_{äâ}$ - коэффициент усиления ЛЧ.

Тогда ПФ замкнутой системы будет равна:

$$\Phi(p) = \frac{1}{1+\dfrac{K\cdot W_H(p)}{p(T_y p+1)(T_{дв} p+1)}} = \frac{p(T_y p+1)(T_{дв} p+1)}{p(T_y p+1)(T_{дв} p+1) + KW_H(p)}. \qquad (2.8)$$

Характеристическое уравнение примет вид:

$$T_y T_{дв} p^3 + (T_y + T_{дв})p^2 + p + KW_H(p) = 0. \qquad (2.9)$$

Подставив вместо p = jω, получим:

$$-jT_y T_{дв}\omega^3 - (T_y + T_{дв})\omega^2 + j\omega + KW_H(j\omega) = 0. \qquad (2.10)$$

Представим (2.10) в виде комплексного числа:

$$X(\omega,a)+jY(\omega,a)=0;$$

$$X(\omega,a)=-(T_y+T_{дв})\omega^2+KW_H(p)=0; \quad (2.11)$$

$$Y(\omega,a)=\omega-T_yT_{дв}\omega^3=\omega(1-T_yT_{дв}\omega^2)=0. \quad (2.12)$$

Определим критическую частоту $\omega_{кр}$, при которой мнимая часть характеристического уравнения Y(ω,a) будет равна нулю и возможны автоколебания:

$$\omega_{кр}^2=\frac{1}{T_yT_{дв}}. \quad (2.13)$$

Уравнение (2.11) представим в виде:

$$(T_y+T_{дв})\omega^2=KW_H(p). \quad (2.14)$$

Подставив в (2.14) значение критической частоты (14.13), при которой возможны автоколебания, получим:

$$\frac{T_y+T_{дв}}{T_yT_{дв}}=KW_H(p). \quad (2.15)$$

Подставив в (2.15) ПФ нелинейной части $W_н(p)$, получим:

$$\frac{T_y+T_{дв}}{T_yT_{дв}}=K\alpha\left[\frac{4}{\pi}\left(\arcsin\frac{b}{a}+\frac{b}{a}\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right)-1\right]. \quad (2.16)$$

Чтобы исключить автоколебания и обеспечить устойчивость системы, в выражении (2.16) легче всего изменить величину К. Поэтому для расчета К - коэффициента усиления разомкнутой линейной части системы, необходимо найти зависимость величины К от амплитуды входного сигнала.

Для этого рассмотрим три случая:

1) Амплитуда входного сигнала НЭ равна его максимальному выходу y_{max} , т.е. a = b. Тогда (2.16) примет вид:

$$K=\frac{T_y+T_{дв}}{\alpha\cdot T_y\cdot T_{дв}}. \quad (2.17)$$

2) a = 1,225b.

$$\frac{T_y+T_{дв}}{T_yT_{дв}}=1{,}098K\alpha \quad или \quad K=\frac{0{,}85(T_y+T_{дв})}{\alpha\cdot T_y\cdot T_{дв}}. \quad (2.18)$$

3) a = 2b.

$$K = \frac{4{,}58(T_y + T_{дв})}{\alpha \cdot T_y T_{дв}}. \qquad (2.19)$$

Выражения (2.17, 2.18, 2.19) можно отразить графически.

Рисунок 2.6 – Области изменения амплитуды входного сигнала *a* от К

Для автоколебаний необходимо, чтобы частные производные от характеристического уравнения (2.10) удовлетворяли условию:

$$\frac{\partial X}{\partial a} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \omega} - \frac{\partial Y}{\partial a} \cdot \frac{\partial X}{\partial \omega} > 0. \qquad (2.20)$$

Если неравенство (2.20) будет равно нулю, то в системе все равно возникнут автоколебания, т.е. она станет неустойчивой.

Найдем частную производную для мнимой части Y(ω,a) характеристического уравнения (2.12) по амплитуде входного сигнала:

$$\frac{\partial Y}{\partial a} = \frac{\partial(\omega - T_y T_{дв} \omega^3)}{\partial a} = 0.$$

Тогда условие (2.20) примет вид:

$$\frac{\partial X}{\partial a} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \omega} > 0. \qquad (2.21)$$

Определим частную производную мнимой части Y (ω,a) по частоте:

$$\frac{\partial Y}{\partial \omega} = \frac{\partial(\omega - T_y T_{дв} \omega^3)}{\partial \omega} = 1 - 3\omega^2 T_y T_{дв}.$$

Если в это выражение подставить значение критической частоты (2.13), то производная Y (ω,a) по частоте будет меньше нуля:

$$\frac{\partial Y}{\partial \omega} = 1 - 3\omega^2 T_y T_{дв} = 1 - \frac{3 \cdot T_y T_{дв}}{T_y T_{дв}} = -2 < 0.$$

Следовательно, для выполнения условия (2.21) необходимо, чтобы частная производная действительной части X (ω,a) тоже была меньше нуля:

$$\frac{\partial X}{\partial a} < 0.$$

В выражении (2.11) только ПФ $W_н(p) = q$ зависит от величины входного сигнала

$$X(\omega, a) = -(T_y + T_{дв})\omega^2 + KW_H(p).$$

Для 3-х участков по выражениям (2.17-2.19) при известных значениях α график α =f(a) показан на рисунке 2.8.

Только на III участке возможны автоколебания, т.к. производная от ПФ этого участка меньше нуля или имеет отрицательный коэффициент усиления α.

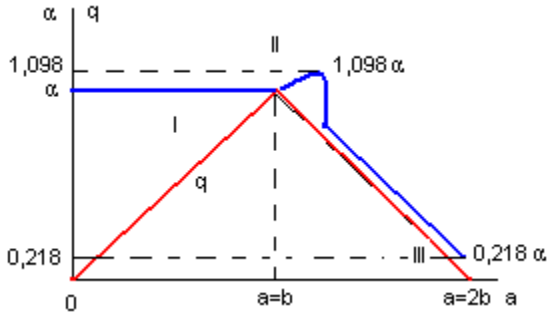


Рисунок 2.8 – Зависимость α = f(a)

Таким образом, для исключения режима автоколебаний в системе величина амплитуды входного сигнала НЭ должна быть ограничена и не превышать значения точки b на оси абсцисс нелинейной характеристики.

3 Лекция №3. Метод фазовой плоскости

3.1 Основные понятия

Состояние любой динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением n-го порядка, может быть определено в любой момент времени значениями n переменных, например, регулируемой координаты x и (n – 1) ее производных в n-мерном пространстве, называемом *фазовым пространством* системы. Это состояние характеризуется координатами изображающей точки, откладываемыми по осям фазового пространства. В установившемся режиме системы изображающая точка занимает фиксированное положение и называется *особой точкой*. В переходном

режиме координата x и (n – 1) ее производных будут изменяться, обусловливая движение изображающей точки по фазовой траектории.

Характер этого движения и положение фазовых траекторий в фазовом пространстве определяются динамическими свойствами системы и начальными условиями. Полная совокупность фазовых траекторий, соответствующая всем возможным начальным условиям, называется *фазовым портретом* системы. Двухмерное фазовое пространство представляет фазовую плоскость.

Метод фазовой плоскости позволяет исследовать динамические свойства систем, описываемых нелинейными уравнениями первого и второго порядков.

$$\dot{x} = P(x, y); \quad \dot{y} = Q(x, y). \tag{3.1}$$

При изображении фазового портрета на плоскости уравнение второго порядка заменяется системой двух уравнений:

$$\dot{y} = F(x, y), \quad \dot{x} = y. \tag{3.2}$$

Исключив из уравнения (3.2) время, получим:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{F(x, y)}{y}.$$

Решение этого нелинейного дифференциального уравнения дает зависимость:

$$y = f(x),$$

которая определяет фазовую траекторию.

3.2 Фазовые портреты линейных систем 2 порядка

Рассмотрим фазовые траектории, определяемые уравнением второго порядка, сначала для линейной системы. Пусть дано дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx_1}{dt} + a_1 \frac{dx_1}{dt} + a_2 x_1 = 0. \tag{3.3}$$

Согласно уравнениям (3.2), оно может быть представлено в виде:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = -a_1 x_2 - a_2 x_1. \tag{3.4}$$

Исключив из уравнений (3.4) время t делением одного на другое, получим:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -a_1 - a_2 \frac{x_1}{x_2}. \qquad (3.5)$$

Использовав подстановку:

$$\frac{x_2}{x_1} = u; \quad x_2 = ux_1; \quad \frac{dx_2}{dx_1} = u + x_1 \frac{du}{dx_1},$$

примет вид:

$$u \frac{du}{u^2 + a_1 u + a_2} = -\frac{dx_1}{x_1}.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим:

$$\int u du / (u^2 + a_1 u + a_2) = -\ln x_1 + C. \qquad (3.6)$$

Результат интегрирования левой части уравнения (3.6) зависит от корней характеристического уравнения:

$$u_2 + a_1 u + a_2 = 0, \qquad (3.7)$$

которые определяются из выражения

$$s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}.$$

1) При отсутствии демпфирования (a_1=0, a_2>0) получим чисто мнимые корни:

$$s_{1,2} = \pm j\omega, \ \ \omega = \sqrt{a_2}.$$

Решение уравнения (3.3), имеющее вид $x_1 = A\cos\omega t$, показывает, что в системе устанавливаются незатухающие гармонические колебания.

Уравнение (3.6) в случае мнимых корней принимает вид:

$$\ln(u^2 + \omega^2) = 2(-\ln x_1 + C).$$

Обозначив $C = \ln\omega C_1$ и учитывая, что $u = x_2/x_1$, получим уравнение семейства фазовых траекторий, имеющих вид эллипсов:

$$x_2^2 / \omega^2 C_1^2 + x_1^2 / C_1^2 = 1$$

с полуосями ωC_1 и C_1 (рисунок 3.1) или с учетом известной частоты:

$$\frac{x_2^2}{a_2 C_1^2} + \frac{x_1^2}{C_1^2} = 1.$$

Изображающая точка, движущаяся по часовой стрелке, при незатухающих синусоидальных колебаниях описывает замкнутый контур. Центр эллипса представляет особую точку, в которую стягиваются эллипсы при изменении C_1.

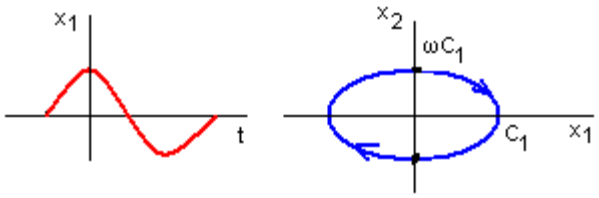


Рисунок 3.1 – Фазовый портрет линейной системы при мнимых корнях

2) При положительном демпфировании ($a_1 > 0$) и условии $a_1 < 4a_2$ получим комплексные сопряженные корни с отрицательной вещественной частью. Переходный процесс в этом случае, согласно уравнению (3.3), определяется выражением:

$$x_1 = A \exp(-\alpha t)\cos\omega t,$$

где $\alpha = -a_1/2$, и имеет затухающий колебательный характер (рисунок 3.2), свойственный устойчивой системе.

Уравнение (3.5) можно представить как

$$x_2 dx_2 = -a_1 x_2 dx_1 - a_2 x_1 dx_1.$$

После интегрирования обоих частей получим:

$$x_2^2 + a_1 x_2 x_1 + a_2 x_1^2 = 0. \qquad (3.8)$$

Тогда уравнение фазовых траекторий в случае комплексных сопряженных корней с отрицательной вещественной частью (положительное демпфирование $a_1>0$) примет вид:

$$x_2^2 + a_1 x_2 x_1 + a_2 x_1^2 = C \exp(2a_1 / \sqrt{4a_2 - a_1^2})\, arctg((2x_2 + a_1 x)/ x\sqrt{4a_2 - a_1^2}), \qquad (3.9)$$

где C - постоянная интегрирования, зависящая от начального состояния системы.

Это выражение дает семейство логарифмических спиралей, отличающихся значением постоянной С. Изображающая точка описывает в плоскости (x_2, x_1) закручивающуюся спираль (рисунок 3.2). Все спирали сходятся к одной особой точке, называемой *устойчивым фокусом* (0).

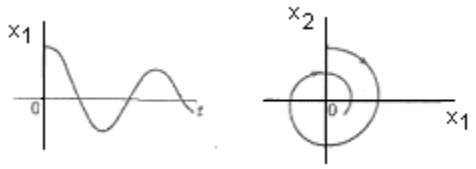


Рисунок 3.2 – Фазовый портрет линейной системы при комплексно-сопряженных корнях с отрицательной вещественной частью

3) При отрицательном демпфировании ($a_1<0$) получим комплексно-сопряженные корни с положительной вещественной частью. Возникают колебания с возрастающей амплитудой, характеризующие неустойчивый процесс (рисунок 3.3).

Переходный режим описывается уравнением:

$$x = x_0 \exp(\alpha t) \cos\omega t.$$

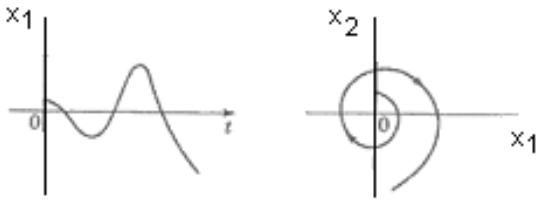


Рисунок 3.3 – Фазовый портрет линейной системы при комплексно-сопряженных корнях с положительной вещественной частью

Фазовые траектории в этом случае также имеют вид логарифмических спиралей, но раскручивающихся из начала координат (рисунок 3.3). Начало координат представляет особую точку, называемую *неустойчивым фокусом*.

4) Если корни характеристического уравнения вещественны и отрицательны, переходный процесс списывается уравнением:

$$x = C_1 \exp s_1 t + C_2 \exp s_2 t$$

и имеет устойчивый апериодический характер с перерегулированием либо без перерегулирования.

Фазовые траектории описываются выражением:

$$(x_2 - x_1 s_1)^{s_1} = (x_2 - x_1 s_2)^{s_2},$$

являющимся решением уравнения (3.6) при вещественных корнях.

На рисунке 3.4 показаны фазовые траектории 1, 2 и 3 соответствующие переходным характеристикам, обозначенным теми же цифрами. Точка, изображающая начало координат, представляет точку равновесия и называется *устойчивым узлом*, в котором сходятся все фазовые траектории. В этом случае отсутствуют колебания относительно точки равновесия.

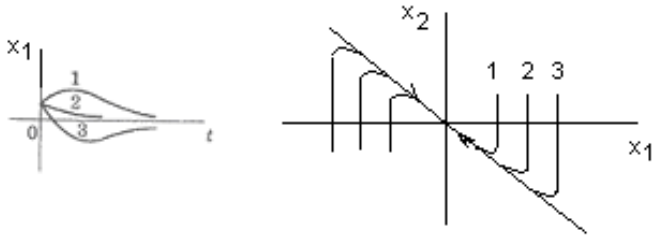


Рисунок 3.4 – Фазовый портрет линейной системы при вещественных отрицательных корнях

5) При вещественных положительных корнях характеристического уравнения получим неустойчивый апериодический процесс с неограниченным возрастанием во времени координаты x_1. Переходные характеристики и фазовые траектории этого процесса изображены на рисунке 3.5. Точка равновесия системы, из которой выходят все фазовые траектории, называется *неустойчивым узлом*.

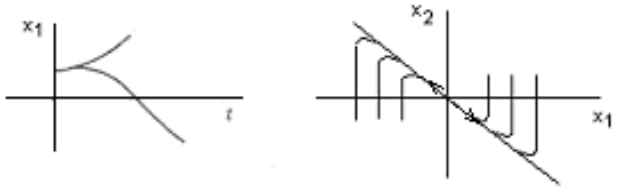


Рисунок 3.5 – Фазовый портрет линейной системы при вещественных положительных корнях

6) При вещественных корнях разных знаков получаем семейство фазовых траекторий, изображенных на рисунке 3.6, которые характеризуют неустойчивый процесс. Здесь начало координат представляет особую точку и называется *седлом*.

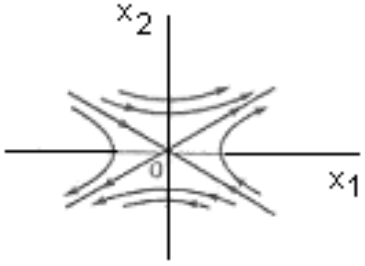


Рисунок 3.6 – Фазовый портрет линейной системы при вещественных корнях разных знаков

Рассмотренные фазовые портреты линейной системы второго порядка показывают, что по характеру фазовых траекторий можно непосредственно судить об устойчивости движения системы.

Пример 1. Необходимо построить фазовый портрет линейной системы 1-го порядка (рисунок 3.7, а). На вход поступает постоянный сигнал типа x=a·1(t).

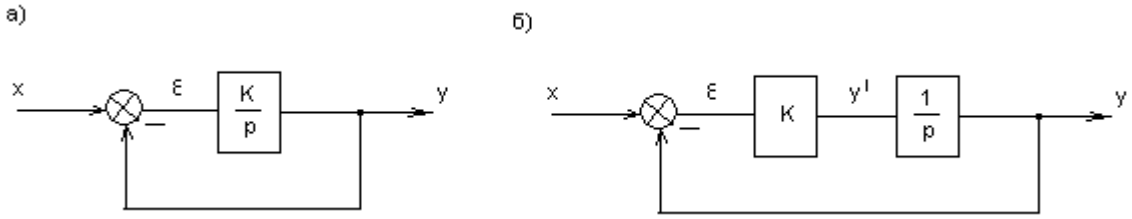


Рисунок 3.7 – Структурная схема линейной системы

Представим усилительное интегрирующее звено в виде двух последовательно соединенных звеньев (рисунок 3.7, б).

Тогда на выходе усилительного звена:

$$y' = \varepsilon \cdot K = (x - y)K \quad \textit{или} \quad y' + yK = Kx.$$

Полученное уравнение является уравнением прямой. Для построения фазовой траектории определим точки пересечения с осями координат, используя последнее выражение.

$$\begin{cases} y = 0; \quad y' = Kx = Ka, \\ y' = 0; \quad yK = Kx = Ka; \quad y = a. \end{cases}$$

По полученным данным строим фазовую траекторию, на которой покажем произвольную точку М с координатами ($y_0'; y_0$).

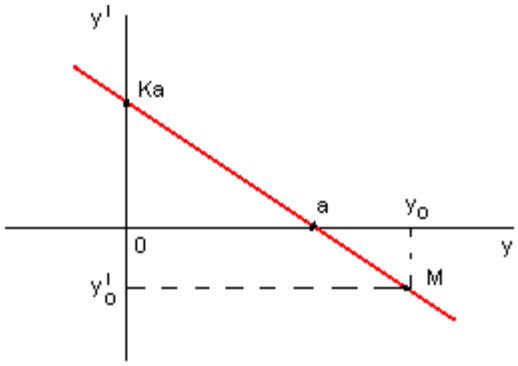


Рисунок 3.8 – Фазовый портрет линейной системы 1-го порядка

4 Лекция №4. Фазовые траектории нелинейных систем

4.1 Нелинейные системы 1-го порядка

Если нелинейная система состоит из линейной части и нелинейного элемента с кусочно-линейной характеристикой, то правая часть уравнения, полученного из соотношений (4.1), представляет набор нескольких линейных функций, соответствующих отдельным линейным участкам этого элемента.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} = F(x,y). \qquad (4.1)$$

При этом фазовая характеристика разбивается на ряд участков, в пределах которых уравнение (4.1) является линейным и легко интегрируемым. Такой метод интегрирования по участкам называется *методом припасовывания* (сшивания). Точкам излома кусочно-линейной характеристики на фазовой плоскости соответствуют линии переключения. При пересечении последних фазовые траектории подвергаются излому.

В качестве примера на рисунке 4.1 приведена структурная схема нелинейной следящей системы, состоящая из линейной части и НЭ с кусочно-линейной характеристикой. Входной сигнал равен x(t) = 1(t).

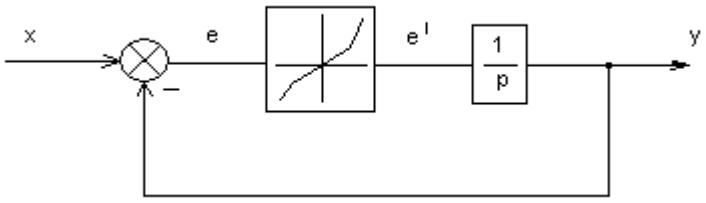


Рисунок 4.1 – Структурная схема нелинейной системы

Нелинейная характеристика звена приведена на рисунке 4.2. Характеристика состоит из 2-х участков, в которых нелинейную систему можно считать линейной аналогично системе, рассмотренной в примере 1.

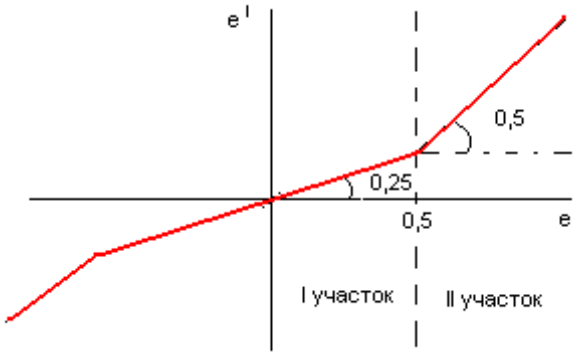


Рисунок 4.2 – Нелинейная характеристика звена

I участок: при $|e| < 0{,}5$; К=0,25; x=1.

