

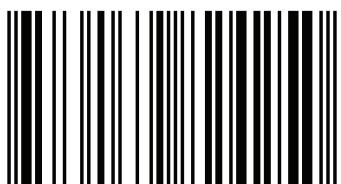
В книге изложены разработанный автором метод структурно-кинематического синтеза пространственных рычажных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев, а также рассмотрены задачи синтеза механизма по перемещению тела в пространстве. В теоретическом плане предлагается новый подход к проектированию пространственных механизмов, согласно которому процесс проектирования основывается на кинематическом синтезе четырехзвенной исходной кинематической цепи и присоединяемых кинематических цепей или двухэлементных звеньев.

Кинематический синтез механизмов



Серикбай Косболов
Алгазы Жауыт

Параметрический синтез пространственных рычажных механизмов



978-613-9-82425-0

Косболов, Жауыт

LAP
LAMBERT
Academic Publishing

**Серикбай Косболов
Алгазы Жауыт**

**Параметрический синтез пространственных рычажных
механизмов**

**Серикбай Косболов
Алгазы Жауыт**

**Параметрический синтез
пространственных рычажных
механизмов**

Imprint

Any brand names and product names mentioned in this book are subject to trademark, brand or patent protection and are trademarks or registered trademarks of their respective holders. The use of brand names, product names, common names, trade names, product descriptions etc. even without a particular marking in this work is in no way to be construed to mean that such names may be regarded as unrestricted in respect of trademark and brand protection legislation and could thus be used by anyone.

Cover image: www.ingimage.com

Publisher:

LAP LAMBERT Academic Publishing

is a trademark of

International Book Market Service Ltd., member of OmniScriptum Publishing

Group

17 Meldrum Street, Beau Bassin 71504, Mauritius

Printed at: see last page

ISBN: 978-613-9-82425-0

Zugl. / Утвeрд.: Алматы, КазНТУ им. К.И. Сатпаева, 2008

Copyright © Серикбай Косболов, Алгазы Жауыт

Copyright © 2018 International Book Market Service Ltd., member of
OmniScriptum Publishing Group

All rights reserved. Beau Bassin 2018

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ
КАЗАХСТАН

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

**КОСБОЛОВ СЕРИКБАЙ
ЖАУЫТ АЛГАЗЫ**

Параметрический синтез пространственных рычажных механизмов

Республика Казахстан
Алматы, 2018

Содержание

| | |
|---|------------|
| Введение | 5 |
| 1 Современное состояние исследований и обзор методов анализа и синтеза пространственных рычажных механизмов | 11 |
| 2 Кинематический синтез исходных кинематических цепей со сферическими парами | 28 |
| 2.1 Формирование структурных схем пространственных рычажных механизмов. | 28 |
| 2.2 Синтез четырехзвенной исходной кинематической цепи со сферическими парами для пространственных механизмов | 37 |
| 2.3 Синтез модификации исходных кинематических цепей со сферическими парами | 45 |
| 2.4 Синтез исходной кинематической цепи со сферическими и сферическими с пальцем парами | 55 |
| 2.5 Синтез модификации исходных кинематических цепей со сферическими и сферическими с пальцем парами | 63 |
| 2.6 Синтез исходной кинематической цепи с вращательной и сферическими парами и ее модификации | 72 |
| 2.7 Синтез исходной кинематической цепи с вращательной, вращательной и сферической парами | 80 |
| 2.8 Синтез исходной кинематической цепи с вращательной, вращательной и вращательной парами | 87 |
| 2.9 Синтез двухэлементного звена со сферической и вращательной кинематическими парами | 95 |
| 2.10 Синтез двухэлементного звена с двумя вращательными кинематическими парами | 97 |
| Выводы по второму разделу | 101 |
| 3 Кинематический синтез исходных кинематических цепей с вращательными, сферическими и цилиндрическими кинематическими парами | 102 |
| 3.1 О существовании решения задачи синтеза исходной кинематической цепи со сферическими кинематическими парами | 102 |
| 3.2 Синтез исходной кинематической цепи с вращательной, плоскостной и сферической кинематическими парами | 107 |
| 3.3 Синтез исходной кинематической цепи с вращательной, цилиндрической и сферической кинематическими парами | 119 |

| | |
|--|-----|
| 3.4 Синтез исходной кинематической цепи с вращательной, вращательной и цилиндрической кинематическими парами | 125 |
| 3.5 Синтез пространственных рычажных передаточных механизмов с вращательной, двумя сферическими и поступательной кинематическими парами | 128 |
| 3.6 Синтез пространственных рычажных передаточных механизмов с вращательной, цилиндрической, сферической и поступательной кинематическими парами | 130 |
| 3.7 Синтез двухэлементного звена со сферической и цилиндрической кинематическими парами | 133 |
| 3.8 Синтез двухэлементного звена с вращательной и цилиндрической кинематическими парами | 135 |
| 3.9 Синтез двухэлементного звена с двумя цилиндрическими кинематическими парами | 137 |
| Выводы по третьему разделу | 141 |
| 4 Структурно-кинематический синтез пространственных рычажных механизмов | 143 |
| 4.1 Структурный синтез пространственных рычажных механизмов на основе исходных кинематических цепей | 143 |
| 4.2 Общий метод синтеза пространственных рычажных механизмов на основе исходных кинематических цепей | 148 |
| 4.3 Структурно-кинематический синтез перемещающих пространственных рычажных механизмов на основе исходной кинематической цепи и ее модификаций | 151 |
| 4.4 Структурно-кинематический синтез направляющих пространственных рычажных механизмов на основе исходной кинематической цепи и ее модификаций | 156 |
| 4.5 Структурно-кинематический синтез передаточных пространственных рычажных механизмов на основе исходной кинематической цепи и ее модификаций | 160 |
| Выводы по четвертому разделу | 162 |
| 5 Кинематический синтез конкретных механизмов | 164 |
| 5.1 Пример синтеза перемещающего шестизвездного механизма | 164 |
| 5.2 Кинематический синтез пространственных перемещающих грузоподъемных механизмов | 173 |
| 5.3 Кинематический синтез пространственных направляющих механизмов | 178 |
| 5.3.1 Кинематический синтез станка – качалки для добычи нефти | 178 |

| | |
|--|------------|
| 5.3.2 Кинематический синтез направляющего пространственного рычажного механизма с четырьмя выстойами | 180 |
| 5.4 Кинематический синтез пространственных передаточных механизмов | 188 |
| 5.4.1 Синтез передаточных четырехзвенных сферических механизмов | 188 |
| 5.4.2 Кинематический синтез пространственного четырехзвенного передаточного механизма на основе исходных кинематических цепей | 192 |
| 5.4.3 Кинематический синтез пространственного передаточного механизма с тремя выстойами на основе исходной кинематической цепи | 200 |
| Выводы по пятому разделу | 205 |
| 6 Динамика и жесткость исходных кинематических цепей | 206 |
| 6.1 Динамические модели исходных кинематических цепей с учетом упругости звеньев | 206 |
| 6.2 Определение жесткостных характеристик для составления уравнения движения исходных кинематических цепей с упругими звеньями | 209 |
| Выводы по шестому разделу | 212 |
| Заключение | 214 |
| Список использованных источников | 218 |

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность проблемы. Одной из первоочередных задач государственной стратегии индустриально – инновационного развития Республики Казахстан до 2015 года является достижение высокой конкурентоспособности отечественной промышленной продукции на мировых рынках, в том числе к приоритетным направлениям относятся теоретические и прикладные проблемы современного машиностроения.

В условиях рыночной экономики промышленность Республики Казахстан нуждается в постоянном повышении технического уровня и эксплуатационных качеств продукции машиностроения. От уровня развития машиностроения, от степени совершенствования машин в значительной мере зависит экономика страны, ее научно – технический прогресс.

Для повышения технического уровня машин требуется расширение технологических возможностей оборудования и устройств существующих конструкций, а также оснащением их принципиально новыми механизмами. Создание и внедрение новых конструкций промышленных роботов, оборудования для легкой, горно-металлургической и нефтегазовой промышленности, а также подъемно–транспортных и погрузочно–разгрузочных устройств требует применение механизмов со сложными законами движения рабочих органов.

Этим требованиям наиболее полно отвечают рычажные механизмы. Теория плоских рычажных механизмов высоких классов (МВК) впервые была разработана академиком У.А. Джолдасбековым [1]. Применение МВК позволило создать принципиально новые погрузочно-разгрузочные, грузоподъемные и другие устройства, защищенные авторскими свидетельствами и патентами на изобретение.

Несмотря на положительные стороны, плоские рычажные механизмы обладают общеизвестными недостатками. Так, например, из-за практической невозможности изготовления строго параллельных осей вращения шарниров в плоских рычажных механизмах, включая МВК, возникают избыточные связи, которые приводят к увеличению сил реакций и трения в кинематических парах, снижению КПД механизма.

Замена плоских рычажных механизмов пространственными рычажными механизмами приводит к устранению отмеченных недостатков. Основными преимуществами пространственных механизмов являются более естественное воспроизведение требуемых пространственных движений, выполняемое при меньшем числе звеньев и при меньших габаритах, устранение избыточных связей, что приводит к снижению значений сил реакций и трения в шарнирах и уменьшению энергоемкости.

На современном этапе развития роль пространственных механизмов значительно возросла. Следуя этой тенденции, за последние десятилетия сформировано новое фундаментальное направление по созданию теории анализа и синтеза пространственных рычажных механизмов высоких классов (ПМВК).

В работах Байгунчекова Ж.Ж. и Джолдасбекова С.У. впервые были рассмотрены ПМВК, как объект исследования на 7 Всемирном Конгрессе по теории машин и механизмов в городе Севилья, Испания, 1987 г., где изложены основы анализа и синтеза ПМВК.

В настоящее время разработаны теоретические основы анализа и синтеза пространственных механизмов высоких классов, включающие аналитические методы их структурного, кинематического и динамического анализа, а также структурно – кинематического синтеза.

Создание принципиально новых пространственных механизмов, в том числе механизмов с заданными законами движения входного и выходного звеньев, сдерживается из-за сложности и трудоемкости их исследования и конструирования, отсутствия ориентированных на эффективное использование ЭВМ методов их анализа и синтеза. Алгоритмы и программы машинного анализа и синтеза, применяемые в настоящее время, или не охватывают все возможные схемы таких механизмов, или не охватывают все этапы исследования, что требует большого объема дополнительных расчетов. В особенности это касается учета многочисленных конструктивных ограничений, накладываемых на параметры механизма.

Методы анализа и синтеза указанных механизмов, существующие на сегодняшний день, могут служить основой для создания программ, ориентированных на эффективное использование ЭВМ и на создание систем автоматизированного проектирования новых механизмов и машин из-за трудностей или невозможности алгоритмизации всех этапов исследования. В связи с этим задача разработки методов анализа и синтеза сложных пространственных рычажных механизмов с заданными законами движения входного и выходных звеньев, позволяющих автоматизировать с помощью ЭВМ выполнение всех этапов проектирования, является актуальной.

По существу до исследований автора не было системного подхода к формированию пространственных механизмов для управления перемещения твердого тела в зависимости от заданного закона движения входного звена механизма. В данной работе предложена разработка метода одновременно производящего и структурный и кинематический синтез пространственных рычажных механизмов для управления перемещения твердого тела по заданным положениям входного и выходного звеньев механизма. Кинематический синтез является одним из наиболее ответственных этапов в процессе проектирования механизма, поскольку

именно на этом этапе формируются основные кинематические свойства, необходимые механизму для выполнения возложенных на него функций.

Целью работы является разработка численно – аналитических методов структурно – кинематического синтеза пространственных рычажных механизмов по заданным законам движения входного и выходного звеньев, ориентированных на эффективное использование ПЭВМ, позволяющих автоматизировать все этапы решения задач синтеза механизмов на основе использования исходных кинематических цепей (ИКЦ) и ее модификации.

Данная работа состоит из шести разделов и приложения.

Первый раздел посвящен обзору и сравнительному анализу методов синтеза и анализа пространственных рычажных механизмов. Так же показано, что существующие методы синтеза не позволяют автоматизировать в полной мере все этапы структурно – кинематического синтеза. Рассмотрены основные направления в создании автоматизированных систем проектирования новых механизмов и машин. Отмечена необходимость разработки численно–аналитических методов синтеза новых механизмов и машин. На основе результатов обзора и анализа даны обоснование и постановка задач, решаемых в работе.

Во втором разделе сформулированы и решены задачи кинематического синтеза пространственных четырехзвенных исходных кинематических цепей (ИКЦ) со сферическими, со сферическими с пальцем и вращательными кинематическими парами, которые могут быть положены в основу синтеза пространственных рычажных механизмов, включая МВК, с заданными законами движения входного и выходного звеньев.

В третьем разделе сформулированы и решены задачи кинематического синтеза пространственных четырехзвенных ИКЦ с вращательными, плоскостными, цилиндрическими и сферическими парами и их модификации, которые могут быть положены в основу синтеза пространственных рычажных механизмов, включая пространственных МВК, с заданными законами движения входного и выходного звеньев. А так же рассмотрены задачи синтеза двухэлементных звеньев с различными кинематическими парами для реализации точного воспроизведения выходного звена механизма.

В четвертом разделе сформулированы и решены задачи структурно – кинематического синтеза перемещающих, направляющих и передающих пространственных рычажных механизмов на основе ИКЦ и модификаций по заданным законам движения входного и выходного звеньев. В основе предлагаемого метода лежит возможность составления структурной схемы любого пространственного механизма из пространственных ИКЦ и ее модификаций. Последнее позволяет весьма просто составлять

одновременно структурную схему и целевую функцию синтеза механизма с помощью ЭВМ.

В пятом разделе рассмотрены особенности применения предлагаемого метода при синтезе конкретных механизмов. Приведены примеры с получением численных результатов синтеза четырех и шестизвездных механизмов указанных типов при различных заданиях условий синтеза и конструктивных ограничений. Синтезированы два пространственных механизма. Это устройство с тремя выстоями рабочего органа для компенсации натяжения уточных нитей на ткацких станках СТБ и устройство с четырьмя выстоями рабочего органа для компенсации натяжения уточных нитей на ткацких станках СТБ.

В шестом разделе рассмотрены динамические модели пространственных четырехзвенных ИКЦ с учетом упругости звеньев и определены жесткостные характеристики для составления уравнения движения ИКЦ с упругими звеньями.

Научная новизна. Научная значимость обусловлено решением задач кинематического синтеза пространственных рычажных механизмов по заданным условиям, описывающим относительные движения входного и выходного звеньев механизма в аналитическом виде, а также в существованиях решения задач четырехзвенной ИКЦ со сферическими кинематическими парами и переход к синтезу ИКЦ с вращательными, со сферическими и цилиндрическими кинематическими парами.

Разработана теория и обобщенный метод структурно – кинематического синтеза ИКЦ для пространственных рычажных механизмов, основанный на развитии метода аппроксимационной кинематической геометрии, предложенный Ю.Л. Саркисяном для трехзвенной ИКЦ, применительно к синтезу четырехзвенных ИКЦ с различными кинематическими парами.

Разработан метод кинематического синтеза пространственных исходных кинематических цепей с вращательными, сферическими, сферическими с пальцем, плоскостными и цилиндрическими кинематическими парами. Разработан метод структурно – кинематического синтеза пространственных рычажных механизмов на основе пространственных исходных кинематических цепей по заданным законам движения входного и выходного звеньев. Такой подход решения задачи синтеза пространственных рычажных механизмов позволяет автоматизировать все этапы проектирования механизмов. В отличие от других методов такой подход решения задачи синтеза позволяет определить все искомые параметры механизма в аналитическом виде.

В теоретическом плане предлагается новый подход к проектированию пространственных механизмов для управления перемещения твердого тела или одноподвижных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев, согласно которому процесс проектирования

основываются на кинематическом синтезе четырехзвенной ИКЦ и присоединяемых модификаций кинематических цепей или двухэлементных звеньев к ИКЦ с различными видами кинематических пар.

Достоверность научных результатов. Достоверность теоретических результатов обеспечивается корректным использованием теоретических положений и методов теоретической и прикладной механики и прикладной математики. Эффективность метода и алгоритмов подтверждается результатами численного моделирования на ЭВМ. Численные результаты синтеза конкретных механизмов подтверждают работоспособность и эффективность разработанного метода структурно – кинематического синтеза пространственных рычажных механизмов по заданным законам движения входного и выходного звеньев механизма.

Практическая ценность и реализация результатов работы.

Разработанный метод структурно – кинематического синтеза пространственных рычажных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев механизма является научной основой проектирования с ранее неизвестными свойствами.

- Разработан метод одновременно производящий и структурный, и кинематический синтез пространственных рычажных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев на основе незамкнутой четырехзвенной исходной кинематической цепи и их модификаций с различными кинематическими парами;

- Показано, что при синтезе механизмов используется одна и та же целевая функция синтеза для незамкнутой четырехзвенной исходной кинематической цепи и для их модификаций с различными кинематическими парами

- Разработан комплекс алгоритмов и программ, позволяющих в значительной степени автоматизировать процесс структурно-кинематического синтеза пространственных рычажных механизмов по заданным N -положениям входного и выходного звеньев механизма.

Реализация результатов работы. Основные положения представленной диссертации, разработанные алгоритмы и программы и методы синтеза использованы и внедрены:

- в учебном процессе при чтении спецкурса «Оптимальное проектирование» для специальности «Динамика и прочность машин» и курсовом и дипломном проектировании на кафедре «Теоретическая и прикладная механика» в КазНТУ имени К.И. Сатпаева;

- получен патент Республики Казахстан на устройство с тремя выстоями рабочего органа для компенсации натяжения уточных нитей на ткацких станках СТБ (обладателем патента является КазНТУ имени К.И. Сатпаева);

- получен патент РК на устройство с четырьмя выстоями рабочего органа для компенсации натяжения уточных нитей на ткацких станках СТБ (обладателем патента является КазНТУ имени К.И. Сатпаева);

- в конструкторском бюро машиностроительного завода АО «Массагет» утверждены и приняты алгоритмы и программы и метод структурно – кинематического синтеза пространственных механизмов для проектирование прогрессивных новых машин с ожидаемым годовым экономическим эффектом не менее 3 млн. тенге.

1 Современное состояние исследований и обзор методов анализа и синтеза пространственных рычажных механизмов

С фундаментальными исследованиями выдающегося математика и механика П. Л. Чебышева и Л. Бурмистера связаны возникновение общей постановки задачи приближенного синтеза шарнирных механизмов и формирование его методологических основ. Впервые сформулировал задачу аналитического синтеза механизмов в виде задачи приближения функции выдающийся математик и механик П.Л. Чебышев [2–10]. П.Л. Чебышев впервые сформулировал задачу аналитического синтеза механизмов, разработал метод нахождения их параметров кинематической схемы, установил необходимые и достаточные условия наилучшего приближения. Использованный П.Л. Чебышевым метод наилучшего приближения при решении задач синтеза механизмов применяется для обеспечения равномерного приближения аппроксимирующей кривой к заданной кривой. Но при этом число заданных узлов интерполяирования должно быть на единицу больше, чем число вычисляемых параметров кинематической схемы синтезированного механизма.

Однако у исследователей метод наилучшего приближения для синтеза механизмов получил ограниченное применение, так как отклонение, используемое в задачах синтеза механизмов, должно представляться в виде полиномов по Чебышевской системе функций. В большинстве случаев составление функции отклонения по Чебышеву не позволяет описать взаимосвязь относительных перемещений звеньев в рычажных механизмах.

Синтез механизмов по Чебышеву получил дальнейшее развитие в работах З.Ш. Блоха [11–12], И.И. Артоболевского [13 – 18], Н.И. Левитского [19 – 21], С.А. Черкудинова [22 – 24], Г.Г. Баранова [25], М.В. Семенова [26], Я.Л. Геронимуса [27] и других авторов.

Дальнейшее усилия по развитию идеи Чебышева были направлены на исследования по отысканию наилучшего приближения через интерполяционного синтеза механизмов в виде аналитического и графического способов. Аналитические процедуры синтеза механизмов, основанные на векторном методе составления уравнения замкнутости кинематической цепи, были предложены Е. П. Новодворским [28] и В.А. Зиновьевым [29, 30], а графическое решение аналитическим уточнением параметров – в работе Б. И. Степанова [31].

Созданную теоретическую базу в области структурного, кинематического и динамического анализа, а также структурно – кинематического синтеза плоских рычажных механизмов, основанную на выше указанных работах, дополнили работы Л.В. Ассура [32–33], С. Н. Кожевникова [34], В.И. Доронина [35–38], Ю. Л. Саркисяна [39], Э. Е.

Пейсаха [40] и других. Эти исследования проводились только для механизмов II, III и изредка IV классов по классификации И.И. Артоболевского. Этим можно объяснить тот факт, что из огромного разнообразия механизмов в промышленности в основном применяются плоские рычажные механизмы II и III классов, хотя МВК, содержащие в своем составе группы Ассура IV и более высоких классов, обладают широкими функциональными возможностями.

История возникновения и развития теории пространственных механизмов охватывает более столетия. В настоящее время число публикаций в этой области весьма велико. На основе исторического обзора и рассмотрения современной литературы авторским коллективом Ф.М. Диментбергом, Ю.Л. Саркисяном и М.К. Усковым сделан анализ современного состояния теории пространственных механизмов с низшими парами, включающий вопросы структуры, кинематики, кинетостатики, динамики и синтеза, а также применения теории пространственных механизмов для описания некоторых природных процессов [41].

Здесь приводим лишь обзор основных работ в области структурного, кинематического, динамического анализа и синтеза пространственных механизмов с целью показать современные направления развития теории; анализа и синтеза пространственных механизмов.

Методы кинематического анализа пространственных рычажных механизмов по приемам определения кинематических параметров разделяются на три вида: графический, графо-аналитический и аналитический. По мере становления науки теории механизмов и машин существенно менялись и содержание методов исследования движений звеньев механизмов.

Подробный анализ исследований по кинематическому анализу пространственных механизмов с использованием всевозможных аналитических методов описан в монографии П.А. Лебедева, выявлены их достоинства и недостатки, подразделены все методы на алгебраические и геометрические [42].

Кинематическому методу пространственных механизмов с применением описание вращения параметров Кэли-Клейна посвящена работа У.А. Джолдасбекова, М.М. Молдабекова и С.А. Мурушкина [43].

В связи с появлением высокоскоростных ЭВМ дальнейшее развитие получили машины методы кинематического анализа, а также использование и развитие методов математического моделирования задач анализа механизмов с целью создания подсистемы автоматизированного проектирования механизмов.

В этом плане отметим работы М.М. Молдабекова и С.А. Мурушкина позволяющего более полно автоматизировать процесс анализа положений

механизмов с одновременным уменьшением числа вычислений, на основе спинорного преобразования трехмерного пространства [44–46].

Задачи синтеза механизмов в основном развивались в двух направлениях: алгебраические методы аппроксимационного синтеза рычажных механизмов и методы синтеза рычажных механизмов на основе аппроксимационной кинематической геометрии. Развитие двух этих направлений синтеза механизмов оказало решающее влияние на формирование методов аппроксимационного синтеза рычажных механизмов, основы которой в наиболее полной форме изложены в монографии Ю.Л. Саркисяна [39].

Геометрические преобразования, связанные с кинематической инверсией пространственных механизмов, были разработаны и применены к задачам синтеза по положениям в работах К.С. Иванова, в которых разрабатывается метод синтеза на основе обращения движения. В качестве взвешенной разности принимается функция отклонения воспроизводимой кривой от заданной, получаемая после подстановки координат воспроизводящей точки механизма в выражение за данной функции взамен ее текущих координат. Причем координаты воспроизводящей точки механизма выражаются через его искомые параметры с помощью обращения движения механизма [47–53].

В настоящее время в связи с массовым внедрением в производство различных автоматических устройств начали получать все более широкое распространение регулируемые механизмы. С помощью регулируемых и самонастраивающихся механизмов успешно решаются задачи автоматического переключения на ходу рабочих органов машин на выполнение различных операций, автоматического поддерживания задаваемых режимов движения с преодолением случайных динамических нагрузок.

Задачи синтеза пространственных регулируемых механизмов высоких классов рассмотрены в работах Байгунчекова Ж.Ж., Джолдасбекова С.У., Нурахметова Б.К. [54, 55].

Теория синтеза пространственных механизмов постоянно развивается и совершенствуется. Предлагаются новые методы синтеза, решаются новые задачи, отражающие требования передовой современной практики конструирования машин и механизмов.

В связи с появлением современных высокоскоростных ЭВМ созданы оптимизационные методы синтеза механизмов, которые рассмотрены в работах Р.И. Ализаде, И.Г. Новрузбекова, Ф. Фрейденштейна, Дж. Сандора, Э.И. Пейсаха, Ю.Л. Саркисяна и других авторов.

Преимущества оптимизационных методов синтеза механизмов проявляются особенно в тех случаях, когда "классические" методы кинематического синтеза, основанные на кинематической геометрии или

различных способах аппроксимации, неприменимы или малозэффективны. Успех поиска оптимального механизма во многом зависит от выбора исходного приближения, определяемого классическими методами, в то время как механизм, спроектированный классическими методами, часто требует оптимизации с учетом дополнительных условий синтеза.

В настоящее время разработаны основы анализа и синтеза ПМВК, включающие аналитические методы структурного, кинематического, кинетостатического и динамического анализа, а также структурно-кинематического синтеза. Структурно-кинематический синтез ПМВК проводится на основе кинематической инверсии, представляющей собой метод группового покоординатного спуска, т.е. метод нулевого порядка.

Для повышения скорости сходимости и точности вычисления необходимы градиентные методы первого и второго порядка.

Использования МВК в манипуляционных устройствах, по сравнению с существующими их антропоморфными конструкциями, повышает точность позиционирования и быстродействие вследствие большой жесткости конструкции, увеличивает грузоподъемность за счет распределения сил по контурным звеньям. Кроме того, в МВК имеется возможность реализации сложных программных траекторий одного или нескольких рабочих органов, что значительно упрощает системы управления манипуляционными роботами, созданными на базе МВК.

Фундаментальные исследования МВК с точки зрения единства их структурной классификации и методов исследования и проектирования изложены в монографии У.А. Джолдасбекова [1]. На основе метода развития изменяемых замкнутых контуров получены разновидности одно- и многоконтурных групп Ассура высоких классов. Выведены структурные формулы, определяющие соотношения между классом, порядком групп Ассура и количеством звеньев, кинематических пар, поводков и внешних шарниров бесповодковых контурных звеньев.

Проведена структурная классификация МВК, согласно которой все одноконтурные МВК с одним ведущим звеном сгруппированы в 3 вида:

1. МВК, которые методом замены ведущего звена сводятся к механизмам II и III классов;

2. Механизмы Ассура, т.е. механизмы, содержащие в своем составе группы Ассура k -го класса ($k \geq 4$), ($k - 1$)-го порядка и с ($k - 2$) - мя поводками, у которых не понижается класс методом замены ведущего звена;

3. МВК, которые методом замены ведущего звена сводятся к механизмам Ассура и наслоенным к ним двухповодковым группам.

Для МВК второго и третьего видов в монографии разработаны графо-аналитические методы кинематического и кинетостатического анализа.

Качественное исследование и выявление функциональных возможностей МВК возможны при наличии численных и аналитических методов их анализа и синтеза.

Первыми научными исследованиями в области аналитической кинематики и кинетостатики сложных плоских рычажных механизмов, в том числе МВК, являются работы Н.Г. Бруевича [56–58], посвященные решению задач кинематики и кинетостатики этих механизмов на основе векторных исчислений.

В работах Джолдасбекова У.А., Байгунчекова Ж.Ж. [59, 60] изложен метод условных обобщенных координат, позволяющий определить число сборок и положения звеньев групп Ассура независимо от их класса и порядка. Данный метод основан на преобразовании групп Ассура высоких классов в механизмы II класса путем удаления некоторых звеньев и выбора условных ведущих звеньев за счет появившихся степеней свободы.

В последнее время методы синтеза МВК развиваются в том направлении, когда наряду со структурным синтезом проводится их кинематический синтез. Методы структурно – кинематического синтеза МВК изложены в работах [61-65 и др.]. Согласно этим методам сначала синтезируются многоподвижные незамкнутые или замкнутые кинематические цепи, названные исполнительными кинематическими цепями, которые воспроизводят заданные законы движения входного и выходного звеньев. Затем на движения звеньев исполнительных кинематических цепей налагаются связи при помощи звеньев с отрицательными степенями свободы, параметры синтеза которых также определяются. В результате выполнения этих этапов и заданных условий синтеза формируются МВК с определенной структурой и метрическими параметрами.

На основе разработанных методов анализа и синтеза МВК спроектированы принципиально новые грузоподъемные, погрузочно-разгрузочные и манипуляционные устройства, защищенные авторскими свидетельствами на изобретения.

Один из основных подходов к кинематическому синтезу механизмов с низшими парами связан с именем немецкого ученого Л. Бурмистера, и суть его заключается в следующем. При прохождении рассматриваемого тела через заданные положения соответствующие положения определенных точек и линий тела остаются на одной сфере, окружности, гиперболоиде вращения и других, легко механизируемых кривых и поверхностях. Тогда, если наложить связи на движение тела, ведя указанные точки и прямые по соответствующим кривым и поверхностям, тело, очевидно, пройдет через заданные положения. Эти связи можно реализовать посредством простейших незамкнутых кинематических цепей. Иначе говоря, геометрические связи заменяются "физическими", в результате чего образуется механизм. В зависимости от числа и вида присоединяемых цепей можно получить множество механизмов различных размеров и структуры, перемещающих твердое тело через заданные положения. Описанный подход относится к геометрическим методам синтеза механизмов. Теоретическая

основа этих методов – кинематическая геометрия конечно-удаленных положений твердого тела, известная в случае плоскопараллельного движения, как теория Бурместера.

В синтетической форме пространственная кинематическая геометрия конечно-удаленных положений разработана А. Шенфлисом в работе [66], где дано систематическое изложение проективных основ теории особых точек твердого тела с несколькими положениями на одной сфере, плоскости, окружности и прямой. Здесь впервые сформулированы теоремы о геометрических местах точек твердого тела, имеющих семь положений на сфере, шесть положений на плоскости, четыре положения на окружности и три положения на прямой.

Далее в области пространственной кинематической геометрии конечно-удаленных положений сделана попытка В. В. Добровольским [67, 68], который при решении задач сферической кинематической геометрии пользуется методом стереографической проекции. В. В. Добровольским теория Бурместера была перенесена на сферу и установлено соответствие между результатами сферической геометрии и плоской. При этом получен ряд новых результатов относительно кривых и точек Бурместера для конечных и бесконечно малых сферических перемещений твердого тела.

Идеи Бурместера получили дальнейшее развитие в работах Р. Бейера [69], К. Хайна [70], В. Лихтенхельда [71], Б. Росса [72, 73] и других авторов. В работе С. А. Черкудинова [74] изложено аналитическое решение задачи Бурместера и дальнейшее развитие полноило в работе О. Г. Озола [75], в которой изложено аналитическое решение задачи Бурместера с использованием формул П.О. Сомова.

Первым примером аналитического описания геометрических мест, ассоциированных с совокупностью конечных пространственных перемещений твердого тела, является работа Дж. Уилсона [76]. Основываясь на указанных уравнениях, Дж. Уилсон разработал конкретные алгоритмы синтеза звеньев с двумя сферическими или вращательными парами, связывающих перемещаемый объект и систему отсчета, что является наиболее ценным результатом работы.

Аналитическая теория Бурместера с исчерпывающей полнотой была изложена в работе О. Боттемы и Б. Росса [77].

В Г. Аверьяновой и Ф.М. Диментбергом [78] показана возможность построения пространственного четырехзвенного механизма с цилиндрическими парами по четырем и пяти положениям одного из звеньев. В этой задаче рассмотрено определение геометрического места винтовых осей конечных перемещений шатуна.

В работе Ю.Л. Саркисяна [39], в которой предложена теория аппроксимационной кинематической геометрии, объединяющая основные положения кинематической геометрии конечно – удаленных положений и концепцию квадратических или чебышевских приближений, лежащую в

основе алгебраических методов аппроксимационного синтеза механизмов. Такое сочетание исходных положений позволяет сохранить наглядность, удобство выявления и реализации условий синтеза, возможность качественного анализа множества решений и обеспечить требуемое приближение к заданным функциям.

Дальнейшее развитие теория аппроксимационного синтеза получила в работах Ю.Л. Саркисяна и его учеников [79-88].

Геометрические преобразования, связанные с кинематической инверсией пространственных механизмов, были разработаны и применены к задачам синтеза по положениям в работах К.С. Иванова [89, 90].

Геометрическому методу синтеза пространственных механизмов присущи большие достоинства. В первую очередь следует отметить возможность качественного анализа множества решений каждой задачи синтеза, позволяющего установить условия существования синтезируемых механизмов, их максимальное число и другие особенности. Поскольку структура проектируемого механизма не фиксирована, следуя геометрическому методу; можно получить множество структурных вариантов реализаций заданного движения. Наконец, весьма прости и наглядны численные процедуры синтеза механизмов по геометрическому методу. Однако до недавнего времени геометрический метод применялся лишь при ограниченном числе положений объекта, которое не может превосходить число искомых параметров проектируемой незамкнутой цепи, к тому же процедуры синтеза с увеличением числа положений значительно усложнялись.

Теория синтеза пространственных механизмов постоянно развивается и совершенствуется. Предлагаются новые методы синтеза, решаются новые задачи, отражающие требования передовой современной практики конструирования машин и механизмов.

Академиком У.А. Джолдасбековым сформировано новое фундаментально-научное направление по созданию теории ПМВК со многими степенями свободы. ПМВК в сравнении с плоскими механизмами высоких классов имеют ряд общеизвестных преимуществ, как устранение избыточных связей, что приводит к снижению значений сил реакций и трения в шарнирах и уменьшению энергоемкости и металлоемкости, повышению КПД и увеличивается зона обслуживания за счет использования пространственных кинематических пар и др.

В работе У.А. Джолдасбекова и Ж.Ж. Байгунчекова [91] впервые были изложены в мировой практике по теории механизмов и машин основы анализа и синтеза пространственных механизмов высоких классов (ПМВК), которые получили развитие в работах [92-96].

Ж.Ж. Байгунчековым и С.У. Джолдасбековым [97, 98] разработаны основы анализа и синтеза ПМВК, включающие аналитические методы их

структурного, кинематического, кинетостатического и динамического анализа, а также структурно-кинематического синтеза.

В диссертационной работе Б.С. Саурбаева [99] разработаны итерационный метод кинематического анализа ПМВК, синтез структурных модулей ПМВК и аналитический метод координации движений двух пространственных систем координат.

В диссертационной работе Б.К. Нурахметова [100] разработаны методы структурно – кинематического синтеза перемещающих и передаточных регулируемых пространственных механизмов высоких классов.

А. В. Бебешин и Т. Н. Гензехадзе [101] предлагают метод синтеза направляющего механизма, позволяющий определить не только размерные параметры механизма, но и выбрать схему механизма.

В работе Дж. М. Уплисашвили и Н. С. Чирикашвили [102] решена задача синтеза сферического четырехзвенника по двум положениям при помощи инверсионного преобразования сферы в плоскость. Установлены размеры звеньев сферического механизма, рассмотрены два случая синтеза при заданном передаточном отношении и заданном угле передачи.

А.М. Халиловым [103] на основе векторного анализа разработан метод составления математической модели синтеза пространственных четырехзвенных механизмов различной структуры с учетом существования кривошипа, что дает возможность облегчить процесс проектирования этих механизмов. С использованием уравнений аналитической геометрии разработаны способы составления математических аппаратов для построения пространственных четырехзвенных механизмов различной структуры. Разработанные методы синтеза дают возможность сократить машинное время при оптимизационном синтезе упомянутых механизмов.

В работе Тавхелидзе Д.С. [104] предложен новый метод синтеза четырехзвенных пространственных механизмов со сферическими (S) и цилиндрическими (R) парами вращения и возвратно-поступательными (C) парами. Метод требует написания минимального числа уравнений, при этом уменьшаются затраты компьютерного времени. Приведены примеры синтеза $RRSS$ и $RSRC$ механизмов.

В диссертационной работе С.У. Джолдасбекова [96] изложены основы структурно-кинематического синтеза перемещающих, направляющих и передаточных ПМВК, основанные на структурном синтезе ПМВК и кинематическом синтезе структурных модулей методом кинематической инверсии.

В работе Э.Е. Пейсаха [105], выявлены все принципиально возможные структурные схемы одноподвижных одноконтурных пространственных рычажных механизмов с вращательными, поступательными, цилиндрическими и сферическими парами. Даны

классификация указанных механизмов по различным структурным признакам.

В статье Дж. Рихтера [106] подробно рассмотрена задача оптимизации кинематических показателей открытой шарнирно – стержневой структуры с целью получения заданных траекторий движения выходного звена, например робота – манипулятора. Изложены результаты аналитического исследования базовых структурных вариантов с тремя и четырьмя подвижными стержневыми звенями. Изложены геометрические параметры и кинематические характеристики многозвенного механизма разработки и создания горнорудных машин, в частности, для добычи полезных ископаемых на карьерах и рудниках открытого профиля.

В работе Дж. М. Маккарти [107] варианты открытых и замкнутых кинематических цепей рассмотрены в задаче расчета движения управляемого звена, в частности, для синтеза средств робототехники. Проведен анализ плоских *RR* механизмов с шарнирными связями. Результаты расчета обобщаются для пространственных *CC* механизмов с цилиндрическими связями, допускающими совместный поворот и сдвиг вдоль осей вращения. Сравниваются плоская и трехмерная версии для идентификации эквивалентного уравнения. По результатам расчета сделаны выводы о возможности обобщения для задач построения пространственных механизмов.

В работе К.Н. Модлера [108] сопоставляются варианты геометрического и аналитического расчета шарнирно – стержневых передаточных механизмов и специализированных исполнительных механизмов, например, для проектирования роботов – манипуляторов. Сравниваются некоторые подходы в задачах практической оценки показателей кинематической подвижности и технической пригодности шарнирно – стержневых механизмов плоской и пространственной конфигурации.

В работе В.А. Глазунова [109] на основе общей теории структуры пространственных механизмов и теории винтов рассматриваются принципы построения и кинематического анализа пространственных механизмов с параллельной структурой.

С. Иннокенти в своих работах [110, 111] рассматривает механизмы пространственной шарнирно – стержневой структуры, в частности, типа платформы Стюарта, для управления трехмерным движением твердого тела в принятом рабочем пространстве с помощью параллельного набора стержней. На неподвижной плате посредством сферических шарниров укреплены пять стержней для пространственного регулирования перемещений выходной платформы, например, концевого звена исполнительного механизма робота – манипулятора параллельной

структуры. В примере расчета составлено инвариантное полиномиальное уравнение двадцатого порядка.

В работе Ф.С. Парка и Б. Равани [112] изложена постановка задачи построения и анализа свойств кривых Безье на криволинейных пространствах в виде римановых множеств. Выявлены показатели формируемости и гибкости кривых Безье в задачах геометрического представления в терминах управляемого многоугольника. Используются полиномы Бернштейна для математического обоснования процедуры построения. Подчеркивается эффективное применение кривых Безье в задачах построения траектории движения и анализа перемещений твердого тела, например, в проблемах робототехники. Особое внимание удалено свойствам специального класса римановых множеств в виде компактных групп Ли. Используется обобщенный алгоритм Де Кастельо для анализа управляемых конфигураций захватного устройства робота – манипулятора.

С. Маррейдис и Б. Росс [113] излагают новый систематический подход в задаче синтеза и изучения геометрических параметров и кинематических свойств механизмов с избыточными связями. Сформулированы методы анализа признаков избыточности внутренних и внешних связей механизмов плоской и пространственной структуры. Рассмотрены вращательные, призматические, цилиндрические, сферические и плоские соединительные узлы кинематических пар. Проведен анализ двух-, трех-, четырех- и пятизвенных структур в качестве частных случаев шестизвездных механизмов, например, робота–манипулятора с вращательными и призматическими соединительными узлами.

В работе К. Вольхарта [114] рассмотрены преимущества манипуляторов с исполнительным шарнирно–стержневым механизмом параллельной структуры, отличительным признаком которых является наличие нескольких замкнутых кинематических цепей, способствующих повышению жесткости, позиционной точности и несущей способности. Показана эффективность использования групп Ассура третьего класса четвертого порядка в анализе 18 конфигураций двухкорпусной системы на четырех опорах.

В статье В.А. Нестерова и Э.Е. Пейсаха [115] описывается компьютерная система LINKAGES, предназначенная для решения самых разнообразных задач структурного и кинематического анализа плоских и пространственных рычажных механизмов и манипуляторов. В системе LINKAGES воплощена база знаний в виде оригинальных методов и алгоритмов, относящихся к данной предметной области. Эта база знаний содержит шесть разделов: структурный анализ рычажных механизмов, структурный синтез рычажных механизмов, кинематический анализ рычажных механизмов, кинематический синтез рычажных механизмов, кинематика манипуляторов, символические преобразования в задачах кинематики механизмов, выполняемые с помощью компьютеров.

В работе [116] представлены два варианта пространственных механизмов из двух треугольников. Один механизм имеет три, а другой – шесть степеней свободы. С применением алгебры дуальных кватернионов поставлена прямая кинематическая задача для этих манипуляторов. Приведены примеры ее численного решения.

Б. Джютлер и М.Г. Вагнер [117] излагают основы теории расчета пространственных траекторий посредством их аппроксимации кусочно-рациональными функциями. Предложены алгоритмы расчета поверхности, описываемой движущимся многоугольником. Алгоритмы применимы для решения задач компьютерной анимации и робототехники.

В работе Э.Е. Пейсаха [118] обнаружено свойство кинематической эквивалентности у пространственных рычажных механизмов с вращательными, сферическими и поступательными парами и получены соответствующие аналитические соотношения. Излагается методика, основанная на использовании декомпозиционного подхода, которая позволяет повысить эффективность синтеза механизмов, обладающих свойством кинематической эквивалентности.

В последнее время с появлением высокоскоростных ПЭВМ методы анализа и синтеза плоских и пространственных механизмов проектируется более в автоматизированном виде. Например, в работе [119] разработана программа, основанная на системном подходе к составлению математической и численной моделей сложных плоских механизмов с шарнирными парами. Программа дает конструктору возможность производить быстрый структурный синтез и кинематический анализ механизмов в системе MS Windows.

Определение выходных параметров синтеза из условия минимума целевой функции при выполнении принятых ограничений проводятся оптимизационными методами синтеза механизмов. При большом числе параметров оптимизация всегда производится с применением ЭВМ и сводится к методам поиска комбинаций параметров синтеза. Методы оптимизации можно свести в три группы: случайный поиск, направленный поиск и комбинированный поиск.

Метод случайного поиска, называемый также методом статистических испытаний или методом Монте–Карло, основан на том, что при одном и том же числе испытаний вероятность получения решения, близкого к оптимальному, при случайном поиске больше, чем при последовательном переборе через равные интервалы изменения отдельных параметров. Ряд авторов, особенно в более ранних публикациях, используют метод случайного поиска. Это работы З. Голинского [120, 121] и Я. Одерфельда [122], Дж. Томаса [123], Эшенбаха и Тесара [124]. Гаррет и Холл [125] описывают библиотеку выходов механизмов со случайными параметрами, хранящуюся на магнитной ленте. Из этой библиотеки выбирается наибольшее число хороших с

точки зрения проектировщика конструкции, и в их окрестности строится система случайных механизмов, из которых уже выбирается наилучшая конструкция. В работе Н.Н Гусейнова и Р.И. Ализаде [126] кинематический синтез механизмов ведется методом Монте-Карло в сочетании с методом сечений, позволяющий определить область стущения минимальных значений функции цели.

Метод статистических испытаний при синтезе кривошипно-коромыслового механизма проведен в статье Г.А. Андрейченко [127]. В этой работе рассмотрена задача синтеза пространственного четырехзвенного рычажного механизма иглы подшивочной машины по крайним положениям выходного звена, заданному минимальному углу давления и критерию минимального углового ускорения в одном из крайних положений.

Несмотря на то, что современные ЭВМ позволяют сравнивать десятки и сотни тысяч вариантов механизма, все же следует стремиться к уменьшению трудоемкости вычислений с целью удешевления процесса проектирования механизма. Уменьшение трудоемкости вычислений может быть достигнуто путем применения направленного поиска, т.е. такого поиска искомых параметров синтеза, при котором переход от одной комбинации параметров к другой происходит не случайно, а в направлении, соответствующем уменьшению величины целевой функции.

Быстрее можно достигнуть искомого минимума целевой функции, если есть возможность определить частные производные целевой функции по параметрам синтеза и по значениям этих производных находить направления, по которым функция убывает наиболее быстро. К таким методам относятся метод наискорейшего спуска и другие градиентные методы.

В работах Клейна [128], Льюиса и Диснори [129], Хана [130], Хандры-Луки [131], Чжень и Чжань [132] производится аналитическое дифференцирование критерииев синтеза. В работе Прасада и Бегси [133] от функции ошибки (кинематического критерия) вычисляются аналитически вторые производные по всем пятнадцатым метрическим параметрам механизма.

В работе Б. Сохони и Е. Хога [134] производные вычисляются от скоростей, ускорений и сил реакций механизма. В.А. Новгородцевым [135] отмечено, алгоритмическое вычисление целевой функции влечет необходимость использования разностных аналогов градиента.

В работе У.А. Джолдасбекова, Ж.Ж. Байгунчекова и С.М. Ибраева [136] предлагаются методы градиентного синтеза структурных модулей с низшими кинематическими парами, позволяющие уменьшить размерность оптимизационной задачи и отличаются простотой вычисления аппарата производных при их численной реализации. Однако эти работы в основном посвящены для синтеза плоских рычажных механизмов высоких классов (МВК).

В работах Байгунчекова Ж.Ж., Джолдасбекова С.У., Саурбаева Б.С., Нурахметова Б.К. получили развитие градиентные методы для минимизации целевых функций ПМВК [137–147].

Для методов направленного поиска характерен еще другой подход решения задач минимизации с ограничениями. Это весьма распространенный метод штрафных функций, сводящий задачу условной минимизации к ряду задач безусловной минимизации. Метод штрафных функций применяются в работах Р.И. Ализаде [148], Х.Р. Казыханова [149], Г. Кулафича и Т. Пантелича [150], В. Марианте и К. Уилмерта [151], Э.Е. Пейсаха [152–155], С.С. Пономаренко и В.Г. Прасолова [156], С. Рао и А. Амбекара [157], Фокса и Уилмерта [158], Шпитцнагеля и Тесара [159]. Кроме методов штрафных функций, условная задача минимизации при синтезе механизмов решалась, методом проекции градиента с коррекцией нарушений ограничений в работе В. Сохони и Е. Хога [160]. Р. Фентон [161] применяет для решения задачи условной минимизации метод скользящего допуска, подробно описанный в работе [162].

Направленный поиск обычно приводит к отысканию локального минимума. Случайный поиск более подходит к отысканию глобального минимума (наименьший минимум), так как при нем просматривается вся область изменения параметров. Однако он дает слишком большой объем вычислений, и поэтому применяют комбинированные методы, при которых случайнм поиском просматривают и сравнивают значения целевой функции в отдельных частях области изменения параметров, и затем направленным поиском находят локальные минимумы для тех частей области, где ожидается получение глобального минимума.

В трудах Э.Е. Пейсаха [154] и В.Я. Белецкого разработаны комбинированные методы синтеза рычажных механизмов. Излагается метод синтеза, в котором одна часть параметров вычисляется оптимизационным методом, а другая часть параметров определяется на основе Чебышевского и квадратического приближения.

В статье Г.Ш. Закирова [163] предлагается алгоритмический подход к решению комплекса многокритериальных задач синтеза механизмов, основанный на системности методики рассмотрения и призванный автоматизировать сам процесс проектирования механизмов.

В работе А.М. Халилова [164] излагается эффективный оптимизационный метод проектирования схемы пространственного четырехзвенника вида ВСПСВ для воспроизведения прямой линии.

В монографии Э.Е. Пейсаха «Структура и кинематика пространственных рычажных механизмов» [165] предложена единая методика аналитического решения задачи о положениях звеньев пространственных механизмов.

В диссертационных работах Хорунжина В.С., Бакшеева В.А. и Кушнаренко А.В. [166, 167, 168] рассмотрены кинематический и

динамический синтез пространственных и плоских рычажных механизмов с выстоями выходного звена по заданной циклограмме. В диссертационной работе Кузнецова С.А. [169] рассмотрен анализ и синтез механизмов индифферентной структуры со сложным огибающим движением исполнительного органа.

В диссертационной работе на соискание ученой степени доктора технических наук Канлыбаев Оразалы разработал методы интерполяционного кинематического синтеза пространственных передаточных механизмов высоких классов [170].

В работах Тулешова А.К., Дракунова Ю.М. [171-172] рассмотрены система синтеза передаточного механизма шарнирного четырехзвенника по коэффициенту изменения средней скорости коромысла и задачи синтеза механизмов с использованием квадратического приближение N положений точки к кривой второго порядка.

В настоящее время развитие робототехники поставило ряд новых задач в различных отраслях науки и техники, в том числе и в области машиностроения. Основу рабочих органов роботов и манипуляторов составляют многозвенные пространственные механизмы со многими степенями свободы, позволяющие осуществлять разнообразные движения объектов в пространстве с заданными свойствами. Поэтому разработка теории таких механизмов и методов их аналитического синтеза является актуальной проблемой.

Исполнительные механизмы манипуляционных роботов, построенные на основе незамкнутых кинематических цепей (антропоморфные манипуляторы) обладая универсальностью, простотой кинематической схемы, большим диапазоном зоны обслуживания и мобильностью, имеют ряд существенных недостатков:

1. В силу консольного характера звенья подвержены изгибным деформациям, что ограничивает их грузоподъемность и точность позиционирования.

2. Сложность решения обратной задачи кинематики, что затрудняет управление роботами в реальном масштабе времени и требует сложные дорогостоящие системы управления, оснащенные сервоприводами.

3. Необходимость расположения на подвижных звеньях приводов, масса которых превышает массу объекта манипулирования, приводит к существенному снижению КПД, быстродействия и коэффициента сервиса.

Обширная литература по изучению робототехнических систем, появившаяся за последние годы в отечественной и зарубежной печати [1, 67, 173-177] свидетельствует о наметившейся тенденции отказа от использования антропоморфных кинематических схем открытого типа.

В этих работах предлагается рассматривать исполнительные механизмы манипуляционных роботов с замкнутыми кинематическими цепями или так называемых манипуляторов с параллельной топологией

или параллельных манипуляторов. Такие манипуляторы не обладают выше указанными недостатками.

В последнее время используются широкие функциональные возможности манипуляционных устройств, построенных на основе МВК.

Теоретические исследования и проектно-конструкторские разработки показали, что МВК благодаря своим структурным особенностям, т.е. наличию изменяемых замкнутых контуров, обладают большими кинематическими и динамическими возможностями обеспечения заданных законов движения рабочих органов [1, 63–65].

Однако плоские одноподвижные МВК работают в одной плоскости по одной жестко заданной программе. Поэтому эти устройства имели ограниченное применение. Кроме того, из-за практической невозможности изготовления строго параллельных осей вращения шарниров в плоских механизмах высокого класса возникает избыточные связи, что приводит к резкому увеличению сил реакций и трения в шарнирах. Увеличение сил реакций в шарнирах, в свою очередь, приводит к возрастанию массы конструкции и снижению его КПД.

С целью устранения отмеченных недостатков плоских МВК в последнее время более широкое применение находят пространственные механизмы и манипуляционные устройства со многими степенями свободы.

Заканчивая обзор работ по современному состоянию исследований пространственных рычажных механизмов и механизмов высоких классов, можно сказать, что создание высокоэффективных и материально-энергосберегающих машин и манипуляционных устройств, которые превосходили бы современные аналоги, требует разработки фундаментальных научных основ анализа и синтеза новых перспективных механизмов.

Постановка задач исследований

Исходя из вышеизложенного, можно сделать вывод о том, что разработка методов синтеза пространственных рычажных механизмов была направлена на создание теории синтеза, которая давала бы возможность на основе единого принципа выполнить синтез любых схем механизмов. В частности, многих исследованиях в основе решения задач структурного и кинематического синтеза механизмов лежит по существу идея формирования механизма из определенных исходных кинематических цепей, как из составных частей. Как уже указывалось, это незамкнутые пространственные трехзвенные кинематические цепи с двумя подвижными звеньями и пространственные четырехзвенные кинематические цепи с тремя подвижными звеньями. Такой подход характерен тем, что синтез механизмов с замкнутой кинематической цепью разбивается на отдельные процедуры синтеза незамкнутых цепей с

известными относительными движениями двух подвижных звеньев. Движение двух подвижных звеньев можно рассматривать в общем случае как движение двух тел относительно третьего неподвижного тела. Однако, существующие методы синтеза многозвенных механизмов с заданными законами движения входного и выходного звеньев не охватывают полностью этапы определения структуры и параметров проектируемого механизма. Например, разработанные численные методы синтеза механизмов высоких классов предусматривают задание части параметров проектируемого механизма или используемой ИКЦ. Использование при синтезе механизмов численные методы не гарантируют нахождение глобального минимума целевой функции с ограничениями. Все это препятствует разработке системы автоматизированного проектирования полного структурно – кинематического синтеза механизмов с заданным законом движения входного и выходного звена и ПМВК.

Целью настоящей работы является разработка численно – аналитических методов структурно – кинематического синтеза пространственных рычажных механизмов по заданным законам движения входного и выходного звеньев, ориентированных на эффективное использование ПЭВМ, позволяющих автоматизировать все этапы решения задач синтеза механизмов на основе использования исходных кинематических цепей (ИКЦ) и ее модификации.

В соответствии с целью работы необходимо решение следующих задач:

- разработка метода синтеза незамкнутых четырехзвенных ИКЦ со сферическими кинематическими парами на основе задания движения входного и выходного звеньев проектируемого пространственного механизма;
- разработка метода синтеза незамкнутых четырехзвенных ИКЦ со сферическими с пальцем кинематическими парами на основе задания движения входного и выходного звеньев проектируемого пространственного механизма;
- разработка метода синтеза незамкнутых четырехзвенных ИКЦ с двумя вращательными и со сферическим кинематическими парами на основе задания движения входного и выходного звеньев проектируемого пространственного механизма;
- разработка метода синтеза незамкнутых четырехзвенных ИКЦ с тремя вращательными кинематическими парами на основе задания движения входного и выходного звеньев проектируемого пространственного механизма;
- разработка метода синтеза незамкнутых четырехзвенных ИКЦ с вращательной, плоскостной и сферической кинематическими парами на основе задания движения входного и выходного звеньев проектируемого пространственного механизма;

- разработка метода синтеза незамкнутых четырехзвенных ИКЦ с вращательной, цилиндрической и сферической кинематическими парами на основе задания движения входного и выходного звеньев проектируемого пространственного механизма;
- разработка алгоритмов синтеза ИКЦ и их модификации при решении задачи синтеза пространственных рычажных механизмов;
- структурно – кинематический синтез пространственных рычажных механизмов, включая ПМВК по заданным законам движения входного и выходного звеньев на основе использования ИКЦ и ее модификации;
- проверка работоспособности и эффективности разработанных алгоритмов автоматизированного синтеза на решении реальных задач синтеза.

2 Кинематический синтез исходных кинематических цепей со сферическими парами

В данной главе изложены постановка и решение задачи синтеза исходных кинематических цепей (ИКЦ) со сферическими кинематическими парами, которые могут быть использованы как модули структурно-кинематического синтеза пространственных рычажных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев. Метод решения задачи синтеза ИКЦ со сферическими парами основан на введении двух подвижных тел, неизменно связанных с входным и выходным звеньями и в отыскании круговых точек в относительном движении этих тел [39]. Такой подход к синтезу пространственных рычажных механизмов обеспечивает алгоритмизируемость всех операций структурно-кинематического синтеза механизмов, что очень важно для автоматизации проектирования механизмов.

2.1 Формирование структурных схем пространственных рычажных механизмов

На первом этапе синтеза – моделировании – схематическая схема механизма служит основным источником задания структуры. Для рассматриваемого метода моделирования конструктор, прежде всего, выбирает ориентацию всех систем координат. Задаются неподвижная система координат, в большинстве случаев, связанная со стойкой, и системы координат, связанные со звеньями. От удачного задания всех систем координат зависит степень наглядности и быстроты анализа результатов моделирования исходных кинематических цепей (ИКЦ). Если с каждым звеном связать системы координат, то относительная ориентация звеньев определяется переходными матрицами – матрицами перехода от одной системы координат к другой [178]. Ниже приведены два способа задания систем координат, применяемых для замкнутых и открытых кинематических цепей. В первом случае с каждой кинематической парой связаны две системы координат, во втором случае – одна. Первый способ (рисунок 1). Дано; $r = O_iO_j = \{a_i, b_i, c_j\}$ – вектор смещения центра i -й системы ($X_i Y_i Z_i$ – правая система координат) в j -й системе координат ($X_j Y_j Z_j$ – правая система координат). Углы Эйлера – углы вращения i -й системы относительно j -й системы: ψ – угол прецессии, θ – угол нутации, φ – угол чистого вращения. Согласно рисунку 2.1 O_iN – линия пересечения (линия узлов) плоскостей $X'_jO_jY'_j$ и $X_jO_jY_j$, где X'_j, Y'_j, Z'_j параллельны осям X_j, Y_j, Z_j . Положительное направление O_iN выбирают из условия, чтобы поворот от оси $O_iZ'_j$ к оси O_iZ_j происходил против часовой стрелки.

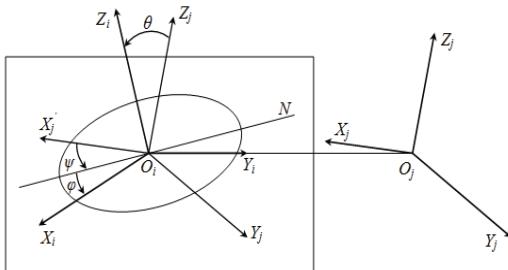


Рисунок 2.1

От положительного направления O_iN отсчитывают углы ψ и φ (ψ – угол между $O_jX'_j$ и O_iN , φ – угол между O_iN и O_iX_i). Углы ψ и φ отсчитывают против хода часовой стрелки, если смотреть с положительного направления осей O_iZ_i и O_jZ_j соответственно. Для произвольной точки связь между ее координатами в i -й системе (x_i, y_i, z_i) и j -й системе запишем следующим образом

$$[x_i, y_i, z_i, 1]' = A_{ij} [x_j, y_j, z_j, 1]' \quad (2.1)$$

Это означает, что каждая точка механизма будет задаваться однородными координатами, т. е. ее положение определяется относительно некоторой четырехмерной системы координат числами t, x, y, z . Для упрощения вычислений принимаем, что $t_i=t_j=1$.

При исследовании механизмов полагаем, что форма звена остается неизменной, т. е. относительное расположение систем координат звена постоянно. Переменным же является относительное расположение звеньев кинематической пары. Исходя из этого, можно составить матрицы перехода от одной системы координат к другой (обе системы заданы на одном звене), которые являются постоянными и характеризуют «форму» звена. С каждой же кинематической парой оказалось целесообразным связать две системы координат, отнесенные к звеньям, образующим эту пару. Проведенные исследования показали, что эти системы следует задавать следующим образом. Для вращательной кинематической пары начала координат обоих систем совпадают, оси Z имеют одно и то же положительное вдоль оси вращения направление (рисунок 2.2, а).

Для поступательной кинематической пары оси Z имеют одно и то же положительное направление, параллельны направлению относительного движения. Оси X параллельны и имеют одно и то же положительное направление (рисунок 2.2, б).

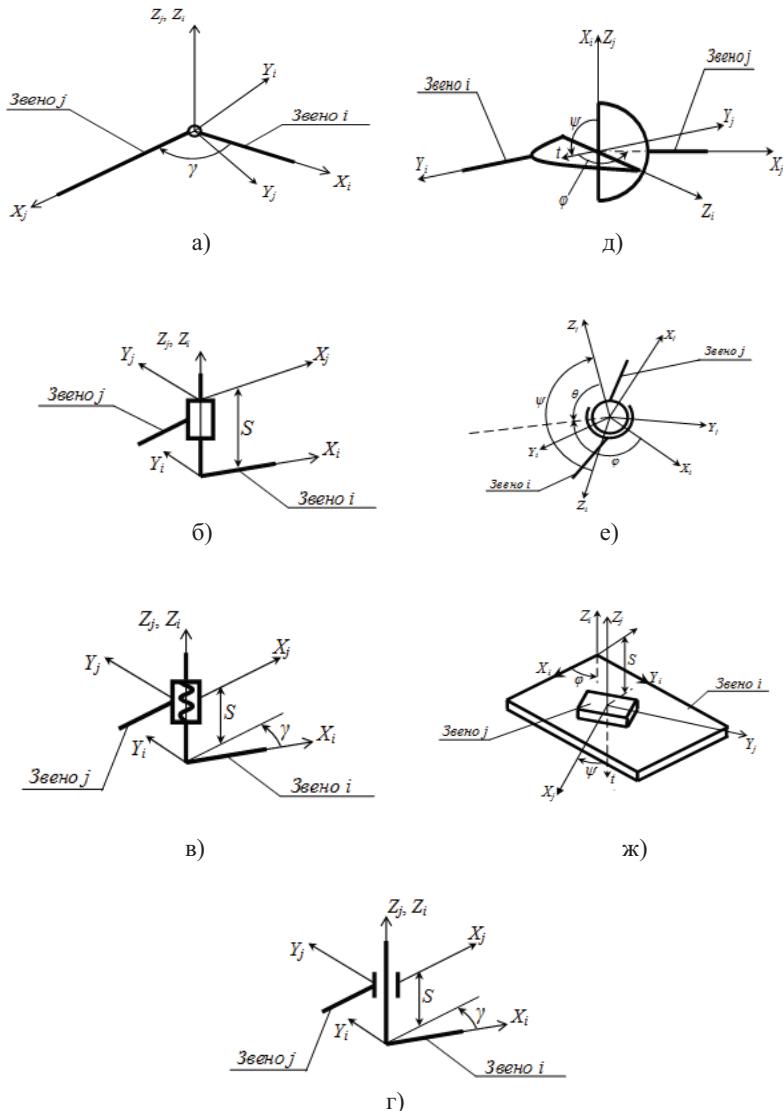


Рисунок 2.2

Для винтовой кинематической пары оси Z коллинеарны, имеют одно и то же вдоль оси винтового соединения положительное направление (рисунок 2.2, σ).

Для цилиндрической кинематической пары оси Z коллинеарны, имеют одно и то же положительное направление и направлены вдоль оси цилиндрического соединения (рисунок 2.2, ε). Для шарнирной кинематической пары направления осей Z совпадают с направлениями осей пальцев крестовины универсального шарнирного соединения. Центры систем координат совпадают с центром крестовины (рисунок 2.2, δ). Для сферической кинематической пары центры систем координат совпадают с центром сферической пары (рисунок 2.2, ε). Для плоскостной кинематической пары плоскости $X-Y$ компланарны, оси Z параллельны и направлены к одной и той же стороне взаимосвязанных поверхностей (рисунок 2.2, ζ).

Второй способ. Рассматривается механизм, содержащий кинематические пары 5-го класса. Каждое звено нумеруется, начиная со стойки, имеющей номер один, ведущего звена, имеющего номер два и т. д. вдоль кинематической цепи.

Кинематические пары также пронумерованы, причем пара i связывает звено i со звеном $i+1$. Каждой кинематической паре соответствует прямоугольная система координат, ось Z_i которая направлена вдоль оси пары, ось X_i вдоль общего перпендикуляра к осям Z_{i-1} и Z_i ось Y_i дополняет правую систему координат $O_iX_iY_iZ_i$ (рисунок 2.3).

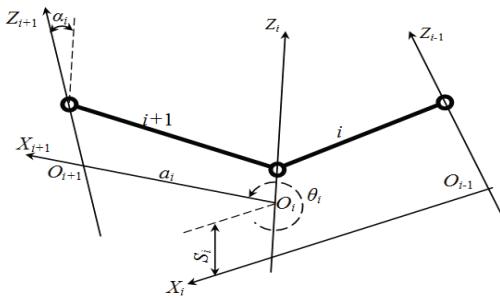


Рисунок 2.3

Размеры и конфигурация механизма определяются следующими параметрами, относящимися к каждой системе координат a_i – расстояние от Z_i до Z_{i+1} ; α_i – угол между осями Z_i и Z_{i+1} , измеряемый против часовой стрелки относительно положительного направления оси X_{i+1} ; θ_i – угол между осями X_i и X_{i+1} , измеряемый против часовой стрелки относительно положительного направления оси X_{i+1} ; S_i – расстояние от X_i до X_{i+1} вдоль оси Z_i .

ПЕРЕХОДНЫЕ МАТРИЦЫ

Матрицы для звена и кинематической пары. Матрица перехода T_{ij} от i -й к j -й системе координат по первому способу имеет вид:

$$T_{i,j} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_i & \cos \psi \cos \varphi - & -\cos \psi \sin \varphi - & 0 \\ b_i & -\cos \theta \sin \psi \sin \varphi & -\cos \theta \sin \psi \cos \varphi & \sin \theta \sin \psi \\ c_i & \sin \psi \cos \varphi + & \cos \theta \cos \psi \cos \varphi - & -\sin \theta \cos \psi \\ & +\cos \theta \cos \psi \sin \varphi & -\sin \psi \sin \varphi & \\ & \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

Вычисление этих матриц осуществляется согласно следующего алгоритма.

Пусть заданы (рисунок 2.4) для i -го звена две системы координат: i -я и j -я, каждая из которых определена тремя точками P_1^i , P_2^i , P_3^i и P_1^j , P_2^j , P_3^j .

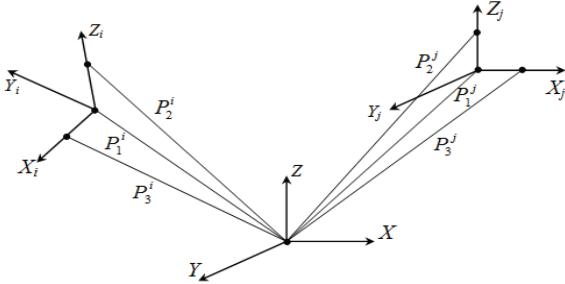


Рисунок 2.4

Точка P_1 определяет центр координат, точка P_2 находится на положительном направлении оси Z , точка P_3 – на положительном направлении оси X . Координаты этих точек в системе координат, связанной со стойкой: $x_{l,k}^s$, $y_{l,k}^s$, $z_{l,k}^s$, где $k = 1, 2, 3$ – номер точки; $s = i, j$ – номер системы координат.

Координаты X , Y , Z произвольной точки P в абсолютной системе координат связаны с координатами X_l^i , Y_l^i , Z_l^i этой точки в i -й системе координат звена l соотношением:

$$[X, Y, Z]' = T_l^i [X_l^i, Y_l^i, Z_l^i] \quad (2.3)$$

где T_l^i – матрица преобразования (перехода). Аналогичным образом для j -й системы координат и той же точки P

$$[X, Y, Z]' = T_l^j [X_l^j, Y_l^j, Z_l^j] \quad (2.4)$$

Из выражений (1.3) и (1.4) имеем

$$[X, Y, Z]' = T_l^j [X_l^j, Y_l^j, Z_l^j] \quad (2.5)$$

$$\text{т. е. } [X_l^i, Y_l^i, Z_l^i]' = (T_l^i)^{-1} T_l^j [X_l^j, Y_l^j, Z_l^j] \quad (2.6)$$

Из выражения (2.5) видно, что матрица

$$T_{i,j} = T_l^{ij} = (T_l^i)^{-1} T_l^j$$

является матрицей перехода от j -й системы звена к его i -й системе координат. Матрица T_l^i имеет вид

$$T_l^i = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_{l,1}^i & \frac{(x_{l,3}^i - x_{l,1}^i)}{a} & \frac{g}{b} & \frac{(x_{l,2}^i - x_{l,1}^i)}{c} \\ y_{l,1}^i & \frac{(y_{l,3}^i - y_{l,1}^i)}{a} & \frac{r}{b} & \frac{(y_{l,2}^i - y_{l,1}^i)}{c} \\ z_{l,1}^i & \frac{(z_{l,3}^i - z_{l,1}^i)}{a} & \frac{d}{b} & \frac{(z_{l,2}^i - z_{l,1}^i)}{c} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} b &= (d^2 + g^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} \\ d &= (x_{l,2}^i - x_{l,1}^i)(y_{l,3}^i - y_{l,1}^i) - (y_{l,2}^i - y_{l,1}^i)(x_{l,3}^i - x_{l,1}^i) \\ g &= (y_{l,2}^i - y_{l,1}^i)(z_{l,3}^i - z_{l,1}^i) - (z_{l,2}^i - z_{l,1}^i)(y_{l,3}^i - y_{l,1}^i) \\ r &= (z_{l,2}^i - z_{l,1}^i)(x_{l,3}^i - x_{l,1}^i) - (x_{l,2}^i - x_{l,1}^i)(z_{l,3}^i - z_{l,1}^i) \\ a &= [(x_{l,3}^i - x_{l,1}^i)^2 + (y_{l,3}^i - y_{l,1}^i)^2 + (z_{l,3}^i - z_{l,1}^i)^2]^{\frac{1}{2}} \\ c &= [(x_{l,2}^i - x_{l,1}^i)^2 + (y_{l,2}^i - y_{l,1}^i)^2 + (z_{l,2}^i - z_{l,1}^i)^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Матрица T_l^j получается из (2.7) в результате замены индекса i на j .

Переходная матрица (2.2) кинематической пары $A_{i,j} = T_{i,j}$ есть матрица перехода от системы координат одного i -го звена к системе координат второго j -го звена.

Вид $A_{i,j}$ для соответствующих кинематических пар (с учетом расположения систем координат и параметров, приведенных на рисунок 2.2, *a – жс*) следующий:
для сферической

$$T_{i,j} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi\cos\theta + & -\sin\varphi\cos\psi\cos\theta + & \sin\psi\cos\theta & 0 \\ +\sin\varphi\sin\theta & +\cos\varphi\sin\theta & & \\ -\sin\varphi\cos\theta + & \sin\varphi\sin\theta\cos\psi - & \sin\psi\sin\theta & 0 \\ +\cos\varphi\cos\psi\sin\theta & -\cos\varphi\cos\theta & & \\ \cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi & -\cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

для шарнира Гука

$$T_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi \\ 0 & -\sin\psi & -\cos\psi & 0 \end{pmatrix}$$

для плоскостной

$$T_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ s\cos\varphi & \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) & 0 \\ s\sin\varphi & \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для цилиндрической

$$T_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ s & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

для винтовой

$$T_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ s & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\gamma = 2\pi s/L$; L — шаг винта:

для вращательной

$$T_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

для поступательной

$$T_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Обозначения параметров в переходных матрицах взяты согласно рисунок 2.2, *a* — эс.

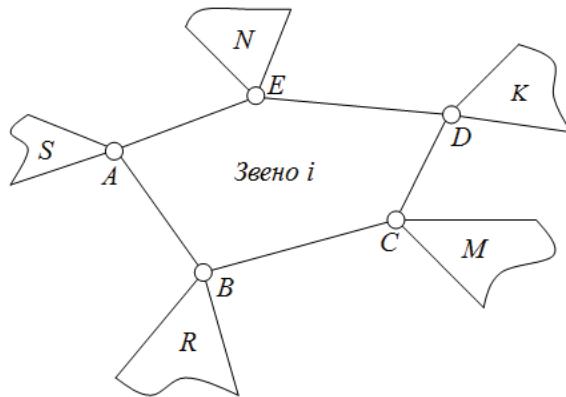


Рисунок 2.5

Матрицы перехода от одной (в данном случае неподвижной) системы координат ко всем остальным, можно формировать матрицы перехода между любыми системами координат, применяя соотношение (2.6). Это означает, что если системы координат отнесены к одной и той же кинематической паре, получается матрица $T_{i,j}$ – матрица кинематической пары.

Если системы координат отнесены к разным кинематическим парам B и A одного и того же i -го звена, то получим одну из матриц звена $T_{B,A}$ или $T_{A,B}$. Таких матриц для звена может быть несколько. Например, рисунок 2.5 для 1-го звена можно сформировать матрицы перехода $A_{(B,A)/i}$, $A_{(C,E)/i}$, и т. д. Максимальное число таких матриц равно C_n^2 , (где n – число кинематических пар, в образовании которых участвует рассматриваемое звено). В данном случае это $C_5^2 = 10$ матриц. Оказывается, что на все такие матрицы в дальнейших исследованиях механизма принимают участие. Необходимо вычислить только матрицы, определяющие кинематические цепи в которые входит это звено

Можно сформировать матрицы перехода и между любыми системами координат произвольных звеньев, даже не образующих кинематическую пару. На рис. 9 имеем последовательность звеньев $i, i+1, i+2, i+3$, на которых определены системы координат. Пусть вычислены матрицы перехода $A_{B/i}$ и $A_{E/i+3}$. Тогда матрица $A_{i/i+3} = A_{B/i}^{-1} A_{E/i+3}$ определяет переход от системы координат i -го звена к системе координат $(i+3)$ -го звена. Эта же матрица, как будет показано ниже, является произведением матриц последовательного перехода от одного звена к другому через кинематическую пару и от одной кинематической пары к другой в пределах одного звена.

Таким образом,

$$A_{i,i+3} = T_i T_{i,i+1} T_{i+1} T_{i+1,i+2} T_{i+2} T_{i+2,i+3}.$$

Преобразование координат, по второму способу, при переходе от системы $O_i X_i Y_i Z_i$, связанной со звеном i , к системе $O_{i+1}, X_{i+1}, Y_{i+1}, Z_{i+1}$, связанной со звеном $i+1$, определяется матрицей

$$A_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_i \cos \theta_i & \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i \\ a_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) & \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i \\ s_i & 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Здесь в отличие от способа 1 матрица $A_{i,i+1} = T_i T_{i,i+1}$, где T_i – матрица i -го звена; $T_{i,i+1}$ – матрица кинематической пары, образованной i -м и $(i+1)$ -м звеньями.

Приведенные способы переходных матриц в дальнейшем используем при синтезе ИКЦ с различными кинематическими парами, необходимые при проектировании пространственных рычажных перемещающих механизмов.

2.2 Синтез четырехзвенных исходных кинематических цепей со сферическими парами для пространственных механизмов

Постановка задачи: Пусть заданы N конечноудаленных положений двух твердых тел Q_1 и Q_2 :

$$Q_1(\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1), Q_2(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i}, \theta_i^2, \psi_i^2, \phi_i^2), \quad (i=1, N) \quad (2.9)$$

где $\theta_i^j, \psi_i^j, \phi_i^j$ – эйлеровы углы относительно неподвижной системы координат $OXYZ$,

$X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i}$ – координаты точки D_i тела Q_2 .

Требуется найти в неподвижной системе координат такие точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ тела Q_1 и $C(x_C, y_C, z_C)$ тела Q_2 , чтобы расстояние между точками B и C во всех положениях тел Q_1 и Q_2 мало отличалось от некоторой постоянной величины R (рисунок 2.6) [179].

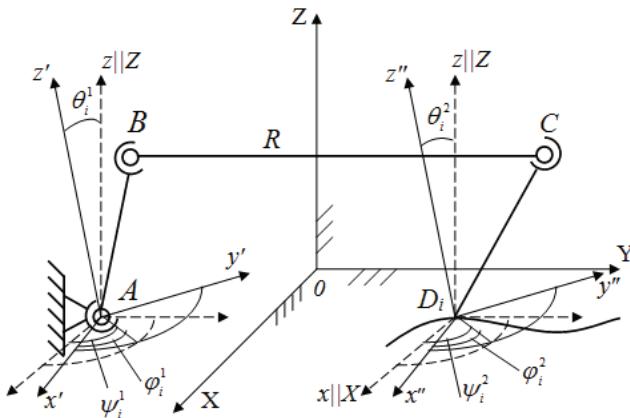


Рисунок 2.6

Решение задачи: Введем взвешенную разность для i -го положения тел в виде:

$$\Delta_{q_i} = \left| \overrightarrow{B_i C_i} \right|^2 - R^2 = (X_{C_i} - X_{B_i})^2 + (Y_{C_i} - Y_{B_i})^2 + (Z_{C_i} - Z_{B_i})^2 - R^2 \quad (2.10)$$

$$\left(i = \overline{1, N} \right)$$

где

$$\begin{bmatrix} X_{B_i} \\ Y_{B_i} \\ Z_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_A \\ T_{10} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{C_i} \\ Y_{C_i} \\ Z_{C_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_D \\ T_{20} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{j_o}^i = \begin{bmatrix} e_{i1}^j & e_{i2}^j & e_{i3}^j \\ m_{i1}^j & m_{i2}^j & m_{i3}^j \\ n_{i1}^j & n_{i2}^j & n_{i3}^j \end{bmatrix}, \quad (j = \overline{1, 2}; \quad i = \overline{1, N}) \quad (2.11)$$

$$\begin{cases} e_{i1}^j = \cos\psi_i^j \cdot \cos\varphi_i^j - \cos\theta_i^j \cdot \sin\psi_i^j \cdot \sin\varphi_i^j \\ m_{i1}^j = \sin\psi_i^j \cdot \cos\varphi_i^j + \cos\theta_i^j \cdot \cos\psi_i^j \cdot \cos\varphi_i^j \\ n_{i1}^j = \sin\theta_i^j \cdot \sin\varphi_i^j \\ e_{i2}^j = -\cos\psi_i^j \cdot \sin\varphi_i^j - \cos\theta_i^j \cdot \sin\psi_i^j \cdot \cos\varphi_i^j \\ m_{i2}^j = -\sin\psi_i^j \cdot \sin\varphi_i^j + \cos\theta_i^j \cdot \cos\psi_i^j \cdot \sin\varphi_i^j \\ n_{i2}^j = \sin\theta_i^j \cdot \cos\varphi_i^j \\ e_{i3}^j = \sin\theta_i^j \cdot \sin\psi_i^j \\ m_{i3}^j = -\sin\theta_i^j \cdot \cos\psi_i^j \\ n_{i3}^j = \cos\varphi_i^j \end{cases} \quad (2.12)$$

Она является функцией десяти параметров: $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$. Группируя эти параметры по четыре с общим параметром R , взвешенную разность представим в трех различных формах:

$$\Delta_{q_i}^{(1)} = (\tilde{X}_{A_i} - X_A)^2 + (\tilde{Y}_{A_i} - Y_A)^2 + (\tilde{Z}_{A_i} - Z_A)^2 - R^2 \quad (2.13)$$

$$\Delta_{q_i}^{(2)} = (\tilde{x}_{B_i} - x_B)^2 + (\tilde{y}_{B_i} - y_B)^2 + (\tilde{z}_{B_i} - z_B)^2 - R^2 \quad (2.14)$$

$$\Delta_{q_i}^{(3)} = (\tilde{x}_{C_i} - x_C)^2 + (\tilde{y}_{C_i} - y_C)^2 + (\tilde{z}_{C_i} - z_C)^2 - R^2 \quad (2.15)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{A_i} \\ \tilde{Y}_{A_i} \\ \tilde{Z}_{A_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{10}^i] & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [T_{20}^i] & X_{D_i} \\ 0 & Y_{D_i} \\ 0 & Z_{D_i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{B_i} \\ \tilde{y}_{B_i} \\ \tilde{z}_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{01}^i] & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{D_i} - X_A \\ Y_{D_i} - Y_A \\ Z_{D_i} - Z_A \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [T_{21}^i] & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{C_i} \\ \tilde{y}_{C_i} \\ \tilde{z}_{C_i} \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} [T_{02}^i] & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A - X_{D_i} \\ Y_A - Y_{D_i} \\ Z_A - Z_{D_i} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [T_{12}^i] & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

где $[T_{kj}^i]$ – матрица перехода от k -той системы координат к j -той системе, определяемые как

$$T_{01}^i = [T_{10}^i]^T; \quad T_{02}^i = [T_{20}^i]^T; \quad T_{21}^i = T_{01}^i \times T_{20}^i; \quad T_{12}^i = T_{02}^i \times T_{10}^i, \dots \quad (2.19)$$

Необходимые условия минимума суммы квадратов взвешенной разности:

$$S = \sum_{i=1}^N [\Delta_{q_i}^{(k)}]^2, \quad (k=1,2,3) \quad (2.20)$$

можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial X_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Y_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Z_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_c} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_c} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_c} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0 \quad (2.23)$$

Из (2.21) с учетом (2.13) и (2.20) получим:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{X}_{A_i} - X_A) = 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{Y}_{A_i} - Y_A) = 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{Z}_{A_i} - Z_A) = 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot R = 0 \end{array} \right\} \quad (2.24)$$

Допустим, что $R \neq 0$. Тогда из последнего равенства системы (2.24) следует, что

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} = 0 \quad (2.25)$$

С учетом (2.25) система уравнений (2.24) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{X}_{A_i} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{Y}_{A_i} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{Z}_{A_i} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} = 0 \quad (2.26)$$

Подставляя выражения для $\Delta_{q_i}^{(1)}$ из (2.13) в систему (2.26), получим:

$$\left. \begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai}^2 X_A + \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai} \tilde{X}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{X}_{Ai} \right] = \\
& = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \tilde{X}_{Ai} \\
& \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai}^2 Y_A + \tilde{Z}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{Y}_{Ai} \right] = \\
& = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + Y_{Ai}^2 + Z_{Ai}^2) \tilde{Y}_{Ai} \\
& \sum_{i=1}^N \left[\tilde{Z}_{Ai} \tilde{X}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai}^2 Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{Z}_{Ai} \right] = \\
& = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \tilde{Z}_{Ai} \\
& \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \right] = \\
& = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2)
\end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Система (2.27) линейна относительно переменных X_A , Y_A , Z_A и $H_1 = \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2)$, поэтому ее можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ H_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

где $R_{Ai}^2 = \tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2$.

Решение этой системы по правилу Крамера имеет вид:

$$(X_A, Y_A, Z_A, H_1) = \frac{1}{D_1} (D_{x_A}, D_{y_A}, D_{z_A}, D_{h_1}) \quad (\text{при } D_1 \neq 0) \quad (2.29)$$

Аналогично из (2.22) с учетом (2.14) и (2.20) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_B, y_B, z_B, H_2 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Решая эту систему по правилу Крамера, получим:

$$(x_B, y_B, z_B, H_2) = \frac{1}{D_2} (D_{x_B}, D_{y_B}, D_{z_B}, D_{H_2}) \quad (\text{при } D_2 \neq 0) \quad (2.31)$$

Из (2.23) с учетом (2.15) и (2.21) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_C, y_C, z_C, H_3 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ H_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Отсюда находим x_C, y_C, z_C, H_3 :

$$(x_C, y_C, z_C, H_3) = \frac{1}{D_3} (D_{x_C}, D_{y_C}, D_{z_C}, D_{H_3}) \quad (\text{при } D_3 \neq 0) \quad (2.33)$$

Исключая первые четыре неизвестных X_A, Y_A, Z_A, R на основе формулы (2.28), можно свести систему (2.21) – (2.23) к системе из шести

уравнений с шестью неизвестными $x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$, которую удобно представить в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(2)}}{\partial x_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(3)}}{\partial x_C} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(2)}}{\partial y_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(3)}}{\partial y_C} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(2)}}{\partial z_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(3)}}{\partial z_C} &= 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Уравнения этой системы по виду совпадают с тремя уравнениями тринадцатой степени относительно трех неизвестных, приведенными в работе [39], хотя в данном случае имеем систему из шести уравнений относительно шести неизвестных. Решение системы (2.34) представляет трудоемкую задачу, поэтому гораздо эффективнее применять излагаемый ниже алгоритм поиска минимума функции S :

1. Задаемся произвольно начальными точками $B^{(0)} \in Q_1, C^{(0)} \in Q_2$.
2. Решаем систему линейных уравнений (18) и определяем $X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, Z_A^{(1)}, R_1^{(1)}$.
3. Задаемся точками $A^{(1)} \in Q, C^{(0)} \in Q_2$.
4. Решаем систему уравнений (20) и определяем $x_B^{(1)}, y_B^{(1)}, z_B^{(1)}, R_2^{(1)}$.
5. Задаемся точками $A^{(1)} \in Q, B^{(1)} \in Q_1$.
6. Решаем систему уравнений (22) и определяем $x_C^{(1)}, y_C^{(1)}, z_C^{(1)}, R_3^{(1)}$.
7. Проверяем $|X_A^{i+1} - X_A^i| \leq \varepsilon, |Y_A^{i+1} - Y_A^i| \leq \varepsilon, |Z_A^{i+1} - Z_A^i| \leq \varepsilon, |R^{i+1} - R^i| \leq \varepsilon$.
8. Если удовлетворяет это условие, то процесс итерации завершается.
9. Если не удовлетворяет, то переходим к пункту 1, заменив начальные точки $B^{(0)}$ и $C^{(0)}$ на найденные $B^{(1)}$ и $C^{(1)}$.
10. Далее проверяем точность воспроизведения заданной функции путем анализа положения ИКЦ $ABCD$.

$$\bar{r}_{D_0} = T_{10} \cdot T_{21} \cdot T_{32} \cdot \bar{r}_{D_3}$$

11. Если точность воспроизведения удовлетворяет заданной функции, то процесс итерации завершается, а если не удовлетворяет заданной точности, то необходимо перейти к пункту 1 приведенного алгоритма.

Применяя алгоритм, получим убывающую последовательность значений целевой функции $S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, S_3^{(1)}, S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, S_3^{(2)}, \dots$, имеющую предел

равный значению функции S в точке локального минимума. При удовлетворении неравенства

$$\max \left(\left| R^{(i)} - R^{(i-1)} \right|, \left| X_A^{(i)} - X_A^{(i-1)} \right|, \left| Y_A^{(i)} - Y_A^{(i-1)} \right|, \left| Z_A^{(i)} - Z_A^{(i-1)} \right| \right) \leq \varepsilon$$

где ε – задаваемая точность вычисления, итерационный процесс завершается. Сходимость предложенного алгоритма доказывается теоремой Вейерштрасса.

Теорема Вейерштрасса: Для каждой функции $f(x)$, непрерывной на $[a, b]$, и любого действительного числа $\varepsilon > 0$ можно найти такой многочлен $P(x)$, что $\|P(x) - f(x)\| < \varepsilon$.

В результате решения задачи определяются точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ в неподвижной системе координат, $B^{(0)} \in Q_1$, $C^{(0)} \in Q_2$, такие, что, совмещая с ними звено BC , получаем искомую ИКЦ в виде незамкнутой четырехзвенной цепи $ABCD$.

Далее проверяем точность воспроизведения заданной функции путем анализа положения ИКЦ $ABCD$. Если точность воспроизведения удовлетворяет заданной функции, то процесс итерации завершается, а если не удовлетворяет заданной точности, то необходимо перейти к пункту 1 приведенного алгоритма.

Задавая в различных комбинациях часть искомых параметров синтеза, получим различные модификации ИКЦ.

1. Если заданы координаты точки $A(X_{A_i}, Y_{A_i}, Z_{A_i})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_1 и координаты точки $D_i(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_2 , то получим трехзвенную открытую цепь $ABCD$ (рисунок 2.6). Необходимые условия минимума суммы S в данном случае принимают вид:

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; (j = x_b, y_b, z_b, R, x_c, y_c, z_c)$$

и для нахождения минимума S можно использовать алгоритм, приведенный выше, учитывая, что параметры X_A, Y_A, Z_A заданы.

Если точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ и $D(X_D, Y_D, Z_D)$ фиксированы, то в результате синтеза ИКЦ получим пространственный четырехзвенник $ABCD$.

2. Пусть заданы координаты $x_C = y_C = z_C = 0$ точки $C \in Q_2$ координаты $X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i}$ точки D тела Q_2 и углы Эйлера $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_1 а искомыми параметрами являются $X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B$.

Необходимые условия минимума сумма S принимают вид:

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B)$$

Для нахождения минимума функции S можно опять использовать алгоритм, приведенный выше, учитывая, что $x_C = y_C = z_C = 0$.

3. Пусть заданы координаты $x_B, y_B, z_B = 0$ точки B тела Q_1 и эйлеровы углы тела Q_2 $\theta_i^2, \psi_i^2, \phi_i^2$. Исходная задача сводится к определению сферы наименее удаленной от N положений фиксированной точки C тела Q_2 (рисунок 2.6).

Необходимые условия минимума суммы S

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = X_A, Y_A, Z_A, R, x_C, y_C, z_C)$$

Данная задача подробно исследована в работе [39]. Для ее решения можно применить и алгоритм, приведенный выше, полагая $x_B, y_B, z_B = 0$, но в этом частном случае алгоритм поиска минимума полностью совпадает с методом кинематической инверсии.

Таким образом, как мы видим, решена задача синтеза ИКЦ со сферическими кинематическими парами и их модификации, которые могут быть использованы как модули структурно-кинематического синтеза пространственных рычажных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев.

2.3 Синтез модификации исходных кинематических цепей со сферическими парами

Рассмотрим решение задачи синтеза ИКЦ при различных комбинациях заданных и искомых параметров ИКЦ.

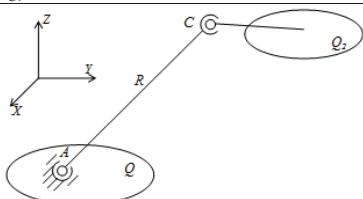
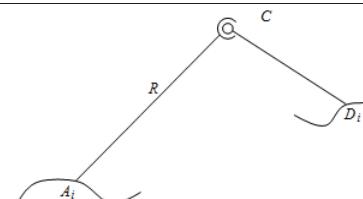
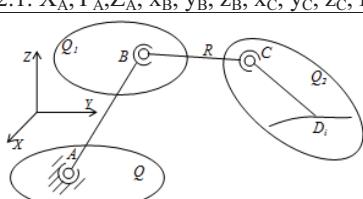
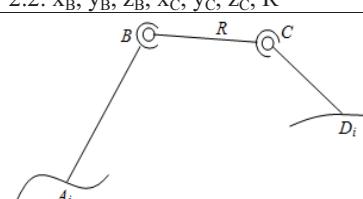
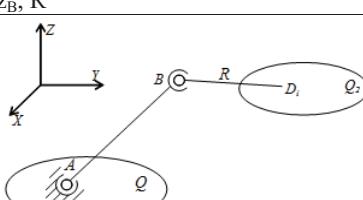
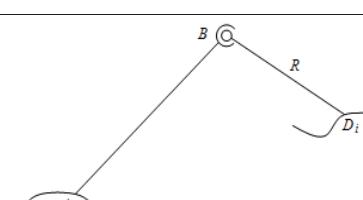
1. Пусть заданы координаты X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai} точки A и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_1 и координаты точки $D_i(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_2 .

Требуется найти в неподвижной системе координат такие точки $B(x_B, y_B, z_B)$ тела Q_1 и $C(x_C, y_C, z_C)$ тела Q_2 , чтобы расстояние между

точками B и C во всех положениях тел Q_1 и Q_2 мало отличалось от некоторой постоянной величины R .

Задача сводится к определению семи параметров $x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C, R$ открытой трехзвенной ИКЦ $ABCD$ со сферическими парами (рисунок 2.2, таблица 2.1), так как в выражении (2.10) координаты точки $A(X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai})$ заданы.

Таблица 2.1

| | |
|--|--|
| 1.1. $x_B=y_B=z_B=0, X_A, Y_A, Z_A, x_C, y_C, z_C, R, z_C, R$ | 1.2. $x_B=y_B=z_B=0, x_C, y_C, z_C, R$ |
|  |  |
| 2.1. $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C, R$ | 2.2. $x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C, R$ |
|  |  |
| 3.1. $x_C=y_C=z_C=0, X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R$ | 3.2. $x_C=y_C=z_C=0, x_B, y_B, z_B, R$ |
|  |  |

Для решения задачи в этом случае взвешенную разность Δ_{q_i} , определяем равенством (2.10), можно представить в двух различных формах относительно x_B, y_B, z_B, R и x_C, y_C, z_C, R . Выражая Δ_{q_i} через x_B, y_B, z_B , и R , получим первую форму

$$\Delta_{qi}^{(1)} = (\tilde{x}_{B_i} - x_B)^2 + (\tilde{y}_{B_i} - y_B)^2 + (\tilde{z}_{B_i} - z_B)^2 - R^2 \quad (2.35)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{B_i} \\ \tilde{y}_{B_i} \\ \tilde{z}_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{01}^i & 0 & 0 \\ 0 & T_{21}^i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{D_i} - X_A \\ Y_{D_i} - Y_A \\ Z_{D_i} - Z_A \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix}$$

Необходимые условия минимума суммы квадратов взвешенной разности:

$$S = \sum_{i=1}^N [\Delta_{qi}^{(1)}]^2 \quad (2.36)$$

можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial x_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0 \quad (2.37)$$

Которые приводятся относительно неизвестных x_B, y_B, z_B, H_1 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i} y_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i} \tilde{z}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i} y_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{B_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{B_i} \tilde{z}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i} \tilde{z}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{B_i} \tilde{z}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{B_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{B_i} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ H_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{B_i}^2 \tilde{x}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N R_{B_i}^2 \tilde{y}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N R_{B_i}^2 \tilde{z}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N R_{B_i}^2 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\text{где } H_1 = \frac{1}{2}(R^2 - x_B^2 - y_B^2 - z_B^2) \\ R_{B_i}^2 = \tilde{x}_{B_i}^2 + \tilde{y}_{B_i}^2 + \tilde{z}_{B_i}^2$$

Решая эту систему по правилу Крамера, получим:

$$(x_B, y_B, z_B, H_1) = \frac{1}{D_1} (D_{x_B}, D_{y_B}, D_{z_B}, D_{H_1}) \text{ (при } D_1 \neq 0) \quad (2.39)$$

$$\text{Откуда } R = \left(x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 + 2H_1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Теперь взвешенную разность составим относительно неизвестных параметров x_C, y_C, z_C , и R .

$$\Delta_{q_i}^{(2)} = (\tilde{x}_{C_i} - x_C)^2 + (\tilde{y}_{C_i} - y_C)^2 + (\tilde{z}_{C_i} - z_C)^2 - R^2 \quad (2.40)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{C_i} \\ \tilde{y}_{C_i} \\ \tilde{z}_{C_i} \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} [T_{02}^i] & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A - X_{D_i} \\ Y_A - Y_{D_i} \\ Z_A - Z_{D_i} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [T_{12}^i] & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix}$$

Условие минимума суммы по параметрам x_C, y_C, z_C , и R

$$\frac{\partial S}{\partial x_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0 \quad (2.41)$$

сводится к системе линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{C_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{C_i} \tilde{y}_{C_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{C_i} \tilde{z}_{C_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{C_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{C_i} \tilde{y}_{C_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{C_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{C_i} \tilde{z}_{C_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{C_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{C_i} \tilde{z}_{C_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{C_i} \tilde{z}_{C_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{C_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{C_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{C_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{C_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{C_i} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{C_i}^2 \tilde{x}_{C_i} \\ \sum_{i=1}^N R_{C_i}^2 \tilde{y}_{C_i} \\ \sum_{i=1}^N R_{C_i}^2 \tilde{z}_{C_i} \\ \sum_{i=1}^N R_{C_i}^2 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Отсюда находим x_C, y_C, z_C, H_2 :

$$(x_C, y_C, z_C, H_2) = \frac{1}{D_2} (D_{x_C}, D_{y_C}, D_{z_C}, D_{H_2}), \quad (\text{при } D_2 \neq 0) \quad (2.43)$$

где

$$H_2 = \frac{1}{2} (R^2 - x_C^2 - y_C^2 - z_C^2)$$

$$R_{C_i}^2 = \tilde{x}_{C_i}^2 + \tilde{y}_{C_i}^2 + \tilde{z}_{C_i}^2$$

Система (2.43) позволяет определить искомые параметры x_C, y_C, z_C , и R при фиксированных значениях переменных x_B, y_B, z_B , т.е. описывает соответствие между точками B и C тел Q_1 и Q_2 .

Для установления однозначного соответствия между решениями, получаемые при рассмотрении движения тел Q_2 относительно тела Q_1 и, обратно, тела Q_1 относительно Q_2 , необходимо минимизировать функцию $S(x_B, y_B, z_B, x'_C, y'_C, z'_C, R)$, семи переменных.

Необходимыми условиями минимума суммы S являются

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = x_B, y_B, z_B, R, x'_C, y'_C, z'_C) \quad (2.44)$$

Для получения системы (2.44) следует рассмотреть совместно систему уравнений (2.38) и (2.42). Первые три из условий стационарности (2.44) приводят к системе (2.38), а последние три условия (2.42) представим следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(2)}}{\partial x_C} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(2)}}{\partial y_C} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(2)}}{\partial z_C} &= 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Поскольку нас интересует лишь точки минимума функции $S(x_B, y_B, z_B, x'_C, y'_C, z'_C, R)$, то для нахождения минимума можно использовать алгоритм приведенный в п. 2.1, учитывая, что параметры X_A, Y_A и Z_A заданы.

В зависимости от характера заданных движений тел $Q_1(X_{A_i}, Y_{A_i}, Z_{A_i}, \theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1)$ и $Q_2(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i}, \theta_i^2, \psi_i^2, \phi_i^2)$, ($i = \overline{1, N}$), приходим к следующим механизмам и кинематическим цепям:

а) Если точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ и $D(X_D, Y_D, Z_D)$ фиксированы на теле Q , то в результате синтеза ИКЦ получим передаточный механизм $ABCD$ типа $BCCB$ (B – вращательная, C – сферическая кинематические пары). Здесь следует отметить, оси вращательных кинематических пар совпадают с осью Z . И нет необходимости прибегать к использованию обращения движения.

б) Если точка $D_i(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i})$ движется по прямой, то получим трехзвенную открытую цепь $ABCD$ с двумя сферическими и поступательной парами. Если при этом точка $A(X_A, Y_A, Z_A)$ движется по

прямой, то получим незамкнутую кинематическую цепь $ABCD$ с двумя поступательными и сферической парами.

2. Пусть заданы координаты $x_C = y_C = z_C = 0$ точки $C \in Q_2$ координаты $X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i}$ точки D тела Q_2 и углы Эйлера $\theta_i^1, \psi_i^1, \varphi_i^1$ тела Q_1 а искомыми параметрами являются $X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B$.

Требуется на теле Q и Q_1 соответственно такие точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ так, чтобы расстояние между точками B и D во всех положениях тел мало отличались от некоторой постоянной величины R .

Задача сводится к синтезу разомкнутой трехзвенной цепи ABD по семи неизвестным параметрам $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B$, и R (рисунок 3.1, таблица 2.1).

Для решения задачи взвешенную разность (2.10) с учетом формул (2.15) и (2.16) можно представить в двух различных формах с общим параметром R . Выражая Δ_{q_i} через X_A, Y_A, Z_A и R имеем

$$\Delta_{q_i}^{(1)} = (\tilde{X}_{A_i} - X_A)^2 + (\tilde{Y}_{A_i} - Y_A)^2 + (\tilde{Z}_{A_i} - Z_A)^2 - R^2 \quad (2.46)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{A_i} \\ \tilde{Y}_{A_i} \\ \tilde{Z}_{A_i} \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} [T_{10}] & X_{D_i} \\ 0 & Y_{D_i} \\ 0 & Z_{D_i} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Необходимые условия минимума суммы по переменным X_A, Y_A, Z_A и R

$$\frac{\partial S}{\partial X_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Y_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Z_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0 \quad (2.48)$$

Сводятся к системе линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ H_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

где $R_{Ai}^2 = \tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2$.

Система (2.49) позволяет определить неизвестные параметры X_A , Y_A , Z_A и R при заданных значениях переменных x_B , y_B , z_B , то есть описывает соответствие между точками B и A тел Q и Q_1 .

Решение этой системы по правилу Крамера имеет вид:

$$(X_A, Y_A, Z_A, H_1) = \frac{1}{D_1} (D_{x_A}, D_{y_A}, D_{z_A}, D_{H_1}) \quad (\text{при } D_1 \neq 0) \quad (2.50)$$

откуда

$$R = \sqrt{(X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2 + 2H_1)^2}$$

Выражая Δ_{q_i} через x_B , y_B , z_B , и R , по аналогии имеем

$$\Delta_{q_i}^{(2)} = (\tilde{x}_{B_i} - x_B)^2 + (\tilde{y}_{B_i} - y_B)^2 + (\tilde{z}_{B_i} - z_B)^2 - R^2 \quad (2.51)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{B_i} \\ \tilde{y}_{B_i} \\ \tilde{z}_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{01}^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{D_i} - X_A \\ Y_{D_i} - Y_A \\ Z_{D_i} - Z_A \\ 1 \end{bmatrix}$$

Необходимые условия минимума суммы S по переменным x_B, y_B, z_B , и R , получим систему линейных уравнений относительно x_B, y_B, z_B , и

$$H_2 = \frac{1}{2} (R^2 - x_B^2 - y_B^2 - z_B^2)$$

$$\left[\begin{array}{cccc} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i} y_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i} \tilde{z}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i} y_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{B_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{B_i} \tilde{z}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i} \tilde{z}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{B_i} \tilde{z}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{B_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{B_i} & N \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{B_i}^2 \tilde{x}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N R_{B_i}^2 \tilde{y}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N R_{B_i}^2 \tilde{z}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N R_{B_i}^2 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Для установления однозначного соответствия между решениями, получаемыми при рассмотрении движения тела Q_1 относительно Q и обратно, необходимо совместно решить системы (2.49) и (2.52). Чтобы получить необходимые условия минимума суммы S по всем семи параметрам

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B) \quad (2.53)$$

Необходимо рассмотреть совместно системы уравнений (2.48) и (2.52). Исключая первые четыре неизвестные X_A, Y_A, Z_A и R на основе системы уравнений (2.52), придем к системе трех уравнений с тремя неизвестными x_B, y_B, z_B , которую удобно представить в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial x_B} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial y_B} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial z_B} &= 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

Подставляя (2.46), (2.50) и (2.51) в (2.54), получим

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{A_i} D_{X_A} + \tilde{Y}_{A_i} D_{Y_A} + \tilde{Z}_{A_i} D_{Z_A} + D_{H_1} - \frac{1}{2} D_1 \tilde{R}_{A_i}^2 \right] \tilde{x}_{B_i} = 0 \\ & \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{A_i} D_{X_A} + \tilde{Y}_{A_i} D_{Y_A} + \tilde{Z}_{A_i} D_{Z_A} + D_{H_1} - \frac{1}{2} D_1 \tilde{R}_{A_i}^2 \right] \tilde{y}_{B_i} = 0 \\ & \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{A_i} D_{X_A} + \tilde{Y}_{A_i} D_{Y_A} + \tilde{Z}_{A_i} D_{Z_A} + D_{H_1} - \frac{1}{2} D_1 \tilde{R}_{A_i}^2 \right] \tilde{z}_{B_i} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

Каждое уравнение системы (2.55) представляет собой алгебраическое уравнение тринадцатой степени относительно неизвестных параметров x_B, y_B, z_B . Для нахождения минимума функции $S(X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B)$ можно использовать алгоритм приведенный в пункте 2.1, учитывая, что $x_C = y_C = z_C = 0$.

Если точка $D_i(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i})$ движется по прямой, то в результате синтеза получим кинематическую цепь ABD , представляющую собой передаточный кривошипно-ползунный четырехзвеный механизм ABD .

3. Пусть заданы координаты $x_B = y_B = z_B = 0$ точки B на подвижном теле Q_1 и углы Эйлера $\theta_i^1, \psi_i^1, \varphi_i^1$ тела Q_2 , а координаты X_A, Y_A, Z_A точки A являются искомыми, то задача сводится к определению круговой точки $C(x_C, y_C, z_C)$ на теле Q_2 и ее центра на теле Q по заданным ее параметрам $X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i}$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \varphi_i^1$ тела Q_2 (рисунок 1.1, таблица 2.1)

Действительно, выражение (2.10) с учетом формул (2.17) – (2.16) примет вид

$$\Delta_{q_i} = \left| \overrightarrow{AC_i} \right|^2 - R^2 = (X_{C_i} - X_A)^2 + (Y_{C_i} - Y_A)^2 + (Z_{C_i} - Z_A)^2 - R^2 \quad (2.56)$$

После несложных преобразований взвешенную разность (2.56) можно представить в виде следующего многочлена:

$$\Delta_{q_i} = -2 \left[X_{C_i A} X_A + Y_{C_i A} Y_A + Z_{C_i A} Z_A + H - \frac{1}{2} R_{C_i}^2 \right], \quad (i = \overline{1, N}) \quad (2.57)$$

где $R_{C_i}^2 = x_{C_i}^2 + y_{C_i}^2 + z_{C_i}^2$ (2.58)

$$H = \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \quad (2.59)$$

В данном случае функция S также зависит от семи искомых параметров. Это координаты x'_C, y'_C, z'_C , точки C тела Q_2 , координаты X_A, Y_A, Z_A , точки A центра искомой окружности на теле Q и R – расстояние между точками A и C .