$e' + yK = Kx;\ но\ \ y = e,\ тогда\ e' + 0{,}25e = 0{,}25.$

$$\begin{cases} e' = 0; \quad e = 1, \\ e = 0; \quad e' = 0{,}25. \end{cases}$$

II участок: при $|e| > 0{,}5$; К=0,5; x=1.

$e' + 0{,}5e = 0{,}5.$

$$\begin{cases} e' = 0; \quad e = 1, \\ e = 0; \quad e' = 0{,}5. \end{cases}$$

Для построения фазовой траектории нелинейной системы на каждом участке строятся отдельные прямые по полученным точкам, а затем на границе участков при e=0,5 происходит «сшивание», т.е. параллельный перенос второй прямой для продолжения первой (рисунок 4.2).

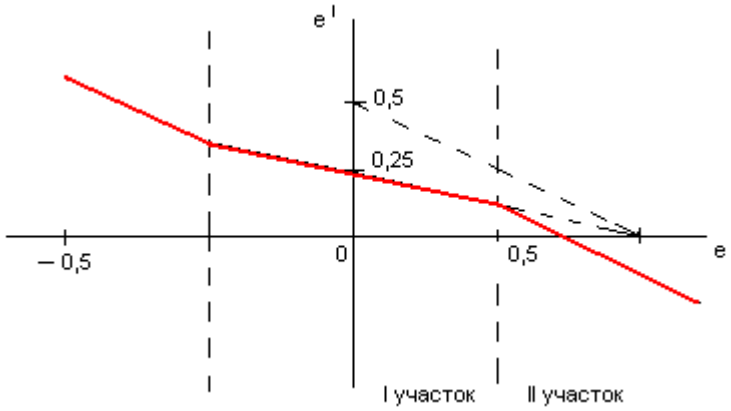


Рисунок 4.3 – Фазовый портрет следящей нелинейной системы

4.2 Нелинейные системы 2-го порядка

Для построения фазовых траекторий методом фазовой плоскости нелинейных систем высокого порядка, например, 3-го, необходимо свести систему ко 2-му порядку, приравнивая малые постоянные времени Т к нулю.

В качестве примера рассмотрим нелинейную автоматическую систему слежения и определения дальности цели (АСД), представленную на рисунке 4.4.

Входным сигналом является функция скорости цели x (t) = ω_c = at.

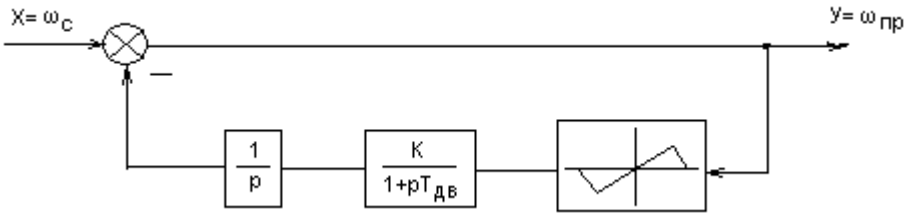


Рисунок 4.4 – Структурная схема АСД

Определим ПФ замкнутой системы:

$$W_3(p)=\frac{\omega_{пр}(p)}{\omega_c(p)}=\frac{1}{1+\dfrac{KW_H(p)}{p(1+pT_{дв})}}=\frac{p(1+pT_{дв})}{T_{дв}p^2+p+KW_H(p)}. \qquad (4.2)$$

После перекрестного умножения получим:

$$(T_{дв}p^2+p+KW_H)\omega_{пр}(p)=p(1+T_{дв}p)\omega_c(p). \qquad (4.3)$$

Определим значение правой части этого уравнения с учетом входного сигнала:

$$p\omega_c(p)+T_{дв}p^2\omega_c(p)=a, \quad т.к.\ p\omega_c(p)=\frac{dat}{dt}=a; \quad p^2\omega_c(p)=0.$$

Тогда уравнение (4.3) во временной области примет вид:

$$T_{дв}\frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{dx_1}{dt}+KW_H(x_1)=a \quad или \quad \frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{1}{T_{дв}}\frac{dx_1}{dt}+\frac{1}{T_{дв}}KW_H(x_1)=\frac{a}{T_{дв}}, \qquad (4.4)$$

где x_1 – входной сигнал НЭ, равный выходному сигналу системы $x_1=\omega_{пр}$.

Представим левую часть уравнения (4.4) 1-й степенью путем замены $\frac{dx_1}{dt}=x_2$ - выходной сигнал НЭ:

$$\frac{dx_2}{dt}=-\frac{x_2}{T_{дв}}-\frac{KW_H(x_1)}{T_{дв}}+\frac{a}{T_{дв}}. \qquad (4.5)$$

В установившемся режиме величина выходного сигнала (входного НЭ) $\omega_{пр}=x_1=\text{const}$. Следовательно, $x_2=0$ и его производная тоже:

$$x_2=\frac{dx_1}{dt}=\frac{dconst}{dt}=0, \quad \frac{dx_2}{dt}=0.$$

Тогда уравнение (4.5) примет вид:

$$-\frac{KW_H(x_1)}{T_{дв}}+\frac{a}{T_{дв}}=0 \ \ или \ \ \frac{K}{T_{дв}}\left(W_H(x_1)-\frac{a}{K}\right)=0, \quad W_H(x_1)=\frac{a}{K}. \qquad (4.6)$$

Крутизна нелинейной характеристики равна:

$$S_q = \frac{dW_H(x)}{dx}.$$

Тогда ПФ нелинейного звена равна:

$$W_H(x_1) = S_q \cdot x_1. \tag{4.7}$$

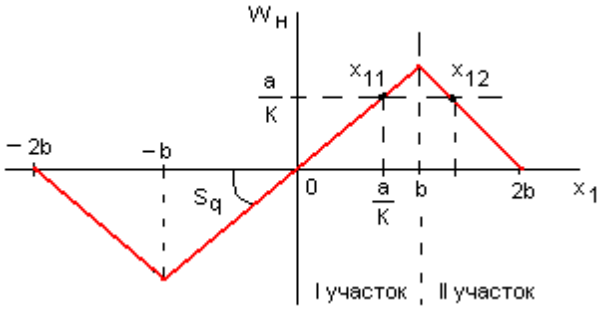


Рисунок 4.5 – Характеристика дискриминатора

После подстановки (4.7) в (4.6), получим:

$$x_1 = \frac{a}{K \cdot S_q} = \frac{a}{K_V}. \tag{4.8}$$

Умножим (15.16) на величину К и с учетом знаменателя (15.17), получим:

$$KW_H(x_1) = K \cdot S_q \cdot x_1 = K_V \cdot x_1. \tag{4.9}$$

Нелинейная характеристика разбивается на 2 линейных участка.

I участок: рассмотрим произвольную точку x_{11}.

Характеристическое уравнение, являющееся левой частью уравнения (4.4), с учетом (4.8) примет вид:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{1}{T_{дв}}\frac{dx_1}{dt} + \frac{K_V}{T_{дв}}(x_1 - x_{11}) = 0. \tag{4.10}$$

Примем, что $K_V T_{дв} = 0{,}25$.

Определим корни характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4K_V T_{дв}}}{2T_{дв}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-1}}{2T_{дв}} = -\frac{1}{2T_{дв}}.$$

На I участке фазовый портрет будет иметь особую точку «устойчивый узел», т.к. корни вещественные и отрицательные (рисунок 4.5).

II участок: рассмотрим произвольную точку x_{12}.

На этом участке крутизна по величине неизменна, но с обратным знаком:

$$S_{q2} = -S_{q1}; \quad K_V T_{дв} = -0{,}25.$$

Тогда характеристическое уравнение (4.10) примет вид:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{1}{T_{дв}} \frac{dx_1}{dt} + \frac{K_V}{T_{дв}} (x_1 - x_{12}) = 0.$$

Определим корни характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4K_V T_{дв}}}{2T_{дв}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+1}}{2T_{дв}} = \frac{-1 \pm 1{,}4}{2T_{дв}}; \quad p_3 = -\frac{1{,}2}{T_{дв}}; \quad p_4 = \frac{0{,}2}{T_{дв}}.$$

На II участке фазовый портрет будет иметь особую точку типа «седло», т.к. корни вещественные, но с разными знаками (рисунок 4.6).

Определив фазовые портреты на обоих участках, строятся фазовые траектории всей системы в окрестностях точек x_{11} и x_{12} (рисунок 4.6).

Из полученного портрета системы отчетливо видны зоны захвата и потери цели. Отслеживание объекта или частота входного сигнала не жестко связано со значением производной и самим отклонением.

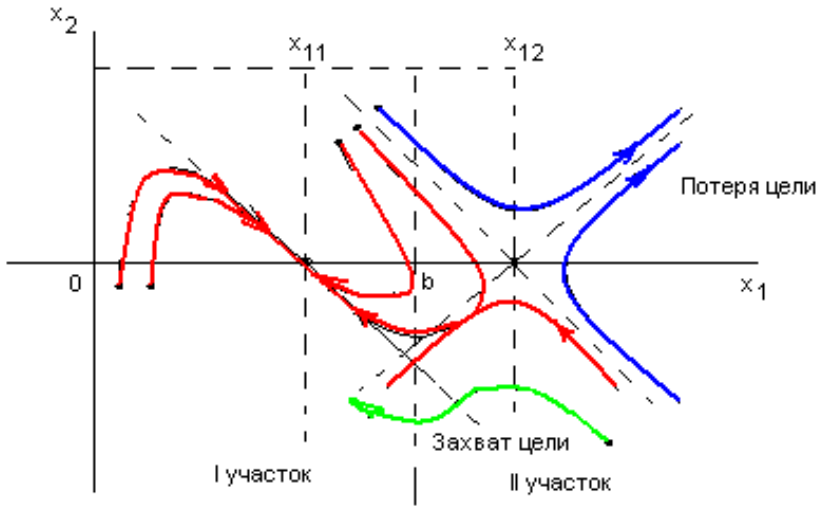


Рисунок 4.6 – Фазовый портрет нелинейной системы АСД

5 Лекция №5. Прямой метод определения устойчивости А.М. Ляпунова

Впервые общая теория устойчивости нелинейных систем была предложена в 1892 г. А.М.Ляпуновым. Он показал, что для некоторого класса задач исследования устойчивости может быть использован прямой метод, который сводится к построению функции Ляпунова, связанной с дифференциальным уравнением системы:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2 \ldots x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2 \ldots x_n), \\ &\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2 \ldots x_n), \end{aligned} \tag{5.1}$$

записанным в отклонениях. Здесь функции f_1, f_2, … , f_n произвольны и содержат любого вида нелинейности, но всегда удовлетворяют условию $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$ при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, т.к. в установившемся режиме все отклонения и их производные должны быть равны нулю согласно определению понятия этих отклонений.

Функцией Ляпунова называется любая функция:

$$V = V(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{5.2}$$

тождественно обращающаяся в нуль при $x_1 = x_2 = \ldots = 0$, если в ней взяты те же переменные $x_1, x_2, .., x_n$, что и в уравнении (5.1).

Производная от функции Ляпунова (5.2) по времени имеет вид:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\dot{x}_n .$$

Подставив сюда производные из уравнения (5.1), получим:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n, \tag{5.3}$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_n$ - функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Следовательно, выражение (5.3) можно записать в виде:

$$\frac{dV}{dt} = W(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{5.4}$$

Функция W так же, как и сама функция Ляпунова V, обращается в нуль при $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Функция Ляпунова $V(x_1,x_2 \ldots x_n)$ может быть:

1) *Знакоопределенной.* Например, $V = x_1^2 + x_2^2$ при n=2 – порядок функции или количество переменных. V=0 при $x_1=x_2=0$ и V>0 при вещественных значениях переменных x_1, x_2.

2) *Знакопостоянной.* При n=3 $V = x_1^2 + x_2^2$ не учитывает значение x_3. V=0 при $x_1=x_2= x_3= 0$ и V>0 при $x_1=x_2= 0$, $x_3 \neq 0$.

3) *Знакопеременной,* например, $V = x_1 + x_2$.

Функция Ляпунова V должна быть знакоопределенной в некоторой области, т.е. во всех точках этой области вокруг начала координат сохранять один и тот же знак и нигде не обращаться в нуль, кроме самого начала координат.

Под знакопостоянной понимают такую функцию, которая сохраняет один и тот же знак, но может обращаться в нуль не только в начале координат, но и в других точках данной области.

Теорема об устойчивости нелинейных систем: если при заданных в форме (5.1) уравнениях системы n-го порядка подобрать такую знакоопределенную функцию Ляпунова $V(x_1, x_2, ... x_n)$, чтобы ее производная по времени $W(x_1, x_2, ..., x_n)$ была знакоопределенной (или знакопостоянной), но имела знак, противоположный знаку V, то данная нелинейная система устойчива.

В качестве примера рассмотрим систему, которая описывается дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, x_3);$$
$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, x_3);$$
$$\frac{dx_3}{dt} = f_3(x_1, x_2, x_3).$$

Пусть функция Ляпунова является знакоопределенной положительной вида:

$$V = a^2x_1^2 + b^2x_2^2 + c^2x_3^2.$$

Будем задавать величине V возрастающие значения $V = 0;C_1;C_2;C_3$.

В результате чего получим систему уравнений:

$$a^2x_1^2 + b^2x_2^2 + c^2x_3^2 = 0;$$
$$a^2x_1^2 + b^2x_2^2 + c^2x_3^2 = C_1;$$
$$a^2x_1^2 + b^2x_2^2 . + c^2x_3^2 = C_2;$$
$$a^2x_1^2 + b^2x_2^2 + c^2x_3^2 = C_3.$$

Первое из уравнений соответствует началу координат, так как $x_1=x_2=...=x_n = 0$, а остальные - поверхностям эллипсоидов, расположенных в фазовом пространстве так, что поверхность, отвечающая меньшему C, находится целиком внутри поверхностей, определяемых большими C (рисунок 5.1).

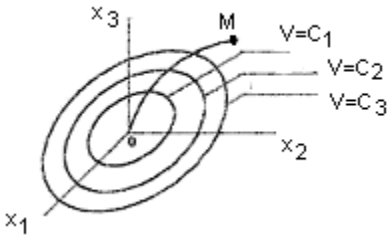


Рисунок 5.1 – Прямой метод Ляпунова

Определим производную функции Ляпунова:

$$W(x_1, x_2, x_3) = \frac{dV}{dt} = 2a^2 x_1 f_1(x_1, x_2, x_3) + 2b^2 x_2 f_2(x_1, x_2, x_3) + 2c^2 x_3 f_3(x_1, x_2.x_3).$$

Если функция $W(x_1, x_2, x_3)$ является знакоопределенной отрицательной, т.е. $\frac{dV}{dt} < 0$ во всех точках исследуемого пространства, кроме начала координат, то изображающая точка M будет двигаться в сторону уменьшения значения V к началу координат. При этом фазовая траектория будет пересекать эллипсоиды извне внутрь (рисунок 5.1), обусловливая затухание координат x_1, x_2, x_3.

Следовательно, система является асимптотически устойчивой.

Графически можно объяснить устойчивость системы и так: в начале переходного процесса все переменные x_1, x_2, x_3 находились в области D, а в конце окажутся в области L 3-х мерного пространства параметров отклонений.

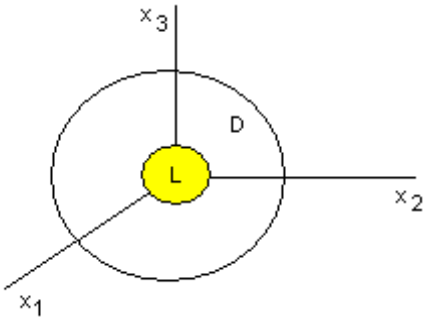


Рисунок 5.2 – Области изменения переменных

Пример 1. Определить условия устойчивости нелинейной системы, структурная схема которой приведена на рисунке 5.3.

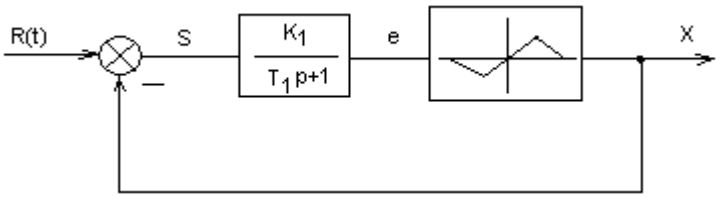


Рисунок 5.3– Структурная схема нелинейной системы

ПФ инерционного звена равна:

$$W(p) = \frac{e(p)}{S(p)} = \frac{K_1}{Tp+1_1}.$$

После перекрестного перемножения и, перейдя во временную область, получим:

$$T_1 \frac{de}{dt} + e = K_1 S, \tag{5.5}$$

где S = R-X, а выход является выходом НЭ X = f(e).

Тогда (5.5) можно записать как

$$\frac{de}{dt} + \frac{e}{T_1} = \frac{K_1}{T_1}\big(R - f(e)\big). \tag{5.6}$$

В установившемся режиме e=const и $\frac{de}{dt} = 0$, поэтому:

$$e + K_1\big(f(e) - R\big) = 0. \tag{5.7}$$

Из (5.7) определим R для нового положения равновесия:

$$R = f(e) + \frac{e_0}{K_1}.$$

Обозначим новую нелинейность как

$$F(e) = f(e) - R. \tag{5.8}$$

Подставив (5.8) в (5.6), получим:

$$\frac{de}{dt} = \frac{K_1}{T_1} F(e) - \frac{e}{T_1}. \tag{5.9}$$

Предложим простейшую знакоопределенную функцию Ляпунова $V=e^2$:

$$W = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial e}\frac{de}{dt} = 2e\frac{de}{dt}.$$

После подстановки (5.9), получим:

$$W = -2e\left[e + K_1F(e)\right]\frac{1}{T_1} = -2e\left[e + K_1F'(e)\cdot e\right]\frac{1}{T_1}.$$

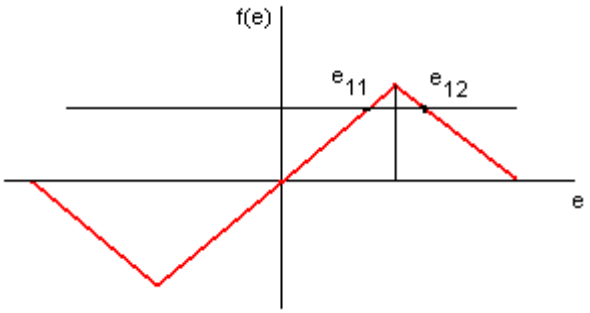


Рисунок 5.4 – Характеристика нелинейного звена

Область 1: положение равновесия в точке e_{11}:

$$\begin{cases} e = 0; \;\; W = 0 \\ e > 0; \;\; W < 0 \;\; при \;\; F'(e) > 0 \\ e < 0; \;\; W < 0 \;\; при \;\; \left[e + K_1F'(e)\right] < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что область 1 – область устойчивости, т.к. функция W<0 является знакоопределенной отрицательной во всех точках исследуемого пространства, кроме начала координат.

Область 2: положение равновесия в точке e_{12}.

Эта область будет областью неустойчивости, если W>0.

$$\begin{cases} e = 0; \;\; W = 0 \\ e > 0; \;\; W > 0 \;\; при \;\; F'(e) < 0, \;\; если \;\; \left[1 + K_1F'(e)\right] < 0 \;\; или \;\; \left|K_1F'(e)\right| > 1 \\ e < 0; \;\; тоже \;\; самое. \end{cases}$$

6 Лекция №6. Частотный критерий абсолютной устойчивости состояния равновесия

Данный критерий, автором которого является В.М. Попов, непосредственно применим к одноконтурной нелинейной САР с однозначной статической характеристикой нелинейного элемента и устойчивой линейной частью ЛЧ.

Класс нелинейности в данном случае определяется по принадлежности статической характеристики нелинейного элемента углу между двумя прямыми с угловыми коэффициентами k и r (k > r), т.е. по выполнению неравенства $rx \le F(x) \le kx$ (рисунок 6.1). В частности, r может быть равно 0, как и принято в критерии Попова для $0 \le F(x) \le kx$.

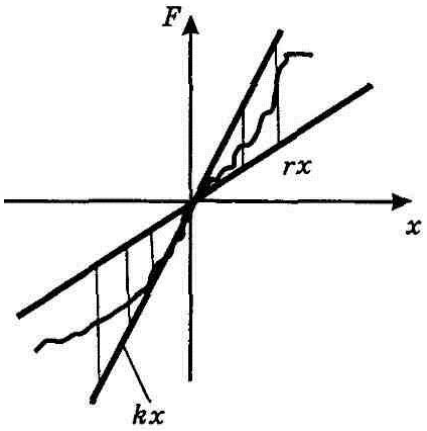


Рисунок 6.1 - Статические характеристики НЭ

Этот критерий дает достаточное условие устойчивости состояния равновесия в точке x=0. Состояние равновесия устойчиво, если выполняется неравенство:

$$\mathrm{Re}\{(1+j\omega q)W_{Л}(j\omega)\}+\frac{1}{k}>0, \qquad (6.1)$$

где q - произвольная вещественная величина и $0 \le \omega \le \infty$.