Для ее решения можно применить алгоритм, приведенный в пункте 2.1, полагая $x_B = y_B = z_B = 0$, но в этом частном случае данный алгоритм полностью совпадает с методом кинематической инверсии [39].

4. Пусть заданы координаты $x_B = y_B = z_B = 0$ точки B на теле Q_1 , координаты X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai} точки A , координаты X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di} точки D и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_2 . Требуется найти на теле Q_2 такую точку $C(x_C, y_C, z_C)$, чтобы расстояние между точками A и C во всех положениях точки A и тела Q_2 мало отличались от некоторой постоянной величины R .

Задача в этом случае сводится к синтезу разомкнутой двухзвенной цепи ACD по четырем неизвестным параметрам x'_C, y'_C, z'_C, R (рисунок 1.2, таблица 2.1). Эта модификация ИКЦ может рассматриваться как частный случай любого из двух модификаций ИКЦ, представленных на рисунке 1.1 и 2.2 таблица 2.1, соответственно при условиях $X_A=X_{Ai}, Y_A=Y_{Ai}, Z_A=Z_{Ai}$ и $x_B = y_B = z_B = 0$. Поэтому для определения параметров x'_C, y'_C, z'_C, R могут быть использованы условия минимума целевой функции указанных двух модификаций ИКЦ. Из этих двух условий предпочтительнее использовать непосредственно условия (2.16), сводящиеся к системе линейных уравнений (2.32), полагая в них $x_B = y_B = z_B = 0$ и определяя оптимальные значения искомых параметров как решение системы (2.32).

5. Пусть заданы координаты $x_C = y_C = z_C = 0$ точки $C \in Q_2$, координаты X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai} точки A и координаты X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di} точки D тела Q_2 и углы Эйлера $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_1 .

Требуется найти на теле Q_1 такую точку $B(x_B, y_B, z_B)$, чтобы расстояние между точками B и D во всех положениях тела Q_1 и точки D мало отличались от некоторой постоянной величины R .

Задача сводится к синтезу разомкнутой двухзвенной цепи ABD по четырем неизвестным параметрам x_B, y_B, z_B , и R (рисунок 3.2, таблица 2.1). Эта модификация ИКЦ может рассматриваться как частный случай любого из двух модификаций ИКЦ, представленных на рисунках 2.2 и 3.1 таблица 2.1, соответственно при условиях $x_C = y_C = z_C = 0$ и $X_A=X_{Ai}, Y_A=Y_{Ai}, Z_A=Z_{Ai}$. Поэтому для определения параметров x_B, y_B, z_B , и R могут быть использованы условия минимума целевой функции указанных модификаций ИКЦ. Из этих двух условий предпочтительнее использовать непосредственно условия (2.15), сводящиеся к системе линейных уравнений (2.16), полагая в них $x_C = y_C = z_C = 0$ и определяя искомых параметров как решение системы (2.16)

2.4 Синтез исходной кинематической цепи со сферическими и сферическими с пальцем парами

Рассмотрим пространственный ИКЦ $ABCD$ типа CCC_{Π} , где A и B – сферические пары, C – сферическая пара с пальцем (рисунок 2.7). Метод решения задачи синтеза данной ИКЦ основан на введении двух подвижных тел, жестко связанных с входным и выходным звеньями и в отыскании круговых точек в относительном движении этих тел [180, 181].

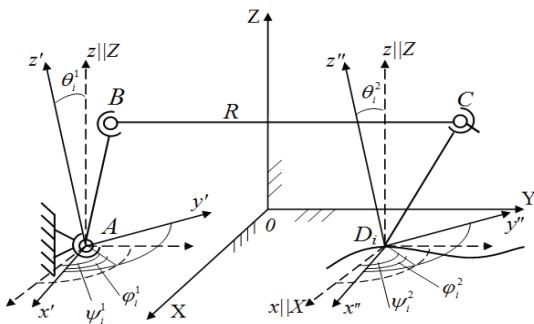


Рисунок 2.7

Постановка задачи: Пусть заданы N конечноудаленных положений двух твердых тел $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \theta_i^1, \psi_i^1, \varphi_i^1)$ и $Q_2(X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di}, \theta_i^2, \psi_i^2, \varphi_i^2)$, ($i = \overline{1, N}$) где $\theta_i^j, \psi_i^j, \varphi_i^j$ – углы Эйлера относительно неподвижной системы координат $OXYZ$.

Требуется найти такие точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ в неподвижной системе координат, $B(x_B, y_B, z_B)$ тела Q_1 и $C(x_C, y_C, z_C)$ тела Q_2 , чтобы расстояние между точками B и C во всех положениях тел Q_1 и Q_2 мало отличалось от некоторой постоянной величины R .

Решение задачи: Введем взвешенную разность для i -го положения тел в виде:

$$\Delta_{q_i} = |\overline{B_i C_i}|^2 - R^2 = (X_{C_i} - X_{B_i})^2 + (Y_{C_i} - Y_{B_i})^2 + (Z_{C_i} - Z_{B_i})^2 - R^2 \quad (2.53)$$

Она является функцией десяти параметров: $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$. Группируя эти параметры по четыре с общим параметром R , взвешенную разность представим в трех различных формах:

$$\Delta_{qi}^{(1)} = (\tilde{X}_{Ai} - X_A)^2 + (\tilde{Y}_{Ai} - Y_A)^2 + (\tilde{Z}_{Ai} - Z_A)^2 - R^2 \quad (2.60)$$

$$\Delta_{qi}^{(2)} = (\tilde{x}_{Bi} - x_B)^2 + (\tilde{y}_{Bi} - y_B)^2 + (\tilde{z}_{Bi} - z_B)^2 - R^2 \quad (2.61)$$

$$\Delta_{qi}^{(3)} = (\tilde{x}_{Ci} - x_C)^2 + (\tilde{y}_{Ci} - y_C)^2 + (\tilde{z}_{Ci} - z_C)^2 - R^2 \quad (2.62)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{Ai} \\ \tilde{Y}_{Ai} \\ \tilde{Z}_{Ai} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{10}] & 0 \\ 0 & [T_{20}] \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [T_{20}] & X_{D_i} \\ 0 & Y_{D_i} \\ 0 & Z_{D_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{Bi} \\ \tilde{y}_{Bi} \\ \tilde{z}_{Bi} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{01}] & 0 \\ 0 & [T_{21}] \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{D_i} - X_A \\ Y_{D_i} - Y_A \\ Z_{D_i} - Z_A \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x_C \\ [T_{21}] & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{Ci} \\ \tilde{y}_{Ci} \\ \tilde{z}_{Ci} \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} [T_{02}] & 0 \\ 0 & [T_{12}] \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A - X_{D_i} \\ Y_A - Y_{D_i} \\ Z_A - Z_{D_i} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x_B \\ [T_{12}] & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

где $[T_{kj}]$ – квадратная матрица выражает преобразование координат системы k в систему j и определяется как в (2.17)

Что бы расписать элементы матрицы введем обозначения:

$$\begin{aligned} \cos \theta_i^j &= c_1 \\ \cos \psi_i^j &= c_2 \\ \cos \varphi_i^j &= c_3 \\ \sin \theta_i^j &= s_1 \\ \sin \psi_i^j &= s_2 \\ \sin \varphi_i^j &= s_3. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Тогда $e_{i1}^j = c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3$

$$m_{i1}^j = s_2 c_3 + c_1 c_2 s_3$$

$$n_{i1}^j = s_1 s_3$$

$$e_{i2}^j = -c_2 s_3 - c_1 s_2 s_3$$

$$m_{i2}^j = -s_2 s_3 + c_1 c_2 c_3$$

$$n_{i2}^j = s_1 c_3$$

$$e_{i3}^j = s_1 s_2$$

$$m_{i3}^j = -s_1 c_2$$

$$n_{i3}^j = c_1$$

$$T_{01}^i = [T_{10}^i]^T$$

$$T_{02}^i = [T_{20}^i]^T$$

$$T_{21}^i = T_{01}^i \times T_{20}^i$$

$$T_{12}^i = T_{02}^i \times T_{10}^i$$

Так как кинематическая пара C является двух подвижной сферической парой (сферическая пара с пальцем), следовательно для этой пары только два угла Эйлера будут независимыми. От особенностей закона движения выходного звена возможна различное направления пальца в сферической паре. Например, в качестве переменных можно принять угол прецессии ψ_i^j и угол собственного вращения φ_i^j , а угол нутации θ_i^j считать равным $\pi/2$. Тогда матрица перехода от k -той системы координат к j -той системе при $\sin \theta_i^j = 1$, $\cos \theta_i^j = 0$

$$T_{10} = \begin{bmatrix} c_2 c_3 & -c_2 s_3 & s_2 \\ s_2 c_3 & -s_2 s_3 & -c_2 \\ s_3 & c_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Во втором случае переменными примем угол нутации θ_i^j и угол собственного вращения φ_i^j , а угол прецессии $\psi_i^j = 0$, то есть $\sin \psi_i^j = 0$, $\cos \psi_i^j = 1$

$$T_{10} = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ c_1 s_3 & c_1 c_3 & -s_1 \\ s_1 s_3 & s_1 c_3 & c_1 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

В третьем случае переменными примем угол нутации θ_i^j и угол прецессии ψ_i^j , а угол собственного вращения $\varphi_i^j = 0$, то есть $\sin \varphi_i^j = 0$, $\cos \varphi_i^j = 1$

$$T_{10} = \begin{bmatrix} c_2 & -c_1 s_2 & s_1 s_2 \\ c_1 s_3 & c_1 c_2 & -s_1 \\ 0 & s_1 & c_1 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

В любом из трех выбранных вариантов матрица преобразования координат значительно упрощаются.

Пусть тело Q_2 образует матрицу (2.67), а тело Q_1 матрицу (2.66).

Необходимые условия минимума суммы квадратов взвешенной разности:

$$S = \sum_{i=1}^N [\Delta_{q_i}^{(1)}]^2 \quad (2.70)$$

можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial X_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Y_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Z_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0 \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0 \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0 \quad (2.73)$$

Из (2.71) с учетом (2.11) и (2.70) получим:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{X}_{A_i} - X_A) = 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{Y}_{A_i} - Y_A) = 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{Z}_{A_i} - Z_A) = 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot R = 0 \end{array} \right\} \quad (2.74)$$

Допустим, что $R \neq 0$. Тогда из последнего равенства системы (2.74) следует, что

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} = 0 \quad (2.75)$$

С учетом (2.75) система уравнений (2.74) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{X}_{Ai} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{Y}_{Ai} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{Z}_{Ai} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} = 0 \quad (2.76)$$

Подставляя выражения для $\Delta_{q_i}^{(1)}$ из (2.11) в систему (2.76), получим:

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai}^2 X_A + \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai} \tilde{X}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{X}_{Ai} \right] = \\ & \quad = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \tilde{X}_{Ai} \\ & \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai}^2 Y_A + \tilde{Z}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{Y}_{Ai} \right] = \\ & \quad = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + Y_{Ai}^2 + Z_{Ai}^2) \tilde{Y}_{Ai} \\ & \sum_{i=1}^N \left[\tilde{Z}_{Ai} \tilde{X}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai}^2 Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{Z}_{Ai} \right] = \\ & \quad = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \tilde{Z}_{Ai} \\ & \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \right] = \\ & \quad = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.77)$$

Система (2.77) линейна относительно переменных X_A, Y_A, Z_A и $H_1 = \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2)$, поэтому ее можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ H_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

где $R_{Ai}^2 = \tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2$.

Решение этой системы по правилу Крамера имеет вид:

$$(X_A, Y_A, Z_A, H_1) = \frac{1}{D_1} (D_{x_A}, D_{y_A}, D_{z_A}, D_{H_1}) \quad (\text{при } D_1 \neq 0) \quad (2.79)$$

Аналогично из (2.72) с учетом (2.12) и (2.70) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_B, y_B, z_B, H_2 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{y}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{y}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

Решая эту систему по правилу Крамера, получим:

$$(x_B, y_B, z_B, H_2) = \frac{1}{D_2} (D_{x_B}, D_{y_B}, D_{z_B}, D_{H_2}) \quad (\text{при } D_2 \neq 0) \quad (2.81)$$

Из (2.74) с учетом (2.13) и (2.73) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_C, y_C, z_C, H_3 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ H_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

Отсюда находим x_C, y_C, z_C, H_3 :

$$(x_C, y_C, z_C, H_3) = \frac{1}{D_3} (D_{x_C}, D_{y_C}, D_{z_C}, D_{H_3}) \quad (\text{при } D_3 \neq 0) \quad (2.83)$$

Исключая первые четыре неизвестных X_A, Y_A, Z_A, R на основе формулы (2.78), можно свести систему (2.71) – (2.73) к системе из шести уравнений с шестью неизвестными $x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$, которую удобно представить в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(2)}}{\partial x_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(3)}}{\partial x_C} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(2)}}{\partial y_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(3)}}{\partial y_C} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(2)}}{\partial z_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(3)}}{\partial z_C} &= 0 \end{aligned} \quad (2.84)$$

Уравнения этой системы по виду совпадают с тремя уравнениями тринадцатой степени относительно трех неизвестных, хотя в данном случае имеем систему из шести уравнений относительно шести неизвестных. Решение системы (2.84) представляет трудоемкую задачу, поэтому гораздо эффективнее применять излагаемый ниже алгоритм поиска минимума функции S , аналогичный приведенному алгоритму в пункте (2.1).

В результате решения задачи определяются точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ в неподвижной системе координат, $B \in Q_1$ и $C \in Q_2$, совмещая с которыми звено BC , получаем искомую ИКЦ в виде разомкнутой цепи $ABCD$ типа CCC_{Π} . Комбинируя параметрами тела Q_1 и Q_2 можно получить различные модификации ИКЦ. Если фиксировать координаты x_D, y_D, z_D точки D , углы Эйлера $\theta_{ij}^2 = 0, \psi_{ij}^2 = 0$ тела Q_2 и углы Эйлера $\theta_{ij}^1 = 0, \psi_{ij}^1 = 0$ тела Q_1 , то получим передаточный механизм типа $BCC_{\Pi}B$ (рисунок 2.8).

Задавая в различных комбинациях часть искомых параметров синтеза, получим различные модификации ИКЦ.

1. Если заданы координаты точки $A(X_{A_i}, Y_{A_i}, Z_{A_i})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_1 и координаты точки $D_i(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_2 , то получим трехзвенную открытую цепь $ABCD$ (рисунок 2.9).

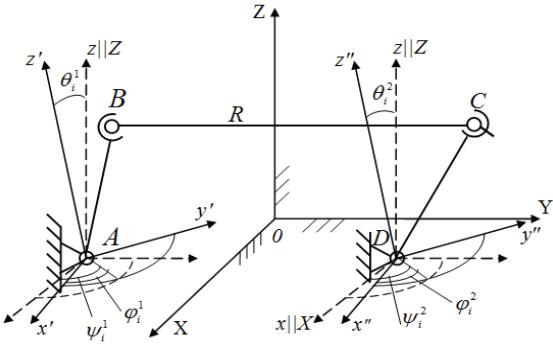


Рисунок 2.8

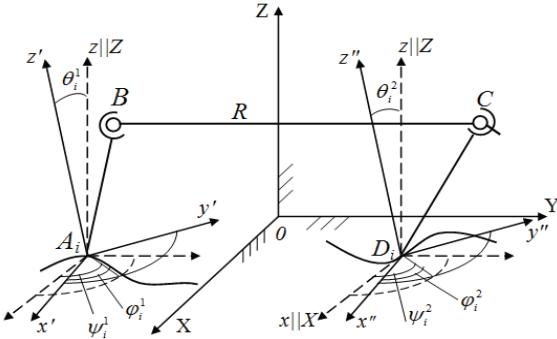


Рисунок 2.9

Необходимые условия минимума суммы S в данном случае принимают вид:

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; (j = x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C)$$

и для нахождения минимума S можно использовать алгоритм, приведенный выше, учитывая, что параметры X_A, Y_A, Z_A заданы.

Если точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ и $D(X_D, Y_D, Z_D)$ фиксированы, то в результате синтеза ИКЦ получим пространственный четырехзвенник $ABCD$ (рисунок 2.8).

2.5 Синтез модификации исходных кинематических цепей со сферическими и сферическими с пальцем парами

Рассмотрим пространственный ИКЦ $ABCD$ типа $C_{\Pi}C_{\Pi}C$, где C – сферическая пара, A и B – сферические пары с пальцем (рисунок 2.10).

В этом случае тело Q_1 образует матрицу (2.67), тело Q_2 матрицу (2.66).

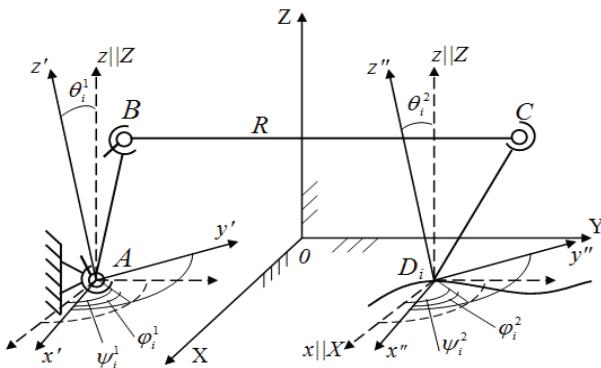


Рисунок 2.10

Необходимые условия минимума суммы квадратов взвешенной разности:

$$S = \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^2 \quad (2.85)$$

можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial X_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Y_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Z_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0 \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0 \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0 \quad (2.88)$$

Из (2.85) с учетом (2.11) и (2.86) получим:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{X}_{Ai} - X_A) = 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{Y}_{Ai} - Y_A) = 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{Z}_{Ai} - Z_A) = 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot R = 0 \end{array} \right\} \quad (2.89)$$

Допустим, что $R \neq 0$. Тогда из последнего равенства системы (2.89) следует, что

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} = 0 \quad (2.90)$$

С учетом (2.90) система уравнений (2.89) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{X}_{Ai} = 0; \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{Y}_{Ai} = 0; \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{Z}_{Ai} = 0; \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} = 0 \quad (2.91)$$

Подставляя выражения для $\Delta_{q_i}^{(1)}$ из (2.11) в систему (2.91), получим:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai}^2 X_A + \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai} \tilde{X}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2}(R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{X}_{Ai} \right] = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai}^2 Y_A + \tilde{Z}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2}(R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{Y}_{Ai} \right] = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + Y_{Ai}^2 + Z_{Ai}^2) \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{Z}_{Ai} \tilde{X}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai}^2 Z_A + \frac{1}{2}(R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{Z}_{Ai} \right] = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2}(R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \right] = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \end{array} \right\} \quad (2.92)$$

Система (2.92) линейна относительно переменных X_A , Y_A , Z_A и $H_1 = \frac{1}{2}(R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2)$, поэтому ее можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ H_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

где $R_{Ai}^2 = \tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2$.

Решение этой системы по правилу Крамера имеет вид:

$$(X_A, Y_A, Z_A, H_1) = \frac{1}{D_1} (D_{x_A}, D_{y_A}, D_{z_A}, D_{H_1}) \quad (\text{при } D_1 \neq 0) \quad (2.94)$$

Аналогично из (2.87) с учетом (2.12) и (2.87) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_B, y_B, z_B, H_2 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

Решая эту систему по правилу Крамера, получим:

$$(x_B, y_B, z_B, H_2) = \frac{1}{D_2} (D_{x_B}, D_{y_B}, D_{z_B}, D_{H_2}) \quad (\text{при } D_2 \neq 0) \quad (2.96)$$

Из (2.88) с учетом (2.13) и (2.88) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_C, y_C, z_C, H_3 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ H_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

Отсюда находим x_C, y_C, z_C, H_3 :

$$(x_C, y_C, z_C, H_3) = \frac{1}{D_3} (D_{x_C}, D_{y_C}, D_{z_C}, D_{H_3}) \quad (\text{при } D_3 \neq 0) \quad (2.98)$$

Исключая первые четыре неизвестных X_A, Y_A, Z_A, R на основе формулы (2.93), можно свести систему (2.86) – (2.88) к системе из шести уравнений с шестью неизвестными $x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$, которую удобно представить в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial x_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(3)}}{\partial x_C} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial y_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(3)}}{\partial y_C} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial z_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(3)}}{\partial z_C} &= 0 \end{aligned} \quad (2.99)$$

Уравнения этой системы по виду совпадают с тремя уравнениями тридцатой степени относительно трех неизвестных, приведенными в работе [39], хотя в данном случае имеем систему из шести уравнений относительно шести неизвестных. Решение системы (2.99) представляет трудоемкую задачу, поэтому гораздо эффективнее применять излагаемый ниже алгоритм поиска минимума функции S , аналогичный приведенному алгоритму в пункте (2.1).

В результате решения задачи определяются точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ в неподвижной системе координат, $B \in Q_1$ и $C \in Q_2$, совмещая с которыми звено BC , получаем искомую ИКЦ в виде разомкнутой цепи $ABCD$ типа $C_{\Pi}C_{\Pi}C$. Комбинируя параметрами тела Q_1 и Q_2 можно получить различные модификации ИКЦ. Если фиксировать координаты x_D, y_D, z_D точки D , углы Эйлера $\theta_j^2 = 0, \psi_j^2 = 0$ тела Q_2 и углы Эйлера $\theta_j^1 = 0, \psi_j^1 = 0$ тела Q_1 , то получим передаточный механизм типа $BC_{\Pi}CB$ (рисунок 2.11).

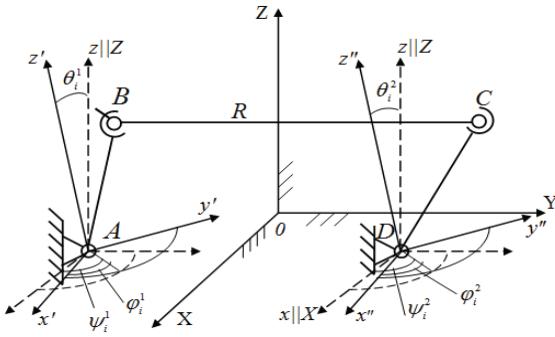


Рисунок 2.11

Рассмотрим пространственный ИКЦ $ABCD$ типа BCC , где B и C – сферические пары, A – вращательная пара.

В этом случае тело Q_1 образует матрицу:

$$T_{ji} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{ji} & -\sin\varphi_{ji} & 0 & l_i \\ \cos\theta_{ji}\sin\varphi_{ji} & \cos\theta_{ji}\cos\varphi_{ji} & -\sin\theta_{ji} & -l_{ji}\sin\theta_{ji} \\ \sin\theta_{ji}\sin\varphi_{ji} & \sin\theta_{ji}\cos\varphi_{ji} & \cos\theta_{ji} & l_{ji}\cos\theta_{ji} \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

учитывая, что для звеньев вращательной пары угол нутации $\theta_{ij}=\text{const}$, угол прецессии $\psi_{ij}=0$, и получаем из (2.66) матрицу вращательной пары.

Тело Q_2 образует матрицу (2.66). В этом случае координаты точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ имеют вид: $X_A=l_i$,

$$\begin{aligned} Y_A &= -l_{ji}\sin\theta_{ji} \\ Z_A &= l_{ji}\cos\theta_{ji} \end{aligned}$$

Необходимые условия минимума суммы квадратов взвешенной разности:

$$S = \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^2 \quad (2.101)$$

можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial X_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Y_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Z_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0 \quad (2.102)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0 \quad (2.103)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0 \quad (2.104)$$

Из (2.102) с учетом (2.11) и (2.101) получим:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{X}_{A_i} - X_A) = 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{Y}_{A_i} - Y_A) = 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{Z}_{A_i} - Z_A) = 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot R = 0 \end{array} \right\} \quad (2.105)$$

Допустим, что $R \neq 0$. Тогда из последнего равенства системы (2.105) следует, что

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} = 0 \quad (2.106)$$

С учетом (2.106) система уравнений (2.105) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{X}_{A_i} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{Y}_{A_i} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \tilde{Z}_{A_i} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} = 0 \quad (2.107)$$

Подставляя выражения для $\Delta_{q_i}^{(1)}$ из (2.14) в систему (2.107), получим:

$$\left. \begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai}^2 X_A + \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai} \tilde{X}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{X}_{Ai} \right] = \\
& = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \tilde{X}_{Ai} \\
& \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai}^2 Y_A + \tilde{Z}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{Y}_{Ai} \right] = \\
& = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + Y_{Ai}^2 + Z_{Ai}^2) \tilde{Y}_{Ai} \\
& \sum_{i=1}^N \left[\tilde{Z}_{Ai} \tilde{X}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai}^2 Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{Z}_{Ai} \right] = \\
& = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \tilde{Z}_{Ai} \\
& \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \right] = \\
& = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2)
\end{aligned} \right\} \quad (2.108)$$

Система (2.108) линейна относительно переменных X_A , Y_A , Z_A и $H_1 = \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2)$, поэтому ее можно записать в виде

$$\begin{bmatrix}
\sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \\
\sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \\
\sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} \\
\sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} & N
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ H_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

где $R_{Ai}^2 = \tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2$.

Решение этой системы по правилу Крамера имеет вид:

$$(X_A, Y_A, Z_A, H_1) = \frac{1}{D_1} (D_{x_A}, D_{y_A}, D_{z_A}, D_{h_1}) \quad (\text{при } D_1 \neq 0) \quad (2.110)$$

Аналогично из (2.103) с учетом (2.15) и (2.97) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_B, y_B, z_B, H_2 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

Решая эту систему по правилу Крамера, получим:

$$(x_B, y_B, z_B, H_2) = \frac{1}{D_2} (D_{x_B}, D_{y_B}, D_{z_B}, D_{H_2}), \text{ (при } D_2 \neq 0) \quad (2.112)$$

Из (2.104) с учетом (2.16) и (2.104) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_C, y_C, z_C, H_3 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ H_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

Отсюда находим x_C, y_C, z_C, H_3 :

$$(x_C, y_C, z_C, H_3) = \frac{1}{D_3} (D_{x_C}, D_{y_C}, D_{z_C}, D_{H_3}), \text{ (при } D_3 \neq 0) \quad (2.114)$$

Исключая первые четыре неизвестных X_A, Y_A, Z_A, R на основе формулы (2.103), можно свести систему (2.102) – (2.104) к системе из

шести уравнений с шестью неизвестными $x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$, которую удобно представить в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial x_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(3)}}{\partial x_C} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial y_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(3)}}{\partial y_C} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial z_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(3)}}{\partial z_C} &= 0 \end{aligned} \quad (2.115)$$

Уравнения этой системы по виду совпадают с тремя уравнениями тринадцатой степени относительно трех неизвестных, приведенными в работе [39], хотя в данном случае имеем систему из шести уравнений относительно шести неизвестных. Решение системы (2.115) представляет трудоемкую задачу, поэтому гораздо эффективнее применять излагаемый ниже алгоритм поиска минимума функции S , аналогичный приведенному алгоритму в пункте (2.1).

В результате решения задачи определяются точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ в неподвижной системе координат, $B \in Q_1$ и $C \in Q_2$, совмещая с которыми звено BC , получаем искомую ИКЦ в виде разомкнутой цепи $ABCD$ типа BCC .

Комбинируя параметрами тела Q_1 и Q_2 можно получить различные модификации ИКЦ. Если фиксировать координаты x_D, y_D, z_D точки D , углы Эйлера $\theta_{ij}^2 = 0, \psi_{ij}^2 = 0$ тела Q_2 и углы Эйлера $\theta_{ij}^1 = 0, \psi_{ij}^1 = 0$ тела Q_1 , то получим передаточный механизм типа $BCC_{\Pi}B$ (рисунок 2.8).

Задавая в различных комбинациях часть искомых параметров синтеза, получим различные модификации ИКЦ.

1. Если заданы координаты точки $A(X_{A_i}, Y_{A_i}, Z_{A_i})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_1 и координаты точки $D_i(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_2 , то получим трехзвенную открытую цепь $ABCD$ (рисунок 2.9). Необходимые условия минимума суммы S в данном случае принимают вид:

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; (j = x_b, y_b, z_b, R, x_c, y_c, z_c)$$

и для нахождения минимума S можно использовать алгоритм, приведенный выше, учитывая, что параметры X_A, Y_A, Z_A заданы.

Если точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ и $D(X_D, Y_D, Z_D)$ фиксированы, то в результате синтеза ИКЦ получим пространственный четырехзвенник $ABCD$ (рисунок 2.8 или 2.11).

2.6 Синтез исходной кинематической цепи с вращательной и сферическими парами и ее модификации

Рассмотрим пространственную ИКЦ типа BBC (B – вращательная пара, C – сферическая пара). На рисунке 2.12 приведена пространственная ИКЦ, где A – вращательная пара, и B, C – сферические пары. Метод решения задачи синтеза данной ИКЦ основан на введении двух пространственных подвижных тел, жестко связанных с входным и выходным звеньями и в отыскании круговых точек в относительном движении этих тел [39].

Постановка задачи: Пусть заданы N конечноудаленных положений двух твердых тел $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \phi_i^1)$ и $Q_2(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i}, \theta_i^2, \psi_i^2, \varphi_i^2)$, ($i=1, N$) где $\theta_i^j, \psi_i^j, \varphi_i^j$ – углы Эйлера относительно неподвижной системы координат $OXYZ$.

Требуется найти такие точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ в неподвижной системе координат, $B(x_B, y_B, z_B)$ тела Q_1 и $C(x_C, y_C, z_C)$ тела Q_2 , чтобы расстояние между точками B и C во всех положениях тел Q_1 и Q_2 мало отличалось от некоторой постоянной величины R .

Решение задачи: Введем взвешенную разность для i -го положения тел в виде:

$$\Delta_{q_i} = |B_i C_i|^2 - R^2 = (X_{C_i} - X_{B_i})^2 + (Y_{C_i} - Y_{B_i})^2 + (Z_{C_i} - Z_{B_i})^2 - R^2 \quad (2.116)$$

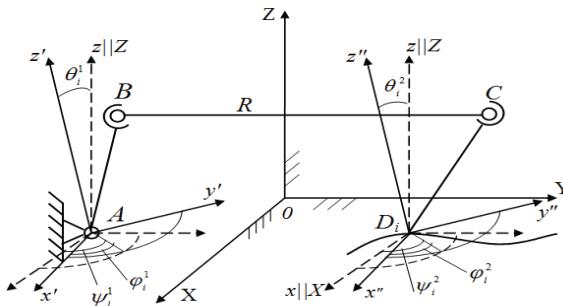


Рисунок 2.12

Она является функцией десяти параметров: $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$. Группируя эти параметры по четыре с общим параметром R , взвешенную разность представим в трех различных формах:

$$\Delta_{q_i}^{(1)} = (\tilde{X}_{A_i} - X_A)^2 + (\tilde{Y}_{A_i} - Y_A)^2 + (\tilde{Z}_{A_i} - Z_A)^2 - R^2 \quad (2.117)$$

$$\Delta_{q_i}^{(2)} = (\tilde{x}_{B_i} - x_B)^2 + (\tilde{y}_{B_i} - y_B)^2 + (\tilde{z}_{B_i} - z_B)^2 - R^2 \quad (2.118)$$

$$\Delta_{q_i}^{(3)} = (\tilde{x}_{C_i} - x_C)^2 + (\tilde{y}_{C_i} - y_C)^2 + (\tilde{z}_{C_i} - z_C)^2 - R^2 \quad (2.119)$$

где

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{X}_{A_i} \\ \tilde{Y}_{A_i} \\ \tilde{Z}_{A_i} \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T_{10}^i & 0 & 0 \\ 0 & T_{20}^i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{D_i} \\ Y_{D_i} \\ Z_{D_i} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{x}_{B_i} \\ \tilde{y}_{B_i} \\ \tilde{z}_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T_{01}^i & 0 & 0 \\ 0 & T_{21}^i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{D_i} - X_A \\ Y_{D_i} - Y_A \\ Z_{D_i} - Z_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{x}_{C_i} \\ \tilde{y}_{C_i} \\ \tilde{z}_{C_i} \\ 1 \end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix} T_{02}^i & 0 & 0 \\ 0 & T_{12}^i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A - X_{D_i} \\ Y_A - Y_{D_i} \\ Z_A - Z_{D_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

где $[T_{kj}^i]$ – квадратная матрица выражает преобразование координат системы k в систему j и определяется как в (2.17).

Что бы расписать элементы матрицы введем обозначения:

$$\begin{aligned} \cos \theta_i^j &= c_1 \\ \cos \psi_i^j &= c_2 \\ \cos \varphi_i^j &= c_3 \\ \sin \theta_i^j &= s_1 \\ \sin \psi_i^j &= s_2 \\ \sin \varphi_i^j &= s_3 \end{aligned} \quad (2.120)$$

Тогда $e_{i1}^j = c_2c_3 - c_1s_2s_3$

$$m_{i1}^j = s_2c_3 + c_1c_2s_3$$

$$n_{i1}^j = s_1s_3$$

$$e_{i2}^j = -c_2s_3 - c_1s_2s_3$$

$$m_{i2}^j = -s_2s_3 + c_1c_2c_3$$

$$n_{i2}^j = s_1c_3$$

$$e_{i3}^j = s_1s_2$$

$$m_{i3}^j = -s_1c_2$$

$$n_{i3}^j = c_1$$

$$T_{01}^i = \begin{bmatrix} T_{10}^i \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

$$T_{02}^i = \begin{bmatrix} T_{20}^i \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

$$T_{21}^i = T_{01}^i \times T_{20}^i$$

$$T_{12}^i = T_{02}^i \times T_{10}^i$$

Для звеньев вращательной пары угол нутации $\theta_{ij}=\text{const}$, угол прецессии $\psi_{ij}=0$, и получаем из (2.120) матрицу вращательной пары (2.100).

Так как желательно иметь только квадратные матрицы, которые можно умножать, то к уравнениям преобразования координат добавляется тождество $1 \equiv 1$ и, соответственно, во всех матрицах появляется четвертая строка, содержащая нули в первых столбцах и единицу в четвертом столбце.

Квадратные матрицы получают также, если начало координат O_j совпадает с началом координат O_i . В этом случае для вращательной пары удобно направлять ее ось по одной из трех координатных осей x_i, y_i, z_i .

При вращении звена j вокруг оси z_i из матрицы (2.18) при $\theta_{ij}=0$ имеем

$$T_{01} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{ji} & -\sin\varphi_{ji} & 0 \\ \sin\varphi_{ji} & \cos\varphi_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.121)$$

где переменный угол $\varphi_{ji}=\psi_{ji}$ есть угол между осью x_i и осью x_j , направление которой выбирается из условия, что в начальный момент времени она совпадает с осью x_i .

При вращении звена j вокруг оси y_i из матрицы (2.18) при $\theta_{ij}=\pi/2$ имеем

$$T_{01} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{ji} & -\sin\varphi_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin\varphi_{ji} & \cos\varphi_{ji} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.122)$$

где переменный угол φ_{ji} определяется, как и в матрице (2.121).

При вращении звена j вокруг оси x_i из матрицы (2.18) при $\varphi_{ij}=0$ имеем

$$T_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{ji} & -\sin\theta_{ji} \\ 0 & \sin\theta_{ji} & \cos\theta_{ji} \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

где переменный угол θ_{ji} есть угол между осью z_i и осью z_j , направление которой выбирается из условия, что в начальный момент времени она совпадает с осью z_i .

С учетом выражений (2.17) и (2.18) имеем матрицу перехода T_{02} .

Тогда необходимые условия минимума суммы квадратов взвешенной разности:

$$S = \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^2 \quad (2.124)$$

можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial s}{\partial X_A} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial Y_A} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial Z_A} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial R} = 0 \quad (2.125)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_B} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial y_B} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial z_B} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial R} = 0 \quad (2.126)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_C} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial y_C} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial z_C} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial R} = 0 \quad (2.127)$$

Из (2.125) с учетом (2.14) и (2.114) получим:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{X}_{A_i} - X_A) = 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{Y}_{A_i} - Y_A) = 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{Z}_{A_i} - Z_A) = 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot R = 0 \end{array} \right\} \quad (2.128)$$

Допустим, что $R \neq 0$. Тогда из последнего равенства системы (2.128) следует, что

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} = 0 \quad (2.129)$$

С учетом (2.124) система уравнений (2.115) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \tilde{X}_{Ai} = 0; \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \tilde{Y}_{Ai} = 0; \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \tilde{Z}_{Ai} = 0; \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} = 0 \quad (2.130)$$

Подставляя выражения для $\Delta_{qi}^{(1)}$ из (2.14) в систему (2.125), получим:

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai}^2 X_A + \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai} \tilde{X}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{X}_{Ai} \right] = \\ & \quad = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \tilde{X}_{Ai} \\ & \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai}^2 Y_A + \tilde{Z}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{Y}_{Ai} \right] = \\ & \quad = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + Y_{Ai}^2 + Z_{Ai}^2) \tilde{Y}_{Ai} \\ & \sum_{i=1}^N \left[\tilde{Z}_{Ai} \tilde{X}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai}^2 Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{Z}_{Ai} \right] = \\ & \quad = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \tilde{Z}_{Ai} \\ & \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \right] = \\ & \quad = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.131)$$

Система (2.131) линейна относительно переменных X_A , Y_A , Z_A и $H_1 = \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2)$, поэтому ее можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ H_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \end{bmatrix} \quad (2.132)$$

где $R_{Ai}^2 = \tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2$.

Решение этой системы по правилу Крамера имеет вид:

$$(X_A, Y_A, Z_A, H_1) = \frac{1}{D_1} (D_{x_A}, D_{y_A}, D_{z_A}, D_{H_1}) \quad (\text{при } D_1 \neq 0) \quad (2.133)$$

Аналогично из (2.126) с учетом (2.15) и (2.124) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_B, y_B, z_B, H_2 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \end{bmatrix} \quad (2.134)$$

Решая эту систему по правилу Крамера, получим:

$$(x_B, y_B, z_B, H_2) = \frac{1}{D_2} (D_{x_B}, D_{y_B}, D_{z_B}, D_{H_2}) \quad (\text{при } D_2 \neq 0) \quad (2.135)$$

Из (2.127) с учетом (2.16) и (2.124) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_C, y_C, z_C, H_3 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ H_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \end{bmatrix} \quad (2.136)$$

Отсюда находим x_C, y_C, z_C, H_3 :

$$(x_C, y_C, z_C, H_3) = \frac{1}{D_3} (D_{x_C}, D_{y_C}, D_{z_C}, D_{H_3}) \quad (\text{при } D_3 \neq 0) \quad (2.137)$$

Исключая первые четыре неизвестных X_A, Y_A, Z_A, R на основе формулы (2.128), можно свести систему (2.125) – (2.127) к системе из шести уравнений с шестью неизвестными $x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$, которую удобно представить в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial x_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(3)}}{\partial x_C} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial y_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(3)}}{\partial y_C} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial z_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(3)}}{\partial z_C} &= 0 \end{aligned} \quad (2.138)$$

Решение системы (2.138) представляет трудоемкую задачу, поэтому гораздо эффективнее применять излагаемый ниже алгоритм поиска минимума функции S :

1. Задаемся произвольно начальными точками $B^{(0)} \in Q_1, C^{(0)} \in Q_2$.
2. Решаем систему линейных уравнений (2.132) и определяем $X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, Z_A^{(1)}, R_1^{(1)}$.
3. Задаемся точками $A^{(1)} \in Q, C^{(0)} \in Q_2$.
4. Решаем систему уравнений (2.134) и определяем $x_B^{(1)}, y_B^{(1)}, z_B^{(1)}, R_2^{(1)}$.
5. Задаемся точками $A^{(1)} \in Q, B^{(1)} \in Q_1$.
6. Решаем систему уравнений (2.136) и определяем $x_C^{(1)}, y_C^{(1)}, z_C^{(1)}, R_3^{(1)}$.
7. Далее циклически повторяем шаги (1 – 6), заменяя начальные точки $B^{(0)}$ и $C^{(0)}$ на найденные $B^{(1)}$ и $C^{(1)}$.

Применяя алгоритм, получим убывающую последовательность значений целевой функции $S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, S_3^{(1)}, S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, S_3^{(2)}, \dots$, имеющую предел равный значению функции S в точке локального минимума. В результате решения задачи определяются точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ в неподвижной системе координат, $B^{(0)} \in Q_1$, $C^{(0)} \in Q_2$, такие, что, совмещая с ними звено BC , получаем искомую ИКЦ в виде разомкнутой цепи $ABCD$.

Задавая в различных комбинациях часть искомых параметров синтеза, получим различные модификации ИКЦ.

1. Если заданы координаты точки $A(X_{A_i}, Y_{A_i}, Z_{A_i})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_1 и координаты точки $D_i(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_2 , то получим трехзвенную открытую цепь $ABCD$ (таблица 2.1, рисунок 2-2).

Необходимые условия минимума суммы S в данном случае принимают вид:

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; (j = x_b, y_b, z_b, R, x_c, y_c, z_c)$$

и для нахождения минимума S можно использовать алгоритм, приведенный выше, учитывая, что параметры X_A, Y_A, Z_A заданы.

Если точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ и $D(X_D, Y_D, Z_D)$ фиксированы, то в результате синтеза ИКЦ получим пространственный четырехзвенник $ABCD$.

2. Пусть заданы координаты $x_C = y_C = z_C = 0$ точки $C \in Q_2$ координаты $X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i}$ точки D тела Q_2 и углы Эйлера $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_1 а искомыми параметрами являются $X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B$ (таблица 2.1, рисунок 3-1).

Необходимые условия минимума сумма S принимают вид:

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; (j = X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B)$$

Для нахождения минимума функции S можно опять использовать алгоритм, приведенный выше, учитывая, что $x_C = y_C = z_C = 0$.

3. Пусть заданы координаты $x_B, y_B, z_B = 0$ точки B тела Q_1 и эйлеровы углы тела Q_2 $\theta_i^2, \psi_i^2, \phi_i^2$. Исходная задача сводится к определению сферы наименее удаленной от N положений фиксированной точки C тела Q_2 (таблица 2.1, рисунок 1-1).

Необходимые условия минимума суммы S

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; (j = X_A, Y_A, Z_A, R, x_C, y_C, z_C)$$

Используя приведенный алгоритм синтеза можно получить различные модификации ИКЦ с вращательными парами показанные в таблице 2.2.

Как мы видим, решена задача синтеза ИКЦ с вращательными кинематическими парами и их модификации, которые могут быть использованы как модули структурно-кинематического синтеза пространственных рычажных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев.

Таким образом, при синтезе пространственных механизмов с заданными законами движения входных и выходных звеньев можно использовать предлагаемый метод решения задачи.

2.7 Синтез исходной кинематической цепи с вращательной, вращательной и сферической парами

В данном разделе представлено решение задачи синтеза пространственной ИКЦ типа *BBC* (*B* – вращательная, *C* – сферическая кинематические пары) и показано ее использование в качестве структурного модуля при структурно-кинематическом синтезе пространственных рычажных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев. Метод решения задачи синтеза ИКЦ типа *BBC* основан на введении двух подвижных тел, неизменно связанных с входным и выходным звеньями [182].

Постановка задачи: Пусть заданы N конечноудаленных положений двух твердых тел $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1)$, $Q_2(X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di}, \theta_i^2, \psi_i^2, \phi_i^2)$ по отношению к неподвижной системе отсчета Q , где $i = \overline{1, N}$, $\theta_i^j, \psi_i^j, \phi_i^j$ - Эйлеровы углы относительно неподвижной системы координат $OXYZ$.

Требуется его приближенно воспроизводить посредством рычажных механизмов с одной степенью подвижности. Это требование приводит к следующей задаче синтеза: определить структуру и искомые параметры механизма. Для решения поставленной задачи используем незамкнутую четырехзвенную ИКЦ типа *BBC* (рисунок 2.13).

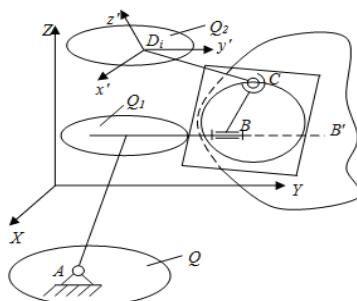


Рисунок 2.13

Синтез ИКЦ $ABCD$ сводится к определению точки $C(x_C, y_C, z_C)$ тела Q_2 , которая в N положениях в смысле наименьших квадратов наименее уклоняется от окружности, принадлежащей подвижной системе Q_1 . Приближающую окружность определим как линию пересечения сферы с плоскостью. Тогда искомая точка C в N положениях должна приближаться как к сфере, так и к плоскости. Поэтому минимизируемую функцию представим в следующем виде:

$$S = S_1 + S_2 \quad (2.139)$$

где

$$S_1 = \sum_{i=1}^N \left[(X_{Ci} - X_{Bi})^2 + (Y_{Ci} - Y_{Bi})^2 + (Z_{Ci} - Z_{Bi})^2 - R^2 \right] \quad (2.140)$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^N (X_i a + Y_i b + Z_i c - 1)^2, \quad i = \overline{1, N} \quad (2.141)$$

$$[X_{Bi}, Y_{Bi}, Z_{Bi}] = T_{01} [X_{D_i} - X_A, Y_{D_i} - Y_A, Z_{D_i} - Z_A] + T_{21} [x_B, y_B, z_B]$$

$$[X_{Ci}, Y_{Ci}, Z_{Ci}] = T_{02} [X_A - X_{D_i}, Y_A - Y_{D_i}, Z_A - Z_{D_i}] + T_{12} [x_C, y_C, z_C]$$

$$[X_i, Y_i, Z_i] = T_{kj}' [(X_{Ci} - X_{Bi}), (Y_{Ci} - Y_{Bi}), (Z_{Ci} - Z_{Bi})]$$

$$T_{kj}^i = \begin{bmatrix} e_{11}^j & e_{22}^j & e_{33}^j \\ m_{21}^j & m_{22}^j & m_{23}^j \\ n_{31}^j & n_{32}^j & n_{33}^j \end{bmatrix}, \quad (k = \overline{0, 2}; j = \overline{0, 2}; i = \overline{1, N})$$

$$T_{01}^i = [T_{10}^i]^T; \quad T_{02}^i = [T_{20}^i]^T; \quad T_{21}^i = T_{01}^i \times T_{20}^i; \quad T_{12}^i = T_{02}^i \times T_{10}^i, \dots$$

Необходимые условия минимума суммы (2.139) записываются в виде

$$\frac{\partial S}{\partial X_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Y_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Z_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0 \quad (2.142)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0 \quad (2.143)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0 \quad (2.144)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0 \quad (2.145)$$

Первые четыре условия (2.142) приводятся к следующей системе:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ H_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \end{bmatrix} \quad (2.146)$$

где $R_{Ai}^2 = \tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2$, $H_1 = \frac{1}{2}(R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2)$

$$[\tilde{X}_{Ai}, \tilde{Y}_{Ai}, \tilde{Z}_{Ai}, 1]^t = T_{10}^i [x_B, y_B, z_B, 1]^t + T_{20}^i [x_C, y_C, z_C, 1]^t$$

Вторые четыре условия (2.143) приводится аналогично к системе:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \end{bmatrix} \quad (2.147)$$

где

$$[\tilde{x}_B, \tilde{y}_B, \tilde{z}_B, 1]^t = T_{01}^i [(X_{D_i} - X_A), (Y_{D_i} - Y_A), (Z_{D_i} - Z_A), 1]^t + T_{21}^i [x_C, y_C, z_C, 1]^t$$

Следующие три условия (2.144) приводится с помощью выражения (2.139) к следующей системе

$$\begin{bmatrix} \sum X_i^2 & \sum X_i Y_i & \sum X_i Z_i \\ \sum X_i Y_i & \sum Y_i^2 & \sum Y_i Z_i \\ \sum X_i Z_i & \sum Y_i Z_i & \sum Z_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum X_i \\ \sum Y_i \\ \sum Z_i \end{bmatrix} \quad (2.148)$$

При известных значениях $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, a, b, c$ можно определить направление оси, центр и радиус окружности лежащей в Q_1 . Направляющие косинусы оси Q_1 окружности равны

$$(Q_{1X}, Q_{1Y}, Q_{1Z}) = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (2.149)$$

Центр B окружности определяются как точка пересечения прямой с направляющим вектором (Q_{1X}, Q_{1Y}, Q_{1Z}) , проходящей через центр B' сферы с плоскостью окружности

$$x_{B'} = x_B - Q_{1X}d; y_{B'} = y_B - Q_{1Y}d; z_{B'} = z_B - Q_{1Z}d,$$

$$\text{где } d = (ax_{B'} + by_{B'} + cz_{B'} - 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Рассмотрим последнее условие (2.145), которое приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{bmatrix} \sum(\tilde{x}_G^2 + a_{ix}^2) & \sum(\tilde{x}_G \tilde{y}_G + a_{ix} a_{iy}) & \sum(\tilde{x}_G \tilde{z}_G + a_{ix} a_{iz}) & \sum \tilde{x}_G \\ \sum(\tilde{x}_G \tilde{y}_G + a_{ix} a_{iy}) & \sum(\tilde{y}_G^2 + a_{iy}^2) & \sum(\tilde{y}_G \tilde{z}_G + a_{iy} a_{iz}) & \sum \tilde{y}_G \\ \sum(\tilde{x}_G \tilde{z}_G + a_{ix} a_{iz}) & \sum(\tilde{y}_G \tilde{z}_G + a_{iy} a_{iz}) & \sum(\tilde{z}_G^2 + a_{iz}^2) & \sum \tilde{z}_G \\ \sum \tilde{x}_G & \sum \tilde{y}_G & \sum \tilde{z}_G & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ H_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum(R_G^2 \tilde{x}_G + f_i a_{ix}) \\ \sum(R_G^2 \tilde{y}_G + f_i a_{iy}) \\ \sum(R_G^2 \tilde{z}_G + f_i a_{iz}) \\ \sum \tilde{R}_G^2 \end{bmatrix} \quad (2.150)$$

$$\text{где } [\tilde{x}_G, \tilde{y}_G, \tilde{z}_G, 1]^T = -T_{02}^t [(X_A - X_{D_i})(Y_A - Y_{D_i})(Z_A - Z_{D_i})]_1^T + T_{12}^i [x_B, y_B, z_B, 1]^T$$

$$[a_{ix}, a_{iy}, a_{iz}]^T = T_{kj}^{-1} [a, b, c]^T$$

$$f_i = X_G a + Y_G b + Z_G c - 1$$

При определении искомых параметров синтеза последовательные итерации осуществляются по следующему алгоритму:

1. Задаемся произвольно начальными точками $B^{(0)} \in Q_1$ и $C^{(0)} \in Q_2$.
2. Решаем систему уравнений (2.146) и определяем $X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, Z_A^{(1)}, R_1^{(1)}$.
3. Подставляя значения $A^{(1)} \in Q$ и $C^{(0)} \in Q_2$ в уравнение (2.147), определяем $x_B^{(1)}, y_B^{(1)}, z_B^{(1)}$.
4. Задаемся значениями $A^{(1)} \in Q$, $B^{(1)} \in Q_1$ и $C^{(1)} \in Q_2$ в уравнение (2.148), определяем коэффициенты плоскости a, b, c .

5. Задаемся значениями $X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, Z_A^{(1)}$, $x_B^{(1)}, y_B^{(1)}, z_B^{(1)}$, a, b, c в уравнение (2.150), определяем $x_C^{(1)}, y_C^{(1)}, z_C^{(1)}$. Если

$$\max\left(\left|x_C^{(i+1)} - x_C^{(i)}\right|; \left|y_C^{(i+1)} - y_C^{(i)}\right|; \left|z_C^{(i+1)} - z_C^{(i)}\right|\right) \leq \varepsilon,$$

то итерационный процесс завершается.

В результате решения задачи синтеза определяются точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ в неподвижной системе координат, $B \in Q_1$, $C \in Q_2$ такие, что совмещая с ними звено BC , получим искомую ИКЦ в виде незамкнутой цепи $ABCD$ типа BBC .

Задавая в различных комбинациях часть искомых параметров синтеза, получим различные модификации ИКЦ.

1. Если заданы координаты точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ и Эйлеровы углы тела Q_1 и координаты точки $D_i(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i})$ и Эйлеровы углы тела Q_2 , то получим трехзвенную незамкнутую цепь $ABCD$ типа BC (рисунок 2.14).