Проще использовать графический вариант критерия, для вывода которого примем $W_л(j\omega) = U_л(\omega) + jV_л(\omega)$ и преобразуем неравенство (6.1) к виду:

$$U_{Л}(\omega)-q\omega V_{Л}(\omega)+\frac{1}{k}>0. \qquad (6.2)$$

В дальнейшем перейдем к преобразованной АФХ линейной части САР:

$$W_{ЛП}(\omega)=U_{ЛП}(\omega)+jV_{ЛП}(\omega), \qquad (6.3)$$

где $U_{лп}(\omega) = U_л(\omega)$, $V_{лп}(\omega) = \omega V_л(\omega)$.

Следовательно, преобразование состоит из умножения мнимой части $W_л(j\omega)$ на соответствующее значение частоты.

С учетом (6.3) неравенство (6.2) примет вид:

$$U_{ЛП}(\omega)-qV_{ЛП}(\omega)+\frac{1}{k}>0. \qquad (6.4)$$

Запишем равенство, получаемое из (6.4) заменой знака неравенства на знак равенства:

$$U_{ЛП} - qV_{ЛП} + \frac{1}{k} > 0. \qquad (6.5)$$

Это уравнение прямой Попова, которая проходит через точку (-1/k; j0) вещественной оси с произвольным угловым коэффициентом, определяемым значением q.

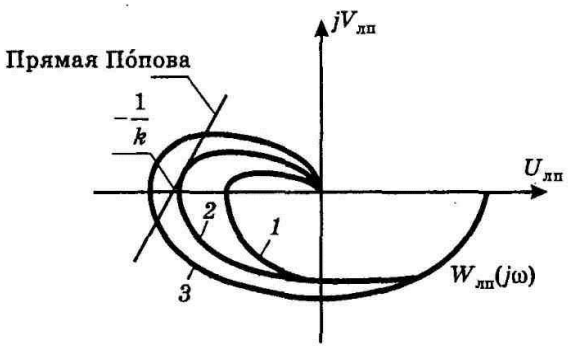


Рисунок 6.2 - Графический метод определения устойчивости

Неравенство (6.4), а значит, и (6.1), будут выполняться правее прямой Попова, так как увеличение $U_{лп}$ при $V_{лп}$ = const делает левую часть (6.5) положительной. Отсюда следует геометрическая интерпретация критерия: чтобы состояние равновесия САР было устойчиво, достаточно провести прямую Попова, расположенную целиком слева от преобразованной АФХ ее линейной части. Приведенным на рисунке 6.2 графикам АФХ соответствуют следующие состояния равновесия: 1 - устойчивое, 2 - на границе устойчивости, 3 - неустойчивое. При выпуклой АФХ получается такой же результат, как и по критерию Найквиста при замене нелинейности F(x) на kx. Такие САР называют устойчивыми в гурвицевом угле [0, k].

Достоинство рассматриваемого критерия в том, что сложность исследования не возрастает с увеличением порядка уравнения и не требуется выбирать функцию Ляпунова.

Частотный метод исследования абсолютной устойчивости получил значительное развитие по следующим направлениям:

– при неустойчивости линейной части;
– для исследования устойчивости процесса;
– для определения степени устойчивости;
– для расчета корректирующих устройств;
– для построения алгебраического критерия в виде условия положительности рационального полинома и выделения областей абсолютной устойчивости.

7 Лекция №7. Стохастические системы

7.1 Определения

Стохастические системы – это системы, на вход которых действуют случайные сигналы.

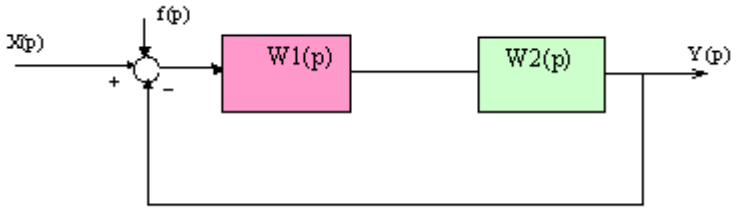


Рисунок 7.1 – Структурная схема системы

Процесс изменения сигналов в системе может быть стационарным и нестационарным. Стационарный процесс в широком смысле – это процесс, в котором математическое ожидание и дисперсия не изменяются в любой момент времени:

$M_x(t) = M_x$ – математическое ожидание сигнала;
$R_{xx}(t, \tau) = R_{xx}(\tau)$ – корреляционная функция. (7.1)

Если одно из условий (7.1) не выполняется, то процесс является нестационарным (рисунки 7.2 и 7.3).

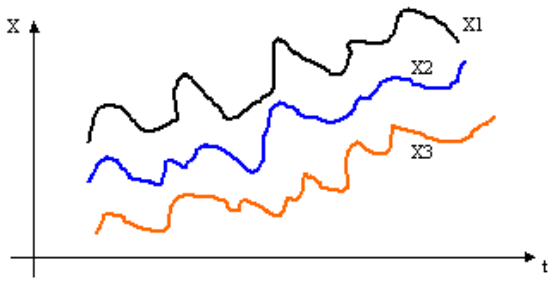


Рисунок 7.2 – Временная диаграмма нестационарного процесса по отношению к математическому ожиданию

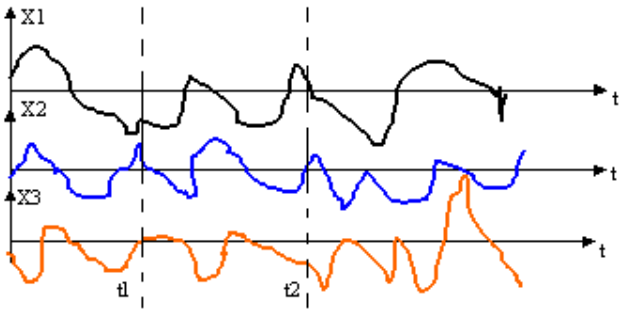


Рисунок 7.3 – Вид нестационарного процесса в отношении дисперсии

Нестационарными системами называют системы, процессы в которых описываются линейными дифференциальными уравнениями с переменными во времени коэффициентами:

$$[a_0(t)p^n + a_1(t)p^{n-1} + ... + a_n(t)]Y(t) = [b_0(t)p^m + b_1(t)p^{m-1} + ... + b_m(t)]X(t), \quad (7.2)$$

где Y(t) и X(t) – выходная и входная величины;

$a_n(t)$, $b_m(t)$ – переменные коэффициенты, являющиеся известными функциями времени и задаваемые либо графически, либо аналитически;

p=d/dt – оператор дифференцирования.

Для нестационарных систем понятие устойчивости имеет некоторую специфику. Действительно, если предположить, что входная величина системы $x(t) = x_0 = Const$ и к моменту времени t_1 переходные процессы в системе закончились, т.е. если принять $p = d/dt = 0$, то из (7.2) для $t > t_1$ имеем:

$$Y(t) = [b_m(t)/a_n(t)]X_0. \quad (7.3)$$

Из (7.3) видно, что в зависимости от характера изменения коэффициентов $a_n(t)$ и $b_m(t)$ в нестационарной системе даже при постоянной входной величине X_0 выходная величина Y(t) может изменяться неограниченно долго. Так как время работы реальных систем ограничено, то установившегося значения в нестационарной системе за время ее работы не наблюдается, и поэтому понятие асимптотической устойчивости теряет практический смысл.

7.2 Спектральные и автокорреляционные функции

Любой случайный сигнал обладает спектром частот, который можно описать спектральной функцией S(ω), а зависимость уровней сигнала в разные промежутки времени описывается корреляционной функцией R(t).

Помехи, влияющие на работу систем, носят случайный характер и поэтому могут быть описаны с помощью этих характеристик. Наиболее часто встречающаяся помеха, обладающая характеристиками, приведенными на рисунке 7.4, называется белым шумом.

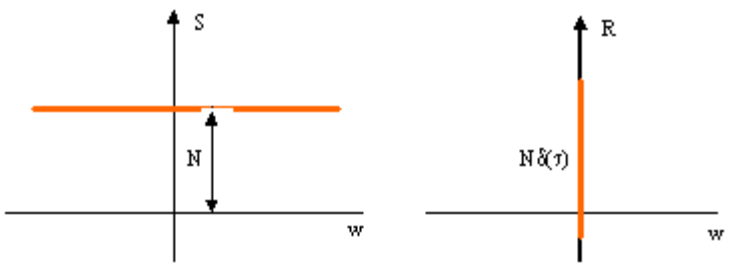


Рисунок 7.4 – Характеристики белового шума

Помеха, у которой спектральная плотность постоянна только на определенном, ограниченном диапазоне частоты, называется розовым шумом.

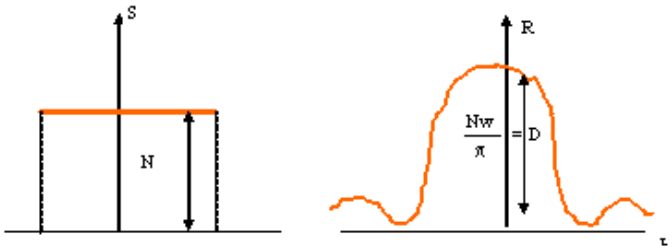


Рисунок 7.5 – Характеристики розового шума

Зависимость спектральной плотности от корреляционной функции можно выразить через преобразование Лапласа, т.е. перейти из области t в область частоты p=jω.

$$Sxx = \int_{-\infty}^{\infty} Rxx(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau . \qquad (7.2)$$

Дисперсия связана со спектральной плотностью следующим выражением:

$$D_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Sxx(\omega) d\omega . \qquad (7.3)$$

По известному комплексному коэффициенту передами Φ(jω) замкнутой системы и спектральной плотности входного сигнала можно определить спектральную плотность выходного сигнала по формуле:

$$S_{\hat{O}}(\omega) = \left|\hat{O}(j\omega)\right|^2 \cdot S_X(\omega). \qquad (7.4)$$

Как видно из (7.4), спектральная плотность на выходе изменяется от входной только по амплитуде (по модулю), а частотная зависимость спектральной плотности обоих сигналов одинаковая.

7.3 Интегральные методы оценки качества системы

Интегральные методы позволяют по некоторым определенным интегралам вида (7.5) судить о быстродействии (первый и второй интеграл), а также о быстродействии и колебательности (третий интеграл) процесса. Метод интегральных оценок заключается в определении параметров системы, соответствующих минимуму интегральной ошибки.

$$\int_0^{\infty} x dt; \quad \int_0^{\infty} x^2 dt; \quad \int_0^{\infty} (x^2 + \tau^2 x^2) dt . \qquad (7.5)$$

При использовании первого интеграла (7.5) стремятся получить минимум линейной интегральной ошибки, представляющую площадь, ограниченную кривой переходного процесса и осями координат (рисунок 7.6).

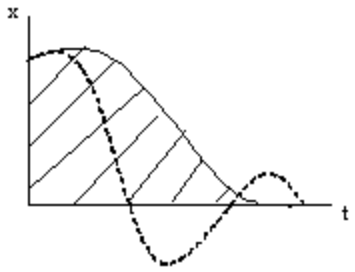


Рисунок 7.6 – Оценка быстродействия по линейной интегральной ошибке

При апериодическом процессе интегральная ошибка зависит от интенсивности спадания величины x(t). Время регулирования тем меньше, чем меньше интегральная ошибка. В случае перерегулирования и колебательного процесса первый интеграл (7.5) неприменим, т.к. разные знаки ординат кривой могут дать суммарную интегральную ошибку минимальной при относительно большом времени регулирования.

В практике больше распространена оценка быстродействия по квадратичной интегральной ошибке (второй интеграл 7.5):

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2(t)dt . \qquad (7.6)$$

Квадратичная ошибка связана с корреляционной функцией, математическим ожиданием и дисперсией следующим выражением:

$$I = R_{\varepsilon}(0) = M[\varepsilon^2(t)] = D_{\varepsilon}.$$

Используя выражение для дисперсии (7.3), получим:

$$I = R_{\varepsilon}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{\varepsilon}\ (\omega)d\omega . \qquad (7.7)$$

Зная спектральные плотности задающего сигнала $S_x(\omega)$ и помехи $S_f(\omega)$, можно воспользоваться (7.4) для определения квадратичной ошибки:

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \{\left|\Phi_0(j\omega) - \Phi(j\omega)\right|^2 S_x(\omega) + \left|\Phi(j\omega)\right|^2 S_f(j\omega)\}\, d\omega , \qquad (7.8)$$

где $\Phi_0(j\omega)$ – комплексный коэффициент передачи замкнутой идеальной системы.

При постоянных и равных по величине спектральных плотностях входного сигнала и помехи $S_x(j\omega) = S_f(j\omega) = 1$, выражение (7.8) примет вид:

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G_\varepsilon(j\omega)}{\left|H_\varepsilon(j\omega)\right|^2}d\omega, \qquad (7.9)$$

где $H_\varepsilon(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + ...+ a_o;$

$G_\varepsilon(j\omega) = b_n(j\omega)^{2n-2} + b_{n-1}(j\omega)^{2n-4} + ...+ b_0.$

Тогда решения интегрирования (7.9) для ПФ первого, второго и третьего порядков будут иметь вид:

$$J_1 = \frac{b_1}{2a_1a_0};\quad J_2 = \frac{-b_2 + \frac{a_2b_1}{a_0}}{2a_2a_1};\ J_3 = \frac{-a_1b_3 + a_3b_2 - \frac{a_3a_2b_1}{a_0}}{2a_3(a_3a_0 - a_2a_1)}. \qquad (7.10)$$

Пример. Известны ПФ разомкнутой системы АСД (радар) и спектральные плотности сигнала и помехи, а также значения параметров:

$$W_p(p) = \frac{K}{p(1+T_1p)};$$

$$S_П(\omega) = N,\quad S_C(\omega) = \frac{2T_CD}{1+\omega^2T_C{}^2},$$

где $T_1 = 0{,}1,$

$T_C = 20c,$

$D = 100\ град^2,$

$N = 0{,}01\frac{град}{Гц}.$

Требуется определить оптимальный коэффициент усиления системы $К_{опт}$ и дисперсию ошибки D_ε определения слежения.

ПФ замкнутой системы АСД равна:

$$\Phi(p) = \frac{K}{T_1p^2 + p + K}.$$

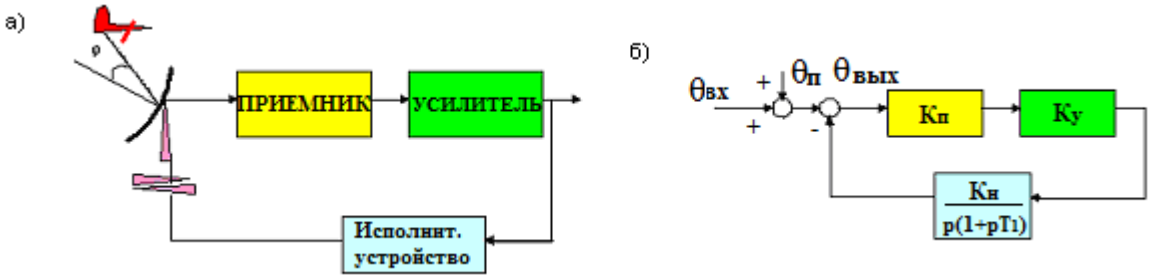


Рисунок 7.7 – Функциональная и структурная схема АСД

Определим квадратичную ошибку (дисперсию) системы по помехе по (7.8), и используя решение интегрирования для J_2 (7.10):

$$D_{П} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 N d\omega}{/T_1(j\omega)^2 + (j\omega) + k/^2} = \frac{\frac{k^2 N T_1}{k}}{2T_1 * 1} = \frac{kN}{2}.$$

Аналогично определяется дисперсия ошибки по сигналу. Затем, суммируя полученные дисперсии по сигналу и помехи, получим общую дисперсию ошибки системы:

$$D\varepsilon = Dn + Dc = \frac{kN}{2} + \frac{D(T_1 + Tc + kT_1Tc)}{T_1 + Tc + kTc^2} = 0{,}37^{\ 0}.$$

Возьмем производную по К и приравняем к нулю:

$$\frac{\partial D\varepsilon}{\partial k} = \frac{N}{2} - \frac{DTc(Tc^2 - T1^2)}{(T_1 + Tc + kTc^2)^2} = 0.$$

Решив это уравнение относительно К, определим $К_{опт}$, при котором ошибка системы будет минимальная:

$$K_{опт} = \sqrt{\frac{2D(Tc^2 - T_1^2)}{NTc^3}} - \frac{Tc + T_1}{Tc^2} = 4.$$

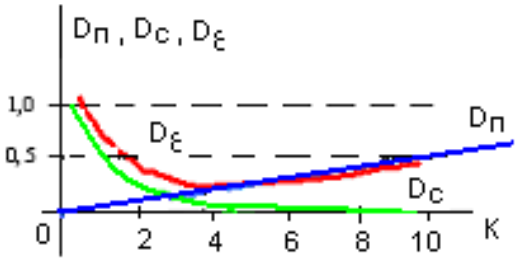


Рисунок 7.8 – Зависимость $D_ε$ от коэффициента усиления К системы

8 Лекция №8. Перспективные системы управления

Адаптивной системой является система, в которой при изменении параметров объекта автоматически обеспечиваются заданные показатели качества. Например, прокатный стан – объект регулирования. Листовая сталь, постепенно проходя через вращающиеся валики, уменьшается в толщине до заданной. Текущие параметры объекта (толщина листа) изменяются, но заданные показатели качества регулирования двигателя должны оставаться неизменными (например, запас по амплитуде и фазе).

8.1 Классификация адаптивных систем

При решении технических задач, связанных с использованием самоприспосабливающихся систем (СПС), принципиальное значение имеет классификация по характеру процесса адаптации (рисунок 8.1).

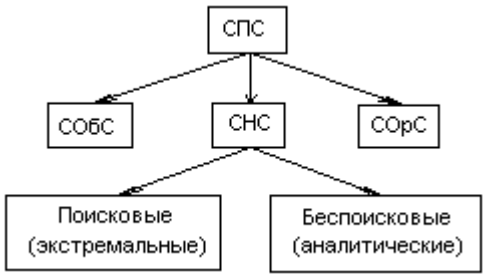


Рисунок 8.1 – Классификация адаптивных систем

Самонастраивающиеся системы (СНС), относящиеся к этой линии классификации, представляют собой системы, в которых адаптация при изменении условий работы осуществляется путем изменения параметров и управляющих воздействий.

Самоорганизующимися (СОрС) называются системы, в которых адаптация осуществляется за счет изменения не только параметров и управляющих воздействий, но и структуры. Самоорганизующиеся системы для своего функционирования используют меньший объем априорной информации по сравнению с самонастраивающимися, поэтому они являются системами более сложного типа.

Самообучающаяся (СОбС) - это система автоматического управления, в которой оптимальный режим работы управляемого объекта определяется с помощью управляющего устройства, алгоритм которого автоматически целенаправленно совершенствуется в процессе обучения путем автоматического поиска. Поиск производится с помощью второго управляющего устройства, являющегося органической частью самообучающейся системы.

Самонастраивающиеся системы в свою очередь делятся на *поисковые,* или *экстремальные,* и *беспоисковые,* или *аналитические.*

В *поисковых* системах изменение параметров управляющего устройства или управляющего воздействия осуществляется в результате поиска условий *экстремума* показателей качества. Поиск условий экстремума в системах этого типа осуществляется с помощью *пробных воздействий* и *оценки полученных результатов.*

В *беспоисковых* системах определение параметров управляющего устройства или управляющих воздействий производится на основе *аналитического* определения условий, обеспечивающих заданное качество управления без применения специальных поисковых сигналов.

С точки зрения необходимого объема априорной информации обычные беспоисковые самонастраивающиеся системы представляют наиболее простой класс адаптивных систем, так как они требуют большего объема априорной информации, чем поисковые самонастраивающиеся системы. Однако важным достоинством беспоисковых (аналитических) систем является отсутствие поисковых движений. Поэтому время самонастройки обычных беспоисковых самонастраивающихся систем, как правило, значительно меньше, чем у поисковых систем.

При применении адаптивных систем решаются следующие основные задачи:

– в процессе функционирования системы управления при изменении параметров, структуры и внешних воздействий обеспечивают такое управление, при котором сохраняются заданные динамические и статические свойства системы;

– в процессе проектирования и наладки при начальном отсутствии полной информации о параметрах, структуре объекта управления и внешних воздействиях производят автоматическую настройку системы в соответствии с заданными динамическими и статическими свойствами.

8.2 Синергетические оптимальные системы

Название «синергетика» произошло от греческого «синергос» - «вместе действующий» и обозначает общенаучное направление, изучающее совместные действия нелинейных динамических систем различной природы. Базовые положения синергетической теории заключаются в следующем.

В синергетических системах в процессе самоорганизации происходит уменьшение числа степеней свободы, т.е. управляемая декомпозиция фазового пространства, путем выделения лишь нескольких координат, к которым подстраиваются остальные. Именно эти так называемые макропеременные $\psi_i(x_1, ...,x_n)$ и определяют основные особенности динамики системы, открывая возможность построения упрощенных агрегированных моделей.

Следствием этого процесса самоорганизации является образование в фазовом пространстве так называемых аттракторов - инвариантных многообразий $\psi_i = 0$, к которым притягиваются траектории системы.

Каждый аттрактор имеет свою область притяжения в фазовом пространстве, отделенную границей от других областей. Причем направленная самоорганизация обеспечивает выход на желаемый аттрактор за счет соответствующего выбора алгоритма изменения управляющих воздействий как функций координат системы.

Аналитическое конструирование агрегированных регуляторов состоит из следующих этапов:

1) Постановка задачи. Объект управления (ОУ) описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x,u), \tag{8.1}$$

где $x \in R^{n\times 1}$ - вектор состояния.