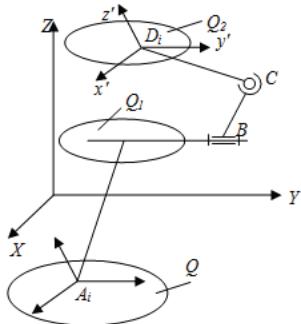


Рисунок 2.14

Необходимые условия минимума суммы S в данном случае принимает вид:

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = x_B, y_B, z_B, R, a, b, c, x_C, y_C, z_C)$$

и для нахождения минимума суммы S можно использовать выше приведенный алгоритм, учитывая, что параметры X_A, Y_A, Z_A заданы.

2. Пусть заданы координаты $x_B = y_B = z_B = 0$ точки $B \in Q_1$, $C \in Q_2$ и Эйлеровы углы тела Q_2 . Задача сводится к определению точки $C \in Q_2$, которая в N положениях в смысле наименьших квадратов наименее

уклоняется от окружности, принадлежащий неподвижной системе Q (рисунок 2.15). Необходимые условия минимума суммы S :

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = x_A, y_A, z_A, R, a, b, c, x_C, y_C, z_C)$$

Для ее решения можно применить выше приведенный алгоритм, полагая $x_B=y_B=z_B=0$, тогда получим модификации ИКЦ ACD типа BC , связывающее тело Q_2 со стойкой Q .

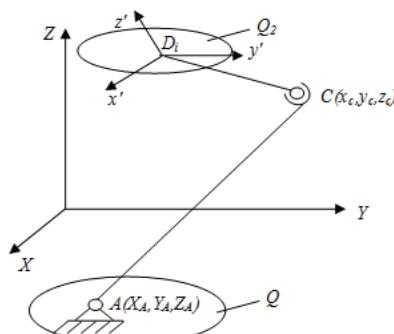


Рисунок 2.15

Рассмотрим синтез перемещающих шестизвенных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев. Пусть заданы законы движения входного звена $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \theta_i^1 = \text{const}, \psi_i^1 = 0, \varphi_i^1)$ и выходного звена $Q_2(X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di}, \theta_i^2, \psi_i^2, \varphi_i^2)$ (рисунок 2.16).

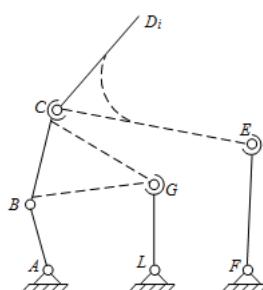


Рисунок 2.16

Число степеней подвижности ИКЦ $ABCD$ относительно стойки равно сумме подвижности входного и выходного звена механизма $W=5$. Чтобы получить механизм с одной степенью подвижности на ИКЦ $ABCD$ необходимо наложить геометрические связи с отрицательной степенью подвижности $W=-4$. Для этого дважды используем модификацию ИКЦ ACD имеющая степень свободы $W=-2$ (рисунок 2.15). В начале для синтеза данного механизма используем ИКЦ $ABCD$ составляя целевую функцию в виде:

$$S_1 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{qi}^{(1)}(X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, a, b, c, x_C, y_C, z_C)]^2$$

Синтез ИКЦ $ABCD$ осуществляется по выше приведенному алгоритму. Далее на основе выражения (2.139) и (2.149) определяются координаты x_{Bi} , y_{Bi} , z_{Bi} точки B и направляющие косинусы звена BC . Синтезируем звено LG типа BC на основе модификации ACD (рисунок 2.15). Целевая функция имеет вид:

$$S_2 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{qi}^{(2)}(X_L, Y_L, Z_L, R, x_G, y_G, z_G, a, b, c)]^2$$

Аналогично синтезируем звено EF , используя ИКЦ ACD (рис. 2.15)

$$S_3 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{qi}^{(3)}(X_F, Y_F, Z_F, R, x_E, y_E, z_E, a, b, c)]^2.$$

В итоге получим шестизвездный механизм II класса.

Используя аналогично выражение (2.139) можно синтезировать шестизвездные механизмы III и IV класса, которые показаны на рисунках 2.17 и 2.18.

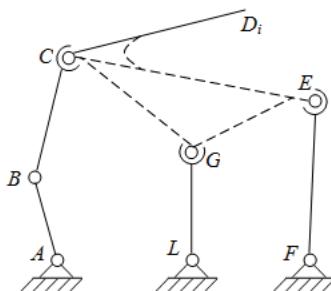


Рисунок 2.17

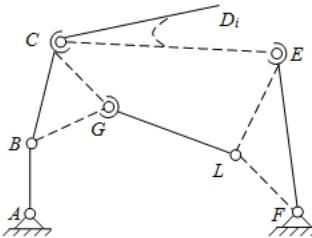


Рисунок 2.18

Однако синтез механизма IV класса проводится на основе модификации ИКЦ $ABCD$ (рисунок 2.17). При определение параметров звена LG , необходимо использовать модификацию ИКЦ $ABCD$ (рисунок 2.14).

Таким образом, используя одну и ту же целевую функцию, составленную для синтеза ИКЦ и ее модификации, позволяет автоматизировать процесс синтеза пространственных рычажных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев механизма.

2.8 Синтез исходной кинематической цепи с вращательной, вращательной и вращательной парами

Постановка задачи: Пусть заданы N конечноудаленных положений двух твердых тел Q_1 и Q_2 : $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \theta_i^1, \psi_i^1, \varphi_i^1)$, $Q_2(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i}, \theta_i^2, \psi_i^2, \varphi_i^2)$ ($i = \overline{1, N}$) где $\theta_i^j, \psi_i^j, \varphi_i^j$ – эйлеровы углы относительно неподвижной системы координат $OXYZ$.

Требуется найти в неподвижной системе координат такие точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ тела Q_1 и $C(x_C, y_C, z_C)$ тела Q_2 , чтобы расстояние между точками B и C во всех положениях тел Q_1 и Q_2 мало отличалось от некоторой постоянной величины R (рисунок 2.19) [183].

Решение задачи: Введем взвешенную разность для i -го положения тел в виде:

$$\Delta_{q_1} = \left| \overrightarrow{B_i C_i} \right|^2 - R^2 = (X_{C_i} - X_{B_i})^2 + (Y_{C_i} - Y_{B_i})^2 + (Z_{C_i} - Z_{B_i})^2 - R^2 \quad (2.151)$$

$$(i = \overline{1, N})$$

Она является функцией десяти параметров: $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$. Группируя эти параметры по четыре с общим параметром R , взвешенную разность представим в трех различных формах:

$$\Delta_{qi}^{(1)} = (\tilde{X}_{Ai} - X_A)^2 + (\tilde{Y}_{Ai} - Y_A)^2 + (\tilde{Z}_{Ai} - Z_A)^2 - R^2 \quad (2.152)$$

$$\Delta_{qi}^{(2)} = (\tilde{x}_{Bi} - x_B)^2 + (\tilde{y}_{Bi} - y_B)^2 + (\tilde{z}_{Bi} - z_B)^2 - R^2 \quad (2.153)$$

$$\Delta_{qi}^{(3)} = (\tilde{x}_{Ci} - x_C)^2 + (\tilde{y}_{Ci} - y_C)^2 + (\tilde{z}_{Ci} - z_C)^2 - R^2 \quad (2.154)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{Ai} \\ \tilde{Y}_{Ai}'' \\ \tilde{Z}_{Ai} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{10}^i & 0 \\ 0 & T_{20}^i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{10}^i & X_{D_i} \\ 0 & Y_{D_i} \\ 0 & Z_{D_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \quad (2.155)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{Bi} \\ \tilde{y}_{Bi} \\ \tilde{z}_{Bi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{01}^i & 0 \\ 0 & T_{21}^i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{D_i} - X_A \\ Y_{D_i} - Y_A \\ Z_{D_i} - Z_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \quad (2.156)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{Ci} \\ \tilde{y}_{Ci} \\ \tilde{z}_{Ci} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} T_{02}^i & 0 \\ 0 & T_{12}^i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A - X_{D_i} \\ Y_A - Y_{D_i} \\ Z_A - Z_{D_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} \quad (2.157)$$

где $[T_{kj}^i]$ – матрица перехода от k -той системы координат к j -той системе, определяемые как в (2.17).

$$T_{01}^i = [T_{10}^i]^T; \quad T_{02}^i = [T_{20}^i]^T; \quad T_{21}^i = T_{01}^i \times T_{20}^i; \quad T_{12}^i = T_{02}^i \times T_{10}^i, \dots$$

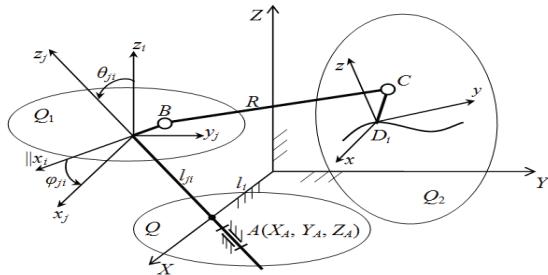


Рисунок 2.19

Для звеньев i и j вращающейся пары ось Oz_j направим по оси этой пары, кратчайшее расстояние l_i между осями Oz_j и Oz_i совместим с осью Ox_i , а начало координат O_j поместим на расстояние l_{ji} от оси Ox_i . Тогда угол нутации $\theta_{ji} = \text{const}$, угол прецессии $\psi_{ji} = 0$, и с учетом принятых обозначений получаем из (2.17) матрицу вращательной пары:

$$T_{kj}^i = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{ji} & -\sin\varphi_{ji} & 0 & X_A \\ \cos\theta_{ji} \sin\varphi_{ji} & \cos\theta_{ji} \cos\varphi_{ji} & -\sin\theta_{ji} & Y_A \\ \sin\theta_{ji} \sin\varphi_{ji} & \sin\theta_{ji} \cos\varphi_{ji} & \cos\theta_{ji} & Z_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.158)$$

$$\begin{aligned} X_A &= l_i \\ Y_A &= -l_{ji} \sin\theta_{ji} \\ Z_A &= l_{ji} \cos\theta_{ji} \end{aligned}$$

Необходимые условия минимума суммы квадратов взвешенной разности:

$$S = \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^2 \quad (2.159)$$

можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial X_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Y_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Z_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0 \quad (2.160)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0 \quad (2.161)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0 \quad (2.162)$$

Из (2.160) с учетом (2.155) и (2.159) получим:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{X}_{A_i} - X_A) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{Y}_{A_i} - Y_A) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot (\tilde{Z}_{A_i} - Z_A) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot R &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.163)$$

Допустим, что $R \neq 0$. Тогда из последнего равенства системы (2.163) следует, что

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} = 0 \quad (2.164)$$

С учетом (2.164) система уравнений (2.163) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \tilde{X}_{Ai} = 0; \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \tilde{Y}_{Ai} = 0; \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \tilde{Z}_{Ai} = 0; \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} = 0 \quad (2.165)$$

Подставляя выражения для $\Delta_{qi}^{(1)}$ из (2.155) в систему (2.165), получим:

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai}^2 X_A + \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai} \tilde{X}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{X}_{Ai} \right] = \\ & \quad = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \tilde{X}_{Ai} \\ & \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai}^2 Y_A + \tilde{Z}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{Y}_{Ai} \right] = \\ & \quad = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + Y_{Ai}^2 + Z_{Ai}^2) \tilde{Y}_{Ai} \\ & \sum_{i=1}^N \left[\tilde{Z}_{Ai} \tilde{X}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai}^2 Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \tilde{Z}_{Ai} \right] = \\ & \quad = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \tilde{Z}_{Ai} \\ & \sum_{i=1}^N \left[\tilde{X}_{Ai} X_A + \tilde{Y}_{Ai} Y_A + \tilde{Z}_{Ai} Z_A + \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2) \right] = \\ & \quad = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.166)$$

Система (2.166) линейна относительно переменных X_A, Y_A, Z_A и $H_1 = \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2)$, поэтому ее можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} \tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{Ai} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ H_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ai}^2 \end{bmatrix} \quad (2.167)$$

где $R_{Ai}^2 = \tilde{X}_{Ai}^2 + \tilde{Y}_{Ai}^2 + \tilde{Z}_{Ai}^2$.

Решение этой системы по правилу Крамера имеет вид:

$$(X_A, Y_A, Z_A, H_1) = \frac{1}{D_1} (D_{x_A}, D_{y_A}, D_{z_A}, D_{H_1}), \quad (\text{при } D_1 \neq 0) \quad (2.168)$$

Аналогично из (2.161) с учетом (2.156) и (2.159) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_B, y_B, z_B, H_2 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} y_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} \tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Bi} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Bi} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^N R_{Bi}^2 \end{bmatrix} \quad (2.169)$$

Решая эту систему по правилу Крамера, получим:

$$(x_B, y_B, z_B, H_2) = \frac{1}{D_2} (D_{x_B}, D_{y_B}, D_{z_B}, D_{H_2}), \quad (\text{при } D_2 \neq 0) \quad (2.170)$$

Из (2.162) с учетом (2.157) и (2.162) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_C, y_C, z_C, H_3 :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} \tilde{z}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_{Ci} & \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{Ci} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ H_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{x}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{y}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \tilde{z}_{Ci} \\ \sum_{i=1}^N R_{Ci}^2 \end{bmatrix} \quad (2.171)$$

Отсюда находим x_C, y_C, z_C, H_3 :

$$(x_C, y_C, z_C, H_3) = \frac{1}{D_3} (D_{x_C}, D_{y_C}, D_{z_C}, D_{H_3}), \quad (\text{при } D_3 \neq 0) \quad (2.172)$$

Исключая первые четыре неизвестных X_A, Y_A, Z_A, R на основе формулы (2.165), можно свести систему (2.160) – (2.162) к системе из шести уравнений с шестью неизвестными $x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$, которую удобно представить в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial x_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(3)}}{\partial x_C} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial y_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(3)}}{\partial y_C} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial z_B} &= 0 & \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_i^{(3)}}{\partial z_C} &= 0 \end{aligned} \quad (2.173)$$

Решение системы (2.173) представляет трудоемкую задачу, поэтому гораздо эффективнее применять излагаемый ниже алгоритм поиска минимума функции S :

1. Задаемся произвольно начальными точками $B^{(0)} \in Q_1, C^{(0)} \in Q_2$.
2. Решаем систему линейных уравнений (2.167) и определяем $X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, Z_A^{(1)}, R_1^{(1)}$.
3. Задаемся точками $A^{(1)} \in Q, C^{(0)} \in Q_2$.
4. Решаем систему уравнений (2.169) и определяем $x_B^{(1)}, y_B^{(1)}, z_B^{(1)}, R_2^{(1)}$.
5. Задаемся точками $A^{(1)} \in Q, B^{(1)} \in Q_1$.
6. Решаем систему уравнений (2.171) и определяем $x_C^{(1)}, y_C^{(1)}, z_C^{(1)}, R_3^{(1)}$.

7. Далее циклически повторяем шаги (1 – 6), заменяя начальные точки

$B^{(0)}$ и $C^{(0)}$ на найденные $B^{(1)}$ и $C^{(1)}$.

Применяя алгоритм, получим убывающую последовательность значений целевой функции $S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, S_3^{(1)}, S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, S_3^{(2)}, \dots$, имеющую предел равный значению функции S в точке локального минимума. В результате решения задачи определяются точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ в неподвижной системе координат, $B^{(0)} \in Q_1$, $C^{(0)} \in Q_2$, такие, что, совмещая с ними звено BC , получаем искомую ИКЦ в виде разомкнутой цепи $ABCD$.

Задавая в различных комбинациях часть искомых параметров синтеза, получим различные модификации ИКЦ.

1. Если заданы координаты точки $A(X_{A_i}, Y_{A_i}, Z_{A_i})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_1 и координаты точки $D_i(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_2 , то получим трехзвенную открытую цепь $ABCD$ (таблица 2.2, рисунок 2-2).

Необходимые условия минимума суммы S в данном случае принимают вид:

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = x_b, y_b, z_b, R, x_c, y_c, z_c)$$

и для нахождения минимума S можно использовать алгоритм, приведенный выше, учитывая, что параметры X_A, Y_A, Z_A заданы.

Если точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ и $D(X_D, Y_D, Z_D)$ фиксированы, то в результате синтеза ИКЦ получим пространственный четырехзвенник $ABCD$.

2. Пусть заданы координаты $x_c = y_c = z_c = 0$ точки $C \in Q_2$ координаты $X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i}$ точки D тела Q_2 и углы Эйлера $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_1 а искомыми параметрами являются $X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B$ (таблица 2.2, рисунок 3-1).

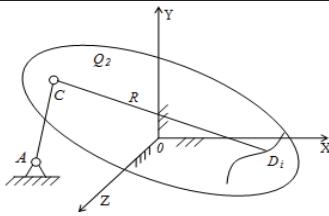
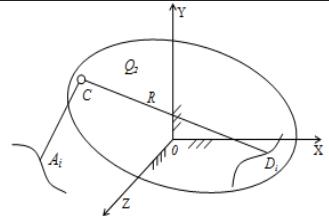
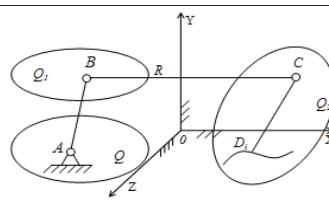
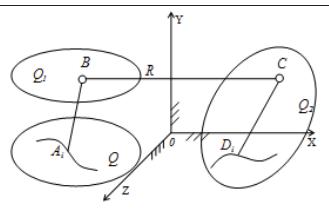
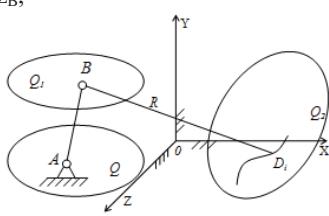
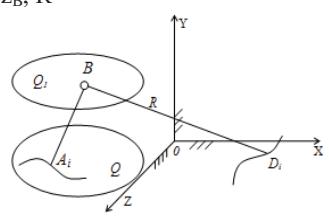
Необходимые условия минимума сумма S принимают вид:

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B)$$

Для нахождения минимума функции S можно опять использовать алгоритм, приведенный выше, учитывая, что $x_c = y_c = z_c = 0$.

3. Пусть заданы координаты $x_B, y_B, z_B = 0$ точки B тела Q_1 и эйлеровы углы тела Q_2 $\theta_i^2, \psi_i^2, \varphi_i^2$. Исходная задача сводится к определению сферы наименее удаленной от N положений фиксированной точки C тела Q_2 (таблица 2.2, рисунок 1-1).

Таблица 2.2

| | 1 | 2 |
|---|---|--|
| 1 | $x_B = y_B = z_B = 0, X_A, Y_A, Z_A, R, x_C, y_C, z_C$  | $x_B = y_B = z_B = 0, X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai}, x_C, y_C, z_C, R$  |
| 2 | $X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$  | $X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai}, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$  |
| 3 | $x_C = y_C = z_C = 0, X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B$  | $x_C = y_C = z_C = 0, X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai}, x_B, y_B, z_B, R$  |

Необходимые условия минимума суммы S

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; (j = X_A, Y_A, Z_A, R, x_C, y_C, z_C)$$

Используя приведенный алгоритм синтеза можно получить различные модификации ИКЦ с вращательными парами показанные в таблице 2.2.

Таким образом, как мы видим, решена задача синтеза ИКЦ с вращательными кинематическими парами и их модификации, которые могут быть использованы как модули структурно-кинематического синтеза пространственных рычажных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев.

2.9 Синтез двухэлементного звена со сферической и вращательной кинематическими парами

Пусть задано пространственное движение тела Q_2 по отношению к неподвижной системе координат Q .

Это звено (рисунок 2.20) определяется 9 постоянными параметрами, в число которых входят координаты X_B, y_B, z_B центра B сферической пары, координаты X_A, Y_A, Z_A центра A окружности, описываемой точкой B , углы между любыми двумя неподвижными осями координат и осью Q вращательной пары, определяющие направления последней, и расстояние r точки B от оси вращательной пары.

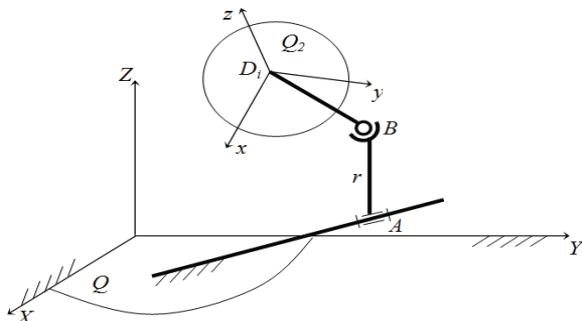


Рисунок 2.20

Синтезируемое звено ограничивает движение точки B по окружности радиуса r с центром в точке A . Если точка B имеет четыре положения B_i ($i = 1, 2, 3, 4$) на одной окружности, то эти положения будут лежать на бесконечном множестве сфер с центрами на оси Q . Это означает, что система

$$X_i X_A + Y_i Y_A + Z_i Z_A + H = \frac{1}{2} R_i^2, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2.174)$$

где

$$H = \frac{1}{2} (R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2)$$

для определения сферы, проведенной через четыре положения точки B тела Q_2 , должна иметь бесконечно много решений. Такое условие может быть выполнено, если ранг расширенной матрицы системы (2.174) и ранг ее матрицы равны трем. Для этого необходимо, чтобы равнялись нулю любые два минора четвертого порядка в расширенной матрице. Первое из этих условий может быть записано в форме уравнения:

$$D_{1234} = |X_i Y_i Z_i 1| = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2.175)$$

Второе условие представим в следующем виде:

$$|R_i^2 Y_i Z_i 1| = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2.176)$$

Равенство (2.176) с учетом соотношения

$$[X_{Bi}, Y_{Bi}, Z_{Bi}]^T = [X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di}]^T + T_i [x_B, y_B, z_B]^T \quad (2.177)$$

преобразуется к алгебраическому уравнению третьей степени относительно x_B, y_B, z_B . Система уравнений третьей степени (2.175) и (2.176) с тремя неизвестными определяет геометрическое место точек тела Q_2 , имеющих четыре положения на одной окружности. В любой из этих точек можно расположить центр сферического шарнира проектируемого звена. Зная положения точки B , можно определить параметры присоединяемого звена. Ось вращения Q найдем как геометрическое место центров сфер, проведенных через B_1, B_2, B_3 . Оно определяется пересечением двух плоскостей, которые перпендикулярны соответственно к отрезкам B_1B_2, B_1B_3 и проходят через их середины. Уравнения этих плоскостей получим, вычитая из первого уравнения системы (2.174) второе и третье:

$$(X_1 - X_j)X + (Y_1 - Y_j)Y + (Z_1 - Z_j)Z = \frac{1}{2} (R_1^2 - R_j^2), \quad (j = 2, 3) \quad (2.178)$$

Центр A окружности лежит на пересечении оси Q , задаваемой уравнениями (2.178), и плоскости окружности, которая может быть определена как плоскость, проведенная через точки B_1, B_2, B_3 :

$$D_1X + D_2Y + D_3Z - D_0 = 0 \quad (2.179)$$

где

$$\begin{aligned} D_1 &= |YZ_i|, \quad (i = 1, 2, 3) \\ D_2 &= |Z_iX_i|, \quad (i = 1, 2, 3) \\ D_3 &= |X_iY_i|, \quad (i = 1, 2, 3) \\ D_0 &= |X_iY_iZ_i|, \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

Направление оси Q определится направляющими косинусами нормали к плоскости (2.179):

$$(Q_x, Q_y, Q_z) = \pm (D_1^2 + D_2^2 + D_3^2)^{-\frac{1}{2}} (D_1, D_2, D_3) \quad (2.180)$$

Длина r звена равна расстоянию между точками A и B . На основании изложенного выше можно указать алгоритм синтеза звена CB по четырем положениям тела Q_2 :

- 1) выбирают одну из координат x_B, y_B, z_B ;
- 2) из системы уравнений (2.175) и (2.176) находят остальные две координаты;
- 3) по формуле (2.177) вычисляют значения X_i, Y_i, Z_i ($i = 1, 2, 3$)
- 4) из системы уравнений (2.178), (2.179) определяют координаты X_A, Y_A, Z_A ;
- 5) по формуле (2.180) находят направляющие косинусы оси Q ;
- 6) вычисляют длину звена: $r = |\overline{AB}|$.

2.10 Синтез двухэлементного звена с двумя вращательными кинематическими парами

Рассматриваемое звено (рисунок 2.21) определяется 12 постоянными параметрами, в число которых входят по четыре параметра, определяющих прямые q и Q соответственно в системах $oxyz$ и $OXYZ$ кратчайшее расстояние h , угол γ между этими осями и величины m, l , определяющие точки пересечения M и L общего перпендикуляра q и Q соответственно с осями q и Q . Положения осей q и Q в системах $oxyz$ и $OXYZ$ будем определять так же, как в случае звена ЦЦ , т. е. «тройками» направляющих косинусов $(q_x, q_y, q_z), (Q_x, Q_y, Q_z)$ и точками пересечения b и B этих осей с плоскостями oxy и OXY . Любая точка (x, y, z) оси q звена BB должна

удовлетворять двум условиям: она должна находиться на неизменном расстоянии от точки B и лежать в плоскости, перпендикулярной к оси Q .

Эти условия могут быть выражены в следующем виде:

$$(X_j - X_1)Q_x + (Y_j - Y_1)Q_y + (Z_j - Z_1)Q_z = 0, \quad (j = 2, 3) \quad (2.181)$$

$$(X_j - X_1)X_B + (Y_j - Y_1)Y_B + \frac{1}{2}(R_j^2 - R_1^2), \quad (j = 2, 3) \quad (2.182)$$

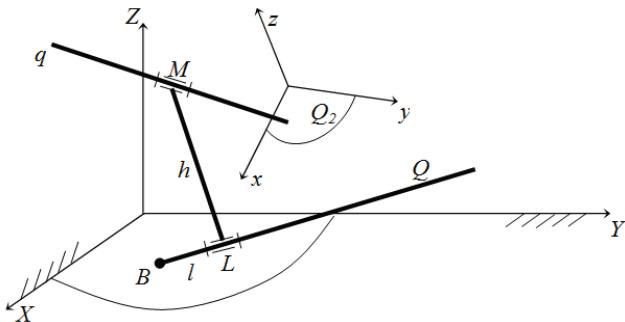


Рисунок 2.21

Уравнения (2.181) представим в следующем виде:

$$(Q_{jx} - Q_{1x})x + (Q_{jy} - Q_{1y})y + (Q_{jz} - Q_{1z})z = -f_{0j}, \quad (j = 2, 3) \quad (2.183)$$

где Q_{ix} , Q_{iy} , Q_{iz} ($i = 1, 2, 3$) – направляющие косинусы оси относительно системы $oxyz$ в соответствующих положениях тела Q_2 , которые выражаются через Q_x , Q_y , Q_z посредством формул

$$[Q_{ix}, Q_{iy}, Q_{iz}] = T_i^{-1} [Q_x, Q_y, Q_z] \quad (2.184)$$

а f_{0j} определяют по формуле

$$f_{0j} = (X_{0j} - X_{01})Q_x + (Y_{0j} - Y_{01})Q_y + (Z_{0j} - Z_{01})Q_z$$

Уравнения (2.183) определяют геометрическое место точек тела e , которые в рассматриваемых трех положениях тела Q_2 лежат в плоскостях, перпендикулярных к оси Q с фиксированным направлением (Q_x , Q_y , Q_z). Так как уравнения (2.183) линейны относительно x_B , y_B , z_B , то исследуемое геометрическое место представляет собой прямую, уравнение которой имеет вид

$$x = z \frac{D_x}{D} + \frac{D_{ox}}{D}; \quad y = z \frac{D_y}{D} + \frac{D_{oy}}{D} \quad (2.185)$$

где

$$\begin{aligned} D &= |Q_{jx} - Q_{1x}Q_{jy} - Q_{1y}|, & (j=2, 3) \\ D_x &= -|Q_{jz} - Q_{1z}Q_{jy} - Q_{1y}|, & (j=2, 3) \\ D_y &= -|Q_{jx} - Q_{1x}Q_{jz} - Q_{1z}|, & (j=2, 3) \\ D_{0x} &= |f_{0j}Q_{jy} - Q_{1y}|, & (j=2, 3) \\ D_{0y} &= -|Q_{jx} - Q_{1x}f_{0j}|, & (j=2, 3) \end{aligned} \quad (2.186)$$

Принимая $z = 0$, из (2.185) получаем зависимость координат x_b, y_b точки b оси q от Q_X, Q_Y, Q_Z :

$$x_b = \frac{D_{0x}}{D}; \quad y_b = \frac{D_{0y}}{D} \quad (2.187)$$

Аналогично, вводя в (2.185) условие $z = 1$, находим выражения координат точки b' прямой q , лежащей на плоскости $z = 1$ тела Q_2 :

$$x_{b'} = \frac{D_x}{D} + \frac{D_{0x}}{D}; \quad y_{b'} = \frac{D_y}{D} + \frac{D_{0y}}{D} \quad (2.188)$$

Точкам b' и b оси q должна соответствовать одна и та же точка B оси Q . Эта точка определяется из системы четырех линейных уравнений относительно X_B и Y_B , получаемых из (2.182) введением выражений $X_{bi} = X_i$, $Y_{bi} = Y_i$, $X_{b'i} = X'_i$, $Y_{b'i} = Y'_i$, которые в свою очередь выводятся подстановкой соотношений (2.187), (2.188) в формулу (2.177). Условия совместности этих уравнений будут иметь вид

$$\begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - X_1 & R_2^2 - R_1^2 \\ X_3 - X_1 & Y_3 - X_1 & R_3^2 - R_1^2 \\ X'_2 - X'_1 & Y'_2 - Y'_1 & R'^2_2 - R'^2_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.189)$$

$$\begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - X_1 & R_2^2 - R_1^2 \\ X_3 - X_1 & Y_3 - X_1 & R_3^2 - R_1^2 \\ X'_3 - X'_1 & Y'_3 - Y'_1 & R'^2_3 - R'^2_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.190)$$

Равенства (2.189), (2.190) посредством формул (2.186)–(2.188) и (2.177) приводятся к двум однородным алгебраическим уравнениям шестой степени относительно Q_x, Q_y, Q_z . Определив из этих уравнений отношения Q_x/Q_z и Q_y/Q_z , далее вычисляем величины Q_x, Q_y, Q_z , определяющие направление неподвижной оси вращения Q .

Остальные конструктивные параметры звена BB определяют в следующей последовательности:

по формуле (1.184) находят Q_{ix}, Q_{iy}, Q_{iz} ($i = 1, 2, 3$), а по (2.186) — $D, D_x, D_y, D_{0x}, D_{0y}$;

по формулам (2.187), (2.188) вычисляют координаты точек b и b' оси q ;

определяют направляющие косинусы оси q :

$$(q_x, q_y, q_z) = |r_b - r_{b'}|^{-\frac{1}{2}} (x_b - x_{b'}, y_b - y_{b'}, -1)$$

из системы (2.182) определяют координаты X_B, Y_B точки B оси Q ;
по формуле (2.191) вычисляют угол γ между осями Q и q :

$$\cos \gamma_i = Q_x q_{ix} + Q_y q_{iy} + Q_z q_{iz} \quad (2.191)$$

по формуле (2.192) находят кратчайшее расстояние между Q и q (длина звена) h ;

$$h_i = \frac{1}{\sin \gamma_i} \begin{vmatrix} X_B - X_{bi} & Y_B - Y_{bi} & -Z_{bi} \\ q_{ix} & q_{iy} & q_{iz} \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (2.192)$$

величина l и m , определяющее положение L и M центров вращательных пар на осях Q и q , вычисляют соответственно по формулам

$$l = \frac{\begin{vmatrix} (R_{bi} - R_B)Q & q_i Q \\ (R_{bi} - R_B)q_i & q_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Q^2 & q_i Q \\ q_i Q & q_i^2 \end{vmatrix}}, \quad m = \frac{\begin{vmatrix} (R_{bi} - R_B)Q & Q^2 \\ (R_{bi} - R_B)q_i & q_i Q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Q^2 & q_i Q \\ q_i Q & q_i^2 \end{vmatrix}}$$

В итоге решены задачи синтеза пространственных четырехзвенных исходных кинематических цепей (ИКЦ) с различными кинематическими парами по заданным положениям входного и выходного звеньев аналитическим способом.

1. Решена задача синтеза ИКЦ типа BBC и ее модификации.

2. Решена задача синтеза ИКЦ типа *BBB* и ее модификации.
3. Решена задача синтеза модификации ИКЦ типа *BC*.
4. Решена задача синтеза модификации ИКЦ типа *BB*.

В результате синтеза ИКЦ с различными парами можно спроектировать пространственные механизмы по заданным положениям входного и выходного звеньев. Такой подход решения задачи синтеза пространственных четырехзвенных механизмов позволяет автоматизировать все этапы проектирования механизмов. В отличие от других методов такой подход решения задачи синтеза позволяет определить все искомые параметры механизма в аналитическом виде.

Выводы по второму разделу

1. Разработан оптимизационный метод кинематического синтеза незамкнутых четырехзвенных ИКЦ со сферическими, со сферическими с пальцем и вращательными парами по заданным законам движения входного и выходного звеньев синтезируемого механизма.
2. На основе задания движения двух подвижных тел относительно неподвижного тела сформулированы математические задачи синтеза пространственной четырехзвенной ИКЦ со сферическими парами, с девятью степенями свободы и десятью неизвестными параметрами.
3. Показано, что к задачам синтеза модификаций ИКЦ сводятся задачи синтеза четырехзвенных передаточных механизмов типа *BCCB*.
4. На основе аппроксимационного подхода разработан алгоритм решения задачи синтеза параметров пространственной ИКЦ со сферическими парами и доказана сходимость предлагаемого алгоритма.
5. При различных комбинациях заданных и искомых параметров пространственной ИКЦ получены различные ее модификации со сферическими, со сферическими с пальцами и вращательными парами. Составлены таблицы модификаций пространственных ИКЦ со сферическими и с вращательными парами.
6. Алгоритмы синтеза незамкнутых четырехзвенных ИКЦ и их модификации при проектировании механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев синтезируемого механизма отличается простотой программирования.
7. Показано, что синтез пространственной ИКЦ и ее модификаций в зависимости от заданных условий синтеза может привести к непосредственному синтезу пространственных четырехзвенных механизмов с различными кинематическими парами.

3 Кинематический синтез исходных кинематических цепей с вращательными сферическими и цилиндрическими кинематическими парами

3.1 О существовании решения задачи синтеза исходной кинематической цепи со сферическими кинематическими парами

В данном разделе работы рассмотрим существование решения задачи синтеза ИКЦ со сферическими кинематическими парами [184, 213].

Суть решения задачи ИКЦ со сферическими кинематическими парами заключается в следующем: Пусть заданы N конечноудаленных положений двух твердых тел $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \psi_i^1, \theta_i^1, \phi_i^1)$ и $Q_2(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i}, \psi_i^2, \theta_i^2, \phi_i^2)$ где ψ_i^j, θ_i^j и ϕ_i^j – Эйлеровы углы относительно неподвижной системы координат $OXYZ$, ($i = \overline{1, N}$; $j = \overline{1, 2}$).

Требуется найти такие точки $A(X_A, Y_A, Z_A) \in Q_1$, $B(x_B, y_B, z_B) \in Q_2$ и $C(x_C, y_C, z_C) \in Q_2$, чтобы расстояние между точками B и C во всех положениях тел Q_1 и Q_2 мало отличались от некоторой постоянной величины R (рисунок 3.1).

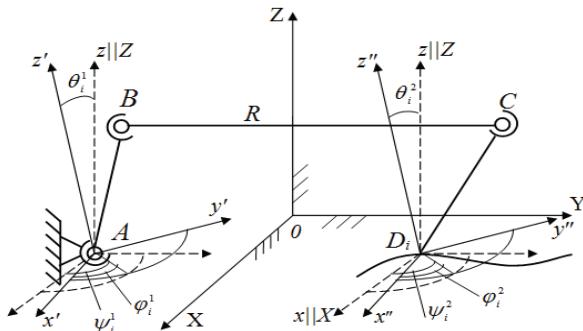


Рисунок 3.1

Для решения задачи введем взвешенную разность для i -го положения тел в виде:

$$\Delta_{qi} = \sqrt{\overline{B_i C_i}^2 - R^2} = (X_{C_i} - X_{B_i})^2 + (Y_{C_i} - Y_{B_i})^2 + (Z_{C_i} - Z_{B_i})^2 - R^2, (i = \overline{1, N}) \quad (3.1)$$

Она является функцией десяти искомых параметров: $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$. Группируя эти параметры по четыре с общим параметром R , выражение (3.1) представим в трех различных формах:

$$\Delta_{q_i}^{(1)} = (\tilde{X}_{Ai} - X_A)^2 + (\tilde{Y}_{Ai} - Y_A)^2 + (\tilde{Z}_{Ai} - Z_A)^2 - R^2 \quad (3.2)$$

$$\Delta_{q_i}^{(2)} = (\tilde{x}_{Bi} - x_B)^2 + (\tilde{y}_{Bi} - y_B)^2 + (\tilde{z}_{Bi} - z_B)^2 - R^2 \quad (3.3)$$

$$\Delta_{q_i}^{(3)} = (\tilde{x}_{Ci} - x_C)^2 + (\tilde{y}_{Ci} - y_C)^2 + (\tilde{z}_{Ci} - z_C)^2 - R^2 \quad (3.4)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{Ai} \\ \tilde{Y}_{Ai} \\ \tilde{Z}_{Ai} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{10}^i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{20}^i & X_{D_i} \\ 0 & Y_{D_i} \\ 0 & Z_{D_i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{Bi} \\ \tilde{y}_{Bi} \\ \tilde{z}_{Bi} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{01}^i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{D_i} - X_A \\ Y_{D_i} - Y_A \\ Z_{D_i} - Z_A \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ T_{21}^i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{Ci} \\ \tilde{y}_{Ci} \\ \tilde{z}_{Ci} \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} T_{02}^i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A - X_{D_i} \\ Y_A - Y_{D_i} \\ Z_A - Z_{D_i} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ T_{12}^i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

где $[T_{kj}^i]$ – матрица перехода от k -той системы координат к j -той системе, определяемые как (2.17)

$$T_{jo}^i = \begin{bmatrix} e_{i1}^j & e_{i2}^j & e_{i3}^j \\ m_{i1}^j & m_{i2}^j & m_{i3}^j \\ n_{i1}^j & n_{i2}^j & n_{i3}^j \end{bmatrix}, \quad (j = \overline{1,2}; \quad i = \overline{1,N}) \quad (3.8)$$

где

$$\begin{cases} e_{i1}^j = \cos\psi_i^j \cdot \cos\varphi_i^j - \cos\theta_i^j \cdot \sin\psi_i^j \cdot \sin\varphi_i^j \\ m_{i1} = \sin\psi_i^j \cdot \cos\varphi_i^j + \cos\theta_i^j \cdot \cos\psi_i^j \cdot \cos\varphi_i^j \\ n_{i1}^j = \sin\theta_i^j \cdot \sin\varphi_i^j \\ e_{i2}^j = -\cos\psi_i^j \cdot \sin\varphi_i^j - \cos\theta_i^j \cdot \sin\psi_i^j \cdot \cos\varphi_i^j \\ m_{i2}^j = -\sin\psi_i^j \cdot \sin\varphi_i^j + \cos\theta_i^j \cdot \cos\psi_i^j \cdot \sin\varphi_i^j \\ n_{i2}^j = \sin\theta_i^j \cdot \cos\varphi_i^j \\ e_{i3}^j = \sin\theta_i^j \cdot \sin\psi_i^j \\ m_{i3}^j = -\sin\theta_i^j \cdot \cos\psi_i^j \\ n_{i3}^j = \cos\varphi_i^j \end{cases} \quad (3.9)$$

$$T_{01}^i = [T_{10}^i]^T; \quad T_{02}^i = [T_{20}^i]^T; \quad T_{21}^i = T_{01}^i \times T_{20}^i; \quad T_{12}^i = T_{02}^i \times T_{10}^i, \dots \quad (3.10)$$

С учетом необходимых условий минимума суммы квадратов взвешенной разности

$$S = \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^2 \quad (3.11)$$

получены три системы уравнений, решение которых записаны в следующем виде относительных искомых параметров:

$$(X_A, Y_A, Z_A, H_1) = \frac{1}{D_1} (D_{x1}, D_{y1}, D_{z1}, D_{H1}) \quad (\text{при } D_1 \neq 0) \quad (3.12)$$

$$(x_B, y_B, z_B, H_2) = \frac{1}{D_2} (D_{xB}, D_{yB}, D_{zB}, D_{H2}) \quad (\text{при } D_2 \neq 0) \quad (3.13)$$

$$(x_C, y_C, z_C, H_3) = \frac{1}{D_3} (D_{xc}, D_{yc}, D_{zc}, D_{H3}) \quad (\text{при } D_3 \neq 0) \quad (3.14)$$

Для решения данной задачи в разделе 2.1 приведен алгоритм поиска минимума функции суммы S .

Однако изложенный алгоритм синтеза параметров ИКЦ со сферическими кинематическими парами по заданным положениям тел Q_1 и Q_2 не дает результатов в тех вырожденных случаях, когда один из определителей $D_i (i = 1, 3)$ в ходе итерации обращается в нуль (3.12), (3.13), (3.14), тем самым в ходе синтеза ИКЦ со сферическими кинематическими парами возможны случай, когда условия вырождения (3.12), (3.13) и (3.14)

могут встречаться в различных сочетаниях. Общее число вариантов указанных сочетаний, включая и невырожденный случай

$$C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 8.$$

Таким образом, при синтезе ИКЦ со сферическими кинематическими парами по заданным положениям тел Q_1 и Q_2 можно получить восемь различных структурных вариантов ИКЦ. Тем самым при различных сочетаниях $D_i = 0$ ($i = \overline{1,3}$) пришли к следующему утверждению.

Теорема: Если два смежных звена незамкнутой четырехзвенной ИКЦ со сферическими кинематическими парами, стремятся к бесконечности, то необходимо заменить сферическую кинематическую пару на плоскостную или цилиндрическую.

Доказательство: Если в выражение (3.12) $D_1 = 0$, то $(X_A, Y_A, Z_A) \rightarrow \infty$ и центр приближающей окружности к сфере будет лежать на плоскости или прямой. Тогда кроме искомых параметров ИКЦ $B(x_B, y_B, z_B) \in Q_1$ и $C(x_C, y_C, z_C) \in Q_2$ с общим параметром R , на неподвижной системе координат $OXYZ$ вместо точки $A(X_A, Y_A, Z_A) \in Q$ необходимо определить коэффициенты a, b, c плоскости q .

$$aX_i + bY_i + cZ_i + 1 = 0 \quad (i = 1, N) \quad (3.15)$$

Синтезируемое звено AB ограничивает движение точки B тела Q_1 по плоскости q . Следовательно, коэффициенты точки B должны удовлетворять уравнению плоскости в заданных $N \leq 9$ положениях. После определения a, b, c коэффициентов плоскости выбираются конструктивные параметры плоскостной пары. Эквивалентная кинематическая цепь с двумя призматическими парами показана на рисунке 3.2, оси которых параллельны плоскости q .

Аналогично, когда N заданных положений тела Q_1 , определяемых координатами $(\tilde{X}_{B_i}, \tilde{Y}_{B_i}, \tilde{Z}_{B_i})$ ($i = \overline{1, N}$), лежат на плоскости (прямой), то $D_2 = 0$.

Если $\tilde{X}_{B_i} = \tilde{Y}_{B_i} = \tilde{Z}_{B_i} \neq 0$, т.е. эти точки не совпадают с началом координат Axy , то система (3.13) также несовместно, $x_B, y_B, z_{B_2}, H_2 \rightarrow \infty$ и центр приближающей окружности к сфере бесконечно удален. Тогда в теле Q_1 необходимо определить плоскость или прямую (3.15) с коэффициентами a, b, c , в теле Q_2 точку C с координатами x_C, y_C, z_C и на неподвижной плоскости точку $A(X_A, Y_A, Z_A)$. Эквивалентная

четырехзвенная кинематическая цепь ACD с цилиндрическими и сферическими парами показана на рисунке 3.3.

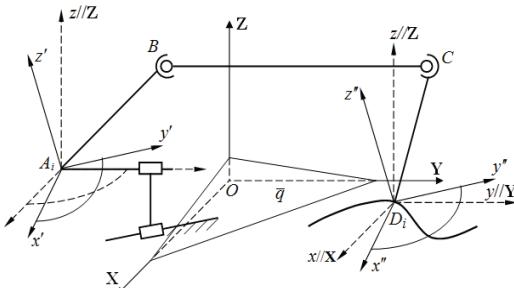


Рисунок 3.2

В последнем случае, когда все N заданных условий синтеза точек подвижного тела Q_2 , определяемых координатами $(\tilde{x}_{c_i}, y_{c_i}, z_{c_i}), (i=1, \bar{N})$ лежат на одной прямой (плоскости), то $D_3 = 0$.

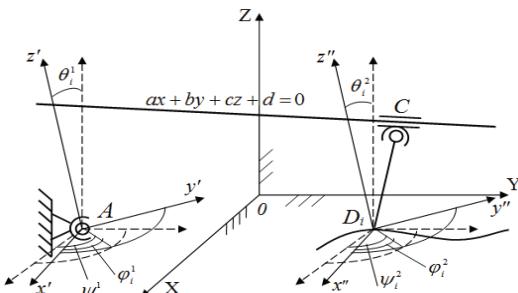


Рисунок 3.3

Если, $\tilde{x}_{c_i} = \tilde{y}_{c_i} = \tilde{z}_{c_i} \neq 0$, т.е. эти точки не совпадают с началом координат $Dx'y'z'$, то система (3.14) несовместно, $x_c, y_c, z_c, H_3 \rightarrow \infty$ и центр приближающей окружности к сфере бесконечно удален. В этом случае на теле Q_2 требуется найти прямую, на теле Q_1 точку $B(x_b, y_b, z_b)$ и на теле Q точку $A(x_a, y_a, z_a)$ во всех заданных положениях. Эквивалентная четырехзвенная кинематическая цепь ABD с цилиндрическими и сферическими парами показана на рисунке 3.4.

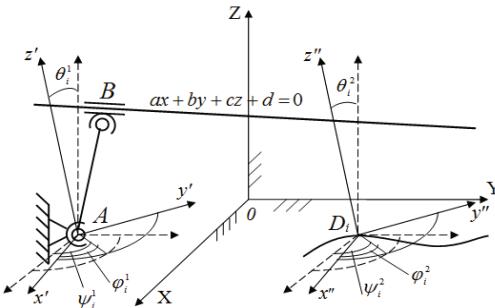


Рисунок 3.4

Таким образом, при синтезе ИКЦ со сферическими кинематическими парами по заданным положениям входного и выходного звеньев механизма, в случае, когда два смежных звена ИКЦ стремятся к бесконечности, необходимо заменить сферическую кинематическую пару плоскостной или цилиндрической. В таком случае, после определения искомых параметров, синтезируемый механизм имеет вид пространственного кулисного механизма.

3.2 Синтез исходной кинематической цепи с вращательной, плоскостной и сферической кинематическими парами

В данном разделе рассматривается задача синтеза пространственных исходных кинематических цепей (ИКЦ) с вращательной, плоскостной и сферической кинематическими парами по заданным положениям входного и выходного звеньев основанный на введение двух подвижных тел, неизменно связанных с входным и выходным звеньями [185].

Постановка задачи: Пусть заданы N конечноудаленных положений двух твердых тел Q_1 и Q_2 : $Q_1(x_A, y_A, z_A, \psi_{1i}, \theta_{1i}, \varphi_{1i})$, $Q_2(x_{D_i}, y_{D_i}, z_{D_i}, \psi_{2i}, \theta_{2i}, \varphi_{2i})$, ($i = \overline{1, N}$),

где ψ_{ji} , θ_{ji} , φ_{ji} - углы Эйлера относительно неподвижной системы координат $OXYZ$ (рисунок 3.3).

Требуется найти на теле Q точку $A(X_A, Y_A, Z_A)$, на теле Q_1 найти плоскость

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (3.16)$$

и на теле Q_2 точку $C(x_C, y_C, z_C)$, которая в ее движении относительно тела Q_1 приближалось к искомой плоскости (3.16). Уравнение плоскости (3.16)

на неподвижном теле Q определяется по известным формулам преобразования

$$\begin{aligned} & a[(X_{ci} - X_A)t_{11} + (Y_{ci} - Y_A)t_{21} + (Z_{ci} - Z_A)t_{31}] + \\ & + \epsilon[(X_{ci} - X_A)t_{12} + (Y_{ci} - Y_A)t_{22} + (Z_{ci} - Z_A)t_{32}] + \\ & + c[(X_{ci} - X_A)t_{13} + (Y_{ci} - Y_A)t_{23} + (Z_{ci} - Z_A)t_{33}] + d = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

где ψ_{ji}, φ_{ji} - углы заданы, а угол $\theta_{ji} = 0, j=1,2, i=\overline{1, N}$.

$$\alpha_{ji} = \psi_{1i} + \varphi_{1i}, \beta_{ji} = \psi_{2i} + \varphi_{2i}$$

$$\begin{bmatrix} X_{ci} \\ Y_{ci} \\ Z_{ci} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_{2i} + \varphi_{2i}) & -\sin(\psi_{2i} + \varphi_{2i}) & 0 & X_{di} \\ \sin(\psi_{2i} + \varphi_{2i}) & \cos(\psi_{2i} + \varphi_{2i}) & 0 & Y_{di} \\ 0 & 0 & 1 & Z_{di} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} t_{11} &= \cos(\psi_{1i} + \varphi_{1i}), \quad t_{21} = \sin(\psi_{1i} + \varphi_{1i}), \\ t_{12} &= -\sin(\psi_{1i} + \varphi_{1i}), \quad t_{22} = \cos(\psi_{1i} + \varphi_{1i}), \\ t_{33} &= 1, \quad t_{13} = t_{31} = t_{23} = t_{32} = t_{41} = t_{42} = t_{43} = 0. \end{aligned}$$

После подстановки выражения (3.18) в формулу (3.17) и соответствующих преобразований составим взвешенную разность Δq_i точки $C_i(x_c, y_c, z_c)$ от плоскости (3.17) в виде:

$$\begin{aligned} \Delta q_i &= G_1 \cos \alpha_{ji} + G_2 \sin \alpha_{ji} + G_3 \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) + G_4 \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) + G_5 X_i + \\ & + G_6 Y_i + G_7 Z_i + G_8 + G_9 - 1 \end{aligned} \quad (3.19)$$

где

$$\begin{aligned} G_1 &= -(aX_A + \epsilon Y_A), \quad G_2 = \epsilon X_A - aY_A, \\ G_3 &= a x_c + \epsilon y_c, \quad G_4 = \epsilon y_c - a x_c, \\ G_5 &= a, \quad G_6 = \epsilon, \quad G_7 = c, \quad G_8 = c z_c, \quad G_9 = -c Z_A. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{ji} & \sin \alpha_{ji} & 0 \\ -\sin \alpha_{ji} & \cos \alpha_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{di} \\ Y_{di} \\ Z_{di} \end{bmatrix}$$

Отметим, что в выражение (3.17) входит десять искомых параметров, но после нормализации уравнения прямой $d = -1$ остаются девять искомых параметров. Это коэффициенты уравнения плоскости a, b, c , координаты X_A, Y_A, Z_A точки $A \in Q$ и координаты x_C, y_C, z_C точки $C \in Q_2$.

Составим сумму квадратов взвешенной разности для N положений

$$S = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i]^2 \quad (i=1, N)$$

Условия стационарности по переменным

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0 \quad (j = G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9);$$

приводят к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно $G_1 \div G_9$:

$$A * \bar{G} = \bar{B} \quad (3.20)$$

где элемент матрицы A (9,9):

$$a_{11} = \sum \cos^2 \alpha_{ji}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2} \sum \sin \alpha_{ji} \cos \alpha_{ji},$$

$$a_{13} = a_{31} = \sum \cos \alpha_{ji} \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{14} = a_{41} = \sum \cos \alpha_{ji} \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji})$$

$$a_{15} = a_{51} = \sum X_i \cdot \cos \alpha_{ji}, \quad a_{16} = a_{61} = \sum Y_i \cdot \cos \alpha_{ji},$$

$$a_{17} = a_{71} = \sum Z_i \cdot \cos \alpha_{ji}, \quad a_{18} = a_{81} = \sum \cos \alpha_{ji},$$

$$a_{19} = a_{91} = \sum \cos \alpha_{ji}, \quad a_{22} = \sum \sin^2 \alpha_{ji},$$

$$a_{23} = a_{32} = \sum \sin \alpha_{ji} \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{24} = a_{42} = \sum \sin \alpha_{ji} \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{25} = a_{52} = \sum X_i \cdot \sin \alpha_{ji}, \quad a_{26} = a_{62} = \sum Y_i \cdot \sin \alpha_{ji},$$

$$a_{27} = a_{72} = \sum Z_i \cdot \sin \alpha_{ji}, \quad a_{28} = a_{82} = \sum \sin \alpha_{ji},$$

$$a_{29} = a_{92} = \sum \sin \alpha_{ji}, \quad a_{33} = \sum \cos^2(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{34} = a_{43} = \frac{1}{2} \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{35} = a_{53} = \sum X_i \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{36} = a_{63} = \sum Y_i \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{37} = a_{73} = \sum Z_i \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{38} = a_{83} = \sum \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{39} = a_{93} = \sum \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{44} = \sum \sin^2(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{45} = a_{54} = \sum X_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{46} = a_{64} = \sum Y_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{47} = a_{74} = \sum Z_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{48} = a_{84} = a_{46} = a_{94} = \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{55} = \sum X_i^2, \quad a_{66} = \sum Y_i^2, \quad a_{77} = \sum Z_i^2, \quad a_{88} = a_{99} = N,$$

$$a_{56} = a_{65} = \sum X_i^2, \quad a_{57} = a_{75} = \sum X_i Z_i, \quad a_{58} = a_{85} = a_{59} = a_{95} = \sum X_i,$$

$$a_{67} = a_{76} = \sum Y_i Z_i, \quad a_{68} = a_{69} = a_{86} = a_{96} = \sum Y_i,$$

$$a_{78} = a_{79} = a_{87} = a_{97} = \sum Z_i, \quad a_{89} = a_{98} = 1$$

$$\bar{G} = [G_1, \dots, G_9]^T$$

$$\bar{B} = [\sum \cos \alpha_{ji}, \sum \sin \alpha_{ji}, \sum \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \sum X_i, \sum Y_i, \sum Z_i, N, N]^T$$

Решение системы (3.20) позволяет определить искомые параметры синтеза. При фиксированном значении координаты стойки $D(X_D, Y_D, Z_D)$ выходного звена кулисного механизма можно определить девять искомых параметров синтеза:

$$\begin{aligned} X_A &= -\frac{aG_1 - bG_2}{a^2 + b^2}, \quad Y_A = -\frac{bG_1 + aG_2}{a^2 + b^2}, \quad Z_A = -\frac{G_9}{G_7}, \\ x_c &= \frac{aG_3 - bG_4}{a^2 + b^2}, \quad y_c = \frac{aG_4 + bG_3}{a^2 + b^2}, \quad z_c = \frac{G_8}{G_7}, \\ a &= G_5, \quad b = G_6, \quad c = G_7, \quad a^2 + b^2 \neq 0, \quad c \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, по заданным положениям входного и выходного звеньев передаточных механизмов можно синтезировать пространственные кулисные механизмы типа *BПлСВ* (*B* – вращательная, *Пл*–плоскостная, *C* – сферическая кинематические пары).

Теперь рассмотрим вопрос выбора нормализации коэффициентов уравнения плоскости a , b , c . При нормализации $d = -1$ получим взвешенную разность (3.18). При $a = -1$, $b = -1$, $c = -1$ в выражение (3.18) получим точные выражения отклонений $(\Delta_i)_x$, $(\Delta_i)_y$, $(\Delta_i)_z$ точек C_i соответственно по осям OX , OY , OZ , которые являются взвешенными по отношению к отклонению Δ_i по нормали. Поэтому нельзя наперед сказать, какая нормализация наилучшая и поэтому целесообразно рассматривать все четыре случая.

1. Пусть $a = -1$. Тогда взвешенная разность с учетом (3.19) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta q_i = G_1 \cos \alpha_{ji} + G_2 \sin \alpha_{ji} + G_3 \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) + G_4 \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) + \\ + G_5 Y_i + G_6 Z_i + G_7 + G_8 + G_9 - X_i \end{aligned} \quad (3.21)$$

где $G_1 = X_A - bY_A$, $G_2 = Y_A + bX_A$, $G_3 = -x_C + by_C$,
 $G_4 = -(bx_C + y_C)$, $G_5 = b$, $G_6 = c$, $G_7 = cz_C$, $G_8 = cZ_A$, $G_9 = d$.

Из условия стационарности суммы $S = \sum [\Delta q_i]^2$

$$\frac{dS}{dj} = 0, \quad (j = G_1 \div G_9) \quad (3.22)$$

с учетом (3.21) получим следующую линейную систему:

$$A \cdot \bar{G} = \bar{B} \quad (3.23)$$

где элементы матрицы $A(9,9)$:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sum \cos^2 \alpha_{ji}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2} \sum \sin \alpha_{ji} \cdot \cos \alpha_{ji}, \\ a_{13} &= a_{31} = \sum \cos \alpha_{ji} \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{14} = a_{41} = \sum \cos \alpha_{ji} \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \\ a_{15} &= a_{51} = \sum Y_i \cdot \cos \alpha_{ji}, \quad a_{16} = a_{61} = \sum Z_i \cdot \cos \alpha_{ji}, \\ a_{17} &= a_{71} = \sum \cos \alpha_{ji}, \quad a_{18} = a_{81} = \sum \cos \alpha_{ji}, \\ a_{19} &= a_{91} = \sum \cos \alpha_{ji}, \quad a_{22} = \sum \sin^2 \alpha_{ji}, \\ a_{23} &= a_{32} = \sum \sin \alpha_{ji} \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{24} = a_{42} = \sum \sin \alpha_{ji} \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \\ a_{25} &= a_{52} = \sum Y_i \cdot \sin \alpha_{ji}, \quad a_{26} = a_{62} = \sum Z_i \cdot \sin \alpha_{ji}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{27} &= a_{72} = \sum \sin \alpha_{ji}, \quad a_{28} = a_{82} = \sum \sin \alpha_{ji}, \\
a_{29} &= a_{92} = \sum \sin \alpha_{ji}, \quad a_{33} = \sum \cos^2(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \\
a_{34} &= a_{43} = \frac{1}{2} \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{35} = a_{53} = \sum Y_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \\
a_{36} &= a_{63} = \sum Z_i \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{37} = a_{73} = \sum \cos \alpha_{ji} (\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \\
a_{38} &= a_{83} = \sum \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{39} = a_{93} = \sum \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \\
a_{44} &= \sum \sin^2(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{45} = a_{54} = \sum Y_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \\
a_{46} &= a_{64} = \sum Z_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{47} = a_{74} = \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \\
a_{48} &= a_{88} = \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{49} = a_{94} = \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \\
a_{55} &= \sum Y_i^2, \quad a_{56} = \sum Y_i Z_i, \quad a_{57} = a_{75} = \sum Y_i, \\
a_{58} &= a_{85} = \sum Y_i, \quad a_{59} = a_{95} = \sum Y_i, \\
a_{66} &= \sum Z_i^2, \quad a_{67} = a_{76} = \sum Z_i, \quad a_{68} = a_{86} = \sum Z_i, \\
a_{69} &= a_{96} = \sum Z_i, \quad a_{77} = a_{88} = a_{99} = N \\
a_{78} &= a_{87} = a_{79} = a_{97} = a_{89} = a_{98} = 1. \\
X &= [G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9]^T, \\
B &= [\sum X_i \cdot \cos \alpha_{ji}, \sum X_i \sin \alpha_{ji}, \sum X_i \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \sum X_i \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \\
&\quad \sum X_i Y_i, \sum X_i Z_i, \sum X_i, \sum Y_i, \sum Z_i]^T.
\end{aligned}$$

Решение системы (3.23) позволяет определить искомые параметры в следующем виде:

$$X_A = \frac{G_1 + bG_2}{1+b^2}, \quad Y_A = \frac{G_2 - bG_1}{1+b^2}, \quad Z_A = -\frac{G_8}{G_6},$$

$$x_c = -\frac{G_3 - bG_4}{1+b^2}, \quad y_c = \frac{-G_4 + bG_3}{1+b^2}, \quad z_c = \frac{G_7}{G_6},$$

$$b=G_5, \quad c=G_6, \quad d=G_9.$$

В результате решения данной задачи определяются координаты точек $A(X_A, Y_A, Z_A) \in Q$, $C(x_C, y_C, z_C) \in Q_2$ и плоскости на теле Q_1 такие, что совмещая с ними плоскостные и сферические кинематические пары получим в виде незамкнутой пространственной кинематической цепи ACD типа $BПлC$ (B – вращательная, $Пл$ – плоскостная, C – сферическая кинематические пары).

2. Пусть $\sigma = -1$. Тогда взвешенная разность с учетом (3.19) имеет вид:

$$\Delta q_i = G_1 \cos \alpha_{ji} + G_2 \sin \alpha_{ji} + G_3 \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) + G_4 \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) + \\ + G_5 X_i + G_6 Z_i + G_7 + G_8 + G_9 - Y_i,$$

$$G_1 = Y_A - aX_A, \quad G_2 = -X_A - aY_A, \quad G_3 = ax_C - y_C, \\ \text{где } G_4 = x_C + ay_C, \quad G_5 = a, \quad G_6 = c, \quad G_7 = cz_C, \quad G_8 = cZ_A, \quad G_9 = d, \\ X_i = X_{Di} \cos \alpha_{ji} + Y_{Di} \sin \alpha_{ji}, \quad Y_i = -X_{Di} \sin \alpha_{ji} + Y_{Di} \cos \alpha_{ji}$$

Из условия стационарности суммы $S = \sum [\Delta q_i]^2$

$$\frac{dS}{dj} = 0, \quad (j = G_1 \div G_9)$$

с учетом Δ_{q_i} получим следующую линейную систему:

$$A \bar{G} = \bar{B}$$

где элементы матрицы $A(9,9)$:

$$a_{11} = \sum \cos^2 \alpha_{ji}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2} \sum \sin \alpha_{ji} \cdot \cos \alpha_{ji},$$

$$a_{13} = a_{31} = \sum \cos \alpha_{ji} \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{14} = a_{41} = \sum \cos \alpha_{ji} \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{15} = a_{51} = \sum X_i \cdot \cos \alpha_{ji}, \quad a_{16} = a_{61} = \sum Z_i \cdot \cos \alpha_{ji},$$

$$a_{17} = a_{71} = \sum \cos \alpha_{ji}, \quad a_{18} = a_{81} = \sum \cos \alpha_{ji}, \\ a_{19} = a_{91} = \sum \cos \alpha_{ji}, \quad a_{22} = \sum \sin^2 \alpha_{ji},$$

$$a_{23} = a_{32} = \sum \sin \alpha_{ji} \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{24} = a_{42} = \sum \sin \alpha_{ji} \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{25} = a_{52} = \sum X_i \cdot \sin \alpha_{ji}, \quad a_{26} = a_{62} = \sum Z_i \cdot \sin \alpha_{ji},$$

$$a_{27} = a_{72} = \sum \sin \alpha_{ji}, \quad a_{28} = a_{82} = \sum \sin \alpha_{ji}, \\ a_{29} = a_{92} = \sum \sin \alpha_{ji}, \quad a_{33} = \sum \cos^2(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{34} = a_{43} = \frac{1}{2} \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \\ a_{35} = a_{53} = \sum X_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \\ a_{36} = a_{63} = \sum Z_i \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{37} = a_{73} = \sum \cos \alpha_{ji} (\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{38} = a_{83} = \sum \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{39} = a_{93} = \sum \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{44} = \sum \sin^2(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{45} = a_{54} = \sum X_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{46} = a_{64} = \sum Z_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{47} = a_{74} = \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{48} = a_{88} = \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{49} = a_{94} = \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{55} = \sum X_i^2, \quad a_{56} = a_{65} = \sum X_i Z_i, \quad a_{57} = a_{75} = \sum X_i,$$

$$a_{58} = a_{85} = \sum X_i, \quad a_{59} = a_{95} = \sum X_i,$$

$$a_{66} = \sum Z_i^2, \quad a_{67} = a_{76} = \sum Z_i, \quad a_{68} = a_{86} = \sum Z_i,$$

$$a_{69} = a_{96} = \sum Z_i, \quad a_{77} = a_{88} = a_{99} = N$$

$$a_{78} = a_{87} = a_{79} = a_{97} = a_{89} = a_{98} = 1.$$

$$X = [G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9]^T,$$

$$\begin{aligned} B = & \left[\begin{array}{cccc} \sum Y_i \cdot \cos \alpha_{ji}, & \sum Y_i \sin \alpha_{ji}, & \sum Y_i \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), & \sum Y_i \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \\ \sum Y_i Y_i, & \sum Y_i Z_i, & \sum Y_i, & \sum Y_i \end{array} \right]^T. \end{aligned}$$

Решение системы позволяет определить искомые параметры в следующем виде:

$$X_A = \frac{-G_2 - aG_1}{1 + a^2}, \quad Y_A = \frac{-aG_2 + G_1}{1 + a^2}, \quad Z_A = -\frac{G_8}{G_6},$$

$$x_C = \frac{aG_3 + G_4}{1 + a^2}, \quad y_C = \frac{aG_4 - G_3}{1 + a^2}, \quad z_C = \frac{G_7}{G_6},$$

$$b = G_5, \quad c = G_6, \quad d = G_9.$$

В результате решения данной задачи определяются координаты точек $A(X_A, Y_A, Z_A) \in Q$, $C(x_C, y_C, z_C) \in Q_2$ и плоскости на теле Q_1 такие, что совмещая с ними плоскостные и сферические кинематические пары получим в виде незамкнутой пространственной кинематической цепи ACD типа $B\pi C$ (B – вращательная, π – плоскостная, C - сферическая кинематические пары).

3. Пусть $c = -1$. Тогда взвешенная разность с учетом (3.19) имеет вид

$$\Delta q_i = G_1 \cos \alpha_{ji} + G_2 \sin \alpha_{ji} + G_3 \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) + G_4 \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) + \\ + G_5 X_i + G_6 Y_i + G_7 + G_8 + G_9 - Z_{Di}$$

где

$$G_1 = -aX_A - bY_A, \quad G_2 = bX_A - aY_A, \quad G_3 = ax_C + ey_C, \\ G_4 = (ay_C - bx_C), \quad G_5 = a, \quad G_6 = b, \quad G_7 = z_C, \quad G_8 = Z_A, \quad G_9 = d.$$

Из условия стационарности суммы $S = \sum [\Delta q_i]^2$

$$\frac{dS}{dj} = 0, \quad (j = G_1 \div G_9)$$

с учетом Δ_{q_i} получим следующую линейную систему:

$$A \bar{G} = \bar{B}$$

где элементы матрицы $A(9,9)$:

$$a_{11} = \sum \cos^2 \alpha_{ji}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2} \sum \sin \alpha_{ji} \cdot \cos \alpha_{ji},$$

$$a_{13} = a_{31} = \sum \cos \alpha_{ji} \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{14} = a_{41} = \sum \cos \alpha_{ji} \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{15} = a_{51} = \sum X_i \cdot \cos \alpha_{ji}, \quad a_{16} = a_{61} = \sum Y_i \cdot \cos \alpha_{ji},$$

$$a_{17} = a_{71} = \sum \cos \alpha_{ji}, \quad a_{18} = a_{81} = \sum \cos \alpha_{ji}, \\ a_{19} = a_{91} = \sum \cos \alpha_{ji}, \quad a_{22} = \sum \sin^2 \alpha_{ji},$$

$$a_{23} = a_{32} = \sum \sin \alpha_{ji} \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{24} = a_{42} = \sum \sin \alpha_{ji} \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{25} = a_{52} = \sum X_i \cdot \sin \alpha_{ji}, \quad a_{26} = a_{62} = \sum Y_i \cdot \sin \alpha_{ji},$$

$$a_{27} = a_{72} = \sum \sin \alpha_{ji}, \quad a_{28} = a_{82} = \sum \sin \alpha_{ji}, \\ a_{29} = a_{92} = \sum \sin \alpha_{ji}, \quad a_{33} = \sum \cos^2(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{34} = a_{43} = \frac{1}{2} \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \\ a_{35} = a_{53} = \sum X_i \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \\ a_{36} = a_{63} = \sum Y_i \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{37} = a_{73} = \sum \cos \alpha_{ji} (\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{38} = a_{83} = \sum \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{39} = a_{93} = \sum \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{44} = \sum \sin^2(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{45} = a_{54} = \sum X_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{46} = a_{64} = \sum Y_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{47} = a_{74} = \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{48} = a_{88} = \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{49} = a_{94} = \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{55} = \sum X_i^2, \quad a_{56} = a_{65} = \sum X_i Y_i, \quad a_{57} = a_{75} = \sum X_i,$$

$$a_{58} = a_{85} = \sum X_i, \quad a_{59} = a_{95} = \sum X_i,$$

$$a_{66} = \sum Y_i^2, \quad a_{67} = a_{76} = \sum Y_i, \quad a_{68} = a_{86} = \sum Y_i,$$

$$a_{69} = a_{96} = \sum Y_i, \quad a_{77} = a_{88} = a_{99} = N$$

$$a_{78} = a_{87} = a_{79} = a_{97} = a_{89} = a_{98} = 1.$$

$$X = [G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9]^T,$$

$$B = \left[\begin{array}{cccc} \sum Z_{Di} \cdot \cos \alpha_{ji}, & \sum Z_{Di} \sin \alpha_{ji}, & \sum Z_{Di} \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), & \sum Z_{Di} \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \\ \sum Z_{Di} X_i, & \sum Z_{Di} Y_i, & \sum Z_{Di}, & \sum Z_{Di} \end{array} \right]^T.$$

Решение системы позволяет определить искомые параметры в следующем виде:

$$X_A = \frac{bG_2 - aG_1}{a^2 + b^2}, \quad Y_A = -\frac{bG_1 + aG_2}{a^2 + b^2}, \quad Z_A = G_8, \\ x_C = \frac{aG_3 - bG_4}{a^2 + b^2}, \quad y_C = \frac{aG_4 + bG_3}{a^2 + b^2}, \quad z_C = G_7 \\ a = G_5, \quad b = G_6, \quad d = G_9.$$

В результате решения данной задачи определяются координаты точек $A(X_A, Y_A, Z_A) \in Q$, $C(x_C, y_C, z_C) \in Q_2$ и плоскости на теле Q_1 такие, что совмещая с ними цилиндрические и сферические кинематические пары получим в виде незамкнутой пространственной кинематической цепи ACD типа $BПlC$ (B – вращательная, $Пл$ – плоскостная, C - сферическая кинематические пары).

В случаях нормализации $d=1$ ход решения задачи остается аналогичным.

Фиксируя или задавая в различных комбинациях часть искомых параметров синтеза, можно получить различные модификации ИКЦ с плоскостными и сферическими парами:

а) Пусть даны координаты X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai} точки А, координаты X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di} точки D и углы Эйлера $Q_1(\psi_{1i}, \theta_{1i}, \phi_{1i}), Q_2(\psi_{2i}, \theta_{2i}, \phi_{2i})$. Тогда в результате синтеза можно получить трехзвенную пространственную ИКЦ ACD .

$$\Delta q_i = G_1 \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) + G_2 \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) + G_3 X_i + G_4 Y_i + G_5 Z_i + G_6 - 1,$$

где

$$\begin{aligned} G_1 &= (ax_C + by_C), \quad G_2 = ay_C - bx_C, \\ G_3 &= a, \quad G_4 = b, \\ G_5 &= c, \quad G_6 = cz_C. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{ji} & \sin \alpha_{ji} & 0 \\ -\sin \alpha_{ji} & \cos \alpha_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{Di} - X_{Ai} \\ Y_{Di} - Y_{Ai} \\ Z_{Di} - Z_{Ai} \end{bmatrix}$$

Составим сумму квадратов взвешенной разности для N положений

$$S = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i]^2 \quad (i=1, N).$$

Условия стационарности по переменным

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0 \quad (j = G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6);$$

приводят к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно $G_1 \div G_6$;

$$A \cdot \bar{G} = \bar{B}$$

где элемент матрицы A (6,6):

$$a_{11} = \sum \cos^2(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2} \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{13} = a_{31} = \sum X_i \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{14} = a_{41} = \sum Y_i \cdot \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{15} = a_{51} = \sum Z_i \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{16} = a_{61} = \sum \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{22} = \sum \sin^2(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{23} = a_{32} = \sum X_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{24} = a_{42} = \sum Y_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{25} = a_{52} = \sum Z_i \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}),$$

$$a_{26} = a_{62} = \sum \cdot \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad a_{33} = \sum X_i^2,$$

$$a_{34} = a_{43} = \sum X_i Y_i, \quad a_{35} = a_{53} = \sum X_i Z_i, \quad a_{36} = a_{63} = \sum X_i,$$

$$a_{44} = \sum Y_i^2, \quad a_{45} = a_{54} = \sum Y_i Z_i, \quad a_{46} = a_{64} = \sum Y_i,$$

$$a_{55} = \sum Z_i^2, \quad a_{56} = a_{65} = \sum Z_i, \quad a_{66} = N$$

$$X = [G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6]^T,$$

$$B = [\sum \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \quad \sum \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}), \sum X_i, \sum Y_i, \sum Z_i, N]^T$$

Решение системы позволяет определить искомые параметры синтеза.

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{aG_1 - bG_2}{a^2 + b^2}, & y_C &= \frac{bG_1 + aG_2}{a^2 + b^2}, & z_C &= \frac{G_6}{G_5}, \\ a &= G_3, & b &= G_4, & c &= G_5, & a^2 + b^2 &\neq 0. \end{aligned}$$

б) Если углы Эйлера $\psi_{ii} = \theta_{ii} = \varphi_{ii} = 0$ тела Q_1 , то задача сводится к взвешенному квадратическому приближению точки $C_i(x_C, y_C, z_C)$ с N приближенно – коллинеарными положениями и т.д.

3.3 Синтез исходной кинематической цепи с вращательной, цилиндрической и сферической кинематическими парами

В данном подразделе рассмотрим задачи синтеза ИКЦ с вращательной, цилиндрической и сферической кинематическими парами.

Каждая прямая в пространстве может быть представлена системой линейных уравнений относительно координат, как пересечение двух плоскостей, проектирующих прямую на координатные плоскости AXY и AYZ . Уравнение этих плоскостей может быть записана в следующем виде

$$\begin{aligned} aX + bY - 1 &= 0 \\ cY + dZ - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Задача состоит в следующем.

Требуется найти на теле Q точку $A(X_A, Y_A, Z_A)$, на теле Q_1 найти прямую

$$ax + by + cz + d = 0$$

и на теле Q_2 точку $C(x_c, y_c, z_c)$, которая в ее движении относительно тела Q_1 приближалось к искомой прямой. Уравнение этой прямой на неподвижном теле Q определяется по известным формулам преобразования

$$a[(X_{ci} - X_A)t_{11} + (Y_{ci} - Y_A)t_{21} + (Z_{ci} - Z_A)t_{31}] + \\ + b[(X_{ci} - X_A)t_{12} + (Y_{ci} - Y_A)t_{22} + (Z_{ci} - Z_A)t_{32}] - 1 = 0$$

$$c[(X_{ci} - X_A)t_{13} + (Y_{ci} - Y_A)t_{23} + (Z_{ci} - Z_A)t_{33}] + \\ + d[(X_{ci} - X_A)t_{14} + (Y_{ci} - Y_A)t_{24} + (Z_{ci} - Z_A)t_{34}] - 1 = 0$$

где ψ_{ji}, φ_{ji} - углы заданы, а угол $\theta_{ji} = 0, j=1,2, i=1, N$.

$$\alpha_{ji} = \psi_{ji} + \varphi_{ji}, \beta_{ji} = \psi_{2i} + \varphi_{2i}$$

$$\begin{bmatrix} X_{ci} \\ Y_{ci} \\ Z_{ci} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_{2i} + \varphi_{2i}) & -\sin(\psi_{2i} + \varphi_{2i}) & 0 & X_{di} \\ \sin(\psi_{2i} + \varphi_{2i}) & \cos(\psi_{2i} + \varphi_{2i}) & 0 & Y_{di} \\ 0 & 0 & 1 & Z_{di} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} t_{11} &= \cos(\psi_{ii} + \varphi_{ii}), & t_{21} &= \sin(\psi_{ii} + \varphi_{ii}), \\ t_{12} &= -\sin(\psi_{ii} + \varphi_{ii}), & t_{22} &= \cos(\psi_{ii} + \varphi_{ii}), \\ t_{33} &= 1, & t_{13} = t_{31} = t_{23} = t_{32} = t_{41} = t_{42} = t_{43} &= 0. \end{aligned}$$

Подобные точки $C(x_C, y_C, z_C) \in Q_2$ должны по возможности мало отклоняться от искомой прямой. Этому условию соответствует минимизируемые функции следующего вида:

$$\begin{aligned} \Delta_{q_i}^{(1)} &= a[(X_{ci} - X_A)t_{11} + (Y_{ci} - Y_A)t_{21} + (Z_{ci} - Z_A)t_{31}] + \\ &+ b[(X_{ci} - X_A)t_{12} + (Y_{ci} - Y_A)t_{22} + (Z_{ci} - Z_A)t_{32}] - 1 \\ \Delta_{q_i}^{(2)} &= c[(X_{ci} - X_A)t_{12} + (Y_{ci} - Y_A)t_{22} + (Z_{ci} - Z_A)t_{31}] + \\ &+ d[(X_{ci} - X_A)t_{13} + (Y_{ci} - Y_A)t_{23} + (Z_{ci} - Z_A)t_{33}] - 1 \end{aligned}$$

После подстановки в полученную систему предыдущих величин и соответствующих преобразований составим взвешенные разности в виде:

$$\Delta_{q_i}^{(1)} = G_1 \cos(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) + G_2 \sin(\alpha_{ji} - \beta_{ji}) + G_3 X_i + G_4 Y_i + G_5 Z_i + G_6 Z_i - 1,$$

где

$$G_1 = (ax_c - by_c), \quad G_2 = ay_c - bx_c,$$

$$G_3 = a, \quad G_4 = b,$$

$$G_5 = X_A, \quad G_6 = Y_A,$$

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{ji} & \sin \alpha_{ji} & 0 \\ -\sin \alpha_{ji} & \cos \alpha_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{Di} \\ Y_{Di} \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$Z_i = -\cos \alpha_{ji} - \sin \alpha_{ji}.$$

Теперь составим вторую взвешенную разность в виде:

$$\Delta_{q_i}^{(2)} = G_7 \sin \alpha_{ij} \cos \beta_{ji} + G_8 \sin \alpha_{ji} \sin \beta_{ij} + G_9 X_{Di} \sin \alpha_{ij} + G_{10} + G_{11} Z_{Di} + G_{12} - 1$$

где

$$G_7 = -cx_C, \quad G_8 = cy_C, \quad G_9 = -c, \quad G_{10} = dz_C, \quad G_{11} = d, \quad G_{12} = -dZ_A.$$

Составим сумму квадратов

$$S_1 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{q_i}^{(1)}]^2 \text{ и } S_2 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{q_i}^{(2)}]^2,$$

затем рассмотрим условия стационарности этих сумм, приравнивая к нулю их частные производные по всем переменным. В результате получим две системы линейных уравнений как в разделе 3.2. К первой системе шести уравнений добавим три последних уравнений второй системы. После решения совместно последних полученных девяти уравнений определяем искомые параметры синтеза в следующем виде:

$$X_A = G_5, \quad a = G_3, \quad d = G_{11}$$

$$Y_A = G_6 \quad b = G_4,$$

$$Z_A = -\frac{G_{12}}{G_{11}} \quad c = -G_9,$$

$$x_C = \frac{G_2 G_4 + G_1 G_3}{G_3^2 - G_4^2}, \quad y_C = \frac{G_2 G_3 + G_1 G_4}{G_3^2 - G_4^2}, \quad z_C = \frac{G_{10}}{G_{11}}.$$

Таким образом, при синтезе пространственных механизмов и пространственных механизмов высоких классов (ПМВК) использование четырехзвенных ИКЦ позволяет синтезировать пространственные механизмы, включая ПМВК, по заданным положениям входного и выходного звеньев с использованием ИКЦ со сферическими и цилиндрическими парами приведенные в таблице 3.1 и 3.2.

Таблица 3.1

| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | | |

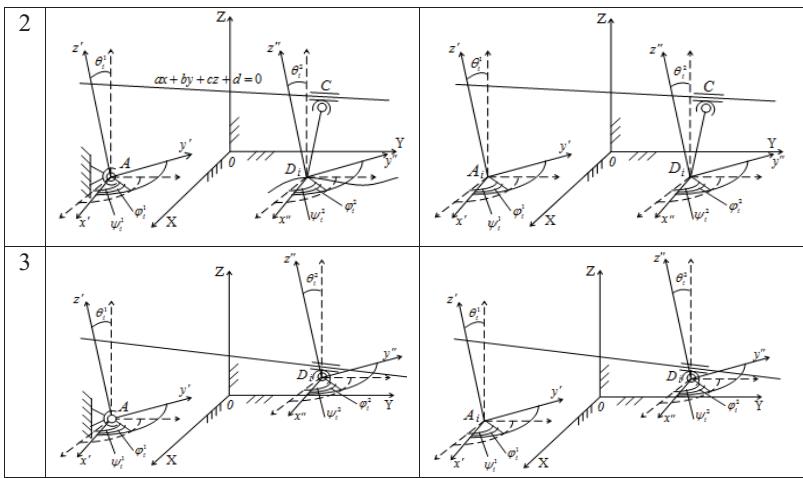
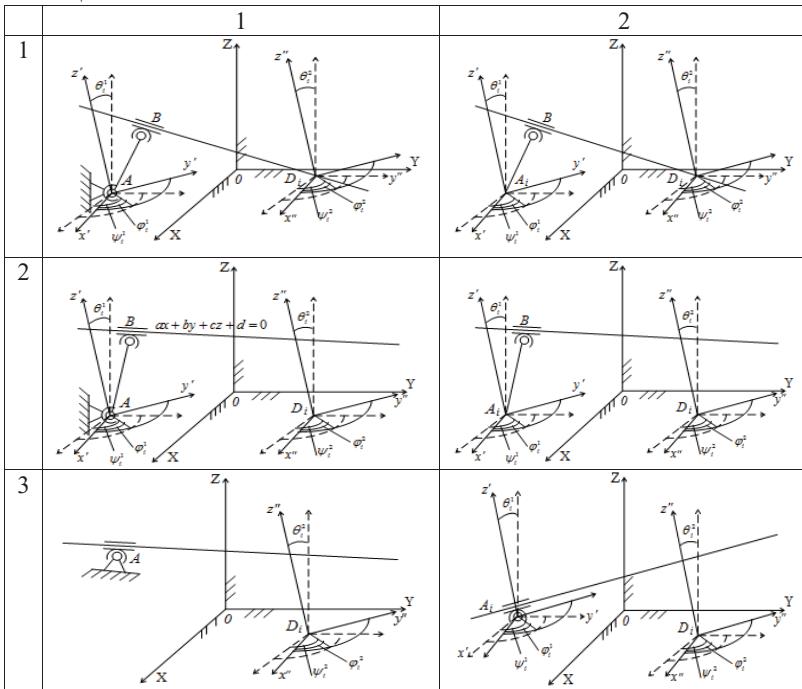


Таблица 3.2



Далее рассмотрим второй подход решения задачи точного воспроизведения заданного закона движения выходного звена в зависимости от заданного закона движения входного звена проектируемого механизма. Для этого используем незамкнутую четырехзвенную ИКЦ.

Проектируемое ИКЦ определяется 11 постоянными параметрами, в том числе: координатами x_C, y_C, z_C центра C сферической пары, четырьмя независимыми параметрами, задающими ось цилиндрической пары в системе Q_1 и координатами точки A в системе $OXYZ$ (рисунок 3.5).

Звено $C\bar{C}$ (C – сферическая, \bar{C} – цилиндрическая кинематическая пара) ограничивает движение точки B по прямому круговому цилиндру с осью Q_1 и радиусом h . Для аналитического описания соответствующего условия связи условимся определять в дальнейшем ось Q_1 единичным направляющим вектором Q_1 (Q_x, Q_y, Q_z) и точкой пересечения A (X_A, O, Z_A) оси Q с координатной плоскостью XZ .

Расстояние h_i точки B_i от оси Q в i -м положении тела Q_2 имеет следующее выражение:

$$h_i = |(R_{B_i} - R_A) \times Q| \quad (3.24)$$

Уравнения связей, налагаемых рассматриваемым звеном на перемещения точки B , представляются в виде

$$\begin{aligned} \Delta &= h_i - h, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \\ \Delta &= h_i^2 - h^2, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (3.25)$$

где h – постоянное расстояние между точками B и C принадлежащий к телу Q_1 и Q_2 .

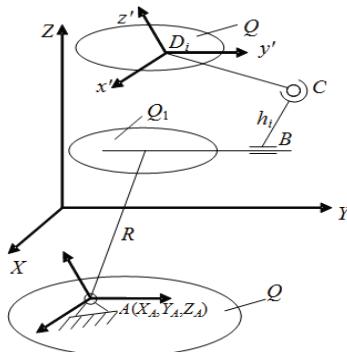


Рисунок 3.5

Подставляя в уравнение (3.25) формулу (3.24) и принимая обозначение $U_i = R_{Bi} \times Q$, после преобразований получаем

$$f_{1i}X_A + f_{2i}Z_A + H = f_{3i} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.26)$$

где H – независящая от положения тела Q_2 постоянная

$$H = R_A^2 - h^2 - (R_A Q)^2 \quad (3.27)$$

а f_{1i} , f_{2i} и f_{3i} – известные функции от искомых координат x_B , y_B , z_B и направляющих косинусов Q_X , Q_Y , Q_Z оси Q :

$$\begin{aligned} f_{1i} &= 2(Q_Z U_{iY} - Q_Y U_{iZ}) \\ f_{2i} &= 2(Q_Y U_{iX} - Q_X U_{iY}) \\ f_{3i} &= -(U_{iX}^2 + U_{iY}^2 + U_{iZ}^2) \end{aligned} \quad (3.28)$$

причем

$$\begin{aligned} U_{iX} &= \begin{vmatrix} Y_{Bi} & Z_{Bi} \\ Q_Y & Q_Z \end{vmatrix} \\ U_{iY} &= \begin{vmatrix} Z_{Bi} & X_{Bi} \\ Q_Z & Q_X \end{vmatrix} \\ U_{iZ} &= \begin{vmatrix} X_{Bi} & Y_{Bi} \\ Q_X & Q_Y \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Выполним синтез звена $C\bar{C}$ при фиксированном направлении оси Q , т.е. при известных значениях Q_X , Q_Y , Q_Z . При $N = 4$ из уравнений (3.26) получаем систему четырех линейных уравнений относительно трех искомых параметров X_A , Z_A , H . Для совместности этой системы необходимо условие

$$|f_{1i}f_{2i}f_{3i}| = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (3.30)$$

Подстановкой соотношений (3.28), в которые внесены выражения (3.29), и дальнейшим преобразованием с учетом формулы

$$[X_C, Y_C, Z_C] = [X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di}] + T_{ij}[x_C, y_C, z_C] \quad (3.31)$$

равенство (3.30) приводится к алгебраическому уравнению третьей степени относительно x_C, y_C, z_C . Оно определяет внутри тела Q_2 алгебраическую поверхность третьего порядка – геометрическое место точек, имеющих четыре положения на одном круговом цилиндре.

Из изложенного выше вытекает следующий алгоритм решения задачи синтеза звена $C\bar{C}$ по четырем положениям тела Q_2 :

- 1) выбирают любые две из координат x_C, y_C, z_C и из уравнения (3.30) определяют значение третьей;
- 2) по формуле (3.31) вычисляют координаты X_i, Y_i, Z_i ($i = 1, 2, 3, 4$), а по соотношениям (3.28), (3.29) значения f_{1i}, f_{2i} и f_{3i} ;
- 3) решением системы (3.26) находят величины X_A, Z_A, H ;
- 4) из равенства (3.27) вычисляют длину h звена.

При $N = 5$ и 6 получаем соответственно системы пяти и шести уравнений типа (3.26) относительно X_A, Z_A, H . В первом случае эти уравнения могут иметь общее решение, если кроме условия (3.30) удовлетворится равенство

$$|f_{1i}f_{2i}f_{3i}| = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 5) \quad (3.32)$$

а во втором для совместности системы к условиям (3.30), (3.32) следует прибавить условие

$$|f_{1i}f_{2i}f_{3i}| = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 6) \quad (3.33)$$

Если $N = 5$, положение точки C внутри тела Q_2 находится решением двух уравнений третьей степени, полученных из условий (3.30), (3.32) подстановкой соотношений (3.28), (3.29) и (3.24) при фиксированном значении одного из неизвестных x_C, y_C, z_C . При $N = 6$ точку C определяют решением системы трех кубических уравнений, получаемых на базе условий (3.30) – (3.33). После определения положения сферического шарнира процедура синтеза звена $C\bar{C}$ продолжается аналогично случаю $N = 4$.

3.4 Синтез исходной кинематической цепи с вращательной, вращательной и цилиндрической кинематическими парами

В данном разделе рассмотрим точное воспроизведение заданного закона движения выходного звена в зависимости от заданного закона движения входного звена проектируемого механизма. Для этого используем незамкнутую четырехзвенную ИКЦ.

Проектируемое ИКЦ определяется 11 постоянными параметрами, в число которых входят четыре параметра, определяющие положения оси Q в

системе $OXYZ$, еще четыре параметра, определяющие положение оси q_i в системе $oxyz$, кратчайшее расстояние h и угол γ между q и Q , постоянное расстояние l между точкой A и основанием B общего перпендикуляра BC осей q и Q .

Ось Q будет определена точкой A , в которой она пересекается с плоскостью XY и направляющими косинусами Q_x , Q_y , Q_z . Соответственно ось q будет определена ее точкой a_i , лежащей на плоскости xy , и направляющими косинусами q_x , q_y , q_z . Заметим, что из направляющих косинусов независимы только два. Звено BC можно получить из звена $ЦЦ$, если исключить поступательное движение вдоль оси Q . В векторной форме соответствующее условие связи имеет выражение

$$[(R_{ai} - R_A) \times Q] \cdot (Q \times q_i) = H = \text{const}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.34)$$

Несложными преобразованиями условие (3.34) можно привести к виду

$$(R_{ai} - R_A)G = H, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.35)$$

где $G = Q \cos \gamma_i - q_i = \text{const}$.

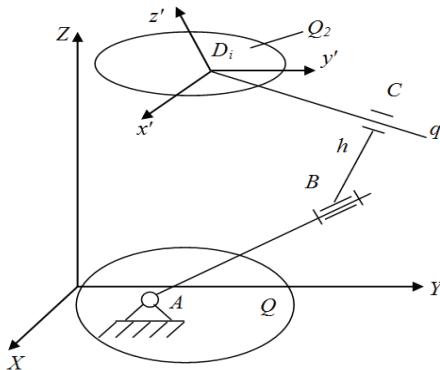


Рисунок 3.6

Уравнение (3.35) можно преобразовать к виду

$$x_a G_{ix} + y_a G_{iy} - X_A G_{ix} - Y_A G_{iy} - H = -F_i, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.36)$$

где G_{ix} , G_{iy} и G_{iz} , G_{iY} – проекции вектора G_i , соответственно на подвижные и неподвижные координатные оси и

$$F_i = X_{oi}G_{ix} + Y_{oi}G_{iY} + Z_{oi}G_{iz}$$

Комбинируя уравнение (3.36), отображающее условие (3.34), получаем простой алгоритм синтеза звена $B\bar{C}$ по трем положениям тела Q_2 . Поскольку в этом случае вновь имеются два свободных параметра, можно задаться направлением одной из осей Q и q . Пусть задано направление q , т. е. известны две из величин q_x , q_y , q_z ($q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 1$).

Вычисляем коэффициенты и свободные члены линейных уравнений

$$f_{1i}X_A + f_{2i}Y_A + f_{3i}x_a + f_{4i}y_a - h = f_{0i} \quad (3.37)$$

$$\text{где } f_{1i} = \frac{1}{\sin \gamma_i} (q_{iY}Q_Z - q_{iz}Q_Y) \\ f_{2i} = \frac{1}{\sin \gamma_i} (-q_{ix}Q_Z + q_{iz}Q_X)$$

и (3.36) f_{ji} , F_i и G_{ix} , G_{iy} , G_{iz} , G_{iY} , G_{iZ} ($i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3$). Решая систему шести линейных уравнений (3.37), (3.36) ($i = 1, 2, 3$), находим значения x_a , y_a , X_A , Y_A , определяющие положения осей q и Q соответственно в системах $oxyz$ и $OXYZ$ и расстояние h . Вычисляем величину $l = AB$, определяющую положение центра B вращательной пары на неподвижной оси Q :

$$l = \frac{\begin{vmatrix} (R_{ai} - R_A)Q & q_i Q \\ (R_{ai} - R_A)q_i & q_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Q^2 & q_i Q \\ q_i Q & q_i^2 \end{vmatrix}} \quad (3.38)$$

В описанной процедуре синтеза использовались лишь линейные системы уравнений, откуда следует очевидный вывод: любому заданному направлению оси q (оси Q) соответствует единственное звено $B\bar{C}$, переводящее тело Q_2 через заданные три положения.

3.5 Синтез пространственных рычажных передаточных механизмов с вращательной, двумя сферическими и поступательной кинематическими парами

В данном разделе рассмотрим задачи синтеза пространственных механизмов с поступательным, вращательным, и сферическим кинематическими парами с избыточными и без избыточными связями. Эти все связи относятся к голономным связям [186, 187].

1 Аппроксимационный синтез пространственного кривошипно-ползунного механизма типа *BCCP* на основе ИКЦ по заданным положениям входного и выходного звеньев.

Пусть заданы угол поворота φ – входного звена и соответственно положения выходного звена проектируемого механизма (рисунок 3.7).

Составим взвешенную разность Δ_{q_i} :

$$\Delta_{q_i} = (X_{B_i} - X_{A_i})^2 + (Y_{B_i} - Y_{A_i})^2 + (Z_{B_i} - Z_{A_i})^2 - R^2 \quad (3.39)$$

$(i = 1, N)$

Где $X_{A_i} = a \cos \varphi_i \quad X_{B_i} = X_0$
 $Y_{A_i} = a \sin \varphi_i \quad Y_{B_i} = S \sin \alpha$
 $Z_{A_i} = 0 \quad Z_{B_i} = Z_0 + S \cos \alpha$

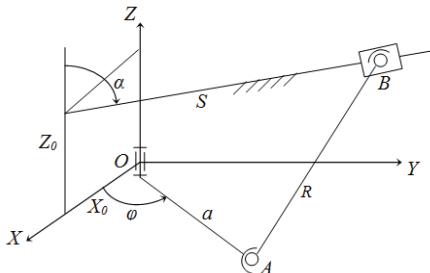


Рисунок 3.7

Подставляя значения X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B , находим

$$\Delta_{q_i} = (X_0 - a \cos \varphi_i)^2 + (S \sin \alpha - a \sin \varphi_i)^2 + (Z_0 - S \cos \alpha)^2 - R^2 \quad (3.41)$$

Упращая и используя тригонометрические тождества, приводим выражение (3.41) к виду

$$\Delta_{q_i} = -2aX_0 \cos \varphi_i - 2a \sin \alpha (S_i \sin \varphi_i) + 2Z_0 \cos \alpha \cdot s + X_0^2 + a^2 + Z_0^2 - R^2 + S^2 \quad (3.42)$$

Введем обозначения

$$G_1 = 2X_0; \quad G_2 = 2a \sin \alpha; \quad G_3 = 2Z_0 \cos \alpha; \quad G_4 = X_0^2 + Z_0^2 + a^2 - R^2$$

Уравнение (3.42) принимает вид:

$$\Delta_{q_i} = -G_1 \cos \varphi_i + G_2 (S_i \sin \varphi_i) + G_3 S_i + G_4 + S_i^2 \quad (3.43)$$

Из необходимого условия минимума суммы квадратов взвешенной разности:

$$S = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i]^2 \quad (i=1, N) \quad (3.44)$$

можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{dS}{dj} = 0, \quad (j = G_1 \div G_4) \quad (3.45)$$

Записав уравнение для $(\varphi_i, S_i, i=1,4)$, получаем систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными. После определения неизвестных коэффициентов G_1, G_2, G_3, G_4 путем стандартного решения линейной системы уравнений можно найти требуемые конструктивные параметры механизма из следующего выражения:

$$a = \frac{G_1}{2X_0}; \quad \alpha = \arcsin \left(\frac{G_2}{2a} \right); \quad Z_0 = \frac{G_3}{2 \cos \alpha}; \quad (3.46)$$

$$R = \sqrt{(X_0^2 + Z_0^2 + a^2 - G_4)}$$

При аппроксимации по шести положениям, угол поворота входного звена и положение выходного ползуна S_1 , соответствующие первой точной точке, добавляется к четырем неизвестным параметрам (a, R, X_0, Z_0), определяющим из уравнения (3.39).

При подстановке $S_i = S_0 + S_i$ и $\varphi_i = \varphi_0 + \varphi_i$ в уравнение (3.43) получаем систему из шести уравнений, линейных относительно неизвестных G_i , $i=1,6$

$$\Delta_{q_i} = -G_1(S_i \cos \varphi_i) - G_2(S_i \sin \varphi_i) - G_3(\cos \varphi_i) + G_4(\sin \varphi_i) + G_5 S_i + G_6 + S_i^2 \quad (3.47)$$

$i=\overline{1,6}$

где

$$G_1 = 2a \sin \alpha \sin \varphi_0$$

$$G_2 = 2a \sin \alpha \cos \varphi_0$$

$$G_3 = 2a X_0 \cos \varphi_0 + 2a S_0 \sin \alpha \sin \varphi_0$$

$$G_4 = 2a X_0 \sin \varphi_0 + 2a S_0$$

$$G_5 = 2Z_0 \cos \alpha + 2S_0$$

$$G_6 = X_0^2 + Z_0^2 + a^2 - R^2 + S_0^2 + 2Z_0 Z_0 \cos \alpha$$

Определив неизвестные коэффициенты G_1 , G_2 , G_3 , G_4 , G_5 , G_6 , из необходимого условия минимума суммы (3.45) с учетом (3.46) можно найти значения шести искомых параметров из соотношений:

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{G_2}{G_1}; \quad a = \frac{G_1}{2} \sin \alpha \sin \varphi_0$$

$$X_0 = \frac{\begin{vmatrix} G_3 & 2a \sin \alpha \sin \varphi_0 \\ G_4 & -2a \sin \alpha \cos \varphi_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2a \cos \varphi_0 & 2a \sin \alpha \sin \varphi_0 \\ 2a \sin \varphi_0 & 2a \sin \alpha \cos \varphi_0 \end{vmatrix}}$$

$$S_0 = \frac{\begin{vmatrix} 2a \cos \varphi_0 & G_3 \\ 2a \sin \varphi_0 & G_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2a \cos \varphi_0 & 2a \sin \alpha \sin \varphi_0 \\ 2a \sin \varphi_0 & -2a \sin \alpha \cos \varphi_0 \end{vmatrix}}$$

$$Z_0 = \frac{G_5 2S_0}{2 \cos \alpha}; \quad R = (X_0^2 + Z_0^2 + a^2 S_0^2 + 2Z_0 S_0 \cos \alpha)^{\frac{1}{2}}$$

3.6 Синтез пространственных рычажных передаточных механизмов с вращательной, цилиндрической, сферической и поступательной кинематическими парами

В данном разделе рассмотрен аппроксимационный синтез пространственного кривошипно-ползунного механизма типа *ВЦСП* на

основе ИКЦ по заданным положениям входного и выходного звеньев (рисунок 3.8).

На основе решения данной задачи можно получить пространственный механизм ВЦВП. В этом случае оси пар вращательных и цилиндрических пар параллельны.

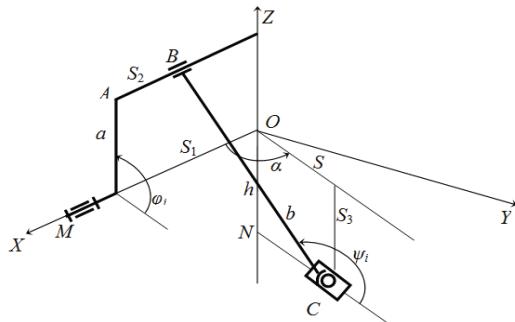


Рисунок 3.8

Связь между выходным и входным звеньев φ и S можно получить, если приравнять координаты XYZ точки C

$$\begin{aligned} X_C &= S_1 - S_2 = S \cos \alpha \\ Y_C &= a \cos \varphi + b \cos(180 - \psi_i) = S \sin \alpha \\ Z_C &= a \sin \varphi - b \sin(180 - \psi_i) = S_3 \end{aligned}$$

Исключая ψ_i находим

$$G_1 + G_2 \sin \varphi + G_3 S^2 = S \cos \varphi \quad (3.48)$$

$$\text{Где } G_1 = \frac{b^2 - a^2 - S_3^2}{2a \sin \alpha}$$

$$G_2 = -\frac{S_3}{\sin \alpha}$$

$$G_3 = \frac{\sin \alpha}{2a}$$

Теперь $\varphi_i = \varphi_0 + \varphi_i$ и $S_i = S_0 + S_i$ тогда подставляя в (3.48) и преобразуя, получим

$$\Delta_{q_i} = G_1 + G_2 \cos \varphi_i + G_3 \sin \varphi_i + G_4 S_i^2 + G_5 S_i - S_i \cos \varphi_i - G_6 S_i \sin \varphi_i \quad (3.49)$$

$$\text{Где } G_1 = \frac{\sin \alpha}{2a} S_0^2 - \frac{b^2 - a^2 - S_0^2}{2a \sin \alpha \cos \varphi_0}$$

$$G_2 = -S_0 \operatorname{tg} \varphi_0 - S_0$$

$$G_3 = S_0 \operatorname{tg} \varphi_0 - \frac{S_0}{\sin \alpha}$$

$$G_4 = \frac{\sin \alpha}{2a}$$

$$G_5 = \frac{\sin \alpha V_0}{a}$$

$$G_6 = -\operatorname{tg} \varphi_0$$

Все коэффициенты G_i линейно связаны условием

$$G_2 G_4 + \frac{1}{2} G_5 = -G_3 G_4 G_6 - \frac{1}{2} G_5 G_6^2$$

Из необходимого условия минимума сумма

$$S = \sum_{i=1}^N (\Delta_{q_i})^2$$

можно определить шесть искомых параметров синтеза.

Аналогично можно рассмотреть аппроксимационный синтез пространственного кривошипно-коромыслового механизма типа *BCCB* на основе ИКЦ по заданным положениям входного и выходного звеньев

Таким образом, рассмотренные задачи аппроксимационного синтеза четырехзвенных пространственных рычажных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев на основе ИКЦ решаются относительно искомых параметров линейно.

3.7 Синтез двухэлементного звена со сферической и цилиндрической кинематическими парами

В данном разделе рассмотрен интерполяционный синтез двухэлементного звена со сферической и цилиндрической кинематическими парами по заданным положениям перемещающего тела.

Проектируемое звено (рисунок 3.9) определяется 8 постоянными параметрами, в том числе: координатами x_B, y_B, z_B , центра B сферической пары, четырьмя независимыми параметрами, задающими ось цилиндрической пары в системе $OXYZ$ и длиной звена, т. е. расстоянием h точки B от оси Q . Звено CQ ограничивает движение точки B по прямому круговому цилинду с осью Q и радиусом h . Для аналитического описания соответствующего условия связи условимся определять в дальнейшем ось Q единичным направляющим вектором $Q(Q_x, Q_y, Q_z)$ и точкой пересечения $A(X_A, O, Z_A)$ оси Q с координатной плоскостью XZ .