Требуется найти закон управления $u^o(x)$, который обеспечивает перевод изображающей точки из произвольного начального состояния сначала в окрестность инвариантного многообразия $\psi(x_1, \ldots, x_n) = 0$, а затем дальнейшее устойчивое асимптотическое движение вдоль этого многообразия в желаемое состояние, в частности, в начало координат.

Примером решения подобной задачи может служить известная оптимальная по быстродействию система второго порядка, в которой $\psi(x_1, x_n) = 0$ - уравнение линии переключения, с которой изображающая точка должна сначала сблизиться, а затем двигаться вдоль нее к началу координат.

2) Выбор агрегированных макропеременных, т.е. функций $\psi_i(x_1, \ldots, x_n)$.

Эти функции могут строиться различными способами, и их поиск является главной задачей проектирования. Этот поиск, пока в большей мере, носит эвристический характер.

3) Нахождение закона оптимального управления производится без решения оптимизационной задачи. Изменение макропеременной $\psi/(t)$ считается оптимальным, если минимизируется так называемый сопровождающий оптимизирующий функционал, имеющий, в частности, вид улучшенной квадратичной оценки:

$$J_{20} = \int_0^\infty \left[\psi^2(t) + T^2\dot{\psi}^2(t)\right]dt. \tag{8.2}$$

Как известно, минимум такому функционалу доставляет асимптотически стремящаяся к 0 экспонента, являющаяся общим решением так называемого функционального уравнения:

$$T\dot{\psi}(t) + \psi(t) = 0. \tag{8.3}$$

Затем определяют производную от макропеременной по времени, как от сложной функции в силу уравнений объекта. Эту производную и саму макропеременную подставляют в функциональное уравнение и находят отсюда искомый закон оптимального управления. Сопровождающий оптимизирующий функционал с учетом $\psi(t)$ позволяет также найти критерий качества, по которому оптимизируется синтезируемая система. Он содержит высокие степени координат, что существенно улучшает важные показатели качества в отношении быстродействия, перерегулирования, демпфирования колебаний и др. Особенно эти достоинства проявляются в областях значительных отклонений изображающей точки от заданного состояния.

Пример. Заданы уравнения движения самолета в вертикальной плоскости:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 u \end{cases},$$

где x_1 - угол атаки;

u - отклонение руля высоты.

1-й вариант:

1) Агрегированную макропеременную выберем линейной:

$$\psi(x_1, x_2) = \beta_1 x_1 + x_2.$$

2) Находим производную от нее по времени с учетом уравнений ОУ:

$$\dot{\psi} = \beta_1 x_2 + \dot{x}_2 = \beta_1 x_2 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 u.$$

3) Подставляя ψ и $\dot{\psi}$ в функциональное уравнение, находим закон оптимального управления:

$$u^0 = -\frac{1}{a_3}\left(a_1 + \frac{\beta_1}{T}\right)x_1 - \frac{1}{a_3}\left(a_2 + \beta_1 + \frac{1}{T}\right)x_2.$$

4) Подставляя этот закон в уравнения объекта, получим уравнения замкнутой системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{\beta_1}{T} x_1 - \left(\beta_1 + \frac{1}{T}\right)x_2 \end{cases},$$

условия устойчивости которой $p_x > 0$ и $T > 0$.

Совместное решение приводит к одному уравнению:

$$\frac{T}{\beta_1}\ddot{x}_1 + (T + \frac{1}{\beta_1})\dot{x}_1 + x_1 = 0,$$

которое при $\xi = \frac{1+\beta_1 T}{2\sqrt{\beta_1 T}} \geq 1$ эквивалентно апериодическому звену второго порядка с особой точкой типа «устойчивый узел» (рисунок 8.2).

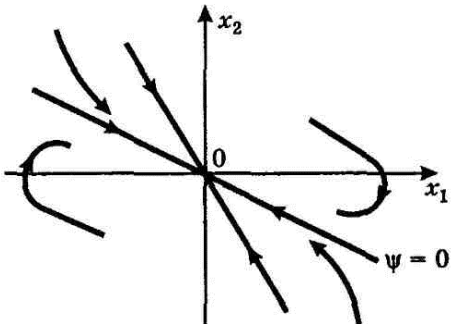


Рисунок 8.2 - Фазовые траектории оптимального управления

Многообразие $\psi = 0$, т. е. $x_2 = -\beta_1 x_1$, является прямолинейной фазовой траекторией, стремящейся к началу координат.

2-й вариант:

1) Если применить нелинейную макропеременную:

$$\psi = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^3 + x_2,$$

то аналогично определим нелинейный закон оптимального управления:

$$u^0 = -\frac{1}{a_3}\left[\left(a_1 + \frac{\beta_1}{T}\right)x_1 - \left(a_2 + \beta_1 + \frac{1}{T}\right)x_2 - \frac{\beta_2}{T}x_1^3 - 3\beta_2 x_1^2 x_2\right].$$

Из уравнения многообразия $\psi = 0$ найдем x_2 и, подставив в первое уравнение ОУ, получим нелинейное дифференциальное уравнение движения системы вдоль многообразия $\psi = 0$ к началу координат (рисунок 8.3):

$$\dot{x}_1 = -\beta_1 x_1 - \beta_2 x_1^3.$$

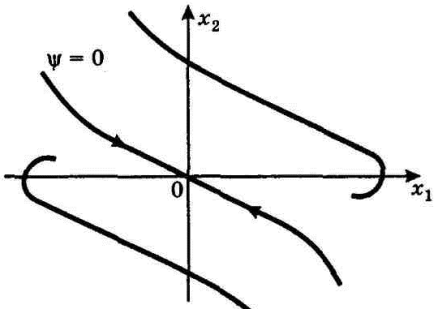


Рисунок 8.3 - Фазовые траектории оптимального управления

Как и в первом варианте, это уравнение более низкого (первого) порядка, чем уравнение ОУ. При $\beta_1>0$ и $\beta_2>0$ свободное движение устойчиво в целом.

9 Лекция №9. Интеллектуальные системы автоматического управления

Создание систем, ориентируемых для работы в условиях неполноты или нечеткости исходной информации, неопределенности внешних возмущений и среды функционирования, требует привлечения нетрадиционных подходов к управлению с использованием методов и технологий искусственного интеллекта. Такие системы, названные интеллектуальными системами управления, образуют совершенно новый класс. Это понятие возникло в начале 80-х гг. XX в.

В качестве базовых выделяются 4 интеллектуальные технологии:

– технология экспертных систем, ориентированная на обработку знаний с явной формой представления в виде продукционных правил;

– технология нечеткой логики, ориентированная на обработку логико-лингвистических моделей представления знаний с помощью продукционных правил и размытых множеств;

– технология нейросетевых структур с неявной формой представления знаний, скрытых в архитектуре сети, параметрах нейронов и связей;

– технология ассоциативной памяти, ориентированная на обработку знаний с неявной формой представления в виде гиперповерхности в многомерном пространстве признаков.

Отсюда, в частности, видно, что основной отличительной чертой интеллектуальных систем автоматического управления является возможность системной обработки знаний, под которыми понимается проверенный практикой результат познания деятельности, верное ее отражение в мышлении человека. Знания позволяют отнести сложившуюся ситуацию к некоторому классу, для которого требуемое управление считается известным согласно теории ситуационного управления Д.А. Поспелова и его научной школы. Одна из передовых тенденций в области обработки знаний состоит в интеграции различных интеллектуальных технологий для сочетания их преимуществ.

Организация интеллектуальных систем автоматического управления производится по следующим пяти принципам:

– наличие тесного информационного взаимодействия интеллектуальной системы автоматического управления с реальным внешним миром при использовании информационных каналов связи;

– наличие прогнозов изменения внешнего мира и собственного поведения системы;

– многоуровневый характер иерархической структуры в соответствии с правилом: повышение интеллектуальности и снижение требований к точности по мере повышения ранга иерархии;

– сохранение функционирования при разрыве связей от высших уровней иерархии;

– повышение интеллектуальности и совершенствование собственного поведения.

9.1 Экспертные информационные системы автоматического управления

Эти системы могут строиться по различным схемам, известным для адаптивных систем.

В схеме рисунка 9.1 коррекция значений коэффициентов регулятора осуществляется экспертной системой ЭС на основе информации об изменении параметров ОУ, полученной в результате проведения параметрической идентификации, которая основана на представлении ОУ в виде линейной модели или нелинейного звена (модель Гаммерштейна).

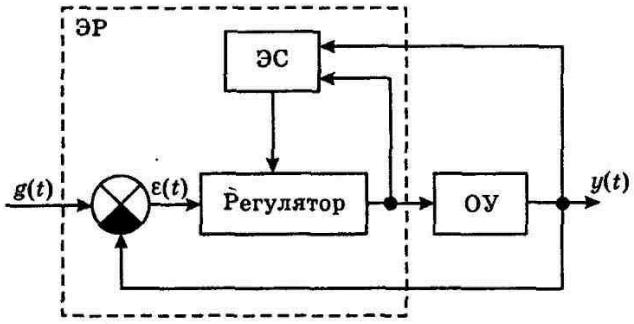


Рисунок 9.1 - Система с коррекцией регулятора ЭС

Если эти модели неприменимы, то эта схема будет неэффективна. Кроме того, для систем с высокой степенью нелинейности может потребоваться очень большое число членов ряда, аппроксимирующего нелинейность (для нелинейного элемента типа «зона нечувствительности и ограничение» - более 10), что снижает быстродействие.

Наиболее эффективной в этом случае является схема рисунка 9.2, использующая принцип параметрической ООС, второй метод Ляпунова и эталонную модель. В качестве регулятора в основном контуре обеих САУ обычно используется линейный ПИД-регулятор.

В общем случае под экспертной системой понимается интеллектуальная программа, способная делать логические выводы на основании знаний в конкретной предметной области и обеспечивающая решение определенных задач. Работа экспертного регулятора ЭР условно может быть разбита на 3 этапа в соответствии с архитектурой, показанной на рисунке 9.3.

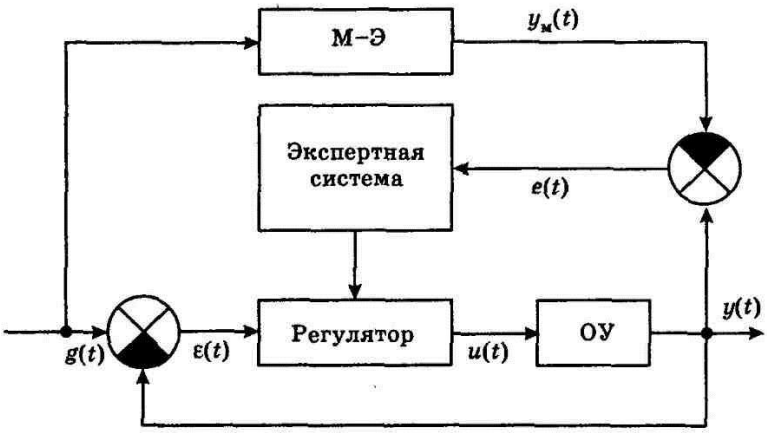


Рисунок 9.2 - Система с коррекцией регулятора ЭС и ЭМ

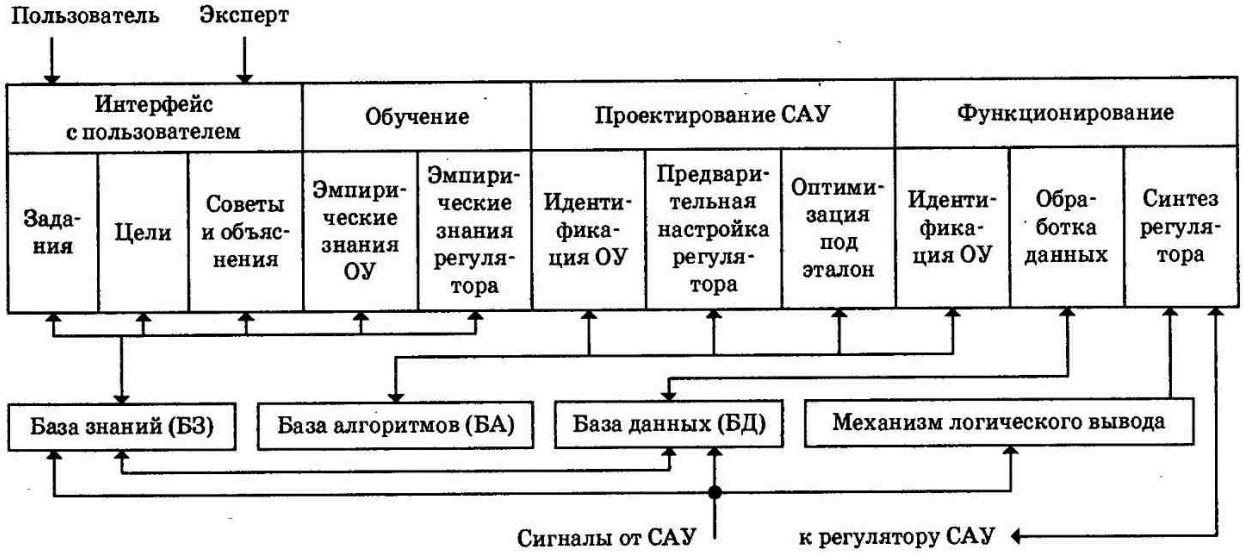


Рисунок 9.3 - Алгоритм работы программы ЭС

На первом этапе решаются задачи проектирования САУ:

– выбор структуры модели ОУ;

– определение параметров ОУ нерекуррентным методом идентификации;

– выбор закона управления;

– предварительная настройка параметров закона управления;

– окончательный синтез параметров закона управления по заданному пользователем критерию качества, в результате чего в пространстве качества определяется «рабочая точка».

На втором этапе решается задача обучения при изменении параметров в окрестности «рабочей точки». Здесь формируются текущие эмпирические знания о динамических свойствах САУ в виде качественной зависимости между изменением параметров модели объекта и регулятора, с одной стороны, и параметрами критерия качества, с другой.

На третьем этапе происходит непрерывное слежение за протекающими процессами и решаются задачи активной самодиагностики: .

– обработка измерений с датчиков;

– оценка измерений параметров САУ как аналитическими методами, так и на основе эмпирических знаний об ОУ;

– коррекция параметров регулятора и ее оценка;

– изменение закона управления (в случае необходимости).

Основной проблемой при создании любой экспертной системы является разработка базы знаний в достаточно узкой и конкретной предметной области, которая может быть решена в 2 этапа:

– формализация и структурирование экспертных знаний о предметной области (ТАУ);

– формализация представлений этих знаний с помощью моделей искусственного интеллекта.

База алгоритмов содержит правила идентификации, позволяющие осуществить получение или уточнение по экспериментальным данным математической модели системы, выраженной посредством того или иного математического аппарата.

9.1.1 Рекуррентные методы при параметрической идентификации.

Наибольшее распространение при параметрической идентификации линейных ОУ получили следующие рекуррентные методы:

– ошибки предсказания (Гаусса-Ньютона, градиентный и др.);

– наименьших квадратов;

– инструментальных переменных;

– модулирующих функций.

При дискретизации по времени модель ОУ представляет собой дискретную передаточную функцию:

$$W_{OY}(q) = \frac{B(q)}{A(q)}, \tag{9.1}$$

где $q = z^{-1}$ - оператор сдвига назад,

$$A(q) = \sum_{i=1}^{n_a} a_i \cdot q^i, \tag{9.2}$$

$$B(q) = \sum_{i=1}^{n_b} b_i \cdot q^i. \tag{9.3}$$

Рассмотрим эти методы с точки зрения возможности формирования знаний для базы знаний экспертного регулятора.

При идентификации методом ошибки предсказания определяется оценка параметров модели за N итераций:

$$\hat{\theta}_N = \arg\min V_N(\theta), \tag{9.4}$$

где вектор параметров

$$\theta^T = [a_1, \ldots, a_{na}; b_1, \ldots, b_{nb}], \tag{9.5}$$

норма ошибки предсказания

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} L(\varepsilon(k,\theta)). \tag{9.6}$$

Ошибка предсказания ε(k, θ) - разность между выходным сигналом и его прогнозом на основе модели в k-й момент времени, функция L от которой должна быть четной. Например, методу наименьших квадратов соответствует выбор $L(\varepsilon) = 0.5\varepsilon^2$.

При таком выборе L(ε) оценка $\hat{\theta}_N$ может быть найдена аналитически через регрессионный вектор ψ(t), зависящий от входного u(t) и выходного y(t) сигналов.

При идентификации методом инструментальных переменных оценка $\hat{\theta}_N$ также определяется аналитически через ψ(t) и инструментальные переменные (инструменты):

$$\xi[k] = [-y(k-1,\theta), \ldots -y(k-n_a,\theta), u(k-1), \ldots, u(k-n_b)]^T. \tag{9.7}$$

На основе рассмотрения этих методов можно сформулировать следующие ключевые правила базы знаний экспертного регулятора.

Правило 1. Если идентифицируется объект управления и ошибка (точнее, функция L(ε) предсказания зависит от прошлых данных, то использовать метод инструментальных переменных, иначе использовать метод наименьших квадратов.

Правило 2. Если выбрать метод инструментальных переменных, то инструменты вычислить на основе оценки параметров модели методом наименьших квадратов и определить параметры объекта управления методом инструментальных переменных.

Правило 3. Если точность идентификации недостаточна, то использовать метод ошибки предсказания, иначе идентификацию закончить и перейти к процедуре дискретизации по времени.

Интервал дискретизации должен обеспечивать минимизацию потерь информации при переходе от непрерывного времени к дискретному. Однако предположение о повышении точности оценки модели с увеличением частоты выборки в общем случае неверно, так как может привести к большим погрешностям оценок постоянных времени и коэффициентов демпфирования.

Метод модулирующих функций не требует перехода от непрерывного времени к дискретному, так как для определения указанных выше параметров объекта управления происходит вычисление площадей под кривыми, образованными перемножением переходной функции на специально формируемые функции в виде затухающих экспонент. После вычисления площадей составляется и решается система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов полиномов числителя и знаменателя передаточной функции объекта управления.

Так как класс входных сигналов при использовании метода модулирующих функций ограничен ступенчатыми функциями, то он применим только для предварительной идентификации.

При идентификации нелинейного объекта управления или разомкнутой системы автоматического управления обычно встречается последовательное соединение статического нелинейного элемента (как правило, типа «зона нечувствительности» и «ограничение») и линейной части (так называемая модель Гаммер-штейна), что видно на рисунке 9.4. Нелинейность для идентификации представляется в виде полинома:

$$f(u) = a_1 u + a_2 u^2 + \ldots + a_m u^m, \qquad (9.8)$$

где a_i - коэффициенты, подлежащие определению.

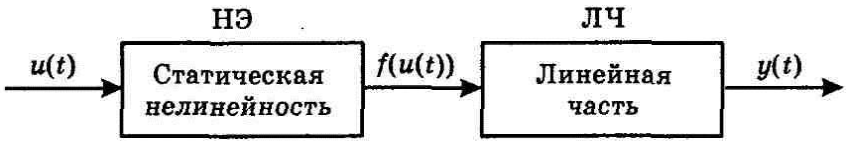


Рисунок 9.4 - Схема разомкнутой нелинейной системы

Наиболее эффективным способом для этого является принцип покомпонентной минимизации, который и следует заложить в базу знаний экспертного регулятора. Он заключается в поочередном спуске по определенным группам параметров при фиксированных остальных неизвестных. При этом покомпонентно оцениваются параметры нелинейного элемента и линейной части. На вход целесообразно подавать сигнал u(t) из *n* синусоид с различными частотами:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} iA_{0n} \sin(\omega_i t). \qquad (9.9)$$

Опорную амплитуду следует определить по эмпирическому правилу, согласно которому суммарная амплитуда u{t) должна превосходить величину а + Ъ примерно в 10 раз (рисунок 9.5).

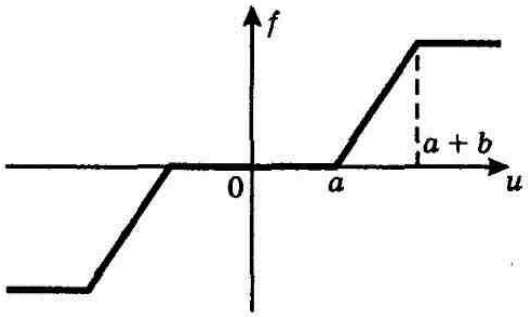


Рисунок 9.5 - Определение опорной амплитуды

9.1.2 Алгоритмы синтеза.

1) Синтез по интегральному квадратичному критерию.

Такой критерий имеет вид:

$$I_{2n} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=0}^{n} \tau_i^{2i} (\varepsilon^{(i)}(t))^2 \, dt, \qquad (9.10)$$

где ε - сигнал рассогласования;

$\varepsilon^{(i)}$ - i-я производная по времени;

τ_i - весовые коэффициенты;

$\tau_0 = 1$;

n = 0, 1, 2,...

Знания о выборе коэффициентов в основном состоят в том, что минимум I_{2n} достигается на экстремали, являющейся решением дифференциального уравнения Эйлера-Пуассона, но это обстоятельство пока не используется, и выбор носит в значительной степени эвристический характер и опирается на следующие правила, содержащиеся в базе знаний экспертного регулятора.

Правило 1. Если принять n = 0 и вычислить перерегулирование, то можно оценить допустимость принятого значения.

Правило 2. Если при n = 0 перерегулирование превышает допустимое значение и идентифицированная разность порядков числителя и знаменателя передаточной функции модели системы меньше трех, то принять n=1 и $\tau_1 = t_{р.ж.}$, иначе принять n=2, $\tau_1 = 2t_{рж}$, $\tau_2 = t^2_{рж}$, где $t_{рж}$ - желаемое время регулирования переходного процесса.

База алгоритмов экспертного регулятора содержит три алгоритма, опирающихся на данный критерий, выбор которых производится по правилам, также содержащимся в базе знаний экспертного регулятора.

2) Синтез по критерию максимальной степени устойчивости

Для линейного объекта управления с уравнением в пространстве состояний:

$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{(i-1)}(t) = k_0 u(t) \qquad (9.11)$$

существует линейное управление

$$u(t) = -\sum_{j=1}^{m} b_j x^{(j-1)}(t), (0 < m < n-1), \qquad (9.12)$$

обеспечивающее максимальную степень устойчивости $\alpha_{опт}$ системы, т. е. наибольшее удаление от мнимой оси ближайших к ней корней характеристического уравнения. Более того, известна система алгебраических уравнений, из которой могут быть найдены как $\alpha_{опт}$, так и $b_{jопт}$, j = 1…m, по алгоритму, содержащемуся в базе алгоритмов экспертного регулятора.

Если объект управления содержит форсирующие звенья, то регулятор должен содержать интегрирующие и дифференцирующие звенья в соответствии с передаточной функцией:

$$W_{рег}(s) = b_0 s^{-l} + \ldots + b_l + b_{l+1} s + \ldots + b_m s^P, \qquad (9.13)$$

причем его порядок m = L + p.

Все интегрирующие звенья регулятора эквивалентным преобразованием структурной схемы должны быть переведены условно в уравнение обобщенного объекта управления, после чего применен известный алгоритм синтеза.

Синтезированная по данному критерию система автоматического управления, как показали экспериментальные исследования, обладает следующим уникальным свойством: в пространстве [Параметры регулятора + Время регулирования + Перерегулирование + Установившаяся ошибка] полученная рабочая точка располагается на «склоне оврага». Поэтому оказывается возможным улучшение одного или двух прямых показателей качества, сопровождающееся ухудшением остальных показателей. Использование этого эмпирического знания позволяет сформулировать следующее правило повышения установившейся точности, которая не может быть задана априорно.

Если требуется увеличить точность системы автоматического управления в установившемся режиме, то следует перейти в режим накопления знаний о свойствах пространства качества системы и, увеличивая коэффициент интегральной составляющей регулятора, модифицировать остальные коэффициенты регулятора так, чтобы время регулирования и перерегулирование не превышали допустимых значений.

10 Лекция №10. Основы фази-управления

10.1 Базовые понятия фази-логики

Fuzzy-logic переводится как нечеткая логика. К базовым или первичным понятиям относятся «нечеткое множество» и «лингвистическая переменная». Нечетким множеством М называется подмножество х множества Х, которое характеризуется непрерывной функцией принадлежности (ФП) $\mu_м(x)$, могущей принимать любые значения между 0 и 1, что можно истолковать как «значение х может быть в данном множестве с вероятностью $\mu_м(x)$». Множество М может быть записано как совокупность пар значений х и $\mu_м(x)$, т.е. в виде:

$$M = \{(x, \mu_M(x)); x \in X\}. \quad (10.1)$$

Лингвистической переменной называют такую переменную, которая задана на количественной шкале базисной переменной х и принимает значения в виде слов и словосочетаний. Отдельное лингвистическое значение (терм) задается с помощью одной функции принадлежности, т. е. каждому терму соответствует нечеткое множество.

В теории фази-управления для лингвистического описания выходной переменной ОУ х и сигнала ошибки ε наиболее часто применяют следующий универсальный набор из семи термов с треугольными и трапециевидными функциями принадлежности (рисунок 10.1), образованных с помощью слов «отрицательный» (negative), «положительный» (positive), «большой» (big), «средний» (middle), «маленький» (small) и «приблизительно ноль» (zero): negative big (NB), negative middle (NM), positive small (PS), negative small (NS), zero (ZE), positive middle (PM), positive big (PB).

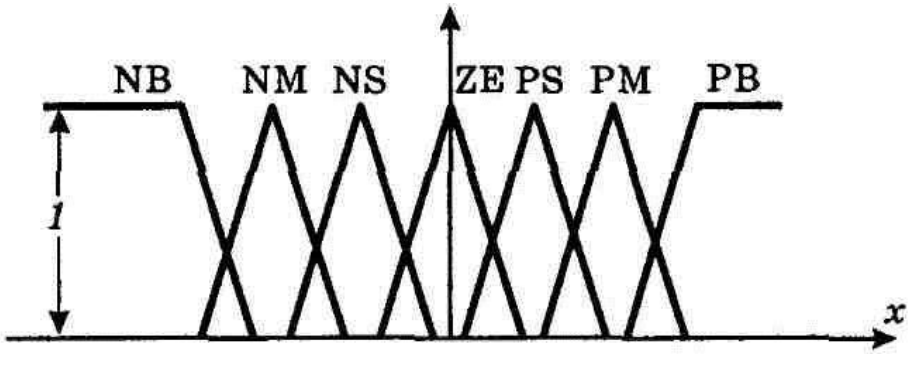


Рисунок 10.1 - Набор термов с функциями принадлежности

Процедура определения значения функции принадлежности $\mu_м(x_i)$, соответствующего конкретному значению x_i переменной х, называется фазификацией.

10.2 Операции с нечеткими множествами

Известные в алгебре логики логические операции «И», «ИЛИ», «НЕ», производимые с логическими переменными, могут быть применены и для нечетких множеств. При этом вместо функций истинности логических переменных, которые могут иметь значения 0 и 1, используются функции принадлежности нечетных множеств:

– операция конъюнкции («И») производится с помощью оператора минимизации:

$$\mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \tag{10.2}$$

и соответствующее ей нечетное множество С называется фази-пересечением двух нечетких множеств А и В.

$$C = A \cap B = \{[x, \mu_C(x)]; x \in X\}. \tag{10.3}$$

На рисунке 10.2 построена функция принадлежности фази-пересечения множеств ZE и N;

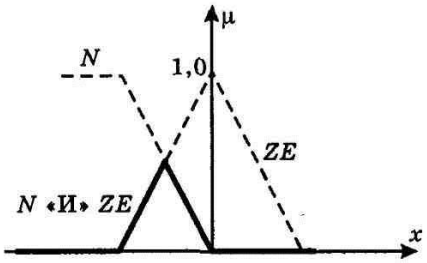


Рисунок 10.2 - Функция принадлежности фази-пересечения множеств

– операция дизъюнкции («ИЛИ») производится с помощью оператора максимизации:

$$\mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \tag{10.4}$$

и соответствующее ей нечетное множество С называется фази-объединением нечетких множеств А и В:

$$C = A \cup B = \{[x, \mu_C(x)]; x \in X\}. \tag{10.5}$$

На рисунке 10.3 построена функция принадлежности фази-объединения множеств ZE и P.

Применительно к задаче управления будем дальше считать, что x - ошибка регулирования, y - управляющее воздействие.

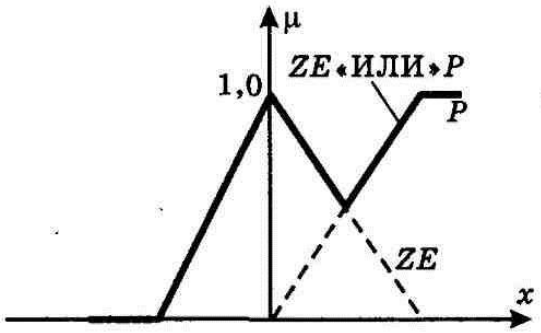


Рисунок 10.3 - Функция принадлежности фази-объединения множеств

Главной операцией фази-логики является процедура нечеткого вывода, основанная на операции импликации (связывание). Эта операция заключается в соединении двух нечетких множеств A и B в правило «ЕСЛИ A ТО B» или A → B, где A - посылка, а B - заключение, причем множества A и B определены на разных базисных множествах x Є X и y Є Y соответственно.

Множество, соответствующее правилу «ЕСЛИ - ТО», образуется из числовых пар (x, y), которые относятся к новому базисному множеству, называемому декартовым произведением P множеств A и B:

$$P = A \times B = \{(x, y);\ x \in A,\ y \in B\}. \tag{10.6}$$

Взаимосвязь между множествами A и B описывается с помощью так называемого отношения R. Оно представляет собой подмножество декартова произведения и образуется по определенному правилу (предписанию) Rxu из элементов A и B:

$$R = \{[(x, y),\ \mu_R(x, y)];\ (x, y) \in A \times B\}, \tag{10.7}$$

где $\mu_R(x,y)$ - функция принадлежности пар (x,y) из декартова произведения AxB к подмножеству, образованному по правилу R_{xy}.

Эту функцию принадлежности можно определить как функцию принадлежности фази-пересечения двух нечетких множеств A и B, т.е. с помощью процедуры минимизации (рисунок 10.4):

$$\mu_R(x, y) = \min_{A \times B} \{\mu_A(x), \mu_B(y)\}. \tag{10.8}$$

Отсюда можно определить функцию принадлежности $\mu_{Bi}(y)$ при фиксированном значении $x = x_i$:

$$\mu_{Bi}(y) = \mu_R(x_i, y) = \min_{y \in B} \{\mu_A(x_i), \mu_B(y)\}. \tag{10.9}$$

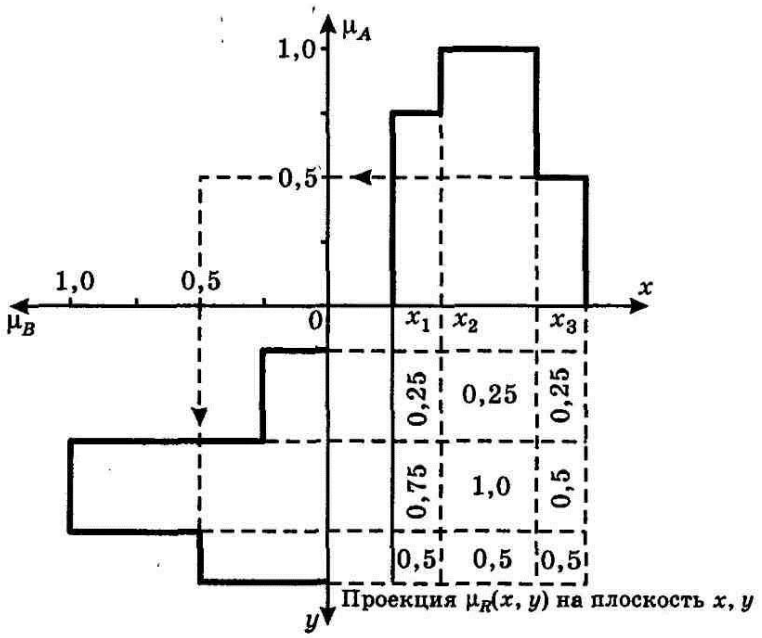


Рисунок 10.4 - Функция принадлежности фази-пересечения двух нечетких множеств

Эта формула выражает правило замены {modus ponens), соответствующее основному правилу логического вывода: вероятность заключения В не может превышать вероятность посылки А. Ее применение дает усеченную функцию принадлежности в виде трапеции 1 (рисунок 10.5).

Другой метод нахождения функции принадлежности правила «ЕСЛИ-ТО» основан на формуле произведения:

$$\mu_{Bi}(y) = \mu_A(x_i) \cdot \mu_B(y), \qquad (10.10)$$

которая приводит к треугольной функции принадлежности 2 (рисунок 10.5).

Нечетное множество А может представлять собой не одно множество, а пересечение («И») или объединение («ИЛИ») нескольких множеств.

Затем производится операция агрегирования (композиции) нескольких правил «ЕСЛИ-ТО», связанных союзом «ИЛИ».

Агрегирование осуществляется путем максимизации функций принадлежности всех объединяемых правил, т. е. результирующая функция принадлежности нечеткого множества B_{ip} величины y при $x = x_i$:

$$\mu_{Bip}(y) = \max_j \{\mu_{Bij}(y)\} = \max_j \{\min[\mu_{Aj}(x_i), \mu_{Bj}(y)]\}, \qquad (10.11)$$

где j - номер правила, j = 1, .., n;

$\mu_{Aj}(x_i)$ - значение ФП посылки А j-го правила при $x = x_i$;

$\mu_{Bj}(y)$ - ФП заключения В j-го правила;

$\mu_{Bij}(y)$ - усеченная ФП заключения В j-го правила, ограниченная сверху на уровне $\mu_{Aj}(x_i)$.

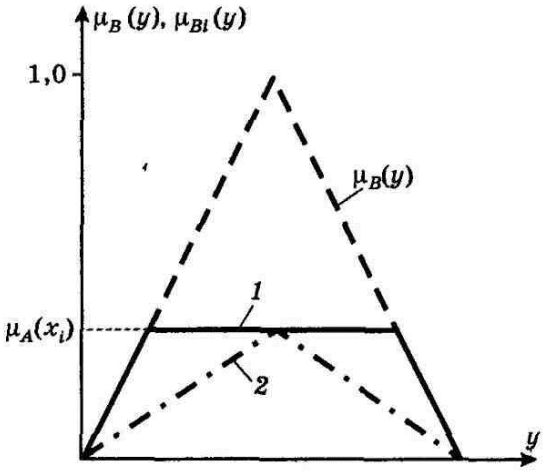


Рисунок 10.5 - Усеченные функции принадлежности

Объединенная процедура импликации и агрегирования нескольких таких правил, связанных союзом «ИЛИ», называется инференцией и составляет основу метода Мамдани. Для того чтобы по полученной таким образом результирующей функции принадлежности, найти конкретные значения y, применяют процедуру дефазификации. При дефазификации используется метод центра тяжести, согласно которому результирующее значение управляющего воздействия находят как абсциссу «центра тяжести» площади, расположенной под графиком функции принадлежности $\mu_{Bip}(y)$ по формуле средневзвешенного значения:

$$y_{Pi} = \frac{\int y \cdot \mu_{Bip}(y)dy}{\int \mu_{Bip}(y)dy}. \qquad (10.12)$$

По алгоритму Сугено значение управления определяется как средневзвешенная величина при управлении объектом с вектором состояния $x^T = [x_1, x_2, ..., x_m]$:

$$y_{Pi} = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\mu_{Aij}}{\sum_{j=1}^{n} \mu_{Aij}}, \qquad (10.13)$$

где заключение (управляющее воздействие) для j-го правила при алгоритме первого порядка определяется формулой:

$$y_{ij} = C_{0j} + C_{1j}x_{1i} + \ldots + C_{mj}x_{mi}, \qquad (10.14)$$

т.е. вычисляется как линейная функция i-й комбинации значений входных величин $x_1, x_2 ..., x_m$.

C_{0j}, C_1j, ..., C_{mj} - постоянные коэффициенты, устанавливаемые экспертами.

μ_{Aij} - значение функции принадлежности посылки j-го правила, соответствующее значениям x_{ki}, k = 1, ..., m; i = 1, 2, 3...

Объединение составных частей посылок осуществляется так же, как и в методе Мамдани, т.е. с помощью процедур минимизации и максимизации соответствующих функций принадлежности.

По алгоритму Сугено нулевого порядка:

$$y_j = C_{0j} + C_{1j} + \ldots + C_{mj} = const, \qquad (10.15)$$

где C_{0j}, ..., C_{mj} - четкие значения управляющего воздействия для всех входов, заданные при формулировке исходных лингвистических данных.

10.3 Применение фази-логики для нечеткого алгоритма автоматического регулирования

Пусть для примера входными переменными являются ошибка регулирования x_1 и ее первая производная по времени x_2. Их базисные множества разделены на 3 нечетких множества N, ZE, P, характеризуемых тремя функциями принадлежности, а алгоритм нечеткого управления содержит 2 правила:

Правило 1. Если x1= ZE И x2 = ZE, ТО y =ZE.

Правило 2. Если x1= N ИЛИ x2 = P, ТО y =P.

Первое правило означает, что если ошибка и ее производная близки к 0, то к 0 близко и управляющее воздействие.

Второе правило означает, что если ошибка отрицательна (управляемая величина меньше), а ее скорость положительна, то и управляющее воздействие положительно, что должно быть направлено на быстрое устранение ошибки.

При фазификации (рисунок 10.6) определяются значения функций принадлежности для нечетких множеств входных воздействий ZE, N, P. В частности, при x_1=-0,15 и x_2=0,35 получим $\mu_{ZE}(x_1) = 0.7,\ \mu_{ZE}(x_2) = 0.3,$ $\mu_N(x_1) = 0.3,\ \ \mu_p(x_2) = 0.7.$

При импликации вначале определяются значения ФП $\mu_{Ai}(x_1,x_2)$ посылок вышеуказанных правил типа «Если А, ТО В», причем при реализации логической операции И в посылке А производится минимизация, а при реализации ИЛИ - максимизация:

$$\mu_{A1}(x_1, x_2) = \min\{\mu_{ZE}(x_1), \mu_{ZE}(x_2)\} = 0.3;$$
$$\mu_{A2}(x_1, x_2) = \max\{\mu_N(x_1), \mu_p(x_2)\} = 0.7.$$

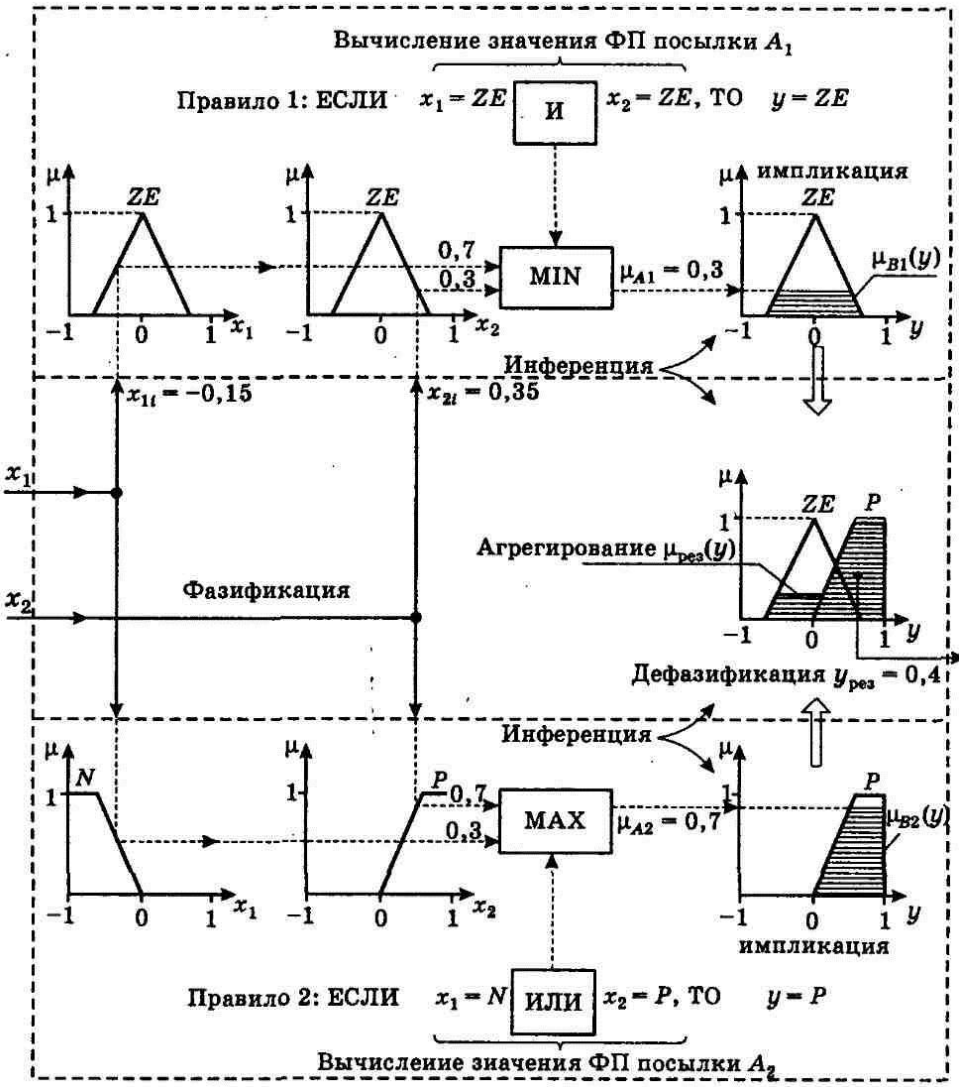


Рисунок 10.6 - Вид нечеткого алгоритма управления

Затем при импликации находят трапецеидальные функции принадлежности $\mu_{B1}(y)$ и $\mu_{B2}(y)$ нечетких множеств управляющего воздействия y как результат «усечения» заданных функций принадлежности множеств $\mu_{ZE}(y)$ и $\mu_P(y)$ соответственно:

$$\mu_{B1}(y) = \min(\mu_{ZE}(y), \mu_{A1}(x_1, x_2));$$
$$\max \mu_{B1}(y) = \mu_{A1}(x_1, x_2) = 0.3;$$
$$\mu_{B2}(y) = \min(\mu_p(y), \mu_{A2}(x_1, x_2));$$
$$\max \mu_{B2}(y) = \mu_{A2}(x_1, x_2) = 0.7.$$

При агрегировании производится объединение найденных усеченных функций принадлежности управляющего воздействия для двух правил путем их максимизации. При этом находится результирующая функция принадлежности управляющего воздействия:

$$\mu_{рез}(y) = \max\{\mu_{B1}(y), \mu_{B2}(y)\}.$$

Импликация и агрегирование, вместе взятые, образуют процедуру инференции.