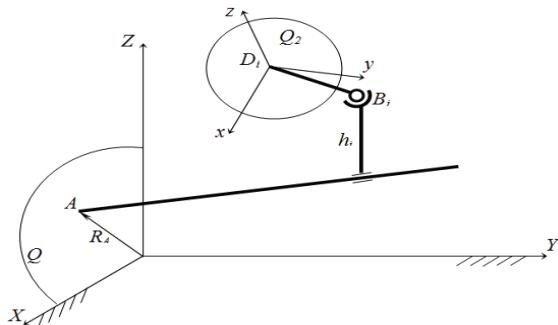


Рисунок 3.9

Расстояние h_i точки B_i от оси Q в i -м положении тела Q_2 имеет следующее выражение:

$$h_i = |(R_{B_i} - R_A) \times Q| \quad (3.50)$$

Уравнения связей, налагаемых рассматриваемым звеном на перемещения точки B , представляются в виде

$$\Delta = h_i - h, \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

или

$$\Delta = h_i^2 - h^2, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.51)$$

Подставляя в уравнение (3.51) формулу (3.50) и принимая обозначение $U_i = R_{Bi} \times Q$, после преобразований получаем

$$f_{1i}X_A + f_{2i}Z_A + H = f_{3i} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.52)$$

где H – независящая от положения тела Q_2 постоянная

$$H = R_A^2 - h^2 - (R_A Q)^2 \quad (3.53)$$

а f_{1i} , f_{2i} и f_{3i} – известные функции от искомых координат x_B , y_B , z_B и направляющих косинусов Q_X , Q_Y , Q_Z оси Q :

$$\begin{aligned} f_{1i} &= 2(Q_Z U_{iY} - Q_Y U_{iZ}) \\ f_{2i} &= 2(Q_Y U_{iX} - Q_X U_{iY}) \\ f_{3i} &= -(U_{iX}^2 + U_{iY}^2 + U_{iZ}^2) \end{aligned} \quad (3.54)$$

причем

$$\begin{aligned} U_{iX} &= \begin{vmatrix} Y_{Bi} & Z_{Bi} \\ Q_Y & Q_Z \end{vmatrix} \\ U_{iY} &= \begin{vmatrix} Z_{Bi} & X_{Bi} \\ Q_Z & Q_X \end{vmatrix} \\ U_{iZ} &= \begin{vmatrix} X_{Bi} & Y_{Bi} \\ Q_X & Q_Y \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Выполним синтез звена $C\bar{C}$ при фиксированном направлении оси Q , т.е. при известных значениях Q_X , Q_Y , Q_Z . При $N = 4$ из уравнений (3.52) получаем систему четырех линейных уравнений относительно трех искомых параметров X_A , Z_A , H . Для совместности этой системы необходимо условие

$$|f_{1i}f_{2i}f_{3i}| = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (3.56)$$

Подстановкой соотношений (3.54), в которые внесены выражения (3.55), и дальнейшим преобразованием с учетом формулы (2.177) равенство (3.56) приводится к алгебраическому уравнению третьей степени относительно x_B , y_B , z_B . Оно определяет внутри тела Q_2 алгебраическую поверхность третьего порядка – геометрическое место точек, имеющих четыре положения на одном круговом цилиндре.

Из изложенного выше вытекает следующий алгоритм решения задачи синтеза звена CQ по четырем положениям тела Q_2 :

- 1) выбирают любые две из координат x_B , y_B , z_B и из уравнения (3.56) определяют значение третьей;
- 2) по формуле (2.177) вычисляют координаты X_i , Y_i , Z_i ($i = 1, 2, 3, 4$), а по соотношениям (3.54), (3.55) значения f_{1i} , f_{2i} и f_{3i} ;
- 3) решением системы (3.52) находят величины X_A , Z_A , H ;
- 4) из равенства (3.53) вычисляют длину h звена.

При $N = 5$ и 6 получаем соответственно системы пяти и шести уравнений типа (3.52) относительно X_A , Z_A , H . В первом случае эти уравнения могут иметь общее решение, если кроме условия (3.56) удовлетворится равенство:

$$|f_{1i}f_{2i}f_{3i}| = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 5) \quad (3.57)$$

а во втором для совместности системы к условиям (3.56), (3.57) следует прибавить условие:

$$|f_{1i}f_{2i}f_{3i}| = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 6) \quad (3.58)$$

Если $N = 5$, положение точки B внутри тела Q_2 находится решением двух уравнений третьей степени, полученных из условий (3.56), (3.57) подстановкой соотношений (3.54), (3.55) и (3.50) при фиксированном значении одного из неизвестных x_B , y_B , z_B . При $N = 6$ точку B определяют решением системы трех кубических уравнений, получаемых на базе условий (3.56)–(3.58). После определения положения сферического шарнира процедура синтеза звена CQ продолжается аналогично случаю $N = 4$.

3.8 Синтез двухэлементного звена с вращательной и цилиндрической кинематическими парами

В данном разделе рассмотрен интерполяционный синтез двухэлементного звена с вращательной и цилиндрической кинематическими парами по заданным положениям перемещающего тела.

Данное звено (рисунок 3.10) характеризуется 11 постоянными параметрами, в число которых входят четыре параметра, определяющие положения оси Q в системе $OXYZ$, еще четыре параметра, определяющие положение оси q_i в системе $oxuz$, кратчайшее расстояние h и угол γ между q и Q , постоянное расстояние l между точкой B и основанием L общего перпендикуляра ML осей q и Q . Ось Q будет определена точкой B , в которой она пересекается с плоскостью XY и направляющими косинусами Q_x , Q_y , Q_z . Соответственно ось q будет определена ее точкой

b_i , лежащей на плоскости xy , и направляющими косинусами q_x, q_y, q_z . Заметим, что из направляющих косинусов независимы только два. Звено BQ можно получить из звена $ЦЦ$, если исключить поступательное движение вдоль оси Q . В векторной форме соответствующее условие связи имеет выражение

$$[(R_{bi} - R_B) \times Q] \cdot (Q \times q_i) = H = \text{const}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.59)$$

Несложными преобразованиями условие (3.59) можно привести к виду

$$(R_{bi} - R_B)G = H, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.60)$$

где $G = Q \cos \gamma_i - q_i = \text{const}$.

Уравнение (3.60) можно преобразовать к виду

$$x_b G_{ix} + y_b G_{iy} - X_B G_{ix} - Y_B G_{iy} - H = -F_i, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.61)$$

где G_{ix}, G_{iy} и G_{ix}, G_{iy} – проекции вектора G_i , соответственно на подвижные и неподвижные координатные оси и

$$F_i = X_{oi} G_{ix} + Y_{oi} G_{iy} + Z_{oi} G_{iz}.$$

Комбинируя уравнение (3.61), отображающее условие (3.59), с уравнениями синтеза звена $ЦЦ$, получаем простой алгоритм синтеза звена BQ по трем положениям тела Q_2 . Поскольку в этом случае вновь имеются два свободных параметра, можно задаться направлением одной из осей Q и q . Пусть задано направление q , т. е. известны две из величин q_x, q_y, q_z ($q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 1$).

При $N = 3$, выполняя операции 2 – 4 алгоритма синтеза звена $ЦЦ$, находим направление оси Q и угол $\gamma = \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$). Далее процедура синтеза осуществляется в следующей последовательности. Вычисляем коэффициенты и свободные члены линейных уравнений (3.62) и (3.61) f_{ji}, F_i и $G_{ix}, G_{iy}, G_{iz}, G_{ix}, G_{iy}, G_{iz}$ ($i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3$).

$$f_{1i}X_B + f_{2i}Y_B + f_{3i}x_b + f_{4i}y_b - h = f_{0i}, \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (3.62)$$

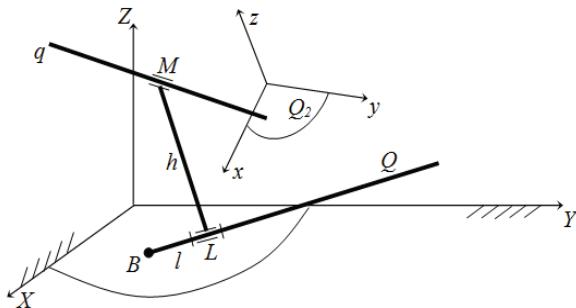


Рисунок 3.10

Решая систему шести линейных уравнений (3.62), (3.61) ($i = 1, 2, 3$), находим значения x_b , y_b , X_B , Y_B , определяющие положения осей q и Q соответственно в системах $oxyz$ и $OXYZ$ и расстояние h . Вычисляем величину $l = BL$, определяющую положение центра L вращательной пары на неподвижной оси Q :

$$l = \frac{\begin{vmatrix} (R_{bi} - R_B)Q & q_i Q \\ (R_{bi} - R_B)q_i & q_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Q^2 & q_i Q \\ q_i Q & q_i^2 \end{vmatrix}} \quad (3.63)$$

В описанной процедуре синтеза использовались лишь линейные системы уравнений, откуда следует очевидный вывод: любому заданному направлению оси q (оси Q) соответствует единственное звено BL , переводящее тело Q_2 через заданные три положения.

3.9 Синтез двухэлементного звена с двумя цилиндрическими кинематическими парами

Рассмотрим задачу синтеза звена $ЦЦ$ (см. рисунок 3.11) по условию приближенного воспроизведения N положений тела.

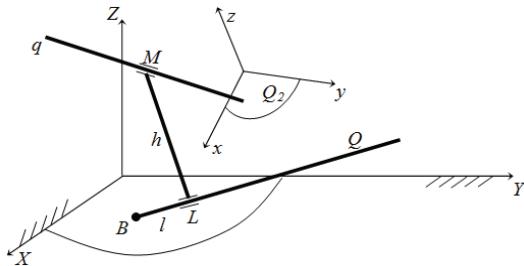


Рисунок 3.11

Десять конструктивных параметров этого звена должны приближенно удовлетворять уравнениям (2.191) и (2.192). Поэтому конструктивные параметры звена будут определены из условия минимизации неувязок уравнений (2.191) и (2.192), которые обозначим соответственно через Δ_{1i} и Δ_{2i} . Разделив обе части уравнений (2.191) на $Q_z q_z$, получаем следующее выражение для функций Δ_{1i} :

$$\Delta_{1i} = G_1 \varphi_{1i} + G_2 \varphi_{2i} + G_3 + \varphi_{0i}, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.64)$$

где

$$G_1 = \frac{Q_x}{Q_z}; \quad G_2 = \frac{Q_y}{Q_z}; \quad G_3 = -\frac{\cos \gamma}{Q_z q_z} \quad (3.65)$$

а φ_{1i} , φ_{2i} , φ_{3i} – линейные функции от параметров $G_4 = q_x/q_z$, $G_5 = q_y/q_z$, определяемые матричным уравнением

$$[\varphi_{1i}, \varphi_{2i}, \varphi_{3i}]^t = T_i [G_4, G_5, 1]^t \quad (3.66)$$

Принимая обозначения $X_B = p_1$, $Y_B = p_2$, $x_B = p_3$, $y_B = p_4$, $-h = p_5$, из уравнения (2.192) получаем следующее выражение для функций Δ_{2i} :

$$\Delta_{2i} = \sum_{j=1}^5 p_j f_{ji} - f_{0i}, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.67)$$

Функции (3.64) зависят только от параметров Q_x , Q_y , Q_z , q_x , q_y , q_z проектируемого звена, задающих направления осей Q и q цилиндрических пар относительно соответствующих систем координат, и постоянной $\cos \gamma$. Следовательно, задача определения направлений осей q и Q может быть

решена независимо от положений точек B и b этих осей. При этом надо исходить из условий минимума суммы

$$S_1 = \sum_{i=1}^N \Delta_{1i}^2 \quad (3.68)$$

Сумма (3.68), как и (3.64), является функцией неизвестных G_1, G_2, G_3, G_4 и G_5 . Условия стационарности (3.68) по указанным параметрам имеют вид

$$\partial S_j / \partial G_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (3.69)$$

Из выражения (3.64) видно, что функции Δ_{1i} линейны относительно параметров G_1, G_2, G_3 . Подстановкой формулы (3.66) в уравнения (3.64) и последующим преобразованием Δ_{1i} можно представить линейно по G_4 и G_5 :

$$\Delta_{1i} = G_4 \varphi_{4i} + G_5 \varphi_{5i} + G_3 + \varphi'_{0i} \quad (3.70)$$

где

$$[\varphi_{4i}, \varphi_{5i}, \varphi'_{0i}]^t = T_i^{-1} [G_1, G_2, 1]^t \quad (3.71)$$

Первые три условия (3.69) для стационарности суммы (3.68) с помощью выражения (3.64) приводятся к уравнениям, линейным относительно G_1, G_2, G_3 :

$$\begin{bmatrix} \sum \varphi_{1i}^2 & \sum \varphi_{1i} \varphi_{2i} & \sum \varphi_{1i} \\ \sum \varphi_{1i} \varphi_{2i} & \sum \varphi_{2i}^2 & \sum \varphi_{2i} \\ \sum \varphi_{1i} & \sum \varphi_{2i} & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sum \varphi_{1i} \varphi_{0i} \\ \sum \varphi_{2i} \varphi_{0i} \\ \sum \varphi_{0i} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Последние три условия (3.69) посредством выражения (3.70) преобразуются к уравнениям, линейным относительно G_4, G_5, G_3 :

$$\begin{bmatrix} \sum \varphi_{4i}^2 & \sum \varphi_{4i} \varphi_{5i} & \sum \varphi_{4i} \\ \sum \varphi_{4i} \varphi_{5i} & \sum \varphi_{5i}^2 & \sum \varphi_{5i} \\ \sum \varphi_{4i} & \sum \varphi_{5i} & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_4 \\ G_5 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \varphi_{4i} \varphi'_{0i} \\ \sum \varphi_{5i} \varphi'_{0i} \\ \sum \varphi'_{0i} \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

При известном направлении оси q , т. е. при известных G_4 и G_5 , система (3.71) определяет посредством соотношений (3.65) и условия

$$Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2 = 1$$

направление оси Q и угол γ между осями цилиндрических пар звена ЦЦ. И наоборот, согласно (3.72) каждому известному направлению оси Q соответствует единственное направление оси q и межосевой угол γ , определяемые из соотношений $q_x = G_4 q_z$, $q_y = G_5 q_z$ и условия $q_x^2 + q_y^2 + Q_z^2 = 1$.

Для обращения в минимум суммы (3.68) направляющие косинусы осей q и Q и угол γ должны одновременно удовлетворять уравнениям (3.71) и (3.72). Следовательно, направление оси q должно быть таким, чтобы, определив для него из системы (3.71) величины G_1 , G_2 , G_3 и далее решая систему (3.72) при данных G_1 , G_2 , и G_3 , можно было найти значения G_4 и G_5 , соответствующие исходному направлению q . Для достижения этого условия используем неоднократно примененную ранее итерационную процедуру поиска минимума. Алгоритм вычисления «вектора направлений» G (G_1 , ..., G_5) звена ЦЦ, реализующего минимум суммы (3.68), сводится к следующему:

- 1) произвольно выбирают направление $q^{(0)}(q_x^{(0)}, q_y^{(0)}, q_z^{(0)})$ оси q , вычисляют $G_4^{(0)} = q_x^{(0)} / q_z^{(0)}$ и $G_5^{(0)} = q_y^{(0)} / q_z^{(0)}$ затем по формуле (3.66) – $\varphi_{ii}^{(0)}$, $\varphi_{2i}^{(0)}$, $\varphi_{0i}^{(0)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$), далее находят коэффициенты и свободные члены линейных уравнений (3.71);
- 2) решением системы (3.71) находят $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$, $G_3^{(1)}$, затем вычисляют значение $S_1^{(1)}$ суммы (3.68);
- 3) по формуле (3.66) получают значения $\varphi_{4i}^{(1)}$, $\varphi_{5i}^{(1)}$, $\varphi_{0i}^{(1)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$), затем коэффициенты и свободные члены уравнений (3.72);
- 4) решением системы (3.72) находят величины $G_4^{(1)}$, $G_5^{(1)}$, $G_3^{(2)}$ и вычисляют соответствующее значение $S_1^{(2)}$ суммы (3.68);
- 5) проверяют условие $\max(|G_4^{(1)} - G_4^{(0)}|, |G_5^{(1)} - G_5^{(0)}|) \leq \varepsilon$ и при не выполнении этого условия осуществляют следующую итерацию.

Для найденного вектора направления G определяют направляющие косинусы осей q , Q и угол γ . Описанная процедура может быть использована для синтеза звена BB с пересекающимися осями вращательных пар по заданным положениям тела Q_2 с одной неподвижной точкой. К необходимости решения этой задачи приводит синтез сферических шарирных механизмов по заданным условиям движения.

Переходим к определению остальных конструктивных параметров проектируемого звена: неизвестных координат X_B , Y_B , x_b , y_b точек B и b ,

принадлежащих соответственно осям Q и q , и длины h звена при известных направлениях q и Q . Искомые параметры должны быть определены по условию минимума суммы

$$S_2 = \sum_{i=1}^N \Delta_{2i}^2 \quad (3.74)$$

Рассматривая необходимые условия минимума функции (3.73) по p_1, p_2, p_3, p_4, p_5

$$\partial S_2 / \partial p_j = 0, \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

с помощью выражения (3.67) приходим к линейной системе

$$\sum_{k=1}^5 c_{kj} p_k = \gamma_j, \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (3.75)$$

где для краткости записи приняты обозначения

$$c_{kj} j = \sum_{i=1}^N f_{ki} f_{ji} = \gamma_j, \quad \gamma_j = \sum_{i=1}^N f_{0i} f_{ji}, \quad (k, j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

Из выражений (3.67) ясно, что коэффициенты и свободные члены в уравнениях (3.74) зависят от параметров положений тела Q_2 и направляющих косинусов осей q и Q , которые были вычислены на предшествующем этапе решения задачи.

Для каждой пары сопряженных направлений осей q и Q цилиндрических пар, найденном из условия минимума суммы S_1 , система (3.74) определяет единственное сочетание параметров p_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) и поэтому единственное звено типа ЦЦ.

Выводы по третьему разделу

1. Доказана теорема существования решения задачи синтеза незамкнутой четырехзвенной ИКЦ со сферическими парами. В вырожденных случаях решения задачи, доказана необходимость замены сферической пары на плоскостную или цилиндрическую пару.

2. Разработан аналитический метод кинематического синтеза ИКЦ с вращательной, плоскостной и сферической парами по заданным законам движения входного и выходного звеньев синтезируемого механизма, основанный на применении невырожденных преобразований в пространстве искомых параметров ИКЦ.

3. Разработан аналитический метод кинематического синтеза ИКЦ с вращательной, цилиндрической и сферической парами по заданным законам движения входного и выходного звеньев синтезируемого механизма, основанный на применении невырожденных преобразований в пространстве искомых параметров ИКЦ. Показано, что задачи синтеза ИКЦ с кулисой всегда разрешимы, а в случае вырождения решения эта задача решается заданием одного или двух искомых параметров из конструктивных соображений.

4. Рассмотрены задачи кинематического синтеза модификаций ИКЦ, при задании части искомых параметров, а также составлена таблица модификаций ИКЦ с вращательными, цилиндрическими и сферическими парами. Показано, что к задачам синтеза модификаций ИКЦ сводятся задачи синтеза четырехзвенных кулисных механизмов.

5. Разработан оптимизационный метод кинематического синтеза двухэлементного звена с различными парами с точным воспроизведением заданных положений ведомого звена синтезируемого механизма.

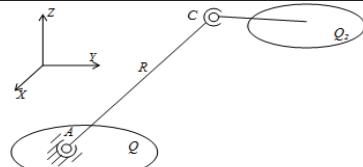
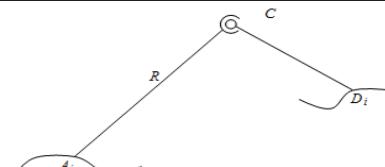
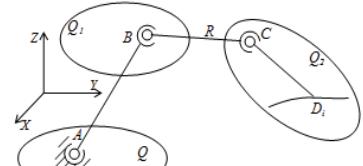
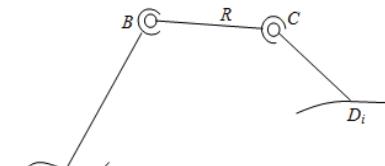
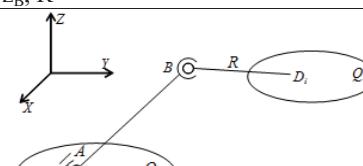
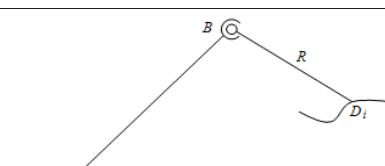
6. Разработан оптимизационный метод кинематического синтеза ИКЦ с различными парами с точным воспроизведением заданных положений входного и выходного звеньев синтезируемого механизма

4 Структурно - кинематический синтез пространственных рычажных механизмов

4.1 Структурный синтез пространственных рычажных механизмов на основе исходных кинематических цепей

Синтез пространственных рычажных механизмов высоких классов (ПРМВК) по заданным положениям входного и выходного звеньев механизма на основе исходных кинематических цепей (ИКЦ) приводит к автоматизации синтеза с помощью ЭВМ, то есть алгоритмизируемость формирования структуры из ИКЦ и алгоритмизируемость наложения геометрических связей для создания различных модификаций (таблица 4.1) [188, 189, 190, 191].

Таблица 4.1

| | |
|--|---|
| 1.1. $x_B=y_B=z_B=0, X_A, Y_A, Z_A, x_C, y_C, z_C, R$  | 1.2. $x_B=y_B=z_B=0, x_C, y_C, z_C, R$  |
| 2.1. $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C, R$  | 2.2. $x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C, R$  |
| 3.1. $x_C=y_C=z_C=0, X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R$  | 3.2. $x_C=y_C=z_C=0, x_B, y_B, z_B, R$  |

Модификация ИКЦ (таблица 4.1–2.2.) может быть использована при наложении геометрических связей на относительное движение двух несмежных подвижных звеньев, а модификации ИКЦ (таблица 4.1–1.1.) может быть использована при наложении геометрической связи на движение подвижного звена относительно стойки механизма, и т.д. [192, 193, 194].

Решение задачи синтеза основной ИКЦ (таблица 4.1–2.1) по заданным положениям входного и выходного звеньев механизма рассмотрены в разделе 2.1.

Число степеней подвижности ИКЦ относительно стойки равно сумме подвижности входного и выходного звена механизма. Чтобы получить из ИКЦ механизм необходимо наложить геометрические связи с отрицательной степенью подвижности. В таблице 4.2 показаны все виды модификации ИКЦ с отрицательными степенями подвижности получаемых из ИКЦ (таблица 4.1–2.1.) при комбинации заданных и искомых параметров.

При проектировании механизмов должны получить схему механизма с минимальным количеством звеньев. Если используем ИКЦ (таблица 4.1–2.1.) со сферическими парами, то степень подвижности ИКЦ равно $W=9$. Чтобы спроектировать механизм со степенью подвижности равной $W=1$, необходимо наложить геометрическую связь с отрицательной степенью подвижности $W=-8$. Для этого используем модификации ИКЦ (таблица 4.1–3.1.) типа BB (где B – вращательная кинематическая пара) получаемых при по парном сочетании четырех звеньев ИКЦ, приводя к трем вариантам (рисунок 4.1).

Вариант I. Получим ИКЦ $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \xrightarrow{\rightarrow 3} \rightarrow 4 \rightarrow 0$ (рисунок 4.2).

Число попарных сочетаний несмежных звеньев равно трем: (0,3); (1,3); (3,4), т.е. имеем три варианта наложения второй связи (таблица 4.2), которые, как нетрудно убедиться из рисунка 4.2, приводят к трем различным механизмам II класса.

Вариант II. Получим ИКЦ $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 0$ (рисунок 4.3).

Число по парных сочетаний несмежных звеньев равно четырем: (0,2); (0,3); (1,3); (2,4), т.е. имеем четыре варианта наложения второй геометрической связи. Получаем четыре различных классов механизма, из которых один – II класса, два – III класса и один – IV класса. Следует отметить, что полученный механизм II класса уже встречался в варианте I.

Вариант III. Получим ИКЦ $0 \rightarrow 1 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{4} \dots$ (рисунок 4.4).

Число попарных сочетаний несмежных звеньев равно трем: (0,2); (0,3); (0,4). В итоге наложения второй связи получаем три различных механизма из которых два – II класса, один – III класса. Надо отметить, что все они встречались в вариантах III и II.

Таблица 4.2

| | $n=1, p_3=2$ | $n=1, p_3=p_4=1$ | $n=2, p_3=1, p_5=2$ $n=2, p_4=2, p_5=1$ |
|--------|----------------------|----------------------|--|
| $W=-1$ | | | |
| $W=-2$ | $n=1, p_3=p_5=1$ | $n=1, p_4=2$ | $n=2, p_4=1, p_5=2$ |
| $W=-3$ | $n=0, p_3=1$ | $n=1, p_4=p_5=1$ | $n=2, p_5=3$ |
| $W=-4$ | $n=0, p_4=1$ | $n=1, p_5=1$ | |
| $W=-5$ | $n=0, p_5=1$ | | |

Таким образом, при использовании незамкнутой четырехзвенной ИКЦ – (таблица 4.1–2.1.) со сферическими парами с девятью степенями свободы и ее модификации ИКЦ (таблица 4.1–1.1, 2.2.) с вращательными

кинематическими парами (таблица 4.2) приходим к шести различным шестизвездным механизмам со сферическими и вращательными парами, из которых три механизма II класса, два III класса, один IV класса. Использование трех видов модификации ИКЦ приводит к большому количеству звеньев механизма.

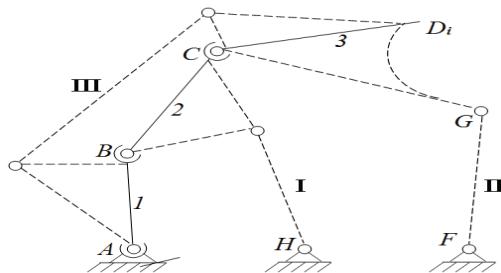


Рисунок 4.1

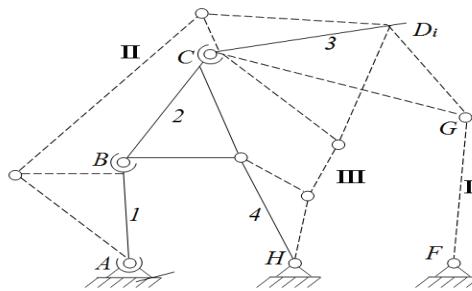


Рисунок 4.2

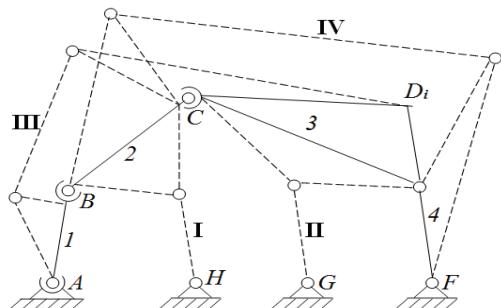


Рисунок 4.3

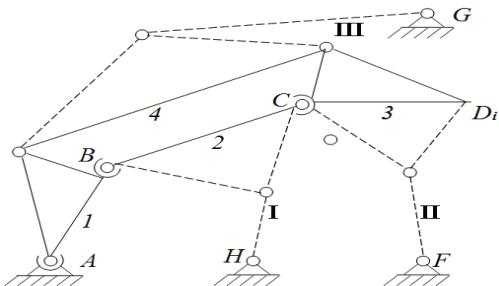


Рисунок 4.4

Обычно в качестве ведущего звена принимают звенья с одной степенью подвижности относительно стойки – это кривошип или ползун. Пусть выходное звено имеет шесть степеней подвижности и входное звено одну степень подвижности. Тогда ИКЦ имеет вид типа BCC или PCC (где B – вращательная, P – поступательная, C – сферическая кинематические пары). Рассмотрим ИКЦ имеющий степень подвижности $W=7$ с кинематическими парами BCC (рисунок 4.5).

Для наложения геометрической связи на относительное звено ИКЦ используем модификации ИКЦ типа BC_P (где C_P – сферическая с пальцем кинематическая пара) имеющий $W=3$ степени подвижности. Повторяя наложение геометрической связи на несмежные звенья ИКЦ, как в первом случае, имеем шесть различных классов механизмов.

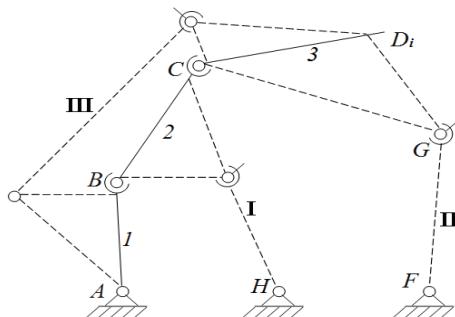


Рисунок 4.5

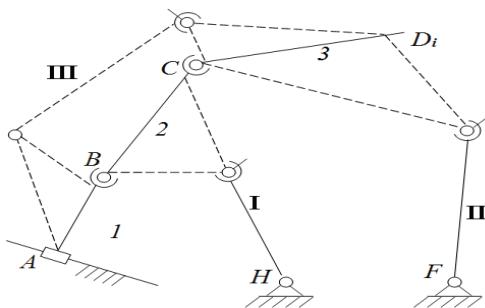


Рисунок 4.6

В последнем случае, когда входное звено ИКЦ является ползун, т.е. типа $ПСС$, то аналогично имеем шесть различных шестизвенных механизмов (рисунок 4.6). В составе шестизвенного механизма имеются три механизма II класса, два III класса и один IV класса.

Из вышесказанного видно, что ИКЦ (таблица 4.1–2.1) может быть соединено со стойкой сферической, сферической с пальцем, вращательной и поступательной кинематическими парами. Следовательно, степень подвижности ИКЦ может быть равно от четырех до девяти, т.е. имеем шесть вариантов ИКЦ. С учетом этого число возможных вариантов структурной реализации двух последовательно налагаемых геометрических связей равно $6^2=36$, что в итоге приводит к $6 \times 36 = 216$ различным теоретически возможным шестизвенным механизмам, получаемым на основе ИКЦ (таблица 4.1–2.1).

Среди них соотношение числа механизмов различных классов останется в той же пропорции. В итоге имеем 108 механизмов II-го класса, 72 механизма III-го класса и 36 механизмов IV класса. С учетом того, что в ходе синтеза возможны $6 \times 4 = 24$ вариантов самой ИКЦ, то все выше указанные цифры надо умножить на 24, т.е. число возможных структурных схем шестизвенных перемещающихся механизмов равно $24 \times 216 = 5184$.

Таким образом, использование для синтеза механизма ИКЦ с четырьмя – девятью степенями свободы и их модификации, позволяет получить все мыслимые структурные схемы шестизвенных одноподвижных механизмов.

4.2 Общий метод синтеза пространственных рычажных механизмов на основе исходных кинематических цепей

Использование ИКЦ и их модификации при синтезе механизмов зависит от заданных условий синтеза. Заданными условиями синтеза в общем случае как обычно является законы движения входного и

выходного звеньев механизма. Один из возможных методов к синтезу механизмов по заданным условиям заключается в следующем:

1. Необходимо выбрать вид механизма (перемещающий, направляющий или передаточный);
2. По выбранному виду механизма выбрать соответствующий ему ИКЦ;
3. Если выбранная ИКЦ имеет число степеней свободы больше, чем требуется синтезируемому механизму, то необходимо исключить лишние степени свободы ИКЦ путем наложения геометрических связей на относительное движение звеньев ИКЦ. Геометрические связи можно наложить различными вариантами, соответствующими различным по парным сочетанием звеньев ИКЦ и приводящими к соответствующим структурным схемам механизма;
4. По полученной схеме механизмов следует составить целевую функцию для оптимального синтеза параметров механизмов, то есть перейти от структурного синтеза к параметрическому синтезу;
5. Для учета дополнительных условий синтеза следует сформулировать ограничения на параметры механизма в задаче оптимального синтеза;
6. Для доведения задачи синтеза до конечного численного результата синтеза, с учетом условной минимизации, необходимо иметь регулярный метод отыскания глобального экстремума целевой функции при наличии указанных ограничений.

Изложенный порядок синтеза механизмов, естественно вытекающий из логического анализа процесса синтеза механизма, позволяет предложить следующий обобщенный метод синтеза пространственных рычажных механизмов на основе использования ИКЦ и ее модификации:

1. Выбор вида механизма в зависимости от заданных условий синтеза. Если заданы следующие условия синтеза:
 - а) угловые или линейные перемещения двух звеньев механизма, то вид механизма определяем как передаточный механизм;
 - б) траектория выходного звена и закон движения входного звена, то вид механизма определяет как направляющий механизм;
 - в) закон перемещения выходного звена и закон движения входного звена, то вид механизма определяет как перемещающий механизм.
2. Выбор ИКЦ в зависимости от вида механизма. Для каждого из трех видов механизмов рассмотрим выбор соответствующих ИКЦ в отдельности. При синтезе перемещающих механизмов необходимо выбрать ИКЦ приведенный в таблице 2.1 рисунок 2.1. Если параметры приведенной ИКЦ не удовлетворяют дополнительным условиям синтеза, то необходимо перейти к ИКЦ в таблице 3.1 рисунок 2.1 и далее к ИКЦ в таблице 3.2 рисунок 2.1. Если же задан только закон движения выходного звена, как перемещение объекта, то необходимо выбрать модификацию

ИКЦ в таблице 2.1 рисунок 1.1. Если параметры модификации ИКЦ не удовлетворяют дополнительным условиям синтеза, то необходимо перейти к модификации ИКЦ в таблице 3.1 рисунок 1.1 и далее к модификации ИКЦ в таблице 3.2 рисунок 1.1.

При синтезе направляющих механизмов необходимо выбрать модификации ИКЦ в таблице 2.1 рисунок 3.1. Если входное звено является ползун, то необходимо выбрать модификацию ИКЦ в таблице 2.1 рисунок 3.2. Если же параметры этих ИКЦ не удовлетворяют дополнительным условиям синтеза, то аналогично необходимо перейти к соответствующим модификациям ИКЦ в таблице 3.1 и 3.2.

При синтезе передаточных механизмов необходимо выбрать ИКЦ в таблице 2.1 рисунок 2.2, что приводит к передаточному четырехзвенному механизму. При вырожденных случаях решения задачи синтеза четырехзвенника необходимо перейти к модификации ИКЦ в таблице 3.1 рисунок 2.2 и далее к модификации ИКЦ в таблице 3.2 рисунок 2.2, которые приводят к кулисным механизмам. Для согласования углового и линейного перемещения входного и выходного звеньев механизма необходимо выбрать модификацию ИКЦ в таблице 2.1 рисунок 3.1, который приводит к кривошипно-ползунному механизму.

3. Исключение лишних степеней свободы ИКЦ путем наложения геометрических связей на относительное движение звеньев. Поскольку геометрическая связь накладывается на относительное движение двух звеньев, то для определения всех возможных вариантов ее наложения следует рассмотреть все по парные сочетания ИКЦ рассмотренные в подразделе 4.1.

4. Составление общей целевой функции для оптимизационного синтеза параметров механизма. Выбор варианта наложения геометрических связей определяет структуру и класс механизма и позволяет перейти к синтезу всех параметров механизма. Наложение геометрических связей можно осуществить путем использования модификации ИКЦ, имеющих отрицательную степень подвижности приведенной в таблице 4.2. Удобство их использования при автоматизированном синтезе связано с тем, что целевая функция синтеза, составленная для ИКЦ, применима для любой ее модификации, что позволяет использовать одну и ту же целевую функцию как при синтезе параметров ИКЦ, так и при наложении геометрических связей.

Неизвестные параметры синтезируемых механизмов есть суть неизвестных пока параметров ИКЦ и параметров ее модификаций, из которых образован механизм. Синтез параметров каждой ИКЦ может быть осуществлен на основе минимизации ее целевой функции, следовательно, для синтеза всех параметров механизма необходимо минимизировать столько целевых функций, сколько исходных кинематических цепей образуют синтезируемый механизм. При наличии ограничений на

параметры механизма целесообразно использовать суммарную целевую функцию:

$$S = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [\Delta_{q_i}^{(j)}]^2$$

где M – число используемых ИКЦ;
 N – число заданных положений;
 Δ_{q_i} – взвешенная разность.

5. Формулирование ограничений задачи синтеза. При синтезе механизмов кроме основного кинематического условия, определяемого назначением механизма, часто приходится учитывать и дополнительные условия, в число которых обычно входят допустимые габариты механизма, углы передачи, условия проворачиваемости звеньев и т.д. Это дополнительные условия представляются в виде неравенств, содержащих некоторые линейные или нелинейные функции от искомых параметров механизма:

$$g_K(x_1, x_2, \dots, x_L) \{ \leq, =, \geq \} b_K, \quad K = \overline{1, N}$$

где x_i – искомые параметры механизма,
 b_K – допустимые размеры,
 L – число искомых параметров,
 K – число ограничений.

6. Выбор метода численного решения задачи синтеза. Задачи условной минимизации, к которой сводится исходная задача синтеза механизма, относятся к классу невыпуклых экстремальных задач, для которых отсутствуют регулярные методы отыскания глобального минимума. Поэтому задача такого класса решаются, как правило, в два этапа. На первом из которых статистическим методом определяется наиболее вероятная область глобального минимума и выбирается как начальное приближение. На втором этапе минимизируется целевая функция при выбранном начальном приближении.

На основе вышеизложенного алгоритма синтеза пространственных рычажных механизмов можно синтезировать перемещающих, направляющих и передаточных механизмов по полному числу искомых параметров.

4.3 Структурно-кинематический синтез перемещающих пространственных рычажных механизмов на основе исходной кинематической цепи и ее модификаций

Кинематический синтез четырехзвенных исходных кинематических цепей (ИКЦ) со сферическими кинематическими парами по заданным

положениям входного и выходного звеньев механизма рассмотрены в разделе 2.1.

Фиксируя или задавая заданные и искомые параметры синтеза можно получить различные модификации ИКЦ (таблица 4.1–2.2.). Например, если задаемся координатами $x_B = y_B = z_B = 0$ точки $B \in Q_1$, то получим модификации ИКЦ типа *ACD* (таблица 4.1–1.1.) и т.д. Число степеней подвижности ИКЦ относительно стойки равно сумме степеней подвижности входного и выходного звеньев механизма. Чтобы получить из ИКЦ механизм, нужно исключить лишние степени подвижности путем наложения геометрических связей к движению звеньев ИКЦ.

Рассмотрим задачи структурно – кинематического синтеза перемещающихся пространственных рычажных механизмов (ПРМ) по заданным положениям входного и выходного звеньев механизма [195].

Пусть заданы N положение входного и выходного звеньев синтезируемого механизма, которых можно представить как движения двух подвижных тел Q_1 и Q_2 с координатами $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \varphi_i^1, \psi_i^1, \theta_i^1)$ и $Q_2(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i}, \varphi_i^2, \psi_i^2, \theta_i^2)$, ($i = \overline{1, N}$) (таблица 4.1–2.1.).

Требуется найти такие точки $B(x_B, y_B, z_B) \in Q_1$, $C(x_C, y_C, z_C) \in Q_2$ и $A(x_A, y_A, z_A) \in Q$ так, чтобы во всех положениях тел Q_1 и Q_2 мало отличалось от некоторой постоянной величины R .

$$\Delta_{q_i} = (X_{C_i} - X_{B_i})^2 + (Y_{C_i} - Y_{B_i})^2 + (Z_{C_i} - Z_{B_i})^2 - R^2, \quad (i = 1, N) \quad (4.1)$$

Полное решение данной задачи синтеза рассмотрены во второй главе. Комбинируя параметрами ИКЦ со сферическими кинематическими парами можно получить различные модификации ИКЦ с отрицательным знаком степени свободы $W = -1, -2, -3, -4, -5$; (таблица 4.2).

Рассмотрим структурно – параметрический синтез перемещающихся ПРМ по заданным положениям входного и выходного звеньев механизма. Простейшим пространственным механизмом для реализации заданного закона движения выходного звена механизма с использованием ИКЦ является четырехзвенный механизм (таблица 4.3–1).

Вначале для синтеза данного механизма используется ИКЦ *ABD* (таблица 4.1–3.1.). Составим целевую функцию на основе (3.1)

$$S_1 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{qi}^{(1)}(X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R)]^2 \quad (4.2)$$

Минимизируя S_1 по этим семи параметрам, например, с помощью алгоритма приведенного в подразделе 2.2, найдем параметры ИКЦ *ABD*.

Следующий этап синтеза механизма – наложение геометрической связи на движение звена BD относительно стойки. В данном случае необходимо использовать для наложения связи модификации ИКЦ – (таблица 4.1–1.1), неизменно связывая BD с телом Q_2 . Отождествляя ИКЦ (таблица 4.1–1.1) с кинематической цепью BED механизма составим целевую функцию в виде

$$S_2 = \sum_{i=1}^N \left[\Delta_{qi}^{(2)}(x_E, y_E, z_E, X_F, Y_F, Z_F, R) \right]^2 \quad (4.3)$$

Минимизируя функцию S_2 по семи параметрам с использованием алгоритма приведенного в разделе 2.1, найдем искомые параметры синтеза.

К сожалению, четырехзвенники во многих случаях не могут обеспечить требуемую точность реализации заданного закона движения выходного звена механизма. Хорошую точность реализации заданного закона движения выходного звена можно получить с помощью пятизвенных и шестизвенных механизмов (таблица 4.3).

В этих механизмах тоже используются ИКЦ (таблица 4.1–1.1., 2.2.) и для исключения лишних степеней подвижности налагаются геометрические связи в виде модификации ИКЦ (таблица 4.2). При синтезе пяти и шестизвенных механизмов по полному числу искомых параметров целевую функцию можно составить в виде

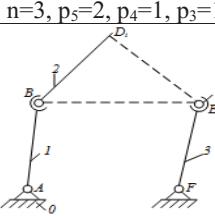
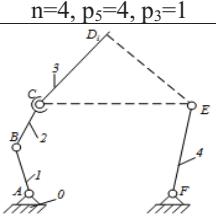
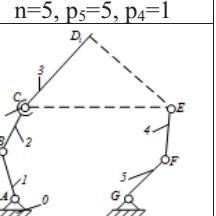
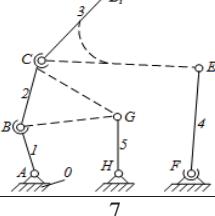
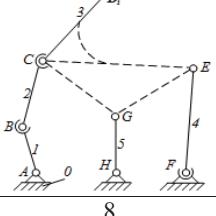
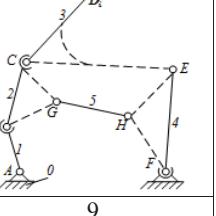
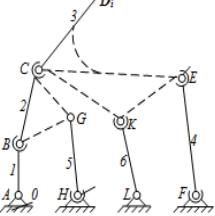
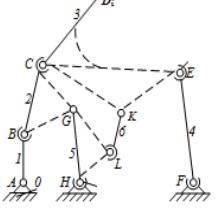
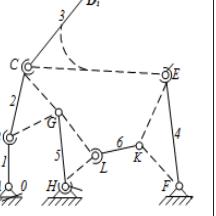
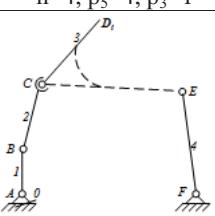
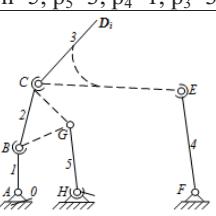
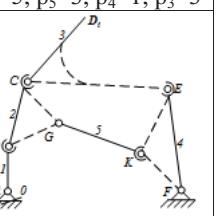
$$S = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^N \left[\Delta_{qi}^k \right]^2 \quad (4.4)$$

где $j = \overline{1, K}$ – число минимизируемых функций,

$i = \overline{1, N}$ – число заданных положений звеньев.

Как видно, что при синтезе ПРМ по заданным положениям входного и выходного звеньев механизма используется одна та же целевая функция.

Таблица 4.3

| | 1 $n=3, p_5=2, p_4=1, p_3=1$ | 2 $n=4, p_5=4, p_3=1$ | 3 $n=5, p_5=5, p_4=1$ |
|-------|---|---|---|
| $W=1$ |  |  |  |
| $W=1$ | 4 $n=5, p_5=4, p_3=3$ | 5 $n=5, p_5=4, p_3=3$ | 6 $n=5, p_4=4, p_3=3$ |
| $W=1$ |  |  |  |
| $W=1$ | 7 $n=6, p_5=3, p_4=2, p_3=3$ | 8 $n=6, p_5=p_3=3, p_4=2$ | 9 $n=6, p_5=p_3=3, p_4=2$ |
| $W=1$ |  |  |  |
| $W=2$ | 10 $n=4, p_5=4, p_3=1$ | 11 $n=5, p_5=3, p_4=1, p_3=3$ | 12 $n=5, p_5=3, p_4=1, p_3=3$ |
| $W=2$ |  |  |  |

Используя выражение (3.4) можно синтезировать любые схемы пяти-, шести и семизвенных механизмов разного вида и класса. Например,

синтезируем механизм II класса (таблица 4.3–4). В начале определим параметры ИКЦ $ABCD$, составляя целевую функцию в виде:

$$S_1 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{qi}^{(1)}(X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C)]^2$$

После определения искомых параметров на основе минимизации целевой функции S_1 переходим к определению параметров модификации ИКЦ (таблица 4.1–1.1). Поводок EF (таблица 4.3–2) исключает две степени подвижности ИКЦ $ABCD$. Составим вторую целевую функцию, отождествляя координаты $x_B = y_B = z_B = 0$ точки $B \in Q_1$.

$$S_2 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{qi}^{(2)}(X_F, Y_F, Z_F, x_E, y_E, z_E, R)]^2$$

Определяя искомые параметры поводка EF , переходим к составлению третьей целевой функции для поводка GH с отрицательной степенью свободы $W = -4$ используя модификации ИКЦ (таблица 4.2).

$$S_3 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{qi}^{(3)}(X_H, Y_H, Z_H, R, x_G, y_G, z_G)]^2$$

Как видно для определения параметров перемещающих механизмов II, III, IV и V – классов (таблица 4.3–3÷9) используется одна и та же целевая функция (4.1).

При синтезе семизвенных ПРМ целевая функция (4.1) используется четыре раза. Например, для схем приведенных в таблице 4.3–7÷9 целевые функции составляются в следующем виде

$$S_1 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{qi}^{(1)}(X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C)]^2$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{qi}^{(2)}(X_F, Y_F, Z_F, x_E, y_E, z_E, R)]^2$$

$$S_3 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{qi}^{(3)}(X_H, Y_H, Z_H, R, x_G, y_G, z_G)]^2$$

$$S_4 = \sum_{i=1}^N [\Delta_{qi}^{(4)}(X_L, Y_L, Z_L, R, x_K, y_K, z_K)]^2$$

Таким образом, предложенный метод позволяет автоматизировать процесс структурно – кинематического синтеза любых схем пространственного рычажного перемещающего механизма.

4.4 Структурно – кинематический синтез пространственных направляющих рычажных механизмов на основе исходной кинематической цепи и ее модификаций

Решение задачи кинематического синтеза исходных кинематических цепей (ИКЦ) и ее модификации приведены во второй главе. При синтезе пространственных направляющих рычажных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев могут быть использованы ИКЦ и ее модификации (таблица 4.1) как строительные блоки при проектировании механизмов [196, 197].

Самым простым видом с минимальным количеством звеньев является четырехзвеный механизм. Если задана пространственная кривая τ и требуется спроектировать некоторый рычажный механизм, на шатуне которого имеется точка D , описывающую траекторию, мало отличающуюся от τ на требуемом интервале.

Кинематический синтез четырехзвенного механизма может быть сведен к последовательному синтезу двух модификаций ИКЦ (рисунок 4.7). Первая из них – модификация ИКЦ (таблица 4.1–3.1.) параметры которой определяются по заданным положениям движения входного звена AB и шатунной точки $D(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i})$, а вторая – модификация ИКЦ (таблица 4.1–1.1.).

Для определения параметров ИКЦ ABD составим целевую функцию в виде:

$$\Delta_{qi}^{(1)} = \sum_{i=1}^N \left[X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R \right]^2 \quad (4.5)$$

Определяя искомые параметры, на основе изложенного алгоритма приведенного в подразделе 2.2, переходим к определению N положений звена BD используя известные методы анализа. Далее, исключаем лишние степени подвижности ИКЦ ABD .

Для определения параметров ИКЦ DEF составим целевую функцию

$$\Delta_{qi}^{(2)} = \sum_{i=1}^N \left[X_F, Y_F, Z_F, x_E, y_E, z_E, R \right]^2$$

После определения искомых параметров проводим кинематический анализ спроектированного механизма. Если точность воспроизведения заданных условий синтеза недостаточная, то следует переходить к синтезу шестизвездных направляющих механизмов, используя ИКЦ (таблица 4.1–2.1.). Параметры шестизвездного направляющего механизма можно определить на основе следующего алгоритма.

1. По заданным положениям входного и выходного звеньев провести синтез параметров четырехзвенного направляющего механизма на основе модификации ИКЦ – (таблица 4.1–3.1.) и ИКЦ – (таблица 4.1–1.1.).

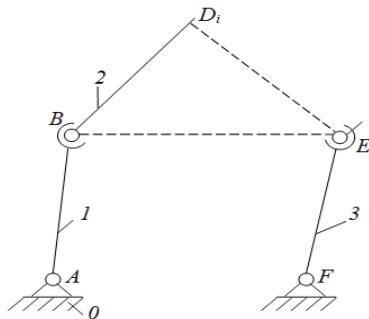


Рисунок 4.7

2. Если необходимо перейти к синтезу шестизвездного механизма, то вводим вместо поводка BD диаду BCD (рисунок 4.8), параметры которой определяем из условия ее существования связанный с параметрами ИКЦ (таблица 4.1–2.2.) соотношениями:

$$l_{BC} + l_{CD} > \max_{1 \leq i \leq N} |\overrightarrow{BC}_i|, \quad |l_{BE} - l_{EC}| < \min_{1 \leq i \leq N} |\overrightarrow{BC}_i|$$

3. На основе решения задачи анализа диады BCD определяем N заданных положений звеньев BC и CD (рисунок 4.8).

4. Исключение лишних степеней свободы ИКЦ $ABCD$ имеющей число подвижности $W=7$. Фиксируя или задавая координатами ИКЦ $ABCD$ можно получить различные модификации ИКЦ с отрицательными степенями подвижности (таблица 4.2.).

Чтобы спроектировать механизм с одной степенью подвижности с ИКЦ $ABCD$ необходимо исключить $W = -6$ степеней свободы. Для этого используем различные виды модификации ИКЦ с отрицательной степенью подвижности (таблица 4.2.).

Вариант 1.

Используем модификации ИКЦ со степенью $W = -2$ и $W = -4$ с кинематическими парами BC и BB (B – вращательная, C – сферическая) (рисунок 4.8).

Для определения параметров ИКЦ $ABCD$ составим целевую функцию

$$S_1 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i^{(1)}(X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C)]$$

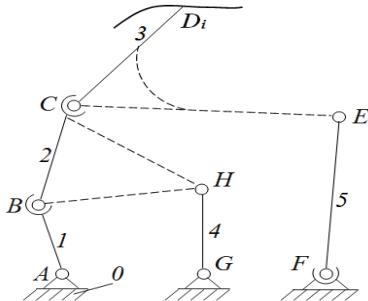


Рисунок 4.8

После чего проведя анализ положений ИКЦ $ABCD$ составим вторую и третью функцию в виде:

$$S_2 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i^{(2)}(X_F, Y_F, Z_F, R, x_E, y_E, z_E)]^2$$

$$S_3 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i^{(3)}(X_G, Y_G, Z_G, R, x_H, y_H, z_H)]^2$$

После определения искомых параметров, совмещая с ними вращательные и сферические кинематические пары, получим спроектированный шестизвездный механизм II-класса. Структурная формула образования механизма запишем в виде: I(0,1)→II(2,4)→II(3,5)

Если на относительное движение звена 3 наложим две геометрические связи типа BB и BC относительно стойки, то получим механизм III-класса (рисунок 4.9). I(0,1)→III(2,3,4,5)

Если на относительное движение звена 3 наложим геометрическую связь типа CB относительно стойки и введем геометрическую связь между звеньями 2 и 5 типа BB , то получим механизм IV класса (рисунок 4.9). I(0,1)→IV(2,6,5,3)

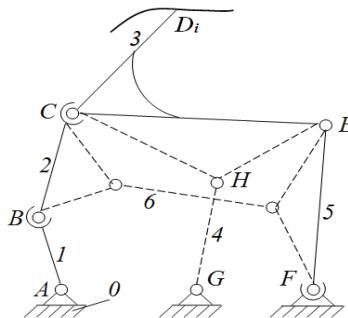


Рисунок 4.9

Вариант 2. Шестизвенный направляющий механизм можно спроектировать налагая геометрические связи в виде BB и $C_P C_P$ (B —вращательная, C_P —сферическая с пальцем кинематическая пара) (таблица 4.2)(рисунок 4.10).