При дефазификации, как заключительной операции нечеткого управления, по методу центра тяжести находится абсцисса центра тяжести функции принадлежности $\mu_{рез}(y)$:

$$\mu_{рез}(x_1, x_2) = y_{ЦТ}(\mu_{рез}(y)).$$

В данном примере $y_{рез}(-0{,}15,\ 0{,}35) = 0{,}4$, что и подается на объект управления.

Затем эти операции повторяются с большой частотой, т.е. работа нечеткого логического регулятора носит дискретный по времени характер, и его можно рассматривать как импульсный цифровой регулятор.

11 Лекция №11. Общая характеристика оптимальных систем

Основная цель управления - поддержание управляемой величины на заданном значении и устранение возникающих отклонений этой величины.

Цель оптимизации - обеспечение наилучшего качества управления, определяемое по достижению экстремума некоторого технико-экономического показателя, называемого критерием оптимальности.

Оптимальные системы разделяют в зависимости от вида критерия оптимальности на два класса: оптимальные в статике и оптимальные в динамике системы.

У оптимальных в статике систем критерием оптимальности является функция параметров или управляющих воздействий. Этот критерий имеет экстремум в статическом режиме работы системы, причем статическая характеристика, выражающая зависимость критерия оптимальности от управляющих воздействий оптимизации, может непредвиденным образом смещаться под действием возмущений. Оптимальная система должна этот экстремум находить и поддерживать. Такие системы применимы, если возмущения, смещающие указанную характеристику, изменяются сравнительно медленно по сравнению с длительностью переходных процессов в системе. Тогда система будет успевать отслеживать экстремум практически в статическом режиме.

Оптимальные в динамике системы отличаются тем, что их критерий оптимальности представляет собой функционал, т.е. функцию от функций времени. Это значит, что, задав функции времени, от которых данный функционал зависит, получим числовое значение функционала. Эти системы могут применяться при сравнительно быстро меняющихся внешних воздействиях, не выходящих, однако, за допустимые пределы.

11.1 Критерии оптимальности оптимальных в динамике систем

Обычно эти функционалы имеют вид определенных интегралов по времени:

$$J = \int_0^T f_0(x(t),u(t),t)dt, \qquad (11.1)$$

где x(t), u(t) - векторы состояния и управления данной системы;

T - длительность процесса (в частности, может быть T = ∞).

В зависимости от подынтегральной функции f_0 эти критерии имеют следующие основные виды:

1) Линейные функционалы, у которых f_0 - линейная функция переменных:

– критерий максимального быстродействия при f_0=1, т.е.

$$J = \int_0^T dt = T, \qquad (11.2)$$

который равен длительности процесса, а соответствующие системы называют оптимальными по быстродействию;

– линейные интегральные оценки

$$I_{1n} = \int_0^\infty x(t) \cdot t^n dt; \qquad (11.3)$$

– критерии максимальной производительности:

$$J = \int_0^T \frac{dq(t)}{dt} dt = q(T) - q(0), \qquad (11.4)$$

где q(t) - количество произведенной продукции.

2) Квадратичные функционалы, у которых 0 - квадратичная форма от входящих в нее переменных:

– квадратичные интегральные оценки качества переходного процесса:

$$I_{2n} = \int_0^\infty \sum_{i=0}^{n} \tau_i^{2i} \cdot (x^{(i)})^2 dt; \qquad (11.5)$$

– критерий энергозатрат на управление, у которого:

$$f_0(u) = \alpha u^2(t), \qquad (11.6)$$

где u - управляющее воздействие;

u^2- мощность, затрачиваемая на управление;

– обобщенный квадратичный критерий, равный сумме двух предшествующих, взятых с некоторыми весовыми коэффициентами.

Он компромиссно характеризует качество переходного процесса и энергозатраты на него, т. е.:

$$J = \int_0^\infty \left[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\right]dt, \qquad (11.7)$$

где Q и R - положительно определенные квадратные матрицы.

Функционалы, не содержащие интегралов:

– критерий минимакса, при оптимизации по которому надо обеспечить минимальное значение максимума модуля (нормы) вектора отклонения управляемого процесса от его эталонного закона изменения, т. е.:

$$J = \max_{0 \le t \le T} \left\| x(t) - x_э(t) \right\|. \qquad (11.8)$$

Простейшим примером этого критерия для скалярного случая является известное максимальное перерегулирование переходного процесса;

– функция от конечного состояния:

$$J = \varphi(x(T)), \qquad (11.9)$$

которая является функционалом потому, что конечное состояние объекта x(T) является функцией от управляющего воздействия u(t).

Этот критерий оптимальности может применяться в сумме с одним из рассмотренных выше критериев, имеющих вид определенного интеграла. Выбор того или иного критерия оптимальности для конкретного объекта или системы производится на основании соответствующего изучения работы объекта и предъявляемых к нему требований технико-экономического характера. Этот вопрос не может быть решен в рамках только теории автоматического управления. В зависимости от физического смысла критерия оптимальности его требуется либо минимизировать, либо максимизировать. В первом случае он выражает потери, во втором случае -технико-экономическую выгоду. Формально, поменяв знак перед функционалом, можно задачу по максимизации свести к задаче по минимизации.

11.1.1 Краевые условия и ограничения для оптимальных в динамике систем.

Основная цель управления в таких системах обычно формулируется как задача перевода изображающей точки из некоторого начального состояния x(0) в некоторое конечное x(T) состояние. Начальное состояние принято называть левым концом оптимальной траектории, а конечное - правым. Вместе взятые эти данные и образуют краевые условия. Задачи управления могут отличаться видом краевых условий.

Задача с закрепленными концами траектории имеет место, когда x(0) и x(T) - фиксированные точки пространства.

Задача с подвижными концами траектории получается, когда x(0) и x(T) принадлежат некоторым известным линиям или поверхностям пространства.

Задача со свободными концами траектории возникает, когда указанные точки занимают произвольные положения. На практике встречаются и смешанные задачи, например, x(0) - фиксирован, а x(T) подвижен. Такая задача будет иметь место, если объект из заданного фиксированного состояния должен «догнать» некоторую эталонную траекторию (рисунок 11.1).

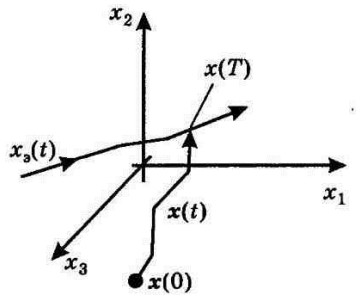


Рисунок 11.1 – Вид смешанной задачи оптимальности

Ограничениями называются дополнительные условия, которым должны удовлетворять управляющие воздействия и управляемые величины.

Встречаются два вида ограничений.

1) Безусловные (естественные) ограничения, которые выполняются в силу физических законов для процессов в объекте управления (ОУ). Эти ограничения показывают, что некоторые величины и их функции не могут выйти за границы, определяемые равенствами или неравенствами. Например, уравнение двигателя постоянного тока (ДПТ):

$$T\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}=ku, \qquad (11.10)$$

ограничение на скорость асинхронного двигателя $\Omega < \Omega_c$, где Ω_c - синхронная скорость.

2) Условные (искусственные) ограничения, выражающие такие требования к величинам или функциям от них, согласно которым они не

должны превосходить границ, определенных равенствами или неравенствами по условиям долговечной и безопасной эксплуатации объектов. Например, ограничение на питающее напряжение $|u| < U_m$, ограничения на допустимую скорость, ускорение и т. п.

Для обеспечения условных ограничений необходимо принимать меры схемного или программного характера при реализации соответствующего управляющего устройства.

Ограничения, независимо от их вида, выражаемые равенствами, называются классическими, а неравенствами - неклассическими.

11.1.2 Общая постановка задачи оптимального автоматического управления.

При заданных ограничениях на управляющие воздействия и управляемые величины, а также заданных уравнении объекта управления:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t), \qquad (11.11)$$

критерии оптимальности J=J(x,u,t) и краевых условиях x(0) и x(T) необходимо определить оптимальное управление $u^o(t)$ и оптимальную траекторию $x^o(t)$ или оптимальный алгоритм управления $u^o = u(x,t)$, обеспечивающие экстремум заданного критерия оптимальности.

Решение первой задачи приводит к разомкнутой САУ (рисунок 11.2, а), решение второй - к замкнутой САУ (рисунок 11.2, б), в которых АУУ - автоматическое управляющее устройство.

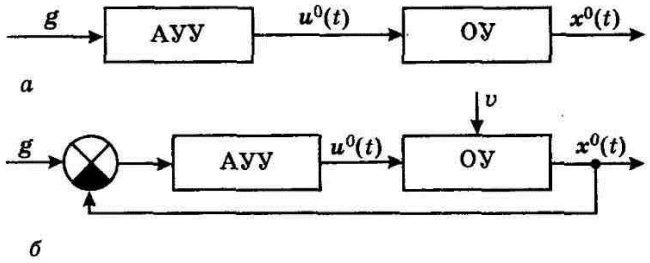


Рисунок 11.2 – Структурные схемы систем

Для решения задач оптимального управления применяются следующие методы оптимизации: Эйлера-Лагранжа, динамического программирования Р. Беллмана, принцип максимума Л.С. Понтрягина.

11.2 Задача на безусловный экстремум функционала

Эту задачу отличает отсутствие всяких ограничений, что является недостатком, так как отсутствие ограничений обычно лишает задачу практического смысла. Итак, задан минимизируемый функционал:

$$J = \int_0^T F(x, \dot{x})dt\,. \qquad (11.12)$$

Подынтегральная функция F в нем дифференцируема как по x, так и по

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}.$$

Требуется найти экстремаль x°(t), которая минимизирует данный функционал при заданных краевых условиях *(0), x(T) и известном значении времени T.

Идея вывода расчетного уравнения использует предположение о том, что к экстремали добавляется дополнительная функция r\(t) с весовым коэффициентом a. В результате аргумент функционала получает вариацию и будет равен

$$x(t) = x^0(t) + \alpha\eta(t), \qquad (11.13)$$

где r(t) - дифференцируемая функция с нулевыми краевыми значениями, т. е. η(0) = η(T) = 0 (рисунок 11.3, а).

Соответственно функционал получает положительное приращение (вариацию), являющееся функцией коэффициента α:

$$\Delta J(\alpha) = J(x(t)) - J(x^0(t)) > 0. \qquad (11.14)$$

Эта функция имеет экстремум - минимум при α = 0 (рисунок 11.3,б). Исследуя эту функцию на экстремум, Эйлер получил следующее дифференциальное уравнение для нахождения экстремалей.

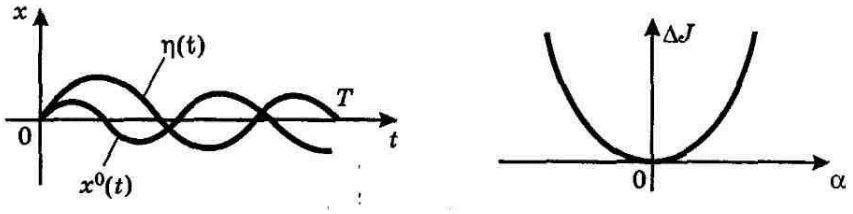


Рисунок 11.3 - Графики определения экстремумов функций

Компактная условная запись этого уравнения имеет вид:

$$F_x - \frac{dF_{\dot{x}}}{dt} = 0,$$

где индексы обозначают производные по x и производные по x.

Уравнение Эйлера в общем случае является нелинейным уравнением второго порядка, общее решение которого содержит две постоянные интегрирования, определяемые из краевых условий.

В задаче на безусловный экстремум может быть задан функционал, зависящий от нескольких функций и их первых производных:

$$J = \int_0^T F(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \ldots, x_n, \dot{x}_n)dt. \qquad (11.15)$$

В этом случае необходимо решить систему уравнений Эйлера:

$$F_{x_i} - \frac{dF_{\dot{x}_i}}{dt} = 0 \ (i = \overline{1,n}). \qquad (11.16)$$

В более общем случае функционал может зависеть и от производных высших порядков. В этом случае вместо уравнений Эйлера составляют и решают уравнения Эйлера-Пуассона:

$$\sum_{i=0}^{n_k} (-1)^i \frac{1}{i!} \frac{d^i F_{x_k^{(i)}}}{dt^i} = 0 \ (k = \overline{1,m}), \qquad (11.17)$$

где k - порядковый номер функции;

n_k - порядок старшей производной от x_k;

m - число функций.

Пример. Найти экстремаль улучшенной квадратичной интегральной оценки:

$$J = \int_0^\infty (x^2 + \tau^2 \dot{x}^2)dt.$$

Находим:

$$F_x = 2x, \ u \ F_{\dot{x}} = 2\tau^2 \dot{x}$$

и составляем уравнение Эйлера

$$x - \tau^2 \ddot{x} = 0.$$

Ему соответствует характеристическое уравнение:

$$1 - \tau^2 s^2 = 0.$$

Общее решение уравнения Эйлера в данном случае имеет вид:

$$x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t},$$

где $s_1 = -\tau^{-1}$;

$s_2 = \tau^{-1}$.

Задавшись граничными условиями x(0) = хв и x(<*>) — Q, найдем постоянные интегрирования сг - хн, с2 = 0. Тогда уравнением экстремали будет экспонента:

$$x^0(t) = x_н e^{\frac{t}{\tau}}.$$

11.2.1 Задача на условный экстремум. Метод Эйлера-Лагранжа.

Помимо минимизируемого функционала:

$$J = \int_0^T F(x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_n, \dot{x}_n)dt, \tag{11.18}$$

подынтегральная функция которого зависит от нескольких функций и их первых производных по времени, задано произвольное число классических ограничений:

$$\varphi_j(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \ldots, x_n, \dot{x}_n) = 0, (j = \overline{1,m}) \tag{11.19}$$

при заданных $x_i^0(t)\,(i = \overline{1,n})$.

Требуется найти п экстремалей краевых условиях.

Метод решения этой задачи требует формирования нового функционала

$$J^* = \int_0^T F^*(\ldots)dt, \tag{11.20}$$

где

$$F^*(\ldots) = F(\ldots) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\varphi_j(\ldots), \lambda_j(t)$$

– неизвестные функции, называемые множителями Лагранжа.

Благодаря такой замене задача сводится к предыдущей. При этом уравнения Эйлера должны быть составлены как для искомых экстремалей, так и для множителей Лагранжа:

$$F^*_{x_i} - \frac{dF^*_{\dot{x}_i}}{dt} = 0, (i = \overline{1,n}); \tag{11.21}$$

$$F^*_{\lambda_i} - \frac{dF^*_{\dot{\lambda}_i}}{dt} = 0, (i = \overline{1,m}); \tag{11.22}$$

где $dF^*_{\lambda_i} = 0$, *а* $F^*_{\lambda_i} = \varphi_j$.

Уравнения (11.22) совпадают с уравнениями ограничений. Поэтому может быть выполнено совместное решение системы уравнений Эйлера (11.21) и заданных ограничений. Исключая время из уравнений экстремалей, можно найти алгоритм управления оптимального автоматического регулятора.

12 Лекция №12. Метод динамического программирования

В основу метода динамического программирования положен принцип оптимальности. Согласно ему любой конечный отрезок оптимальной траектории (от произвольной промежуточной точки до одной и той же конечной точки процесса) является сам по себе оптимальной траекторией для своих краевых условий.

Метод динамического программирования позволяет решать задачи трех видов: дискретную, дискретно-непрерывную и непрерывную.

1) *Дискретная задача.*

Она отличается дискретностью всех величин (времени, управляющих воздействий, управляемых величин).

К числу исходных данных относятся:

а) состояния выхода объекта управления;

б) значения управляющих воздействий;

в) алгоритм перехода из предыдущего состояния в последующее:

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}),$$

где k - номер шага, k = 1, ..N, причем эти переходы задаются таблицей или диаграммой переходов;

г) начальное состояние x_0 и число шагов процесса N;

д) критерий оптимальности J, зависящий от состояний и управлений в оптимальном процессе.

Пусть для примера выходная величина объекта может иметь четыре состояния: x = {a_1, a_2, a_3, a_4}. Управляющее воздействие может иметь два значения: u ={-1, 1}. Диаграмма переходов показана на рисунке 12.1. Примем $x_0 = a_1$; N = 2.

Критерий оптимальности управления объектом примем в виде функции от конечного состояния объекта J = φ(x_N), которая задана в таблице 12.1 и должна быть минимизирована.

Для решения задачи около каждого конечного состояния x_2 на диаграмме оптимальных переходов (рисунок 12.2) записываем в соответствии с таблицей значения критерия оптимальности J.

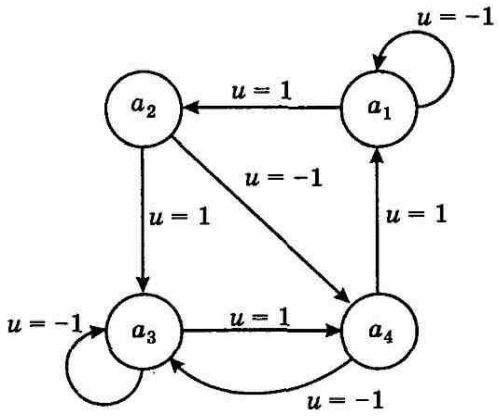


Рисунок 12.1 – Граф состояний выхода объекта

Таблица 12.1

x_N	a_1	a_2	a_3	a_4
J	3	7	6	2

Затем рассматриваются все возможные переходы из каждого предыдущего состояния x_1 в последующие x_2. Из них выбираются только те, которые оптимальны в смысле минимума J. Эти переходы отмечаются стрелками, около которых ставятся соответствующие значения управления, а около предшествующего состояния указывается значение J. После этого находится аналогично оптимальный переход из начального состояния x_0 в x_1.

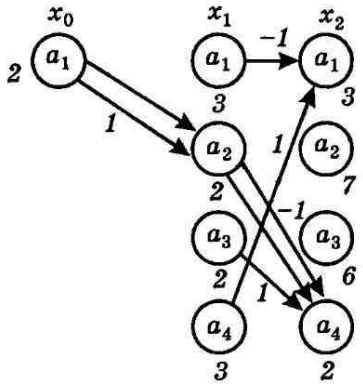


Рисунок 12.2 - Диаграмма оптимальных переходов

Оптимальная траектория обозначена двойными стрелками и получается при управлении:

$$u^0 = \left\{u_0^0 = 1, u_1^0 = -1\right\}.$$

2) *Дискретно-непрерывная задача МДП.*

В этой задаче управляющее воздействие и управляемые величины могут иметь бесчисленное количество значений в пределах заданных ограничений.

Время изменяется дискретно с малым шагом Δt, что соответствует численным методам решения задач на ЭВМ. Задана продолжительность процесса T, уравнение объекта управления:

$$\frac{dx}{dt} = f'(x,u), \tag{12.1}$$

ограничение на управление $u \in \Omega(u)$(u) и начальное состояние x(0) = x_0.

Задан в виде функционала минимизируемый критерий оптимальности:

$$J = \varphi(x(T)) + \int_0^T f_0'(x,u)dt. \tag{12.2}$$

Требуется найти оптимальные управление u°(t) и траекторию x^0(t).

Прежде всего от дифференциального уравнения (12.1) переходим к разностному уравнению, заменяя dx на ($x_{к+1}$ - $x_к$), dt на Δt, x и u на x_k и u_k, где x_k=x[kΔt], u_k=u[kΔt], относительное дискретное время k=0,1,2…

Обозначив f'(…)Δt = f(…), получим из (12.1) разностное уравнение:

$$x_{k+1} = x_k + f(x_k, u_k). \tag{12.3}$$

Критерий оптимальности (12.2) вместо интеграла необходимо представить в виде конечной суммы:

$$J = \varphi(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x_k, u_k), \tag{12.4}$$

где f_0(…)=f'_0(…)Δt.

Переход к уравнениям (12.3) и (12.4) означает дискретизацию задачи по времени.

В соответствии с принципом оптимальности последовательно оптимизируем конечные отрезки процесса, начинающиеся от конечной точки t=T и постепенно увеличивающиеся на Δt (рисунок 12.3).

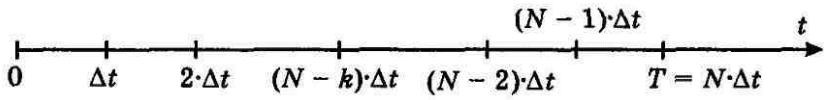


Рисунок 12.3 - Дискретизация по времени

Первым рассматриваем отрезок:

$$(N-1)\Delta t \le t \le N\Delta t.$$

На этом отрезке из функционала (12.4) минимизируется частичная сумма:

$$J_{N-1} = \varphi(x_{N-1} + f(x_{N-1}, u_{N-1})) + f_0(x_{N-1}, u_{N-1})$$

за счет изменения управления u_{N-1} с учетом ограничений, где x_N заменено согласно (12.3). В результате минимизации получаем следующую функцию от состояния X_{N-1}.

$$S_{N-1}(x_{N-1}) = \min_{u_{N-1} \in \Omega} J_{N-1}. \qquad (12.5)$$

Данную зависимость необходимо запомнить до получения аналогичной функции на следующем шаге расчета. Кроме (12.5), определится и оптимальное управление:

$$u^0_{N-1} = u_{N-1}(x_{N-1}). \qquad (12.6)$$

Функция (12.6) должна храниться в памяти до окончания расчета процесса. Затем переходим к отрезку $(N - 2)\Delta t < t < N\Delta t$, на котором минимизируется:

$$J_{N-2} = J_{N-1} + f_0(x_{N-2}, u_{N-2}).$$

Минимум этой частичной суммы должен быть найден по двум переменным u_{N-2} и u_{N-1}, но с учетом уже сделанной минимизации по u_{N-1} в виде (12.5) остается минимизировать ее только по одному аргументу u_{N-2}.

В результате получим

$$S_{N-2}(x_{N-2}) = \min_{u_{N-2} \in \Omega} \left[S_{N-1}(x_{N-2} + f(x_{N-2}, u_{N-2})) + f_0(x_{N-2}, u_{N-2}) \right]. \qquad (12.7)$$

Функция (12.7) заменяет в памяти функцию (12.5), и находится оптимальное управление:

$$u^0_{N-2} = u_{N-2}(x_{N-2}).$$

Аналогично на отрезке $(N - k)\Delta t < t < N\Delta t$ находим:

$$S_{N-k}(x_{N-k}) = \min_{u_{N-k} \in \Omega} \left[S_{N-k+1}(x_{N-k} + f(x_{N-k}, u_{N-k})) + f_0(x_{N-k}, u_{N-k} \right],$$

$$u^0_{N-k} = u_{N-k}(x_{N-k}).$$

Наконец для всего процесса $0 < t < N\Delta t$ находим:

$$S_0(x_0) = \min_{u_0 \in \Omega} J;$$

$$u_0^0 = u_0(x_0). \qquad (12.8)$$

Таким образом, получен алгоритм расчета по рекуррентным формулам, который и называется динамическим программированием. При его применении по формуле (12.8) находим оптимальное управление u_0^0, затем по уравнению объекта (12.3) находим состояние объекта x_1, далее находим u_1^0 и т.д., вплоть до u_{N-1}^0.

3) *Непрерывная задача.*

Задано уравнение объекта управления:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t),$$

где $x = [x_1, \ldots, x_n]^T$;
$u = [u_1, \ldots, x_m]^T$;
$f = [f_1, \ldots, f_n]^T$,

и краевые условия: $x(t_0)$ - закрепленный левый конец траектории;
$x(t_f)$ - подвижный правый конец.

Задано ограничение на управление u и минимизируемый функционал общего вида (функционал Больца):

$$J = \varphi(x(t_f), u(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x,u,t)dt.$$

Найти оптимальное управление u°(t), траекторию x°(t) или закон оптимального управления $u^0 = u(x, t)$.

Для вывода уравнения Беллмана рассмотрим две точки на искомой оптимальной траектории x(t) и $x(t_1)$ (рисунок 12.4), причем $t_1 = t + \Delta t$, где Δt - малое приращение времени.

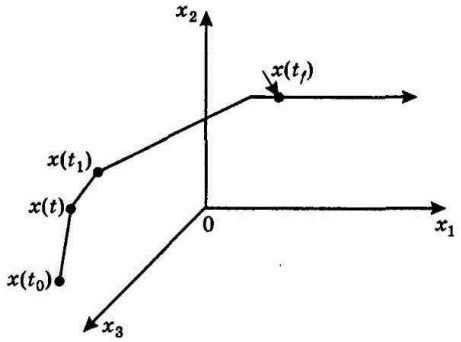


Рисунок 12.4 - Оптимальная траектория управления

Введем обозначение:

$$S(x(t_0),t_0) = \min_{u\in\Omega} J,$$

которое указывает на то, что минимум критерия оптимальности зависит только от начального состояния и начального момента времени процесса.

Уравнение Беллмана в общем виде:

$$\min_{u\in\Omega}\left[f_0(x,u,t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_i} f_i(x,u,t)\right]=-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}. \qquad (12.9)$$

Применяется и другая запись уравнения Беллмана с использованием скалярного произведения, в которое входит градиент функции S:

$$\min_{u\in\Omega}\left[f_0(x,u,t)+\left\langle gradS(x,t), f(x,u,t)\right\rangle\right]=-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}. \qquad (12.10)$$

В частном случае, когда объект стационарен и подынтегральная функция функционала f_0 не зависит от времени, искомая функция Беллмана S также не будет явно зависеть от времени.

Следовательно, уравнение Беллмана упрощается, что соответствует так называемой задаче Лагранжа:

$$\min_{u\in\Omega}\left[f_0(x,u)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(x)}{\partial x_i} f_i(x,u)\right]=0. \qquad (12.11)$$

Для задачи максимального быстродействия f_0=1, и уравнение Беллмана (12.11) приобретает вид:

$$\min_{u\in\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(x)}{\partial x_i} f_i(x,u)=-1. \qquad (12.12)$$

Из уравнения Беллмана должна быть найдена функция Беллмана S и оптимальное управление, что на практике выполняется в следующем порядке при оптимизации обобщенного квадратичного функционала.

1) В соответствии с исходными данными выбираем то или иное уравнение Беллмана (12.9) - (12.12).

2) Минимизируем по управляющему воздействию и левую часть уравнения Беллмана, выражая при этом искомое оптимальное управление через производные неизвестной функции S.

3) Подставляем в уравнение Беллмана найденное выражение для оптимального управления. При этом знак min опускается.

4) Решаем полученное уравнение относительно функции Беллмана S. Решение ищется в виде положительно определенной квадратичной формы $S = x^{T}Cx$. После подстановки выражения для функции S в уравнение Беллмана элементы симметричной матрицы C могут быть найдены приравниванием к 0 всех коэффициентов квадратичной формы, образовавших левую часть уравнения Беллмана.

5) Подставляем функцию Беллмана, как функцию переменных состояния, в выражение для оптимального управления, найденного в п. 2. В результате получим оптимальный алгоритм управления. Соответствующая система устойчива, так как удовлетворяет требованиям прямого метода Ляпунова. Действительно, приняв функцию Беллмана за функцию Ляпунова, т. е. считая S = V, получаем V < 0 согласно (12.9) при положительной определенности $f_0(x, u, t)$.

Пример. Задана система уравнений объекта $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u,$ и краевые условия: $x_1(0)=x_0$, $x_2(0) = 0$, $x_1(T) = x_2(T)=0$, где T - длительность оптимального процесса.

Задан критерий оптимальности, который необходимо минимизировать:

$$J = \int_0^T (x_1^2 + \alpha^2 u^2)dt,$$

где x_1^2 характеризует качество процесса управления;

α^2, u^2 - энергетические затраты на управление.

Ограничений на управление не наложено.

Требуется найти оптимальный алгоритм управления $u°(x_1, x_2)$.

Решение.

1) Выбираем уравнение Беллмана для задачи Лагранжа, подставляя f_0, f_1 и f_2:

$$\min_u \left[x_1^2 + \alpha^2 u^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2} u \right] = 0.$$

2) Приравниваем к 0 производную по управлению и от минимизируемой функции:

$$2\alpha^2 u + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0$$

и находим отсюда оптимальное управление:

$$u^0 = -\frac{\partial S}{\partial x_2}\frac{1}{2\alpha^2}.$$

3) Подставляем найденную функцию u^0 в уравнение Беллмана и делаем преобразования, опуская знак минимума:

$$x_1^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 \frac{1}{4\alpha^2} + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 = 0.$$

4) Выбираем функцию Беллмана в виде квадратичной формы с симметричной матрицей:

$$S = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2$$

и, подставляя ее в уравнение Беллмана, получим:

$$x_1^2 - \frac{1}{4\alpha^2}\left(2c_{12}x_1 + 2c_{22}x_2\right)^2 + \left(2c_{11}x_1 + 2c_{12}x_2\right)x_2 = 0.$$

Отсюда находим, приравнивая к 0 коэффициенты при x_1^2 и x_2^2 и x_1x_2:

$$c_{11} = \sqrt{2\alpha},\ c_{12} = \alpha;$$
$$c_{22} = \alpha\sqrt{2\alpha},\ S = \sqrt{2\alpha}x_1^2 + 2\alpha x_1x_2 + \alpha\sqrt{2\alpha}x_2^2.$$

5) Подставив последнее выражение в формулу для функций u^0, найдем оптимальное управление:

$$u^0(x_1, x_2) = -\frac{1}{\alpha}(x_1 + \sqrt{2\alpha}x_2).$$

Соответствующая структурная схема оптимальной системы (рисунок 12.5) показывает, что оптимальным является регулятор с пропорциональным управлением по переменным состояния (ПД-регулятор).

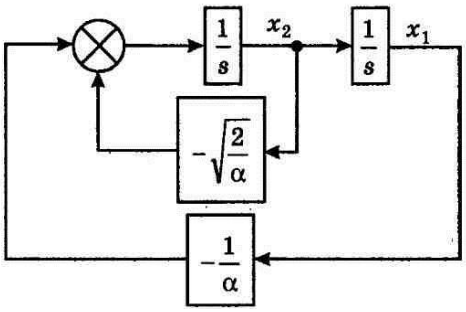


Рисунок 12.5 - Структурная схема оптимальной системы

13 Лекция №13. Принцип максимума

Это метод расчета оптимальных процессов и систем, который выражает необходимое условие оптимальности. Рассмотрим упрощенный вывод принципа максимума.

Задано уравнение управляемого объекта в векторно-матричной форме:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u),$$

где $x = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$.

Ограничение наложено на скалярное управляющее воздействие $|u| \le U_m$.
Задан минимизируемый функционал:

$$J = \int_0^T f_0(x,u)dt.$$

Необходимо найти оптимальные управление u°(t) и траекторию x°(t).
Порядок решения поставленной задачи следующий:
1) Вводим дополнительную переменную состояния:

$$x_0 = \int_0^t f_0(x,u)dt,$$

конечное значение которой $x_0(T) = J$, т.е. равно критерию оптимальности. Эта переменная вместе с другими характеризует объект управления и образует обобщенный вектор состояния $x = [x_0, x_1,... , x_n]^T$.

Дифференцируя по t выражение для новой переменной, найдем уравнение в нормальной форме $dx_0/dt = f_0(x,u)$. Добавив это уравнение в систему заданных уравнений объекта управления, получим систему обобщенных уравнений:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{f}(x,u), \qquad (13.1)$$

где $f = [f_o, f_1,...,f_n]^T$.

2) Производим игольчатую вариацию управляющего воздействия относительно искомого оптимального закона его изменения (рисунок 13.1), при которой это воздействие скачком изменяется до предельного значения и затем обратно в течение бесконечно малого отрезка времени ε.

Площадь игольчатой вариации бесконечно мала, поэтому она вызывает бесконечно малые отклонения (вариации) переменных состояния:

$$\delta\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t) - \tilde{x}^0(t),$$

где $\tau < t < T$.

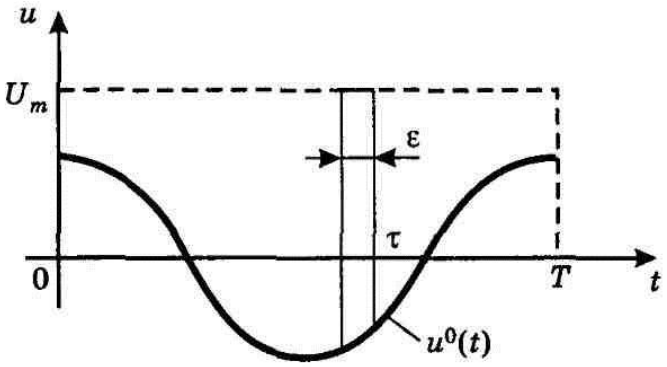


Рисунок 13.1 - Оптимальный закон управления

В частности, вариация:

$$\delta x_0(T) = \delta J > 0, \tag{13.2}$$

так как система оптимальна по минимуму критерия оптимальности.

3) Выразим вариацию траектории в момент времени τ как произведение ее скорости на длительность вариации, т.е.:

$$\delta \tilde{x}(\tau) = \left(\frac{d\tilde{x}(\tau)}{dt} - \frac{d\tilde{x}^0(\tau)}{dt} \right)_{t=\tau} \cdot \varepsilon.$$

В последнем равенстве заменим скорости на соответствующие функции, взятые из (13.1):

$$\delta \tilde{x}(\tau) = \left[\tilde{f}(\tilde{x}(\tau), u(\tau)) - \tilde{f}(\tilde{x}^0(\tau), u^0(\tau)) \right] \cdot \varepsilon. \tag{13.3}$$

4) Определим вариацию критерия оптимальности в момент t = τ по формуле скалярного произведения:

$$\delta J = -\left\langle \delta \tilde{x}(\tau), \tilde{\psi}(\tau) \right\rangle, \tag{13.4}$$

где ψ(τ) - вспомогательная вектор-функция, подлежащая определению и имеющая смысл градиента изменения критерия оптимальности при изменении переменных состояния.

5) Подставляем (13.3) в (13.4) и с учетом знака вариации δJ получим неравенство для 0 < τ < T:

$$\left\langle \tilde{f}(\tilde{x}^0(t), u^0(t)), \tilde{\psi}(\tau) \right\rangle - \left\langle \tilde{f}(\tilde{x}(t), u(t)), \tilde{\psi}(\tau) \right\rangle > 0. \tag{13.5}$$

6) Обозначаем функцию Гамильтона (гамильтониан):

$$H = \left\langle \tilde{f}(\tilde{x}(t), u(t)), \tilde{\psi}(t) \right\rangle = \sum_{i=0}^{n} f_i(\tilde{x}(t), u(t)) \cdot \psi_i(t). \qquad (13.6)$$

Сравнение (13.5) и (13.6) позволяет сформулировать принцип максимума.

Для оптимального управления объектом необходимо, чтобы гамильтониан H имел максимальное (наибольшее) значение в любой момент процесса управления.

Если оптимальное управление находится внутри допустимой области, то гамильтониан H достигает максимума. Если же управление u°(t) меняется по границам этой области, то H достигает своего наибольшего значения (супремума).

7) Для нахождения вспомогательных функций получены следующие уравнения:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} (i = 0,1,\ldots,n). \qquad (13.7)$$

Для функций ψ_i в соответствии с (13.4) и (13.2) получаются следующие граничные условия $\psi_0(T) = -1, \psi_i(T) = 0, (i = \overline{1,n})$.

Так как гамильтониан H от x_0 не зависит, то из (13.7) имеем $\frac{d\psi_0(t)}{dt} = 0$, следовательно $\psi_0(\tau) = -1 = \text{const}$.

13.1 Порядок практического применения принципа максимума

1) Располагая заданным функционалом и уравнениями объекта, составляем гамильтониан H по формуле (13.6). Причем, если подынтегральная функция f_0 от управления u не зависит, то соответствующее слагаемое можно в гамильтониан не включать, так как это не повлияет на решение задачи. Это справедливо, в частности, для критерия максимального быстродействия, когда $f_0 = 1$.

2) Исследуем гамильтониан H на максимум по управлению u, т.е. решаем уравнение $\frac{dH}{du} = 0$.

Отсюда находим в общем виде оптимальное управление через переменные x и ψ. Если это уравнение приводит к нулевым значениям хотя бы для одной функции ψ_i (тривиальное решение), то это считается неприемлемым и означает, что оптимальное управление изменяется по границам допустимой области. Соответственно гамильтониан H имеет не максимум, а наибольшее значение (супремум). В этом случае оптимальный закон управления нахо-

дится из выражения для H в классе знаковых функций с учетом ограничений на управление.

3) Найденный оптимальный алгоритм управления подставляют в уравнения (13.1) и (13.7), и они решаются совместно. При этом решении возникают сложности с определением постоянных интегрирования, удовлетворяющих граничным условиям.

Поэтому обычно ограничиваются решением качественного характера, при котором определяется лишь характер изменения оптимального управления. Дальнейшее применение метода припасовывания позволяет получить точное решение количественного характера.

Пример. Пусть необходимо определить характер оптимального по быстродействию управления углом поворота вала двигателя постоянного тока, описываемого уравнением:

$$T_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = ku,$$

где $|u| \le U_m$.

Обозначив $y = x_1$, переходим к уравнениям в нормальной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{ku - x_2}{T_0} \end{cases},$$

и составляем гамильтониан

$$H = f_1\psi_1 + f_2\psi_2 = x_2\psi_1 + \frac{ku}{T_0}\psi_2.$$

Исследуем гамильтониан H на максимум, т.е. находим и приравниваем к 0 производную dH/du=0. Отсюда $\psi 2 = 0$, но такое решение тривиально и неприемлемо.

Значит, $H^0 = \sup H$, и оптимальное управление находится из формулы для H так, чтобы он был наибольшим, т.е.:

$$u^0(t) = U_m sign\,\psi_2(t).$$

Составляем систему уравнений для вспомогательных функций:

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1}{dt} = 0 \\ \dfrac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1 + \dfrac{\psi_2}{T_0} \end{cases},$$

Решение ее облегчается тем, что в эту систему не вошли функции x_i. С точностью до постоянных интегрирования получим:

$$\psi_1 = c_1 = const, \quad \psi_2 = c_2 e^{\frac{t}{T_0}} + c_1 T_0,$$

что следует после нахождения корня соответствующего характеристического уравнения. Следовательно, оптимальное управление u°(t) определяется формулой:

$$u^0(t) = U_m sign\left(c_2 e^{\frac{t}{T_0}} + c_1 T_0 \right).$$

Функция $\psi_2(t)$ в данном случае может изменить знак не более одного раза. Соответственно оптимальное управление может иметь не более двух интервалов постоянства на уровнях $\pm U_m$ (рисунок 13.2).

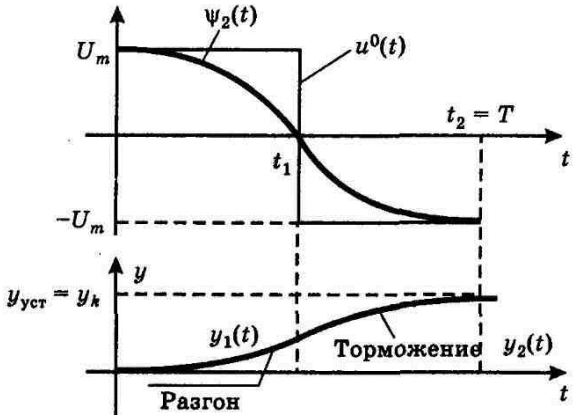


Рисунок 13.2 - Оптимальное управление с 2-мя интервалами

13.2 Теорема об n интервалах (метод припасовывания)

Если объект управления описывается линейным дифференциальным уравнением n-го порядка $(a_0p^n + a_1p^{n-1} \ ... + an_{-1}p + 1)y = ku$ и соответствующее характеристическое уравнение A(s) = 0 имеет отрицательные вещественные или (и) нулевые корни, то при ограничении на управление и минимизации критерия оптимальности в виде линейного функционала оптимальное управление имеет вид кусочно-постоянной функции времени со значениями $\pm U_m$, причем количество интервалов постоянства этой функции не более n.

Данная теорема не дает ответа на вопрос о знаке первого интервала и продолжительности интервалов, но эту информацию можно получить методом припасовывания.

Пример. Пусть необходимо определить количественно оптимальное управление и соответствующий ему оптимальный по быстродействию переходный процесс поворота вала двигателя постоянного тока.

Для этого предварительно найдем корни характеристического уравнения объекта управления $s_1 = 0$, $s_2 = -1/T_0$ и запишем общее решение его дифференциального уравнения

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{\frac{t}{T_0}} \pm kU_m t,$$

Знак первого интервала управляющего воздействия определяется граничными условиями, а именно - знаком y(T). Примем следующие условия:

$$y(0) = \dot{y}(0) = 0;$$
$$y(T) = y_k > 0; \quad \dot{y}(T) = 0.$$

Это дает возможность записать общее решение уравнения объекта на каждом из интервалов постоянства управления (рисунок 13.2):

$$y_1(t) = c_{11} + c_{12} e^{-\frac{t}{T_0}} + kU_m t;$$
$$y_2(t) = c_{21} + c_{22} e^{-\frac{t}{T_0}} - kU_m t.$$

В соответствии с методом припасовывания записываем систему уравнений для трех моментов времени. При этом используем формулы для функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$ и их первых производных, которые должны сохранять в момент t_1 непрерывность своего изменения, а в моменты t=0 и $t = t_2 = T$ удовлетворять граничным условиям:

$$\begin{cases} y_1(0) = 0 \\ \dot{y}_1(0) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y_1(t_1) = y_2(t_1) \\ \dot{y}_1(t_1) = \dot{y}_2(t_1) \end{cases}; \quad \begin{cases} y_2(t_2) = y_k \\ \dot{y}_2(t_2) = 0 \end{cases}.$$

Эти шесть уравнений содержат шесть неизвестных, а именно: четыре постоянных интегрирования и два момента переключения t_1 и t_2. В данном случае трансцендентное уравнение сводится к квадратному и может быть решено в радикалах, в результате чего получим:

$$t_2 = 2T_0 \ln\left[\exp\left|\frac{y_k}{2kU_m T_0}\right| + \sqrt{\exp\left|\frac{y_k}{kU_m T_0}\right| - 1} \right], \; t_1 = 0.5\left[t_2 + \left|\frac{y_k}{kU_m}\right| \right].$$

Отсюда, в частности, видно, что разгон длится больше, чем торможение.