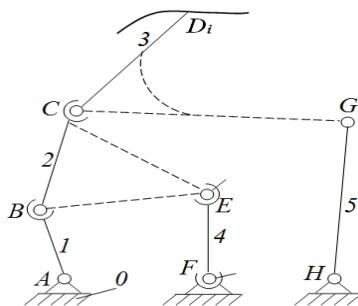


Рисунок 4.10

Если повторим наложения геометрических связей на относительное движение звеньев ИКЦ $ABCD$, как в варианте 1, то получим направляющие механизмы II, III и IV классов.

Таким образом, большой интерес с точки зрения автоматизации с помощью ЭВМ процесс формирования структуры механизма из ИКЦ (таблица 4.1–2.1.) представляет тот факт, что наложения геометрических связей на относительное движение звеньев ИКЦ можно использовать модификации ИКЦ—(таблица 4.1–2.2.) и ИКЦ—(таблица 4.1–1.1.). Модификация ИКЦ—(таблица 4.1–2.2.) может быть использована при наложении геометрической связи на относительное движение двух несмежных подвижных звеньев, а модификации ИКЦ—(таблица 4.1–1.1.)

может быть использована при наложении геометрической связи на движение подвижного звена относительно стойки механизма.

4.5 Структурно-кинематический синтез передаточных пространственных рычажных механизмов на основе исходной кинематической цепи и ее модификаций

При невозможности обеспечения требуемой точности реализации заданного закона движения выходного звена четырехзвенника, вынуждены перейти к синтезу пяти и шестизвенных механизмов.

В данном разделе рассмотрены задачи структурно-кинематического синтеза пространственных пяти и шестизвенных передаточных механизмов на основе использования ИКЦ и ее модификации (таблица 4.1) [198].

Для синтеза пяти и шестизвенных механизмов предлагаются два способа реализации:

Способ 1.

Если точность воспроизведения заданной функции $\psi = \psi(\varphi)$ спроектированного механизма недостаточно, то после решения задачи анализа четырехзвенника определяем N положений звеньев механизма $ABCD$ (рисунок 4.11).

Теперь вновь используем ИКЦ (таблица 4.1–2.1.) отождествляя ИКЦ $ABCD$ с кинематической цепью GFE . Составим целевую функцию в виде

$$S = \sum \Delta q_i(X_G, Y_G, Z_G, x_F, y_F, z_F, R, x_E, y_E, z_E)$$

После определения искомых параметров получим пятизвенный передаточный механизм $ABEFG$ с уточненной угловой координатой $\psi' = \psi'(\varphi)$ (рисунок 4.11, 4.12).

Если точность воспроизведения заданной зависимости $\psi' = \psi'(\varphi)$ недостаточно, то необходимо перейти к синтезу шестизвенного механизма.

Способ 2.

Параметры шестизвенного передаточного механизма можно определить на основе следующего алгоритма.

1. Если необходимо перейти к синтезу шестизвенного механизма, то вводим вместо поводка BC диаду BEC , параметры которой определяем из условий ее существования (рисунок 4.13)

$$l_{BE} + l_{EC} \succ \max_{1 \leq i \leq N} |B_i C_i|, \quad |l_{BE} - l_{EC}| \prec \min_{1 \leq i \leq N} |B_i C_i|.$$

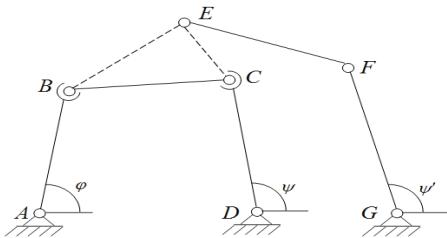


Рисунок 4.11

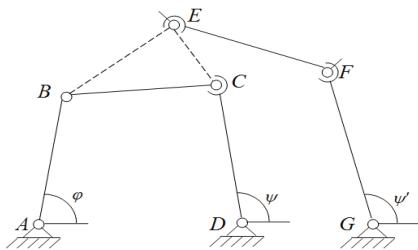


Рисунок 4.12

2. На основе решения задачи анализа диады BEC известными методами, определяем N заданных положений звеньев BE и EC .

3. На основе синтеза модификации ИКЦ (таблица 4.1–1.1.) определяем параметры звена FG , отождествляемой с кинематической цепью ACD .

4. Мысленно отбрасываем кинематическую цепь ECD и на основе решения анализа четырехзвенника $ABFG$ определяем N заданных положений звеньев BF и FG .

5. Уточняем параметры кинематической цепи ECD путем синтеза ИКЦ (таблица 4.1–2.1.), отождествляемый с кинематической цепью $ABCD$.

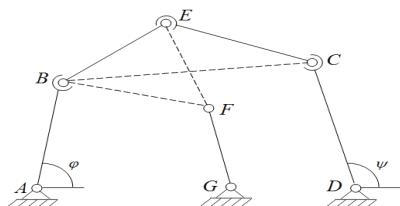


Рисунок 4.13

Этапы 1–5 могут быть повторены циклически, при необходимости повысить точность воспроизведение заданной функции $\psi = \psi(\varphi)$.

В итоге получим шестизвездный передаточный механизм II-класса. Если по заданным условиям синтеза или по характеру зависимости $\psi = \psi(\varphi)$ требуется спроектировать передаточных механизмов других классов, то используя приведенный алгоритм можно синтезировать механизмы III и IV класса (рисунок 4.14).

Если введем поводок FG на относительное движение звена EC со стойкой используя модификации ИКЦ (таблица 4.1.–1.1.), то в результате синтеза определим параметры звена FG отождествляемый с кинематической цепью ACD . В результате определения искомых параметров получим механизм III класса.

Если введем поводок FG на относительное движение между звеньями BE и CD , то используем модификацию ИКЦ (таблица 4.1.–2.1.) отождествляем с кинематической цепью $ABCD$. В результате синтеза получим механизм IV класса.

В итоге, с таким подходом синтеза можно спроектировать по заданным положениям входного и выходного звеньев в виде зависимости $\psi = \psi(\varphi)$ пяти и шестизвездные передаточные механизмы II, III и IV классов.

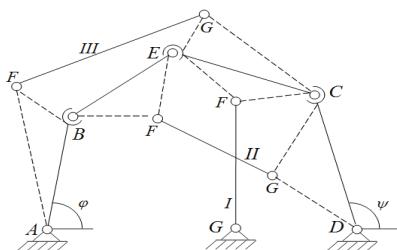


Рисунок 4.14

Выводы по четвертому разделу

1. Предложен способ структурного образования пространственных рычажных механизмов из ИКЦ и ее модификаций, как структурных модулей, и разработан метод структурного синтеза пространственных рычажных механизмов на основе ИКЦ. Метод является универсальным с точки зрения синтеза пространственных рычажных механизмов любого класса и позволит получить все мыслимые структурные схемы механизмов с заданным числом звеньев. Показано, что использование для синтеза механизма ИКЦ с различными (от четырех до

девяти) степенями свободы и их модификации, позволяет получить 5184 структурные схемы шестизвездных одноподвижных механизмов.

2. Разработан обобщенный метод структурно – кинематического синтеза пространственных механизмов на основе ИКЦ по заданным законам движения входного и выходного звеньев механизма. В задачах синтеза без ограничений, метод позволяет осуществить целенаправленный выбор структурной схемы механизма и определить его параметры по условиям минимума целевой функции синтеза.

3. Рассмотрены особенности реализации обобщенного метода при структурно – кинематическом синтезе перемещающих, направляющих и передаточных механизмов.

4. Предложенный метод позволяет автоматизировать процесс структурно – кинематического синтеза любых схем пространственного рычажного перемещающего механизма

5. При формировании структуры механизма по заданным положениям входного и выходного звеньев в начале применяем ИКЦ и для синтеза одноподвижного механизма, налагаем геометрические связи на относительное движение звеньев механизма, используя различные модификации ИКЦ.

6. Разработанный метод синтеза позволяет спроектировать по заданным положениям входного и выходного звеньев различные классы пространственных рычажных механизмов.

5 Кинематический синтез конкретных механизмов

5.1 Пример синтеза перемещающего шестизвездного механизма

Рассмотрим первый пример.

Необходимо спроектировать семизвездник со сферическими парами (рисунок 5.1), приближенно воспроизводящий семь положений тела, заданные в таблице 5.1 и исходные данные в таблице 5.2.

При $N=7$, как известно, в подвижной пространственной системе имеются точки (не более 20) с семью положениями на одной сфере и, кроме того, точки, которые в рассматриваемых семи положениях приближаются к сфере. Как отмечалось, точные сферические точки подвижной системы соответствуют абсолютному минимуму $S = 0$ суммы $S = \sum \Delta_{q_i}^2$, поскольку они обращают в нуль все Δ_{q_i} ($i = 1, 2, \dots, 7$). Приближенные сферические точки подвижной системы соответствуют локальным минимумам суммы или же расположены в окрестности локальных минимумов функции $S = F(x_B, y_B, Z_B)$. Как те, так и другие, являются общими точками поверхностей $G_x = 0$, $G_y = 0$, $G_z = 0$ и определяются из решения системы (2.34).

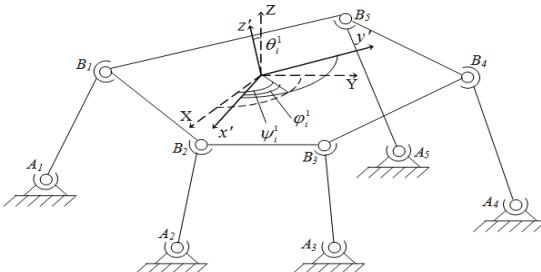


Рисунок 5.1

Нас, естественно, интересуют не все решения системы (2.84), а лишь те, которые соответствуют минимумам суммы S . Эти решения в данном случае находятся численным методом отыскания минимума суммы S , основанным на алгоритме поиска минимума функции S . Алгоритм соответствующего итерационного процесса описан в подразделе 2.1. Поскольку для построения семизвездника на рисунке 5.1 нам нужны пять сферических точек подвижной системы, после анализа результатов вычислений нами выбраны пять точек минимума поверхности $S = F(x_B, y_B, Z_B)$. Координаты этих точек, параметры

соответствующих им приближающих сфер и максимальные по модулю значения Δ_{q_i} представлены в таблице 5.3 [199].

Судя по отклонениям, точка B_1, B_2, B_3 – точные сферические точки (найденные с определенной погрешностью), а B_4 и B_5 – приближенные.

Таблица 5.1 – Заданные положения тела для синтеза одноподвижного механизма – семизвенника при $N = 7$

| Номер положения (i) | X_{Oi} | Y_{Oi} | Z_{Oi} | Углы Эйлера, градус | | |
|-------------------------------|----------|----------|----------|---------------------|-------------|------------|
| | | | | ψ_i | φ_i | θ_i |
| 1 | 0,30 | 0,12 | 0,01 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0,35 | 0,17 | 0,24 | 28 | 35 | 17 |
| 3 | 0,44 | 0,21 | 0,25 | 34 | 38 | 5 |
| 4 | 0,51 | 0,15 | 0,32 | 17 | 24 | 12 |
| 5 | 0,50 | 0,30 | 0,45 | 50 | 50 | 21 |
| 6 | 0,60 | 0,25 | 0,41 | 45 | 33 | 24 |
| 7 | 0,55 | 0,32 | 0,35 | 0 | 0 | 0 |

Таблица 5.2 – Исходные данные при $N = 7$

| | | |
|------------|---|--|
| $N = 7$ | $ZLL = 6 \ ZKK = 6 \ ZII = 6$ $dmj = .2$ | $MJ0 = -1.2 \ NJ0 = -1.2 \ KJ0 = -1.2$ |
| $XS = .3$ | $YS = .12$ | $ZS = .01$ |
| $XS = .35$ | $YS = .17$ | $ZS = .24$ |
| $XS = .44$ | $YS = .21$ | $ZS = .25$ |
| $XS = .51$ | $YS = .15$ | $ZS = .32$ |
| $XS = .5$ | $YS = .3$ | $ZS = .45$ |
| $XS = .6$ | $YS = .25$ | $ZS = .41$ |
| $XS = .55$ | $YS = .32$ | $ZS = .35$ |

Для решения данной задачи составлена программа на языке Visual Basic (приложение А).

Результаты решения задачи приведены в таблице 5.3.

Расчеты были проведены в диапазоне:

$$-1.2 < MJ < 0.6$$

$$-1.2 < NJ < 0.6$$

$$-1.2 < KJ < 0.6$$

с шагом $dmj = 0.2$.

Таблица 5.3 – Результаты расчета при $N = 7$

| | | | | | |
|-------------|--------------|-------------------------|-------------------------|----------|---------|
| LL=3, | KK=2, | II=1 | MJ=-0.6, | NJ=-0.8, | KJ=-1 |
| N=1 | C=0.488270 | B=-2.22103 | | | |
| N=2 | C=0.303894 | B=3.96393 | | | |
| N=3 | C=0.151985 | B=-3.85753 | | | |
| N=4 | C=0.146845 | B=3.00599 | | | |
| R0=0.245293 | R01=0.245194 | S=-4.29655198714746E-03 | S1=4.29557624342188E-03 | | |
| LL=3, | KK=2, | II=2 | MJ=-0.6, | NJ=-0.8, | KJ=-0.8 |
| N=1 | C=0.48815 | B=-3.42355 | | | |
| N=2 | C=0.303857 | B=2.28575 | | | |
| N=3 | C=0.152075 | B=-2.95424 | | | |
| N=4 | C=0.146807 | B=3.00600 | | | |
| R0=0.245216 | R01=0.245194 | S=-4.29213625865016E-03 | S1=4.29557690770942E-03 | | |
| LL=3, | KK=2, | II=3 | MJ=-0.6, | NJ=-0.8, | KJ=-0.6 |
| N=1 | C=0.48815 | B=-3.42355 | | | |
| N=2 | C=0.303857 | B=2.28575 | | | |
| N=3 | C=0.152075 | B=-2.95424 | | | |
| N=4 | C=0.146807 | B=3.00600 | | | |
| R0=0.245195 | R01=0.245194 | S=-4.29440266995251E-03 | S1=4.29557632790717E-03 | | |
| LL=3, | KK=2, | II=4 | MJ=-0.6, | NJ=-0.8, | KJ=-0.4 |
| N=1 | C=0.48815 | B=-3.42355 | | | |
| N=2 | C=0.303857 | B=2.28575 | | | |
| N=3 | C=0.152075 | B=-2.95424 | | | |
| N=4 | C=0.146807 | B=3.00600 | | | |
| R0=0.245217 | R01=0.245194 | S=-4.29709734032829E-03 | S1=4.29557664181851E-03 | | |

Во всем диапазоне расчетов процесс вычислений был сходящимся. Глобальный минимум равен

$$S_{min} = 0.0042921$$

и достигнут он при

$$LL=3,$$

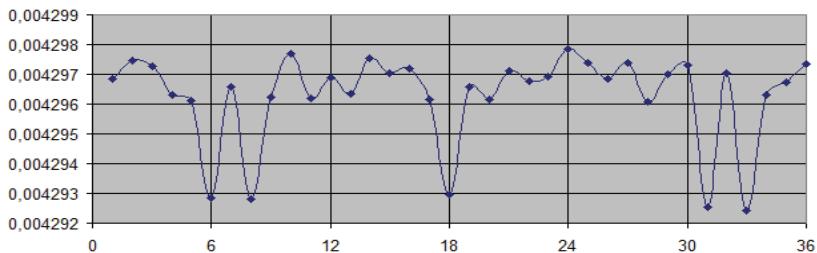
$$KK=2,$$

$$II=2.$$

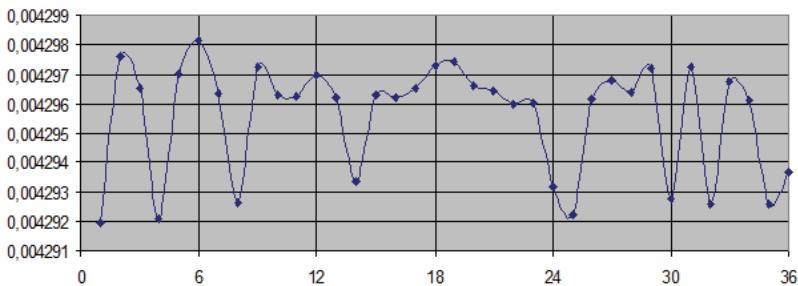
В вышеприведенной таблице 5.3 показана лишь часть результатов в окрестности глобального минимума, значение которого выделено в таблице жирной рамкой.

Ниже приведены результаты расчета целевой функции в виде плоских и объемных графиков (рисунок 5.2, 5.3).

LL=1



LL=2



LL=3

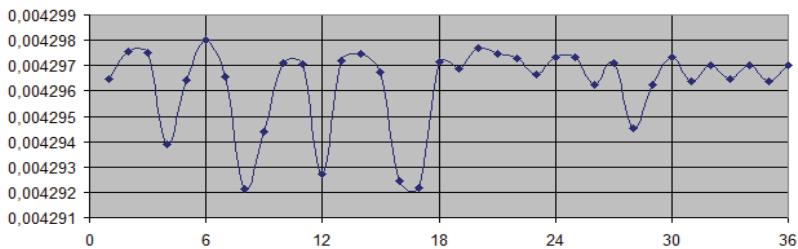
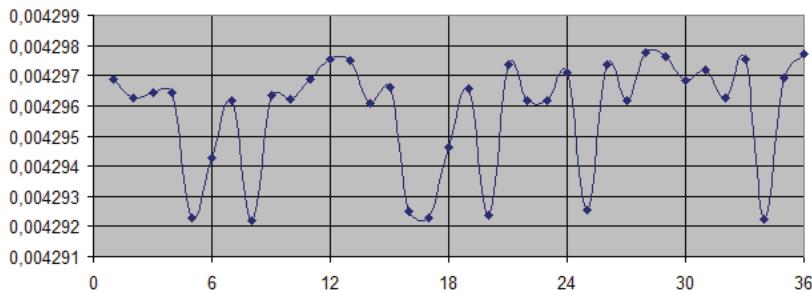
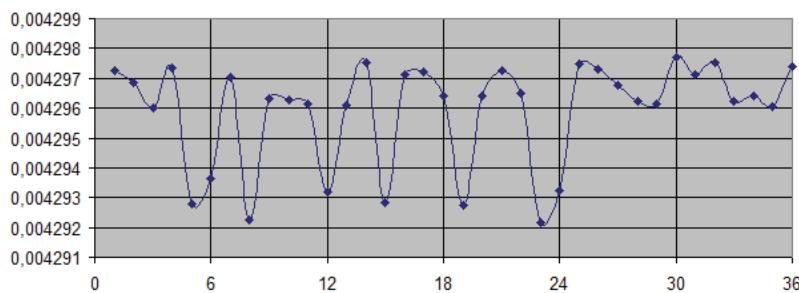


Рисунок 5.2 – Плоские графики, лист 1

LL=4



LL=5



LL=6

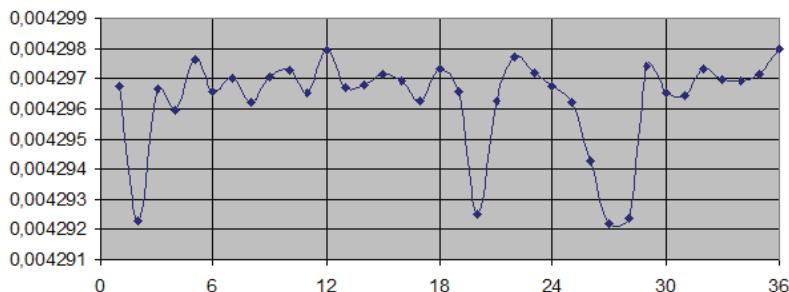
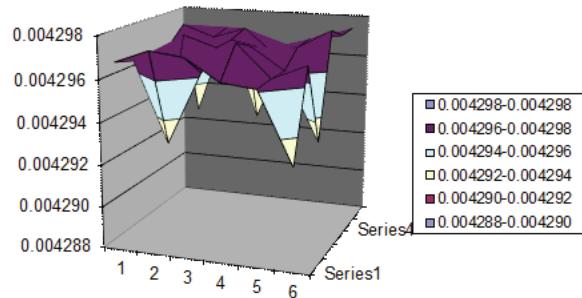
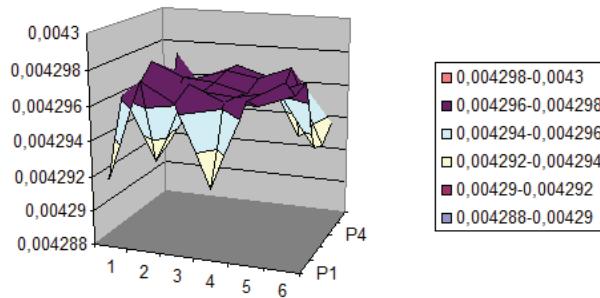


Рисунок 5.2, лист 2

LL=1



LL=2



LL=3

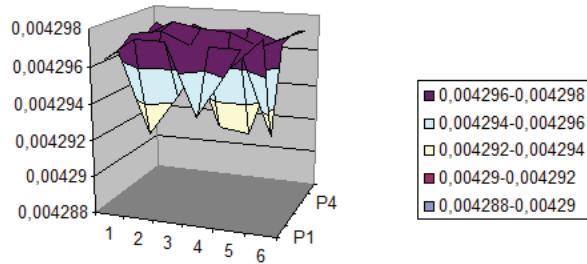
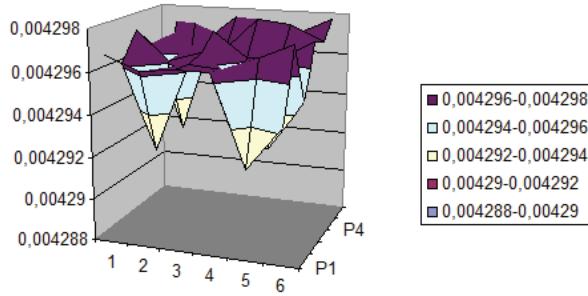
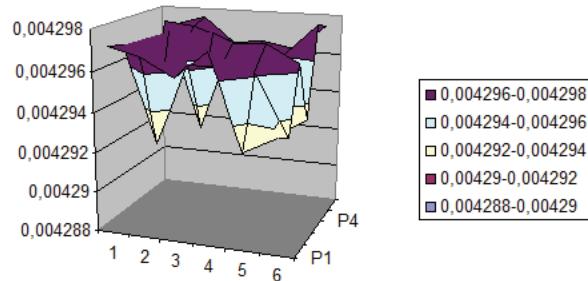


Рисунок 5.3 – Объемные графики, лист 1

LL=4



LL=5



LL=6

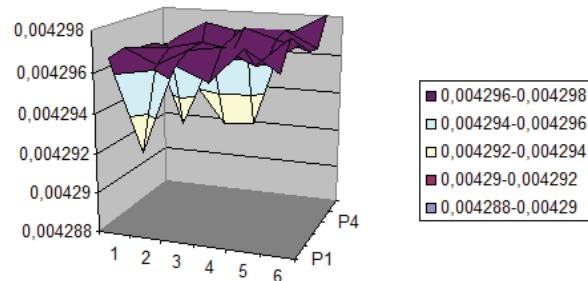


Рисунок 5.3, лист 2

Рассмотрим второй пример.

Необходимо спроектировать одноподвижный механизм, приближенно воспроизводящий заданные десять $N = 10$ положений подвижного тела, параметры которых представлены в таблице 5.4 и исходные данные в таблице 5.5. Начало подвижной системы координат перемещается по заданной кривой, как и в приведенном ранее численном примере.

Сначала по методу, описанному в разделе 2, проектируем два звена типа CC (C – сферическая пара).

Координаты центров подвижных сферических шарниров в системе $oxuz$ находим с помощью итерационной процедуры определения минимума суммы:

$$x_{B1} = -0,020274,$$

$$y_{B1} = 0,017381,$$

$$z_{B1} = -0,030652,$$

$$x_{B2} = -1,887589,$$

$$y_{B2} = 0,193213,$$

$$z_{B2} = -1,809810.$$

Координаты неподвижных шарниров A_1, A_2 и длины R_1, R_2 звеньев определяем из системы (2.53):

$$XA_1 = -0,389318,$$

$$YA_1 = 0,700546,$$

$$ZA_1 = -0,0806314,$$

$$R_1 = 2,584\ 716,$$

$$XA_2 = 2,266482,$$

$$YA_2 = -1,206041,$$

$$ZA_2 = -2,886927,$$

$$R_2 = 2,800555.$$

Точность полученного приближения для спроектированных звеньев характеризуется следующими значениями:

$$S_1 \sim 0, \max |\Delta_{1i}| = 0,000023,$$

$$S_2 = 0,000807, \max |\Delta_{2i}| = 0,002731.$$

Таблица 5.4 – Заданные положения тела для синтеза одноподвижного механизма при $N = 10$

| Номер положения (i) | X_{O_i} | Y_{O_i} | Z_{O_i} | Углы Эйлера, градус | | |
|-------------------------------|-----------|-----------|-----------|---------------------|----------|------------|
| | | | | ψ_i | ϕ_i | θ_i |
| 1 | 2,0 | 0,0 | 0,0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1,995004 | 0,099833 | 0,099958 | 5 | 10 | 15 |
| 3 | 1,980067 | 0,198669 | 0,199667 | 10 | 20 | 30 |
| 4 | 1,955336 | 0,295520 | 0,298876 | 15 | 30 | 45 |
| 5 | 1,921061 | 0,389418 | 0,397339 | 20 | 40 | 60 |
| 6 | 1,877583 | 0,479426 | 0,494808 | 20 | 40 | 60 |
| 7 | 1,825336 | 0,564642 | 0,591040 | 15 | 30 | 45 |
| 8 | 1,764842 | 0,644218 | 0,685796 | 10 | 20 | 30 |
| 9 | 1,696707 | 0,717356 | 0,778837 | 5 | 10 | 15 |
| 10 | 1,621610 | 0,783327 | 0,869931 | 0 | 0 | 0 |

Для решения данной задачи составлена программа на языке Visual Basic (приложение А). Результаты решения задачи приведены в таблице 5.6.

Таблица 5.5 – Исходные данные при $N=10$

| | | | |
|-------------|---------------------|--------------------|----------------|
| N=10 | ZLL=6, ZKK=6, ZII=6 | MJ0=-2.1, NJ0=-0.1 | KJ0=-2.1 |
| XS=2 | YS=0 | ZS=0 | F=0 P=0 T=0 |
| XS=1.995004 | YS=0.099833 | ZS=0.099958 | F=10 P=5 T=15 |
| XS=1.980067 | YS=0.198669 | ZS=0.199667 | F=20 P=10 T=30 |
| XS=1.955336 | YS=0.29552 | ZS=0.298876 | F=30 P=15 T=45 |
| XS=1.921061 | YS=0.389418 | ZS=0.399339 | F=40 P=20 T=60 |
| XS=1.877583 | YS=0.479426 | ZS=0.494808 | F=40 P=20 T=60 |
| XS=1.825336 | YS=0.564642 | ZS=0.59104 | F=30 P=15 T=45 |
| XS=1.764842 | YS=0.644218 | ZS=0.685796 | F=20 P=10 T=30 |
| XS=1.696707 | YS=0.717356 | ZS=0.778837 | F=10 P=5 T=15 |
| XS=1.62161 | YS=0.783327 | ZS=0.869931 | F=0 P=0 T=0 |

Таблица 5.6 – Результаты расчета при $N = 10$

| | | |
|------------------------|-------------|-------------------|
| $MJ = -1.9,$ | $NJ = 0.1,$ | $KJ = -1.9$ |
| Решение не имеет $w=2$ | | |
| $MJ = -1.9,$ | $NJ = 0.1,$ | $KJ = -1.7$ |
| Решение не имеет $w=2$ | | |
| $MJ = -1.9,$ | $NJ = 0.1,$ | $KJ = -1.5$ |
| Решение не имеет $w=2$ | | |
| $MJ = -1.9,$ | $NJ = 0.1,$ | $KJ = -1.3$ |
| Решение не имеет $w=2$ | | |
| $MJ = -1.9,$ | $NJ = 0.1,$ | $KJ = -1.1$ |
| Решение не имеет $w=2$ | | |
| $MJ = -1.9,$ | $NJ = 0.1,$ | $KJ = -0.8999997$ |
| Решение не имеет $w=2$ | | |
| $MJ = -1.9,$ | $NJ = 0.3,$ | $KJ = -1.9$ |
| Решение не имеет $w=2$ | | |
| $MJ = -1.9,$ | $NJ = 0.3,$ | $KJ = -1.7$ |
| Решение не имеет $w=2$ | | |

Расчеты были проведены в диапазоне:

$$\begin{aligned} -1.9 &< MJ < 0.1 \\ 0.1 &< NJ < -1.9 \\ -1.9 &< KJ < 0.1 \end{aligned}$$

с шагом $dmj = 0.2$

В вышеприведенной таблице 5.6 показана лишь часть результатов. Во всем диапазоне расчетов при $N = 10$ задача решения не имеет, так как процесс вычислений оказался расходящимся.

5.2 Кинематический синтез пространственных перемещающихся грузоподъемных механизмов

К общим требованиям, предъявляемым к механизмам управляемого перемещения твердого тела, относятся такие, как возможно меньшее количество звеньев и обобщенных координат, т.е. простота конструкции. Точное воспроизведение заданных движений механизма со степенью подвижности, меньшей числа степеней свободы перемещаемого объекта, в общем случае возможно при наличии высшей пары, а приближенное воспроизведение указанных движений с заданной степенью точности осуществимо плоскими рычажными механизмами с соответствующим числом подвижных звеньев и кинематических пар V – класса.

При изготовлении конструкций грузоподъемных устройств на базе рычажных механизмов должна строго соблюдаться параллельность осей кинематических пар. Даже небольшое отклонение параллельности осей приводит к потере точности воспроизведения заданных движений, заклиниванию механизма, к резкому увеличению нагрузок и к соответствующему изгибу стержней, то есть снижению жесткостных характеристик звеньев механизма.

Большинство приведенных недостатков устранимы путем применения пространственных рычажных механизмов высоких классов (ПРМВК). Грузоподъемные устройства на базе ПРМВК обладают простотой и жесткостью конструкции, большой грузоподъемностью за счет наличия замкнутых контуров механизма, а также решает проблемы связанные с возможностью небольших отклонений параллельности осей вращения кинематических пар [200, 201].

Постановка задачи: Пусть заданы N конечно удаленных положений двух подвижных тел $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1)$ и $Q_2(X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di}, \theta_i^2, \psi_i^2, \phi_i^2)$, $i=1, N$, которые жестко связаны с входным и выходным звеньями механизма.

Требуется найти такие точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ в неподвижной системе координат $OXYZ$, $B(x_B, y_B, z_B)$ тела Q_1 и $C(x_C, y_C, z_C)$ тела Q_2 , чтобы расстояние между точками B_i и C_i для всех заданных положений тел Q_1 и Q_2 мало отличалось от некоторой постоянной величины R .

Решение: Для решения поставленной задачи составим уравнение взвешенной разности:

$$\Delta_{q_i} = |B_i C_i|^2 - R^2 = (X_{Ci} - X_{Bi})^2 + (Y_{Ci} - Y_{Bi})^2 + (Z_{Ci} - Z_{Bi})^2 - R^2 \quad (5.1)$$

которое является функцией десяти переменных: $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$. Сгруппировав все эти параметры по четыре с общим параметром R , можно представить данную взвешенную разность в трех различных формах:

$$\begin{aligned} \Delta_{q_i}^{(1)} &= (\tilde{X}_{Ai} - X_A)^2 + (\tilde{Y}_{Ai} - Y_A)^2 + (\tilde{Z}_{Ai} - Z_A)^2 - R^2 \\ \Delta_{q_i}^{(2)} &= (\tilde{x}_{Bi} - x_B)^2 + (\tilde{y}_{Bi} - y_B)^2 + (\tilde{z}_{Bi} - z_B)^2 - R^2 \\ \Delta_{q_i}^{(3)} &= (\tilde{x}_{Ci} - x_C)^2 + (\tilde{y}_{Ci} - y_C)^2 + (\tilde{z}_{Ci} - z_C)^2 - R^2 \\ i &= 1, N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{X}_{Ai} \\ \bar{Y}_{Ai} \\ \bar{Z}_{Ai} \\ I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T_{10}^i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{20}^i & Y_{D_i} \\ 0 & Z_{D_i} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{D_i} \\ y_C \\ z_C \\ I \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \bar{x}_{B_i} \\ \bar{y}_{B_i} \\ \bar{z}_{B_i} \\ I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T_{01}^i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{D_i} - X_A \\ Y_{D_i} - Y_A \\ Z_{D_i} - Z_A \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{21}^i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ I \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \bar{x}_{C_i} \\ \bar{y}_{C_i} \\ \bar{z}_{C_i} \\ I \end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix} T_{02}^i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A - X_{D_i} \\ Y_A - Y_{D_i} \\ Z_A - Z_{D_i} \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{12}^i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

где $\begin{bmatrix} T_{kj}^i \end{bmatrix}$ – матрица перехода от k -той системы координат к j -той системе, определяемая как в (2.17.)

Что бы расписать элементы матрицы введем обозначения:
 $\cos\theta_i^j = c_1$, $\cos\psi_i^j = c_2$, $\cos\varphi_i^j = c_3$, $\sin\theta_i^j = s_1$, $\sin\psi_i^j = s_2$, $\sin\varphi_i^j = s_3$.
Тогда $e_{i1}^j = c_2c_3 - c_1s_2s_3$, $m_{i1}^j = s_2c_3 + c_1c_2s_3$, $n_{i1}^j = s_1s_3$, $e_{i2}^j = -c_2s_3 - c_1s_2s_3$,
 $m_{i2}^j = -s_2s_3 + c_1c_2c_3$, $n_{i2}^j = s_1c_3$, $e_{i3}^j = s_1s_2$, $m_{i3}^j = -s_1c_2$, $n_{i3}^j = c_1$.

Для решения приведенной системы уравнений составим суммы квадратов взвешенной разности:

$$S = \sum_{i=1}^N [\Delta_{q_i}^k]^2, \quad (k=1,3) \quad (5.2)$$

Необходимые условия минимума суммы (5.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial S}{\partial X_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Y_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Z_A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0; \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0; \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z_C} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0; \quad (5.5)$$

На основе предложенного итерационного алгоритма, приведенного в подразделе 2.2, решая уравнения (5.3), (5.4) и (5.5), определим искомые

параметры $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$. Рассмотрим решение задачи синтеза грузоподъемного пространственного механизма по заданным положениям входного и выходного звеньев 1 и 3 (рисунок 5.4).

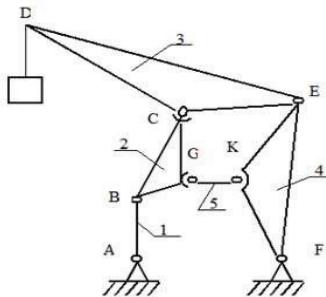


Рисунок 5.4

Суть предлагаемого метода для решения задачи синтеза механизма состоит в сведении ее к многократному решению задачи синтеза пространственной исходной кинематической цепи (ПИКЦ) $ABCD$ (рисунок 2.6).

Для этого совмещаем точки A и D проектируемого механизма с одноименными точками тел Q_1 и Q_2 соответственно. Вводя входную информацию о заданных положениях входного и выходного звеньев в систему уравнений (5.1), определяем искомые параметры ПИКЦ. Далее находим параметры бинарного звена CEF на основе синтеза соответствующей ПИКЦ, которую можно рассматривать как частный случай ПИКЦ $ABCD$, координаты точки B которой равны нулю ($x_B=y_B=z_B=0$). Из анализа положений звеньев ПИКЦ $ABCD$ определяем новое положение точки $C_i(x_C, y_C, z_C)$ тела Q_2 , и, вводя новые данные в уравнения вида (5.3) – (5.5), определяем искомые параметры: $X_F, Y_F, Z_F, R, x_E, y_E, z_E$.

Аналогично определяем координаты бинарного звена GK , проводя анализ положений звеньев CEF . Подставляя новые данные в уравнения (5.2), определяем искомые параметры: $x_G, y_G, z_G, R, x_K, y_K, z_K$.

По найденным значениям параметров синтезированных ПИКЦ можно определить направления осей и длины звеньев проектируемого шестизвездного механизма IV – класса (рисунок 5.4).

При необходимости, на основе ПИКЦ, можно синтезировать механизм с ведущим ползуном, заменяя вращательную кинематическую пару на ползун. В этом случае в выражении (5.1) заданными параметрами тела Q_1 считаем координаты точки $A_i(X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai})$. Определению подлежат параметры: $x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$. Повторяя аналогичные процедуры

синтеза соответствующих ПИКЦ, получим механизм IV – класса типа $PBCCBCB$ (P – поступательная, B – вращательные, C – сферические кинематические пары).

На основе выражения (5.1) путем повторения процедур синтеза соответствующих ПИКЦ, можно синтезировать механизм типа $BC_P CBC_P BB$ (рисунок 5.5), в котором используются сферические кинематические пары с пальцем.

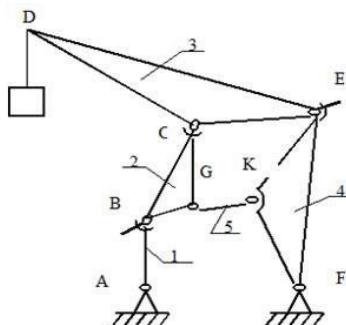


Рисунок 5.5

Для определенной категории грузоподъемных машин, требующих высокой мобильности и частых перевозок с места на место, имеют большое значение габаритные размеры в транспортируемом (сложенном) положении. Для чего приходится минимизировать количество опорных звеньев и габариты самих звеньев, сохраняя при этом необходимую высоту подъема груза. Решить такую противоречивую задачу позволяет использование ПРМВК V – класса (рисунок 5.6).

Процесс синтеза ПРМВК V – класса на основе ПИКЦ по заданным положениям входного и выходного звеньев можно разбить на следующие этапы:

1. По заданным положениям входного и выходного звеньев определяем параметры ПИКЦ $ABCD$.
2. Проводим анализ положений звеньев ПИКЦ $ABCD$.
3. По конструктивным соображениям задаемся положением звена FG и определяем искомые параметры ПИКЦ GFE .
4. Определяем параметры бинарного звена MN .
5. Определяем параметры бинарного звена LK .

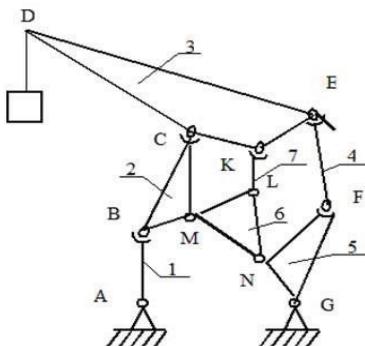


Рисунок 5.6

В итоге получим все искомые параметры проектируемого ПРМВК V класса.

Как следует из вышеизложенного, во всех процедурах синтеза механизмов используется одна и та же целевая функция (5.1) для определения параметров ПИКЦ и ее модификаций, часть параметров которых изначально известна. При этом формируется структура проектируемого механизма и определяются все его искомые параметры.

5.3 Кинематический синтез пространственных направляющих механизмов

5.3.1 Кинематический синтез станка – качалки для добычи нефти

Рассмотрим задачу синтеза направляющего шестизвездного механизма станка – качалки для добычи нефти. Пусть задана траектория шатунной точки P в виде прямой параллельной к оси Y . Входное звено совершает полной оборот вокруг точки A (кривошип). Начало неподвижной системы координат $OXYZ$ совместим с началом отрезка $\alpha-\alpha$ (рисунок 5.7).

В начале синтеза шестизвездного механизма задаемся длинами звеньев FEP и проводим анализ положений звена EP . Для этого разбиваем отрезок $\alpha-\alpha$ на $N = 11$ равных частей. Определим текущие координаты точки P .

$$X_P^{(j)} = 0; \quad Y_P^{(j)} = Y^{(0)} + j \frac{5}{n}; \quad (j=1, N)$$

Для определения параметров ИКЦ $ABCP$ используем целевую функцию в виде

$$S_1 = \sum_{i=1}^N \left[\Delta_{q_i}^{(1)}(X_A, Y_A, x_B, y_B, R, x_C, y_C) \right]^2 = \sum_{i=1}^N \left[\Delta_{q_i}^{(1)}(X_A, Y_A, l_{AB}, l_{BC}, l_{CP}) \right]^2;$$

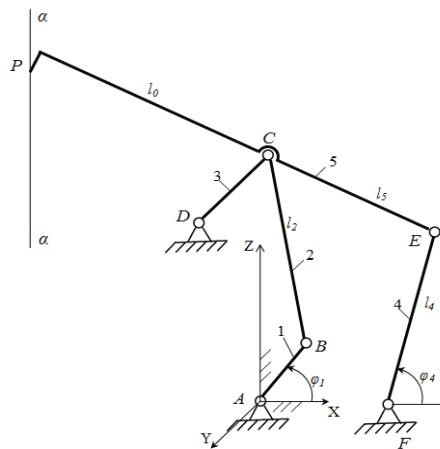


Рисунок 5.7

Вторая целевая функция определяет искомые параметры модификации ИКЦ DCP который имеет вид

$$S_2 = \sum_{i=1}^N \left[\Delta_{q_i}^{(2)}(X_D, Y_D, R, x_C, y_C) \right]^2 = \sum_{i=1}^N \left[\Delta_{q_i}^{(2)}(X_D, Y_D, l_{CD}, l_{CP}) \right]^2$$

В обеих случаях использованы алгоритм минимизации целевой функции S приведенные в подразделе 2.2.

В итоге получены следующие параметры синтезированного механизма и было определено значение глобального минимума $S = 0,0182331$.

$$\begin{aligned} l_{AB} &= 0,421; & l_{CD} &= 0,5; \\ l_{BC} &= 1,051; & x_F &= 1,2; \\ l_{CE} &= 0,85; & y_F &= 1,04; \\ l_{CP} &= 1,507; & X_A &= 0,45; \\ l_{EF} &= 1; & Y_A &= 1. \end{aligned}$$

При проведении анализа на точность воспроизведения заданной траектории точки P шатуна получено, что максимальное среднеквадратическое координатное отклонение шестизвездного механизма равно $\Delta_{\max} = 0,0281$.

5.3.2 Кинематический синтез направляющего пространственного рычажного механизма с четырьмя выстойами

Механизмы со сложными законами движения выходного звена, особенно с выстойами, применяются в ткацких станках. Для создания механизмов с воспроизведением сложного закона движения рабочего органа механизма, например, за один оборот кривошипа выходное звено, совершающее четыре выстоя, в технике в основном опирается на использование кулачковых механизмов. Несмотря на общепринятые недостатки кулачковых механизмов, замена их на рычажные механизмы, сдерживается из-за сложности решения задач автоматизации процесса синтеза пространственных механизмов. Решение задачи кинематического синтеза направляющего пространственного рычажного механизма с четырьмя выстойами опирается на использовании исходных кинематических цепей (ИКЦ) по заданным положениям входного и выходного звеньев [202, 203].

В данном разделе по заданным положениям входного и выходного звеньев механизма синтезирован пространственный рычажный механизм IV класса с двумя ведущими звеньями типа $BCCBCB$ (B – вращательная, C – сферическая). При синтезе используются трехзвенные незамкнутые исходные кинематические цепи приведенные в подразделе 2.2. Задача синтеза ИКЦ сводится к составлению целевой функции.

Для определения параметров направляющего пространственного рычажного механизма IV класса с двумя ведущими звеньями воспроизводящего четыре выстоя на выходном звене за один оборот входного звена основан на составлении одной целевой функции для ИКЦ (рисунок 5.8). Целевые функции присоединяемых бинарных звеньев составляются автоматически, т. к. они являются следствием первой целевой функции при фиксации исходных параметров ИКЦ.

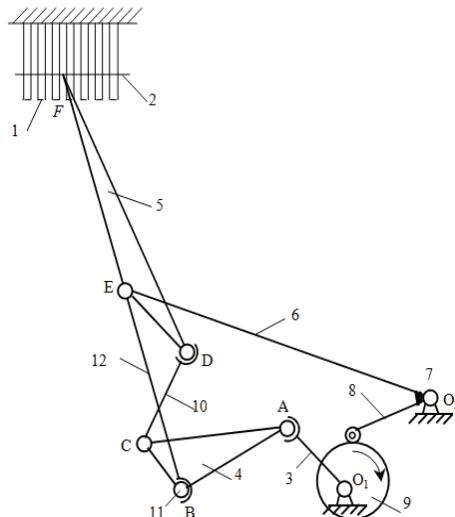


Рисунок 5.8

Пусть заданы N конечно-удаленных положений входного звена и выходного звена механизма, которые жестко связем с подвижными телами $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \psi_i^1, \theta_i^1, \phi_i^1)$, $Q_2(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i}, \psi_i^2, \theta_i^2, \phi_i^2)$. Требуется найти такие точки $A(X_A, Y_A, Z_A) \in Q$ в неподвижной системе координат, $B(x_B, y_B, z_B)$ тела Q_1 и $C(x_C, y_C, z_C)$ тела Q_2 , чтобы расстояние между точками B и C во всех положениях тел Q_1 и Q_2 мало отличались от некоторой постоянной величины R .

Для решения данной задачи составим взвешенную разность

$$\Delta_{q_i} = |B_i C_i|^2 - R^2 = (X_{C_i} - X_{B_i})^2 + (Y_{C_i} - Y_{B_i})^2 + (Z_{C_i} - Z_{B_i})^2 - R^2, \quad (i=1, N) \quad (5.9)$$

которая является функцией десяти искомых параметров: $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$. Решение данной задачи синтеза ИКЦ $ABCD$ приведены в подразделе 2.2.

Переходим к синтезу пространственного шестизвездного механизма с четырьмя выстоями на выходном звене механизма (рисунок 5.8). Для синтеза данного механизма используем ИКЦ, задавая координаты $x_B = y_B = z_B = 0$, и определяем искомые параметры $X_{O2}, Y_{O2}, Z_{O2}, x_E, y_E, z_E, R$ – длина звена EF .

После определения искомых параметров ИКЦ O_2EF , находим параметры цепи O_1ABE . Учитывая конструктивно габариты механизма и условия существования кривошипа, задаемся длинами звеньев ИКЦ

O_1ABE . Проведя анализ положений звеньев ИКЦ O_1ABE определяем положение звена AB , то есть координаты $B(x_B, y_B, z_B)$ и $A(x_A, y_A, z_A)$ и длину звена AB , то есть цепи O_1ABE .

Определив координаты всех перечисленных точек и зная положение звеньев AB и EF , находим длину звена CD .

Результаты синтеза пространственного рычажного механизма с четырьмя выстоями на выходном звене проиллюстрируем на примере. Циклограмма движения выходного звена приведена на рисунке 5.9. В результате синтеза получены следующие абсолютные размеры звеньев: кривошип 3 O_1A 100мм, межосевое расстояние O_1O_2 152мм, коромысло 6 O_2E 400мм, стороны трехстороннего жесткого контура 4 AC 244мм, AB 220мм, CB 69,3мм, стороны трехстороннего жесткого контура 5 FD 397мм, FE 280 мм, DE 123мм, тяга 12 BE 240мм, тяга 10 CD 90мм. График функции суммы S показан на рисунке 5.10.

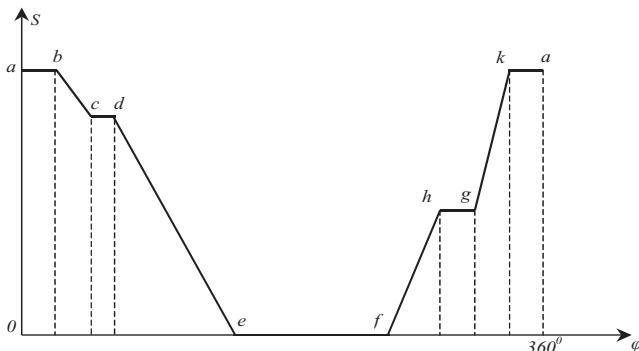


Рисунок 5.9

Механизм работает следующим образом При вращении кулачка 9 коромысло 6 сообщает движение трехстороннему жесткому контуру 5, одновременно вращаясь кривошип 3 передает движение шатуну 4, при этом тяги 10 и 12, связывающие контур 5 и шатун 4 между собой, обеспечивают плоскопараллельный закон движения средства 1 образования петель, согласно циклограммы (рисунок 5.8).

На рисунке 5.9 участки ab и ka соответствуют выстою средства образования петель в верхнем положении, необходимому для работы системы смены цвета, участок bc характеризует выдачу определенной длины нити прокладчику, cd - выстой, необходимый для обеспечения надежного захвата нити зажимными губцами пружины прокладчика, участок de - соответствует разгону прокладчика с нитью боевым механизмом, ef - выстой в нижнем положении во время полета

прокладчика в зев батана, участок fh - вытягивание излишка нити, выброшенной в зев батана, и создание определенного технологического натяжения утки при формировании ткани, hg - выстой в момент отрезания уточной нити, участок gk соответствует втягиванию уточной нити в сопло.

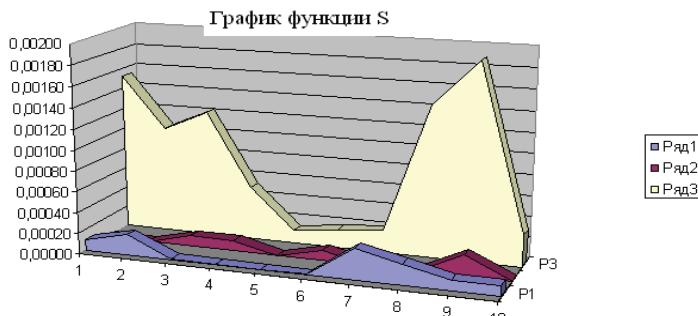


Рисунок 5.10 – График функции S

Циклограмма описывает движение компенсирующего элемента в зависимости от угла поворота главного вала станка и характерна для ткацкого станка с пневматической подачей утка к прокладчику.

По сравнению с прототипом использование пространственного рычажного привода позволяет увеличить скоростные характеристики при стабильной работе всего устройства, не рискуя переходом с одной сборки в другую. Результаты анализа положений звеньев механизма приведены на рисунке 5.11.

Существующий уровень техники и технологий в Республике Казахстан позволяет изготовить данное устройство.

В механизме с четырьмя выстоями для предупреждения перехода с одной сборки в другую сборку при высоких скоростях работы механизма предусмотрено использование совместно с входным звеном и кулачка.

Теперь рассмотрим задачу профилирования цилиндрических кулачков. При профилировании обычно применяют метод развертывания цилиндра по среднему радиусу контакта профиля кулачка и ролика. Как показали результаты работ: при профилировании по этому методу искажается закон движения коромысла. В общем случае предлагается при профилировании использовать теорию поверхностей, которая является по своей сути довольно громоздкой. Известны также способы профилирования цилиндрических кулачков методом последовательных приближений.

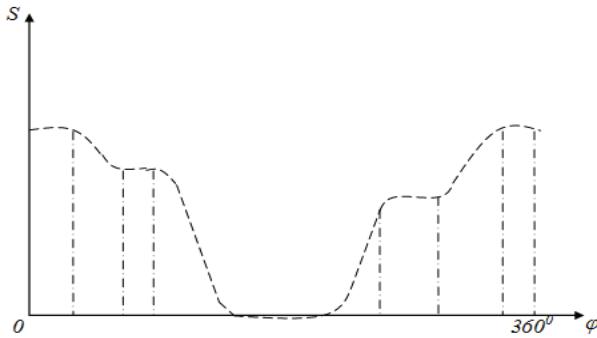


Рисунок 5.11

В настоящей работе предлагается метод синтеза кулачка, основанный на обращенном движении цилиндра с использованием теории линейчатых поверхностей при различных случаях контактирования ролика с профилем [204, 205].

Рассмотрим кулачковый механизм с коромыслом (рисунок 5.12).

Пусть задан закон движения коромысла в виде $\psi = \psi(\varphi)$. Для определенности за начальное положение примем ψ_0 , соответствующее $\varphi = 0$, $\rho_0 - \theta = 0$ (рисунок 5.13). Из треугольника $O'_1O'_2F'$ нетрудно получить следующие зависимости

$$\begin{cases} r(\varphi) = \sqrt{(l \sin \psi + L \cos \delta)^2 + L^2 \sin^2 \delta} \\ \mu(\varphi) = \arccos \frac{-L - l \sin \psi \cos \delta}{r(\varphi)} \end{cases} \quad (5.10)$$

Начальные значения r_0 и μ_0 определяются по формулам (1) при $\varphi = 0$ и $\psi = \psi_0$.