14 Лекция №14. Управляемость и наблюдаемость

Эти свойства объект управления обязательно должен иметь для того, чтобы при оптимальном управлении его можно было перевести из одного состояния в другое с использованием информации обо всех его переменных

состояния. Линейный стационарный объект управления, описываемый векторно-матричным уравнением:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad (14.1)$$

где $x \in R^{n\times 1}$, $u \in R^{r\times 1}$ называется полностью (вполне) управляемым, если его можно перевести из любого начального состояния в любое конечное состояние за конечное время T при соблюдении заданных ограничений.

Объект управления является вполне управляемым, если ранг блочной матрицы управляемости M_y равен порядку его уравнения, т.е.

$$\text{Rang } M_y = n,$$

где

$$M_y = \left[B \vdots (AB) \vdots (A^2B) \vdots \ldots (A^{n-1}B)\right],$$

а ранг - это порядок старшего, не равного нулю, минора матрицы.

Наблюдаемость - это свойство объекта управления, дающее возможность получения оценок $\hat{x}(t) = x(t)$ вектора состояния объекта в текущий момент времени $0 \le t_0 \le t$ на основании следующих данных:

– уравнений управления (14.1) и наблюдения объекта:

$$Z = Cx,$$

где вектор наблюдения $z \in R^{m\times 1}$, $m \le n$;

– измерений управляющего воздействия $u(\tau)$ и наблюдаемых координат $z(\tau)$ на предшествующем отрезке $-\infty < \tau < t$.

Технические устройства, позволяющие реализовать наблюдение, называются наблюдателями (вычислителями оценок координат).

Условие полной наблюдаемости состоит в том, чтобы ранг блочной матрицы наблюдаемости равнялся порядку уравнения объекта управления $\text{Rang } M_н = n$, где

$$M_н = \left[C^T \vdots (A^T C^T) \vdots ((A^T)^2 C^T) \vdots \ldots \vdots ((A^T)^{n-1} C^T)\right].$$

Если ранг матриц M_y или $M_н$ меньше n, то объект управляем или наблюдаем не полностью, т. е. не по всем своим переменным состояния. Если ранг равен нулю, то объект не управляем или не наблюдаем.

В частности, если m = n, то это значит, что измеряется n независимых переменных z_i, по которым можно всегда восстановить все переменные состояния x_i, что подтверждается анализом матрицы $M_н$.

Действительно; в этом случае матрица $C \in R^{n \times n}$, причем не особая, поэтому rang $M_н$ = n.

Такое наблюдение называется полнокомпонентным, и оно, строго говоря, технически нереализуемо из-за необходимости точного определения производных высокого порядка.

Пример. Пусть объект управления третьего порядка задан своей структурной схемой (рисунок 14.1).

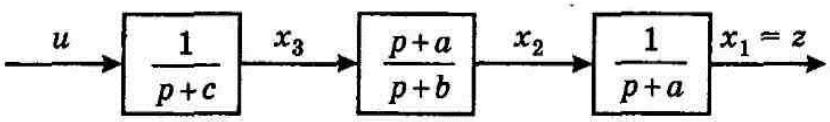


Рисунок 14.1 - Структурная схема ОУ

Особенность данного объекта в том, что его передаточная функция имеет равные друг другу нуль и полюс s = - a.

Если сократить операторы (p+a) в числителе и в знаменателе, то соответствующее вырожденное уравнение будет характеризовать движение объекта только при нулевых начальных условиях. Если начальные условия ненулевые, то сокращение недопустимо, так как при этом будет утрачена информация о собственном движении объекта в звене с передаточной функцией 1/(p + a).

Покажем, что такая особенность объекта приводит к неполной его управляемости.

Запишем уравнения объекта управления в нормальной форме, т. е.:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + x_2; \\ \dot{x}_2 = -bx_2 + ax_3 + \dot{x}_3 = -bx_2 + (a-c)x_3 + u; \\ \dot{x}_3 = -cx_3 + u. \end{cases}$$

Отсюда находим собственную матрицу, матрицу управления и их произведения:

$$A = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ 0 & -b & (a-c) \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad AB = \begin{bmatrix} 1 \\ -b+a-c \\ -c \end{bmatrix};$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & (-a-b) & (a-c) \\ 0 & b^2 & -(a-c)(b+c) \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix}; \quad A^2B = \begin{bmatrix} -(b+c) \\ b^2 - (a-c)(b+c) \\ c^2 \end{bmatrix};$$

$$M_y = \left[B \vdots AB \vdots A^2B\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -(b+c) \\ 1 & (-b+a-c) & (b^2-(a-c)(b+c)) \\ 1 & -c & c^2 \end{bmatrix}$$

имеет миноры

$$\Delta_2 = -1,$$
$$\Delta_3 = c(b+c) + b^2 - (a-c)(b+c) + (b+c)(-b+a-c) - c^2 = 0.$$

Следовательно, объект не полностью управляем. Исследуем тот же объект на наблюдаемость, учитывая, что

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A^T C^T = \begin{bmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \left(A^T\right)^2 C^T = \begin{bmatrix} a^2 \\ -(a+b) \\ a-c \end{bmatrix}.$$

Матрица наблюдаемости:

$$M_н = \begin{bmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -(a+b) \\ 0 & 0 & (a-c) \end{bmatrix}$$

имеет определитель $\Delta_3 = a - c.$

Следовательно, объект полностью наблюдаем при a ≠ c. Если переставить местами первое и третье звенья в структурной схеме, то выводы об управляемости и наблюдаемости будут противоположными.

14.1 Наблюдатель полного порядка

Наблюдатель полного порядка - это вычислительное устройство, которое математически описывается дифференциальным уравнением n-го порядка и позволяет по известным уравнениям объекта управления, вектору наблюдения z(t) и вектору управления u(t) вычислять без ошибки вектор оценки $\hat{x}$ вектора состояния x.

Уравнение этого наблюдателя ищем в виде:

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + Kz + Hu, \qquad (14.2)$$

где матрицы F, К и Н подлежат определению при расчете.

Для вывода расчетных формул предположим, что в момент времени t_0=0 оценка $\hat{x}(0) = x(0)$. Тогда $\hat{x}(t) = x(t)$ при t > 0 по определению наблюдаемости.

При этих условиях используем известные уравнения управления и наблюдения объекта управления:

$$\dot{x} = Ax + Bu; \tag{14.3}$$

$$z = Cx. \tag{14.4}$$

Подставив (14.4) в (14.2) и вычтя затем (14.2) из (14.3), получим:

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax - F\hat{x} - KCx + Bu - Hu. \tag{14.5}$$

Учитывая, что для рассматриваемого режима $\hat{x} = x$, упростим (14.5):

$$0 = (A - F - KC)\hat{x} + (B - H)u\,.$$

Последнее равенство будет выполняться, если все матричные коэффициенты равны нулю. Отсюда получаем расчетные формулы для двух матриц, входящих в (14.2):

$$F = (A - KC); \tag{14.6}$$

$$H = B. \tag{14.7}$$

Подставляя (14.6) и (14.7) в (14.2), получаем уравнение наблюдателя полного порядка:

$$\dot{\hat{x}} = (A - KC)\hat{x} + Kz + Bu, \tag{14.8}$$

или

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + K(z - C\hat{x}) + Bu. \tag{14.9}$$

По уравнению (14.9) можно составить структурную схему наблюдателя полного порядка совместно с объектом управления ОУ (рисунок 14.2).

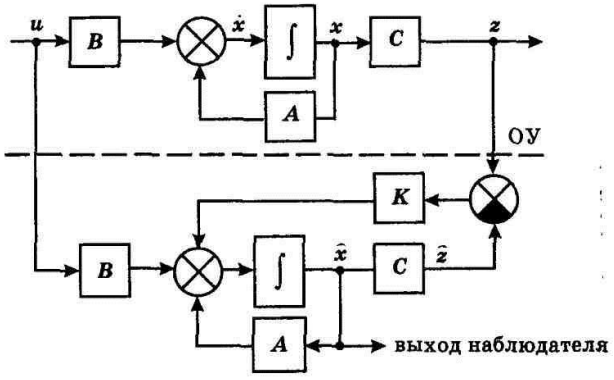


Рисунок 14.2 - Структурная схема наблюдателя полного порядка с ОУ

Для нахождения коэффициентов матрицы наблюдения $K \in R^{n \times m}$ необходимо составить и рассмотреть уравнение относительно ошибки $e = x - \hat{x}$.

Подставляя (14.6) и (14.7) в (14.5), найдем уравнение ошибки:

$$\dot{e} = (A - KC)e.$$

Соответствующее характеристическое уравнение получаем приравниванием к нулю определителя det[sI - A + KC].

Основным требованием к наблюдателю является асимптотическое стремление ошибки к нулю при возрастании времени t до бесконечности.

Это требование соответствует условию устойчивости, поэтому в вышеупомянутом характеристическом уравнении матрицу коэффициентов К можно определить по критериям устойчивости или по желаемому расположению корней.

Пример. Синтезировать наблюдатель полного порядка для объекта, уравнения которого $\dot{x}_1 = x_2$; $\dot{x}_2 = u$; $z = x_1$.

В данном случае:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Порядок уравнений объекта управления и наблюдателя n=2, наблюдаемая величина z-скаляр (m = 1).

Пользуясь уравнением (14.8), записываем и преобразуем искомые уравнения наблюдателя полного порядка в векторно-матричном и обычном виде:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \left\{ z - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + k_1 (z - \hat{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 = k_2 (z - \hat{x}_1) + u. \end{cases}$$

По последним уравнениям составляем структурную схему наблюдателя совместно с объектом (рисунок 14.3).

Характеристическое уравнение наблюдателя det [si - A + KC] = O после преобразования имеет вид $s^2 + k_1 s + k_2 = 0$ и позволяет найти k_1 и k_2 по желаемым корням.

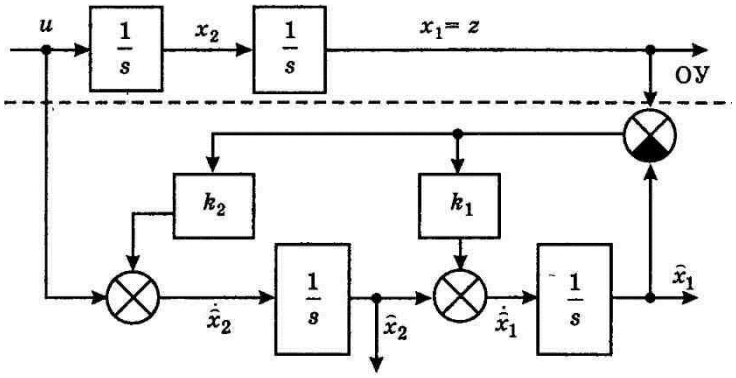


Рисунок 14.3 - Структурная схема наблюдателя с ОУ

15 Лекция №15. Адаптивные системы управления

Адаптивной называется такая система автоматического управления, которая обладает способностью автоматического приспособления к изменяющимся в широких пределах характеристикам объекта управления и внешних воздействий.

Классификация адаптивных систем автоматического управления (АСАУ) отображена на рисунке 15.1.

Обучением называют автоматический процесс накопления опыта и совершенствования алгоритма адаптации в процессе работы системы. Самообучение построено по принципу выработки условных рефлексов у живых организмов. В обучаемых системах присутствует на первой стадии человек-оператор и обучаемая ЭВМ, снабженная соответствующей программой обучения.

Рисунок 15.1 - Классификация адаптивных систем

После достаточно продолжительной совместной работы ЭВМ может принимать решения самостоятельно.

Системы без обучения называются самонастраивающимися системами (СНС). В СНС цель адаптации заключается в поддержании некоторого технико-экономического показателя, характеризующего качество управления и называемого критерием самонастройки, на экстремальном или заданном

значении. Этот критерий является функцией управляющих воздействий адаптации.

Если критерий самонастройки должен поддерживаться на экстремальном значении, то СНС является в то же время оптимальной в статике. У такой СНС критерий оптимальности совпадает с критерием самонастройки.

В поисковой СНС экстремальное значение критерия самонастройки обеспечивается путем автоматического поиска экстремума соответствующей статической характеристики, который может непредвиденно смещаться.

Автоматический поиск экстремума заключается в последовательном выполнении трех операций:

– пробное воздействие на объект;

– определение результатов этого воздействия;

– рабочее воздействие на объект по результатам пробного воздействия, направленное на достижение экстремума критерия самонастройки.

В беспоисковых системах критерий самонастройки может поддерживаться как на заданном, так и на экстремальном значении, но поиск экстремума не применяется. В первом случае используются известные принципы регулирования по отклонению или возмущению. Во втором случае применяются аналитическое определение скорости и направления управляющих воздействий с целью достижения экстремума критерия самонастройки. Беспоисковые системы более совершенны в смысле быстроты и точности адаптации, чем поисковые, но для их проектирования требуется большой объем априорной информации об объекте управления.

15.1 Функциональные схемы самонастраивающихся систем

Укрупненно СНС можно рассматривать состоящей из объекта адаптации и адаптивного управляющего устройства. В роли объекта адаптации (ОА) выступает некоторая САР, замкнутая или разомкнутая, состоящая из автоматического регулятора АР и объекта регулирования ОР (рисунок 15.2). Причем характеристики ОР, а также внешних воздействий g и v подвержены изменениям в процессе работы, что и требует адаптации (самонастройки) за счет изменения параметров автоматического регулятора.

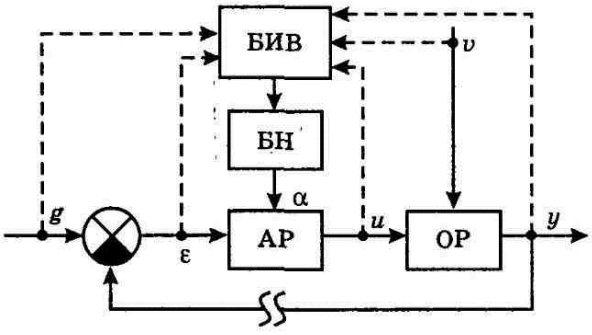


Рисунок 15.2 - Структурная схема СНС

Самонастройку осуществляют два основных блока адаптивного управляющего устройства: блок измерений и вычислений БИВ (анализатор) и блок настройки БН (синтезатор).

БИВ выполняет следующие функции:

– снятие статических и динамических характеристик объектов адаптации и регулирования;

– снятие статистических характеристик случайных воздействий g(t) и v(t);

– измерение критерия самонастройки, его производных и отклонения от экстремума;

– измерение отклонения выходных величин объекта адаптации и его эталонной модели.

В поисковых СНС функции блока настройки БН выполняет автоматический оптимизатор АО (рисунок 15.3), причем вся система в целом называется системой автоматической оптимизации (САО).

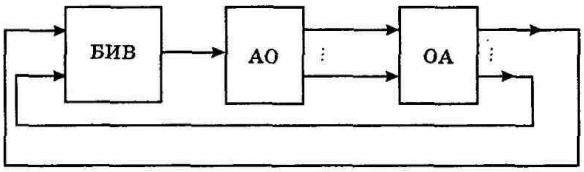


Рисунок 15.3 - Структурная схема САО

В качестве примера поисковой САО можно привести адаптивную систему управления толщиной проката (рисунок 15.4).

Объектом адаптации в этом примере является разомкнутая система регулирования по возмущению, содержащая автоматический регулятор АР и исполнительный двигатель ИД, который через винтовую передачу перемещает в вертикальном направлении подвижный валок клети прокатного стана. Именно это промышленное устройство является объектом регулирования, а регулируемой величиной здесь следует считать толщину h стальной полосы на выходе. Основным возмущением является толщина полосы H на входе, причем разомкнутая система регулирования по возмущению использует ее как входную величину.

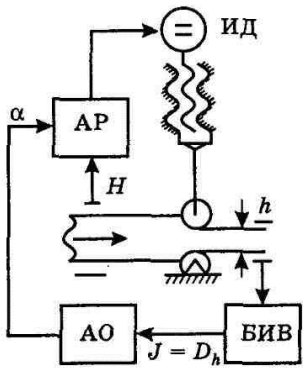


Рисунок 15.4 - Схема поисковой САО толщиной проката

В состав адаптивного управляющего устройства данной СНС входят блоки БИВ и АО. Анализатор БИВ измеряет толщину проката на выходе и вычисляет ее дисперсию D_h как критерий самонастройки. Автоматический оптимизатор АО осуществляет поиск минимума статической характеристики $D_h(a)$ при непредвиденных смещениях этой характеристики путем изменения параметра α настройки автоматического регулятора АР (рисунок 15.5).

В частном случае в поисковой СНС в качестве объекта адаптации может выступать сам объект регулирования. Такой объект должен иметь статическую характеристику с максимумом или минимумом, который необходимо поддерживать с помощью адаптивного автоматического управления. Указанная характеристика смещается непредвиденным образом, что и требует адаптации. Такие системы получили название систем экстремального регулирования (СЭР), а входящие в них автоматические оптимизаторы называют экстремальными регуляторами.

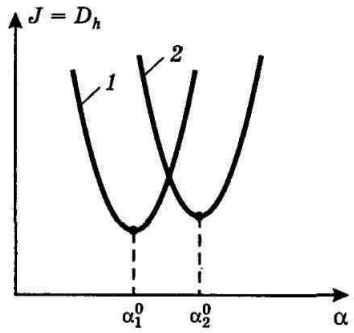


Рисунок 15.5 - Статические характеристики БИВ

Примерами объектов регулирования с экстремальной характеристикой (рисунок 15.6) являются:

– топочное устройство, в которое подаются для горения газ и воздух; в этом случае y - температура; u - расход газа; v - расход воздуха (возмущение);

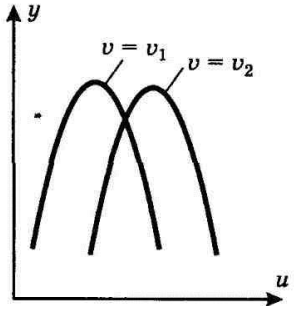


Рисунок 15.6 - Статические характеристики экстремального регулятора

– радиолокационная станция сопровождения цели, у которой выходная величина y - отраженный от цели сигнал; v - перемещение цели; u - перемещение антенны;

– бурильная установка, у которой y - вертикальная скорость проходки; u - осевое давление на бур; v - твердость породы.

15.2 Общая характеристика методов поиска экстремума

Классификация методов поиска экстремума критерия самонастройки, применяемых в поисковых СНС, представлена на рисунке 15.7.

Прямые методы предполагают задание управляющих воздействий адаптации в виде соответствующих числовых множеств, последующее измерение значения критерия самонастройки, запоминание полученного значения, если оно ближе к экстремуму, чем все предыдущие (при поиске максимума - наибольшего). Сочетание значений управляющих воздействий может задаваться детерминированно или случайно. Прямые методы позволяют найти глобальный экстремум, в чем состоит их преимущество.

Рисунок 15.7 - Классификация методов поиска экстремума критерия самонастройки

Градиентные методы требуют вычисления компонент градиента функции или ее отклонения от экстремума. Градиентом J называется вектор в пространстве входных величин x_1, x_2, ..., x_n, компонентами которого являются частные производные от функции по входным величинам и который показывает направление наибольшего возрастания функции:

$$grad\ J = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial x_i} x_{i0},$$

где x_{i0} - орт (единичный вектор) по оси x.

В градиентных методах надо решать последовательно две задачи: определение компонент градиента или отклонения от экстремума и организацию движения к экстремуму на основе полученной информации.

Список литературы

1 Анхимюк В.Л. Теория автоматического управления. - Мн.: Дизайн ПРО, 2002.

2 Зотов М.Г. Многокритериальное конструирование систем автоматического управления. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004.

3 Методы классической и современной теории автоматического управления. – т.1 – Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления /Под ред. К.А.Пупкова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014.

4 Олсон Г. Цифровые системы автоматизации и управления. – СПб.: Невский диалект, 2001.

5 Попов Е. П. Теория систем автоматического управления. – СПб: Профессия, 2012.

6 Рутгайзер О.З. Радиоавтоматика: Учебное пособие. – Алматы: АИЭС, 1992.

7 Савин М.М. Теория автоматического управления. - Ростов н/Д: Феникс, 2007.

8 Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А.Красовского.- М.: Наука, 1987.

Содержание

Введение 3
1 Лекция №1. Нелинейные автоматические системы 5
2 Лекция №2. Метод гармонической линеаризации 9
3 Лекция №3. Метод фазовой плоскости 15
4 Лекция №4. Фазовые траектории нелинейных систем 22
5 Лекция №5. Прямой метод определения устойчивости А.М. Ляпунова 27
6 Лекция №6. Частотный критерий абсолютной устойчивости состояния равновесия 31
7 Лекция №7. Стохастические системы 34
8 Лекция №8. Перспективные системы управления 40
9 Лекция №9. Интеллектуальные системы автоматического управления 45
10 Лекция №10. Основы фази-управления 53
11 Лекция №11. Общая характеристика оптимальных систем 60
12 Лекция №12. Метод динамического программирования 68
13 Лекция №13. Принцип максимума 75
14 Лекция №14. Управляемость и наблюдаемость 81
15 Лекция №15. Адаптивные системы управления 87
Список литературы 93

Сводный план 2017 г., поз.235

Бахытжан Сергеевич Байкенов
Зарина Варисовна Абдулина

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Конспект лекций для магистрантов
специальности 6М071600 − Приборостроение

Редактор Л.Т. Сластихина
Специалист по стандартизации Н.К. Молдабекова

Подписано в печать __.__.__ Формат 60х84 1/16
Тираж 20 экз. Бумага типографическая № 1
Обьем 5,8 уч.-изд. л. Заказ_____Цена 2875 тг.

Копировально-множительное бюро
некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013 Алматы, ул. Байтурсынова, 126