Полярные координаты теоретического профиля кулачка можно записать в параметрическом виде

$$\begin{cases} \rho(\varphi) = c + l \cos \psi \\ \theta(\varphi) = \varphi + \mu - \mu_0 \end{cases} \quad (5.11)$$

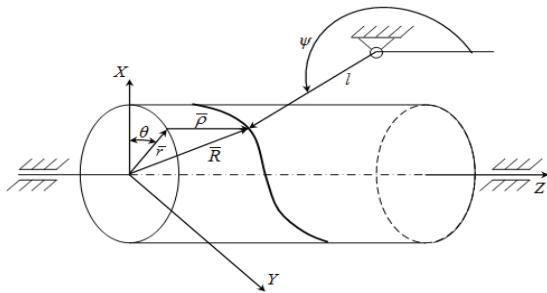


Рисунок 5.12

Перейдем к определению радиусов кривизны нормального сечения профильной поверхности и углов давления. Будем считать, что уравнение контактной линии на профильной поверхности зависит от полярного угла θ , то есть

$$\begin{cases} \rho = \rho(\theta) \\ r = r(\theta) \end{cases} \quad (5.12)$$

Тогда, согласно рисунку 5.12, для векторного уравнения контактной линии можно записать

$$\bar{R} = r \cos \bar{\theta} \hat{i} + r \sin \bar{\theta} \hat{j} + \rho \hat{k} \quad (5.13)$$

1. Рассмотрим случай точечного контакта ролика и профиля. В этом случае уравнение теоретической профильной поверхности, как уравнение линейчатой поверхности, будет иметь вид

$$\bar{B} = (r + \gamma) \cos \bar{\theta} \hat{i} + (r + \gamma) \sin \bar{\theta} \hat{j} + \rho \hat{k} \quad (5.14)$$

Здесь γ - параметр, изменяющейся вдоль единичного вектора, образующей.

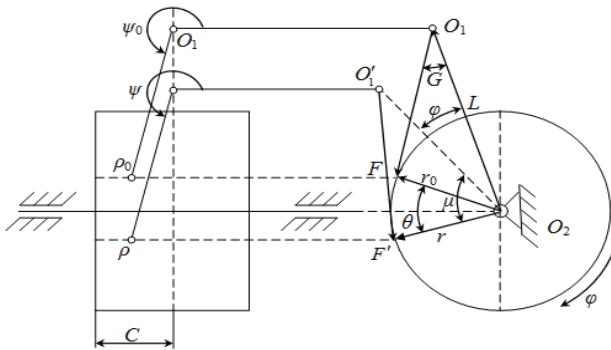


Рисунок 5.13

Вычислим единичный вектор нормали к поверхности по формуле

$$\bar{m} = -\frac{\bar{B}\theta \times \bar{B}\gamma}{(\bar{B}\theta \times \bar{B}\gamma)} \quad (5.15)$$

После дифференцирования (5.14) по θ и γ и некоторых преобразований получим

$$\bar{m} = \frac{\rho' \sin \theta \bar{i} - \rho' \cos \theta \bar{j} + (r + \gamma) \bar{k}}{\sqrt{\rho'^2 + (r + \gamma)^2}} \quad (5.16)$$

Для точек контакта необходимо в формуле (5.16) положить $\gamma = 0$. Угол давления можно вычислить с помощью скалярного произведения вектора \bar{m} и единичного вектора скорости коромысла \bar{l} .

$$\nu = \arccos \frac{r \sin \psi - \rho' \sin \theta \cos \psi}{\rho'^2 + r^2} \quad (5.17)$$

Радиус нормальной кривизны кривой (5.13) в точке контакта определим по формуле

$$\rho_k = \frac{1}{\bar{R}_{ss} \bar{m}} \quad (5.18)$$

где

$$R_{ss} = \frac{(r'^2 + r^2 + \rho'^2) \bar{R} \theta_0 - (r'r'' + rr' + \rho\rho'') \bar{R} \theta}{(r'^2 + r^2 + \rho'^2)^2} \quad (5.19)$$

Окончательно получим

$$\rho_k = \frac{(r'^2 + r^2 + \rho'^2) \sqrt{\rho'^2 + r^2}}{r\rho'' - 2r'\rho'} \quad (5.20)$$

Переходя в формулах (5.17) и (5.20) от θ к переменному φ , имеем

$$\nu = \arccos \frac{r\theta \sin \psi - \rho \sin \theta \cos \psi}{\sqrt{\rho^2 + r^2 \theta^2}} \quad (5.21)$$

$$\rho_k = \frac{(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{\rho}^2) \sqrt{\dot{\rho}^2 + r^2 \theta^2}}{r(\ddot{\rho}\dot{\theta} - \dot{\rho}\ddot{\theta}) - 2\dot{\rho}\dot{r}\dot{\theta}} \quad (5.22)$$

Здесь ρ , r , θ и их производные по углу поворота кулачка φ , вычисляются согласно формул (5.10) и (5.11).

2. Рассмотрим случай линейного контакта ролика и профиля. Запишем уравнение теоретической профильной поверхности

$$\bar{B} = r \cos \bar{\theta} \bar{i} + (\gamma + r \sin \theta) \bar{j} + \rho \bar{k} \quad (5.23)$$

Для единичного вектора нормали к поверхности имеем

$$\bar{m} = \frac{\rho' \bar{i} + u' \bar{k}}{\sqrt{\rho'^2 + u'^2}} \quad (5.24)$$

где $u = -r \cos \theta$.

Угол давления и радиус кривизны получаем аналогично формулам (5.17) и (5.20)

$$\nu = \arccos \frac{u' \sin \psi - \rho' \cos \psi}{\sqrt{\rho'^2 + u'^2}} \quad (5.25)$$

$$\rho_k = \frac{(r'^2 + r^2 \theta'^2 + \rho'^2) \sqrt{\rho'^2 + u'^2}}{u' \rho'' - \rho' u''} \quad (5.26)$$

Перейдем в формулах (5.25) и (5.26) от θ к переменному φ

$$\nu = \arccos \frac{\dot{u} \sin \psi - \dot{\rho} \cos \psi}{\sqrt{\dot{\rho}^2 + \dot{u}^2}} \quad (5.27)$$

$$\rho_k = \frac{(r^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{\rho}^2) \sqrt{\dot{\rho}^2 + \dot{u}^2}}{\dot{u} \ddot{\rho} - \dot{\rho} \ddot{u}} \quad (5.28)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\dot{u} &= r \dot{\theta} \sin \theta - \dot{r} \cos \theta \\ \ddot{u} &= (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \sin \theta - (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \cos \theta\end{aligned}$$

а ρ , r , θ и их производные по углу поворота кулачка вычисляются по формулам (5.10) и (5.11).

При нарезании профиля фрезой нетрудно записать координаты режущего инструмента

$$\begin{cases} z_{uu} = \rho = c + l \cos \varphi \\ x_{uu} = -L \cos \delta - l \sin \varphi \end{cases} \quad (5.29)$$

Рассмотренный метод является более точным при профилировании, что очень важно для быстроходных механизмов, так как даже малые погрешности профиля искажают циклограмму работы кулачкового механизма и повышают динамические нагрузки в звеньях.

Таким образом, используя ИКЦ, по заданным законам движения входного и выходного звеньев, автоматизировав различные этапы структурно-кинематического синтеза проектируемого механизма, синтезирован направляющий пространственный кулачково – рычажный механизм с четырьмя выстоями.

5.4 Кинематический синтез пространственных передаточных механизмов

5.4.1 Синтез передаточных четырехзвенных сферических механизмов

В данном разделе рассматривается задачи синтеза передаточных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев

проектируемого механизма на основе исходных кинематических цепей (ИКЦ) [206].

Пусть заданы координаты точки $A(X_A, 0, 0)$, точки $D(X_D, Y_D, 0)$, угол ρ и углы поворота звеньев AB и CD соответственно γ_i^1 и γ_i^2 (рисунок 5.14).

Требуется найти точки $B \in Q_1$ и $C \in Q_2$ такие, что расстояние между ними во всех N положениях звеньев AB и CD мало отличалось от некоторой постоянной величины R .

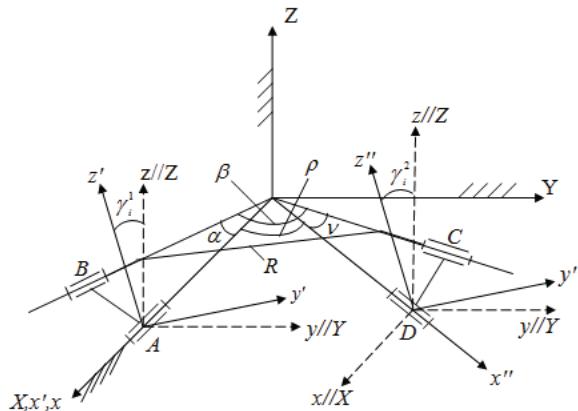


Рисунок 5.14

Задача сводится к определению семи параметров $x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$ и углов α, β, γ . Для упрощения, угол ρ предполагаем заданным.

Для решения задачи рассмотрим две различные формы взвешенной разности:

$$\Delta_{q_i}^{(1)} = (\tilde{x}_{B_i} - x_B)^2 + (\tilde{y}_{B_i} - y_B)^2 + (\tilde{z}_{B_i} - z_B)^2 - R^2 \quad (5.30)$$

$$\Delta_{q_i}^{(2)} = (\tilde{x}_{C_i} - x_C)^2 + (\tilde{y}_{C_i} - y_C)^2 + (\tilde{z}_{C_i} - z_C)^2 - R^2 \quad (5.31)$$

Тогда учитывая, что координаты точек A и D фиксированы, получим выражения $\tilde{x}_{B_i}, \tilde{y}_{B_i}, \tilde{z}_{B_i}, \tilde{x}_{C_i}, \tilde{y}_{C_i}, \tilde{z}_{C_i}$:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{B_i} \\ \tilde{y}_{B_i} \\ \tilde{z}_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{01}^i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_D - X_A \\ Y_D - Y_A \\ Z_D - Z_A \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{21}^i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{C_i} \\ y_{C_i} \\ \tilde{z}_{C_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{02}^i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A - X_D \\ Y_A - Y_D \\ Z_A - Z_D \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{12}^i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

где $[T_{kj}^i]$ - матрица перехода от K -той системы координат к j -той системе, определяемые как в (2.17)

$$T_{jo}^i = \begin{bmatrix} e_{i1}^j & e_{i2}^j & e_{i3}^j \\ m_{i1}^j & m_{i2}^j & m_{i3}^j \\ n_{i1}^j & n_{i2}^j & n_{i3}^j \end{bmatrix}, \quad (j = \overline{1,2}; \quad i = \overline{1,N}) \quad (5.34)$$

$$\begin{cases} e_{i1}^j = \cos\psi_i^j \cdot \cos\varphi_i^j - \cos\theta_i^j \cdot \sin\psi_i^j \cdot \sin\varphi_i^j \\ m_{i1}^j = \sin\psi_i^j \cdot \cos\varphi_i^j + \cos\theta_i^j \cdot \cos\psi_i^j \cdot \cos\varphi_i^j \\ n_{i1}^j = \sin\theta_i^j \cdot \sin\varphi_i^j \\ e_{i2}^j = -\cos\psi_i^j \cdot \sin\varphi_i^j - \cos\theta_i^j \cdot \sin\psi_i^j \cdot \cos\varphi_i^j \\ m_{i2}^j = -\sin\psi_i^j \cdot \sin\varphi_i^j + \cos\theta_i^j \cdot \cos\psi_i^j \cdot \sin\varphi_i^j \\ n_{i2}^j = \sin\theta_i^j \cdot \cos\varphi_i^j \\ e_{i3}^j = \sin\theta_i^j \cdot \sin\psi_i^j \\ m_{i3}^j = -\sin\theta_i^j \cdot \cos\psi_i^j \\ n_{i3}^j = \cos\varphi_i^j \end{cases} \quad (5.35)$$

$$T_{01}^i = [T_{10}^i]^T; \quad T_{02}^i = [T_{20}^i]^T; \quad T_{21}^i = T_{01}^i \times T_{20}^i; \quad T_{12}^i = T_{02}^i \times T_{10}^i, \dots \quad (5.36)$$

Рассмотрим матрицы $T_{01}^i, T_{21}^i, T_{02}^i, T_{12}^i$, где элементы этих матриц зависят от эйлеровых углов $\theta_i^j, \psi_i^j, \varphi_i^j$ ($i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,2}$). Так как звено AB вращается вокруг оси OX , положение подвижной системы относительно

неподвижной системы координат определяется одним углом γ_i^1 и положением точки A и этот угол является углом нутации, а $\psi_i^1 = 0$, $\phi_i^1 = 0$.

Тогда элементы матрицы T_{01}^i принимают значения:

$$T_{10}^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_i^1 & -\sin\theta_i^1 \\ 0 & \sin\theta_i^1 & \cos\theta_i^1 \end{bmatrix}, \quad \text{где } \theta_i^1 = \gamma_i^1, \quad (5.37)$$

После определения матриц перехода рассмотрим необходимые условия минимума суммы квадратов взвешенной разности $S = \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^2$.

Необходимые условия минимума суммы S :

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0 ; \quad (j = x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C)$$

Из этих условий получим две системы линейных уравнений относительно неизвестных x_B, y_B, z_B, H_1 и x_C, y_C, z_C, H_2 .

Углы α, β, ν , определяем как углы между векторами \overrightarrow{OB} и \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} и \overrightarrow{OC} , \overrightarrow{OC} и \overrightarrow{OD} для какого-то i -го положения звеньев CD и AB .

Рассмотрим синтез пространственного передаточного четырехзвенника типа $BCCB$, где B – врацательная и C – сферическая пара. Допустим даны углы поворота звеньев AB и CD – γ_i^1 и γ_i^2 , требуется их приближенно воспроизвести посредством пространственного четырехзвенника $ABCD$ (угол ρ задан). Требуется определить $X_A, Y_A, Z_A, x_C, x_B, y_B, z_B, y_C, z_C$ и R (рисунок 5.15).

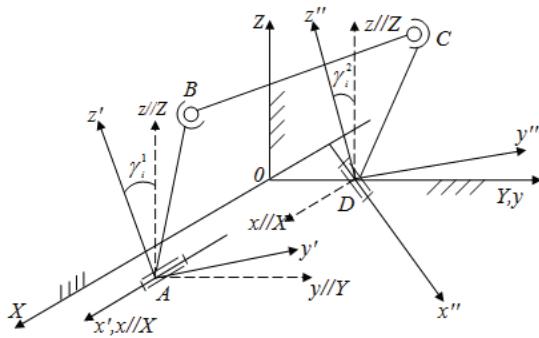


Рисунок 5.15

Для решения задачи взвешенную разность представим в двух различных формах на основе формулы (5.30) и (5.31). Выражения $\tilde{X}_{A_i}, \tilde{Y}_{A_i}, \tilde{Z}_{A_i}, \tilde{x}_{B_i}, \tilde{y}_{B_i}, \tilde{z}_{B_i}, \tilde{x}_{C_i}, \tilde{y}_{C_i}, \tilde{z}_{C_i}$ определяются по формулам (5.32) и (5.33), учитывая, что координаты точки $D(X_D, Y_D)$ фиксированы.

Элементы матриц $T_{10}^i, T_{20}^i, T_{01}^i, T_{02}^i, T_{12}^i$ определяются аналогично (5.36). Рассмотрим необходимые условия минимума суммы S .

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C).$$

Далее получим линейные системы, решение которых получим методом Крамера. Далее по приведенному алгоритму в подразделе 2.2 находим искомые величины.

Таким образом, как мы видим из предложенного метода и рассмотренного примера, принципиально может быть решены задачи синтеза передаточных сферических механизмов и механизма типа *BCCB* на основе ИКЦ.

5.4.2 Кинематический синтез пространственного четырехзвенного передаточного механизма на основе исходных кинематических цепей

Постановка задачи: Пусть заданы N конечноудаленных положений двух твердых тел $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \theta_i^1, \psi_i^1, \varphi_i^1)$ и $Q_2(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i}, \theta_i^2, \psi_i^2, \varphi_i^2)$, где $i=1, N$, $\theta_i^j, \psi_i^j, \varphi_i^j$ - эйлеровы углы относительно неподвижной системы координат $OXYZ$.

Требуется найти в неподвижной системе координат такие точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ тела Q_1 и $C(x_C, y_C, z_C)$ тела Q_2 , чтобы расстояние между точками B и C во всех положениях тел Q_1 и Q_2 мало отличалось от некоторой постоянной величины R (рисунок 5.16) [207].

Решение задачи: Введем взвешенную разность для i -го положения тел в виде:

$$\Delta_{q_i} = \left| \overline{B_i C_i} \right|^2 - R^2 = (X_{C_i} - X_{B_i})^2 + (Y_{C_i} - Y_{B_i})^2 + (Z_{C_i} - Z_{B_i})^2 - R^2 \quad (5.39)$$

Она является функцией десяти параметров: $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$. Группируя эти параметры по четыре с общим параметром R , взвешенную разность представим в трех различных формах:

$$\Delta_{q_i}^{(1)} = (\tilde{X}_{A_i} - X_A)^2 + (\tilde{Y}_{A_i} - Y_A)^2 + (\tilde{Z}_{A_i} - Z_A)^2 - R^2, \quad (5.40)$$

$$\Delta_{q_i}^{(2)} = (\tilde{x}_{B_i} - x_B)^2 + (\tilde{y}_{B_i} - y_B)^2 + (\tilde{z}_{B_i} - z_B)^2 - R^2, \quad (5.41)$$

$$\Delta_{q_i}^{(3)} = (\tilde{x}_{C_i} - x_C)^2 + (\tilde{y}_{C_i} - y_C)^2 + (\tilde{z}_{C_i} - z_C)^2 - R^2, \quad (5.42)$$

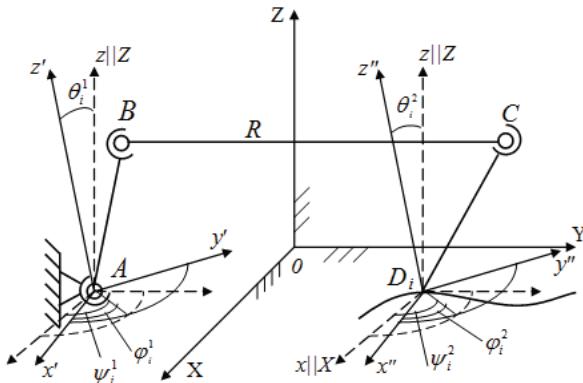


Рисунок 5.16

Необходимые условия минимума суммы квадратов взвешенной разности:

$$S = \sum_{i=1}^N \Delta_{q_i}^2 \quad (5.43)$$

можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial s}{\partial X_A} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial Y_A} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial Z_A} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial R} = 0; \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_B} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial y_B} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial z_B} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial R} = 0; \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_C} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial y_C} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial z_C} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial R} = 0; \quad (5.46)$$

С учетом (5.39) система уравнений (5.40) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \tilde{X}_{Ai} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \tilde{Y}_{Ai} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} \tilde{Z}_{Ai} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^{(1)} = 0;$$

Решение этой системы уравнений относительно десяти искомых параметров синтеза приведены в разделе 2.2.

Задавая в различных комбинациях часть искомых параметров синтеза, можно получить различные модификации ИКЦ.

1. Если заданы координаты точки $A_i(X_{A_i}, Y_{A_i}, Z_{A_i})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_1 и координаты точки $D_i(X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i})$ и эйлеровы углы $\theta_i^2, \psi_i^2, \phi_i^2$ тела Q_2 , то получим трехзвенную открытую цепь $ABCD$ (рисунок 5.17).

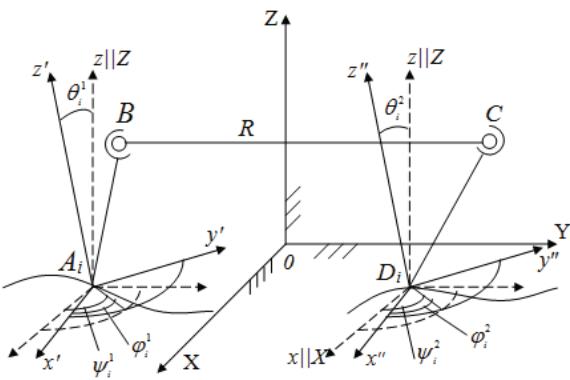


Рисунок 5.17

Необходимые условия минимума суммы S в данном случае принимают вид:

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C)$$

и для нахождения минимума S можно использовать алгоритм, приведенный выше, учитывая, что параметры X_A, Y_A, Z_A заданы.

Если точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ и $D(X_D, Y_D, Z_D)$ фиксированы, то в результате синтеза ИКЦ получим пространственный четырехзвенник $ABCD$.

2. Пусть заданы координаты $x_C = y_C = z_C = 0$ точки $C \in Q_2$, координаты $X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i}$ точки D тела Q_2 и углы Эйлера $\theta_i^1, \psi_i^1, \phi_i^1$ тела Q_1 , а искомыми параметрами являются $X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B$ (рисунок 5.18).

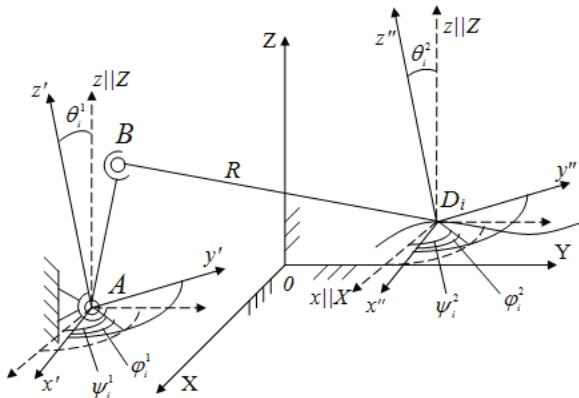


Рисунок 5.18

Необходимые условия минимума сумма S принимают вид:

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B).$$

Для нахождения минимума функции S можно опять использовать алгоритм, приведенный выше, учитывая, что $x_C = y_C = z_C = 0$.

3. Пусть заданы координаты $x_B, y_B, z_B = 0$ точки B тела Q_1 и эйлеровы углы тела Q_2 $\theta_i^2, \psi_i^2, \varphi_i^2$. Исходная задача сводится к определению сферы наименее удаленной от N положений фиксированной точки C тела Q_2 (рисунок 5.19).

Необходимые условия минимума суммы S

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = X_A, Y_A, Z_A, R, x_C, y_C, z_C).$$

Для ее решения можно применить алгоритм, приведенный в разделе 2.2, полагая $x_B, y_B, z_B = 0$.

Теперь на примере покажем иллюстрацию синтеза передаточного механизма по заданным положениям входного и выходного звеньев на основе ИКЦ.

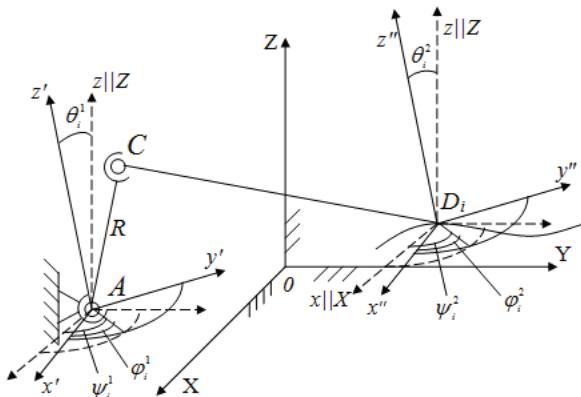


Рисунок 5.19

Пример. Рассмотрим задачу синтеза пространственного четырехзвенного механизма типа $BCCB$ (B – вращательная, C – сферические кинематические пары), приближенно воспроизводящий функцию

$$\psi = -50 \cos \frac{6}{5} \varphi, \quad \varphi \in [0^\circ, 120^\circ]$$

Интервал $[0^\circ, 120^\circ]$ разбиваем на 20 равных частей (рисунок 5.20).

Задаваясь межосевым углом $\rho=90^\circ$ и координатами $X_D=Z_D=0$, $Y_D=1,2$ точки D , определим следующие параметры четырехзвенника $ABCD$:

$$a = \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2},$$

$$b=R,$$

$$c = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 + z_C^2},$$

$$X_A, Y_A, Z_A,$$

$$\varphi_0 = \arccos \frac{z_B}{a},$$

$$\psi_0 = \arccos \frac{z_C}{c}.$$

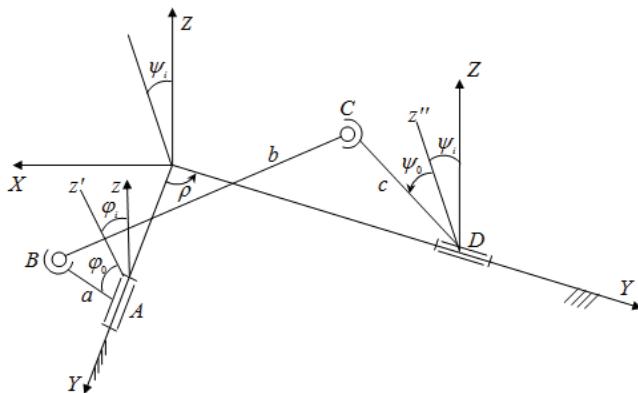


Рисунок 5.20

Для синтеза данной задачи используем выражение (5.39). Тогда матрица (2.17) имеет следующий вид:

$$T_{jk}^i = T_{01} \cdot T_{02} \cdot T_{03}$$

где

$$T_{01} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & 0 & -\sin \varphi_i \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_i & 0 & \cos \varphi_i \end{bmatrix}$$

$$T_{02} = \begin{bmatrix} \cos \rho & -\sin \rho & 0 \\ \sin \rho & \cos \rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{03} = \begin{bmatrix} \cos \psi_i & 0 & \sin \psi_i \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi_i & 0 & \cos \psi_i \end{bmatrix}$$

Чтобы определить искомые параметры синтеза используем алгоритм поиска минимума суммы S приведенный в разделе 2.2. На основе выше приведенного алгоритма минимизации, значение минимума суммы $S=0,00012$.

Тогда задача синтеза механизма сводится к минимизации целевой функции ИКЦ

$$S = \sum_{i=1}^{21} [\Delta_{qi}(X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C)]^2$$

Для решения этой задачи применяем выше приведенный алгоритм поиска минимума суммы S . Согласно алгоритма задаемся 10 значениями $B(x_B^{(0)}, y_B^{(0)}, z_B^{(0)})$ и $C(x_C^{(0)}, y_C^{(0)}, z_C^{(0)})$ в зависимости от длины звеньев a и c . Для каждого предварительного значения точек $B(x_B^{(0)}, y_B^{(0)}, z_B^{(0)})$ и $C(x_C^{(0)}, y_C^{(0)}, z_C^{(0)})$ в таблице 5.7 приведены результаты вычислений.

Итерационный процесс поиска минимума функции S завершается при выполнении неравенств

$$|R^{(k)} - R^{(k-1)}| \leq \varepsilon, |X_A^{(k)} - X_A^{(k-1)}| \leq \varepsilon, |Y_A^{(k)} - Y_A^{(k-1)}| \leq \varepsilon, |Z_A^{(k)} - Z_A^{(k-1)}| \leq \varepsilon$$

где $\varepsilon = 10^{-4}$.

Таблица 5.7

| N | x_B | y_B | z_B | R | x_C | y_C | z_C | X_A | Y_A | Z_A | S |
|-----|---------|---------|----------|---------|----------|----------|----------|--------|----------|--------|---------|
| 1 | 1,014 | 1,815 | 1,2968 | 2,6406 | 0,804 | 1,9819 | 0,3277 | 0,0001 | 1,204 | 0 | 0,00152 |
| 2 | 0,9178 | 1,7169 | 0,8219 | 2,41518 | 0,9017 | 1,7618 | 0,3838 | 0,0002 | 1,105 | 0 | 0,00103 |
| 3 | -1,1171 | 1,6449 | 0,7263 | 1,9678 | 0,7664 | 0,9261 | 0,4147 | 0 | 1,086 | 0,0001 | 0,00122 |
| 4 | -0,3181 | 1,4716 | 0,9227 | 1,7646 | 0,5464 | 0,8167 | 0,4386 | 0 | 1,2667 | 0,0001 | 0,00052 |
| 5 | -0,2276 | 1,21314 | 0,609801 | 1,69127 | 0,652906 | 0,639147 | 0,469694 | 0 | 1,189776 | 0 | 0,00012 |
| 6 | 0,7819 | 1,0449 | 0,3233 | 1,5118 | 0,5917 | 0,6221 | 0,4554 | 0 | 1,0997 | 0,0001 | 0,00018 |
| 7 | 0,1918 | 1,1667 | 0,2218 | 1,7246 | 0,4928 | 0,6046 | 0,7184 | 0,0003 | 1,6756 | 0 | 0,00021 |
| 8 | 0,2128 | 1,0717 | 0,3486 | 1,54714 | 0,5154 | 0,7654 | 0,6656 | 0,0002 | 1,7617 | 0 | 0,00146 |
| 9 | 0,56179 | 1,00818 | 0,9417 | 1,3349 | 0,3426 | 0,6406 | 0,6846 | 0,0001 | 1,3606 | 0,0002 | 0,0019 |
| 10 | 0,86718 | 1,2617 | 0,6461 | 1,2667 | 0,5617 | 0,7627 | 0,6976 | 0,0001 | 1,1415 | 0,000 | 0,00031 |

На рисунках 5.21 – 5.24 приведены плоские и объемные графики целевой функции S .

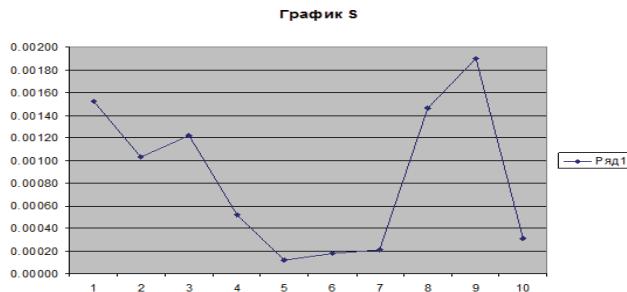


Рисунок 5.21 – График S

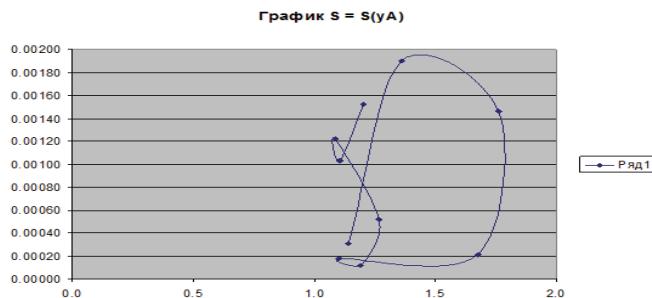


Рисунок 5.22 – График $S = S(y_A)$



Рисунок 5.23 – График $S = S(R)$

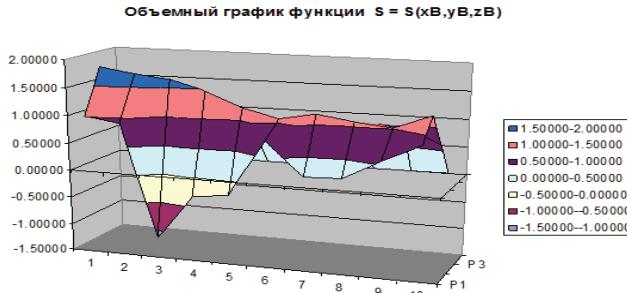


Рисунок 5.24 – Объемный график $S=S(x_B, y_B, z_B)$

Значение искомых параметров синтезированного механизма:

$$x_B = -0,227631, \quad x_C = 0,652906, \quad R = 1,69127$$

$$y_B = 1,21314, \quad y_C = 0,639147, \quad X_A = Z_A = 0$$

$$z_B = 0,609801, \quad z_C = 0,469694, \quad Y_A = 1,189776$$

5.4.3 Кинематический синтез пространственного передаточного механизма с тремя выстоями на основе исходных кинематических цепей

В технике в основном используются кулачковые механизмы для воспроизведения сложного закона движения рабочего органа машины. Например, за один оборот кривошипа выходное звено должно совершить три выстоя [208, 209, 210].

В данном разделе рассмотрено решение задачи синтеза пространственного механизма типа $BBCCC\Pi$ (B – вращательная, C – сферическая, Π – поступательная кинематические пары), позволяющего получить из непрерывного движения кривошипа три выстоя выходного звена [214, 215].

Пусть заданы N конечно-удаленных положений входного звена (кривошипа) и выходного звена механизма, которые жестко связаны с подвижными телами $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \psi_i^1, \theta_i^1, \varphi_i^1)$, $Q_2(x_M, y_M, z_M, \psi_i^2, \theta_i^2, \varphi_i^2)$ соответственно. Требуется найти такие точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ в неподвижной системе координат, $B(x_B, y_B, z_B)$ тела Q_1 и $C(x_C, y_C, z_C)$ тела Q_2 , чтобы расстояние между точками B и C во всех положениях тел Q_1 и Q_2 мало отличались от некоторой постоянной величины R .

Для решения данной задачи составим взвешенную разность

$$\Delta q_i = / \overrightarrow{B_i C_i} /^2 - R^2 = (X_{Ci} - X_{Bi})^2 + (Y_{Ci} - Y_{Bi})^2 + (Z_{Ci} - Z_{Bi})^2 - R^2, \quad (5.47)$$

$$(i = \overline{1, N}),$$

которая является функцией десяти параметров: $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$. Сгруппировав все эти параметры по четыре с общим параметром R , сможем представить данную взвешенную разность в трех различных формах:

$$\begin{aligned}\Delta_{q_i}^{(1)} &= (\tilde{X}_{Ai} - X_A)^2 + (\tilde{Y}_{Ai} - Y_A)^2 + (\tilde{Z}_{Ai} - Z_A)^2 - R^2, \\ \Delta_{q_i}^{(2)} &= (\tilde{x}_{Bi} - x_B)^2 + (\tilde{y}_{Bi} - y_B)^2 + (\tilde{z}_{Bi} - z_B)^2 - R^2, \\ \Delta_{q_i}^{(3)} &= (\tilde{x}_{Ci} - x_C)^2 + (\tilde{y}_{Ci} - y_C)^2 + (\tilde{z}_{Ci} - z_C)^2 - R^2,\end{aligned} \quad (5.48)$$

где

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \tilde{X}_{Ai} \\ \tilde{Y}_{Ai} \\ \tilde{Z}_{Ai} \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ [T_{10}] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{D_i} \\ [T_{20}] \\ Y_{D_i} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \tilde{x}_{Bi} \\ \tilde{y}_{Bi} \\ \tilde{z}_{Bi} \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ [T_{01}] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{D_i} - X_A \\ Y_{D_i} - Y_A \\ Z_{D_i} - Z_A \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ [T_{21}] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \tilde{x}_{Ci} \\ \tilde{y}_{Ci} \\ \tilde{z}_{Ci} \\ 1 \end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix} 0 \\ [T_{02}] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A - X_{D_i} \\ Y_A - Y_{D_i} \\ Z_A - Z_{D_i} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ [T_{12}] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

где $[T_{kj}]$ - матрица перехода от k -той системы координат к j -той системе, определяемая как в (2.17).

Необходимые условия минимума суммы квадратов взвешенной разности:

$$S = \sum_{i=1}^N [\Delta_{q_i}]^2 \quad (5.49)$$

можно записать в виде следующей системы уравнений с общим параметром R :

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0 \quad (j = X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C) \quad (5.50)$$

Решая уравнения (5.50) на основе предложенного итерационного алгоритма, с использованием в качестве начальных приближений параметры плоского аналога механизма, определяем искомые параметры $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$.

Определив искомые параметры исходной кинематической цепи $ABCM$, далее находим параметры бинарного звена CDE . Для этого проводим анализ положений звеньев исходной кинематической цепи $ABCM$. Используя определенные ранее координаты точки $C(x_C, y_C, z_C)$ и углы $\theta_i^j, \psi_i^j, \varphi_i^j$ и приравняв в уравнениях (5.48) координаты точки B нулю ($x_B=y_B=z_B=0$) получим координаты $D(x_D, y_D, z_D)$ и $E(X_E, Y_E, Z_E)$, то есть бинарное звено CDE (рисунок 5.25).

Результаты синтеза пространственного рычажного механизма типа $VBCCCP$ с тремя выстоями на выходном звене проиллюстрируем на примере. Циклограмма движения выходного звена приведена на рисунке 5.26.

В результате синтеза получены следующие абсолютные размеры звеньев: межосевое расстояние AE 261,4 мм, кривошип AB 100мм, шатун BC 183,3 мм, коромысло ED 99,4 мм, стороны трехстороннего жесткого контура DM 320,8 мм, CM 423,3 мм, CD 132 мм, расстояние от нижнего положения ползуна M до стойки коромысла E равен 403,3 мм, ход ползуна M равен 316,6 мм.

Механизм с тремя выстоями работает следующим образом. При вращении кривошипа 6 шатун 7 сообщает движение трехстороннему жесткому контуру 8, при этом один конец жесткого контура 8 создает качательное движение коромыслу 9 вокруг неподвижной опоры 10, а другой конец, шарнирно связанный с ползуном 3, взаимодействующий с прямолинейной направляющей 4, двигает захват 2 по циклограмме, имеющей три выстои.

На рисунке 5.26 участки ab и qh соответствуют выстою захвата 2 при отрезании уточной нити, участок bc характеризует вытягивание уточной нити на исходную позицию, выстой cd необходим для работы системы смены цвета, участок ef – выстой рабочего звена в нижнем положении при прокладывании уточной нити в зев, fq – вытягивание излишка проброшенной нити в зев и создание определенного технологического натяжения утка при формировании ткани.

Объемный график функции суммы S показан на рисунке 5.27.

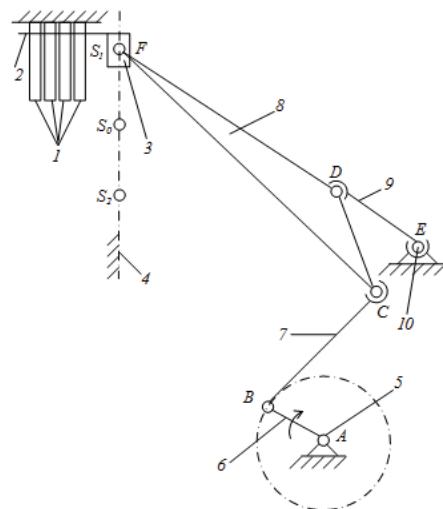


Рисунок 5.25

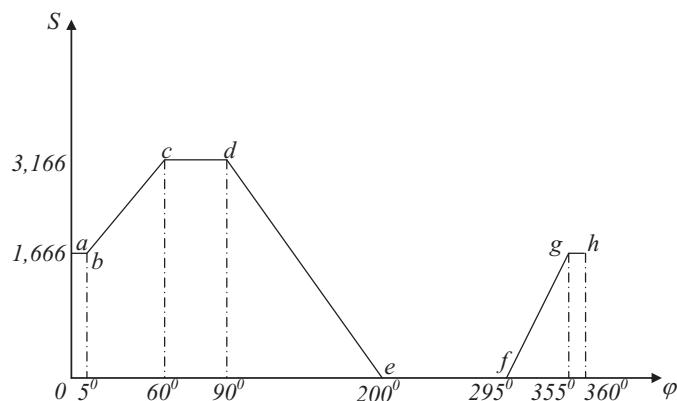


Рисунок 5.26

Объемный график функции S

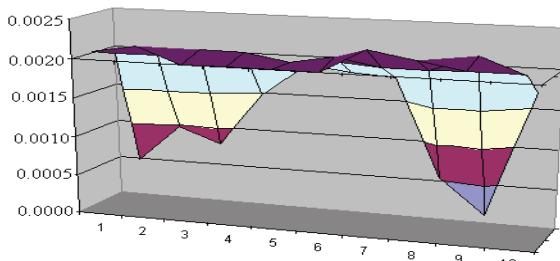


Рисунок 5.27 – Объемный график функции суммы S

Циклограмма описывает движение захвата 2 в зависимости от угла поворота главного вала станка и характерна для существующих устройств компенсации станков СТБ.

Результаты анализа положений звеньев механизма приведены на рисунке 5.28.

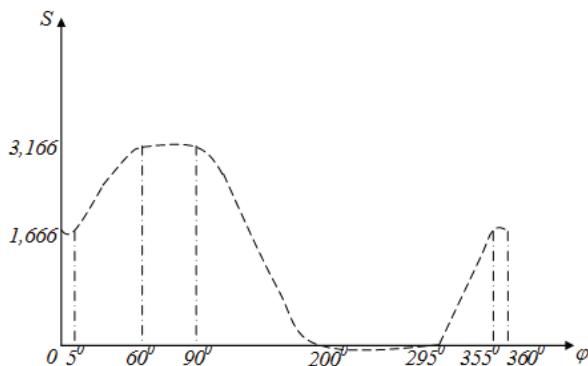


Рисунок 5.28

На основе вышеизложенного алгоритма синтеза ИКЦ по заданным законам движения входного и выходного звеньев синтезируемого механизма можно автоматизировать все этапы структурно-кинематического синтеза проектируемого механизма.

Выводы по пятому разделу

1. Разработаны алгоритмы и программа автоматизированного структурно – кинематического синтеза пространственных рычажных механизмов на основе ИКЦ по заданным положениям входного и выходного звеньев механизма, ориентированных на эффективное использование ЭВМ позволяющих автоматизировать все этапы решения задач синтеза механизмов.

2. На основе разработанного метода и использование алгоритма минимума суммы функции S спроектированы семизвездные одноподвижные перемещающие пространственные механизмы по заданным положениям тела.

3. Впервые решены по предлагаемому методу задачи квадратического синтеза сферических четырехзвенников, передаточных механизмов типа *BCCB* на основе ИКЦ и пространственных передаточных, направляющих и перемещающих механизмов со сферическими, цилиндрическими, вращательными и поступательными парами по полному числу параметров.

4. Эффективность разработанного метода иллюстрируется на конкретных примерах синтеза передаточных четырех и шестизвездных механизмов, шестизвездных перемещающих механизмов грузоподъемного устройства и направляющих механизмов.

5. Синтезирован пространственный рычажный передаточный механизм с тремя выстоями на выходном звене за один оборот входного звена (кривошипа). На этот механизм получен авторское свидетельство РК.

6. Синтезирован пространственный рычажный направляющий механизм с четырьмя выстоями на выходном звене за один оборот входного звена (кривошипа). На этот механизм получен авторское свидетельство РК.

7. Показано структурно – кинематический синтез пространственных грузоподъемных механизмов со сферическими, со сферическими с пальцем и вращательными парами. При этом формируется структура проектируемого механизма на основе одной и той же целевой функции синтеза.

6 Динамика и жесткость исходных кинематических цепей

6.1 Динамические модели исходных кинематических цепей с учетом упругости звеньев

Рассмотрим динамику исходных кинематических цепей (ИКЦ) пространственных рычажных механизмов. Конкретно разберем динамику плоских движений упругого трехзвенного ИКЦ несущего груз, являющегося основой для различных модификаций [211].

Пусть плоский ИКЦ состоит из трех упругих звеньев AB , BC , CD , одинаковой длины и одинакового сечения, и трех вращательных шарниров A , B , C (рисунок 6.1).

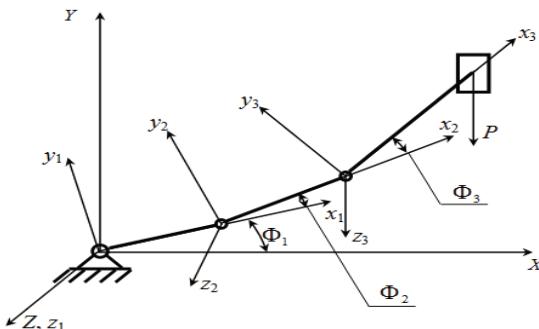


Рисунок 6.1

Тонкие упругие стержни могут совершать поперечные и крутильные колебания малой амплитуды. Изменением их длины, а также упругими продольными смещениями пренебрегаем по сравнению с амплитудой поперечных смещений. Груз P считаем абсолютно твердым телом с заданными инерционными характеристиками. Масса m груза P считаем много большей массы ИКЦ. Последнее предположение позволяет пренебречь кинетической энергией ИКЦ по сравнению с кинетической энергией груза, а также считать, что частоты собственных упругих колебаний стержней много большими частот колебаний груза, обусловленных упругостью ИКЦ.

Вместе с упругой моделью будем рассматривать также вспомогательную абсолютно жесткую модель ИКЦ, у которой углы в шарнирах и длины звеньев те же, что и в реальной упругой модели. Найдем функции Лагранжа для данной системы. Для определения потенциальной энергии упругого трехзвенного ИКЦ используем формулу для упругой потенциальной энергии прямолинейного однородного

стержня длиной l . Сечение стержня считаем кольцевым или круговым. Пусть один конец, например левый, стержня, жестко заделан, а на другом заданы вектор упругого смещения \vec{R} и вектора поворота $\vec{\Phi}$. Стержень находится в равновесии. Обозначим через $\bar{u}(s)$ вектор упругого смещения нейтральной оси стержня, а через $\bar{\varphi}(s)$ - угол поворота сечения стержня вокруг оси (здесь аргумент s - длина стержня, отсчитываемая от его левого конца, $0 < s < l$). Потенциальная упругая энергия деформированного стержня

$$P = \frac{EJ}{2} \int_0^l [u''(s)]^2 ds + \frac{c}{2} \int_0^l [\varphi'(s)]^2 ds \quad (6.1)$$

Здесь штрихами обозначены производные по s ; E - модуль упругости материала стержня; J - момент инерции сечения стержня; c - жесткость стержня на кручение.

Функции $u(s)$ и $\bar{\varphi}(s)$ в квазистатическом приближении удовлетворяют граничным условиям:

$$\begin{aligned} u'''(s) &= 0; & \varphi''(s) &= 0; & u(0) &= u'(0) = \varphi(0) = 0 \\ u(l) &= R; & u'(l) &= \vec{\Phi} \cdot \vec{k}; & \varphi(l) &= \vec{\Phi} \cdot \vec{k} \end{aligned} \quad (6.2)$$

где k - единичный вектор, направленный по оси стержня в недеформированном состоянии.

Подставляя в соотношение (6.1) решение краевой задачи (6.2), равное

$$\begin{aligned} \bar{u}(s) &= \left(3\vec{R} - l\vec{\Phi} \times \vec{k}\right) \cdot \left(\frac{s}{l}\right)^2 + \left(l\vec{\Phi} \times \vec{k} - 2\vec{R}\right) \cdot \left(\frac{s}{l}\right)^3 \\ \bar{\varphi}(s) &= \vec{\Phi} \cdot \vec{k} \left(\frac{s}{l}\right) \end{aligned} \quad (6.3)$$

получим потенциальную энергию упругого стержня в виде

$$P = \frac{2EJ}{l} \left[3 \frac{\vec{R}^2}{l^2} - 3 \frac{\vec{R}}{l} (\vec{\Phi} \times \vec{k}) + (\vec{\Phi} \times \vec{k})^2 \right] + \frac{c}{2l} (\vec{\Phi} \times \vec{k})^2 \quad (6.4)$$

Составим уравнение потенциальной энергии трёхзвенника пользуясь формулой (4) и подставляя в неё в место \vec{R} , $\vec{\Phi}$ векторы \vec{R}_1 , $\vec{\Phi}_1$, \vec{R}_2 , $\vec{\Phi}_2$ соответственно для первого и второго стержня. Получим:

$$\begin{aligned} \Pi = \Pi_1 + \Pi_2 &= \frac{2E_1 J_1}{l_1} \left[3 \frac{\vec{R}_1^2}{l_1^2} - 3 \frac{\vec{R}_1}{l_1} (\Phi_1 \times \vec{k}_1) + (\Phi_1 \times \vec{k}_1)^2 \right] + \frac{c_1}{2l_1} (\Phi_1 \times \vec{k}_1)^2 + \\ &+ \frac{2E_2 J_2}{l_2} \left\{ \frac{3}{l_2^2} (\vec{R}_2 - \vec{R}_1 - \Phi_1 \times \vec{k}_2 l_2)^2 - \frac{3}{l_2} (\vec{R}_2 - \vec{R}_1 - \Phi_1 \times \vec{k}_2 l_2) \cdot [(\Phi_2 - \Phi_1) \times \vec{k}_2] + \right. \\ &\left. + [(\Phi_2 - \Phi_1) \times \vec{k}_2]^2 \right\} + \\ &+ \frac{c_2}{2l_2} [(\Phi_2 - \Phi_1) \times \vec{k}_2]^2 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Здесь l_j ($j = 1, 2$) - длины звеньев ИКЦ;
 c_j ($j = 1, 2$) - жесткость звеньев на изгиб;
 k_j ($j = 1, 2$) - жесткость звеньев на кручение.

Кинетическая энергия системы в силу сделанных предположений есть кинетическая энергия плоского движения груза Р и равна

$$T = 0,5m\dot{\vec{r}}_Q^2 + 0,5J(\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_3 + \dot{\psi})^2 \quad (6.6)$$

где

$$\dot{\vec{r}}_Q^2 = \dot{r}_x^2 + \dot{r}_y^2 \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} r_x &= l_1 \cos \varphi_1 + (l_2 + x) \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - y \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + \\ &+ r [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) - \psi \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_y &= l_1 \sin \varphi_1 + (l_2 + x) \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + y \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \\ &+ r [\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + \psi \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)] \end{aligned}$$

Составим уравнения движения ИКЦ. Предполагаем, что на ИКЦ с грузом действуют только управляющие воздействия в шарнирах, которые обеспечивают изменение углов по заданным законам: $\varphi_j = \varphi_j(t)$ ($j = 1, 2, 3$). Используем оператор Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad (j = 1, 2, 3) \quad (6.8)$$

в который подставим $L = T - \Pi'$ согласно (6.6) – (6.7).

$$\Pi' = \frac{2E_1 J_1}{l_1} \left[3 \frac{(\vec{R}'_1)^2}{l_1^2} - 3 \frac{\vec{R}'_1}{l_1} (\Phi''_1 \times \vec{k}_1) + (\Phi''_1 \times \vec{k}_1)^2 \right] +$$

$$+ \frac{2E_2J_2}{l_2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{3}{l_2^2} (\bar{R}'_2 - \bar{R}'_1 - \Phi''_1 \times \bar{k}_2 l_2)^2 - \frac{3}{l_2} (\bar{R}'_2 - \bar{R}'_1 - \Phi''_1 \times \bar{k}_2 l_2) [(\Phi''_2 - \Phi''_1) \times \bar{k}_2] + \\ & + [(\Phi''_2 - \Phi''_1) \times \bar{k}_2]^2 \end{aligned} \right\}$$

где Π' - потенциальная энергия соответствующая движениям в плоскости Oxy .

После этого уравнение движения в матричной форме примут вид

$$A\ddot{q} + G\dot{q} + Cq = B\ddot{\varphi} + f \quad (6.9)$$

Где A, G, C, B - матрицы размером 3×3 ; q, φ, f - вектор - столбцы; матрицы A, C, B зависят только от конфигурации ИКЦ.

После преобразований получим линейную систему уравнений движения вида

$$\ddot{q} = G_1 q + C_1 q = B_1 \ddot{\varphi} + f_1 \quad (6.10)$$

где q - вектор с компонентами x', y', ψ ; штрихи у безразмерных переменных в дальнейшем опускаем; матрицы G_1, C_1, B_1 и вектор f_1 получаются из матриц A, G, C, B в результате преобразования. В результате получим систему (6.10), содержащую безразмерные параметры:

$$\xi = \begin{bmatrix} E_2 I_2 \\ E_1 I_1 \end{bmatrix} \eta; \quad \eta = \frac{l_2}{l_1}; \quad \chi = \frac{r}{l_2}; \quad \beta = \frac{ml_2^2}{I} \quad (6.11)$$

При нулевых начальных условиях $x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \psi(0) = \dot{\psi}(0) = 0$ можно интегрировать линейную систему уравнений движения на ЭВМ на интервале $[0, \tau]$, который покажет, что движение груза носит колебательный характер, а частота колебаний груза заметно изменяется с изменением угла φ_2 .

6.2 Определение жесткостных характеристик для составления уравнения движения исходных кинематических цепей с упругими звеньями

В данном разделе рассмотрим упругие свойства ИКЦ. В начале определим приведенный коэффициент жесткости для составления дифференциального уравнения движения [212].

Напомним, что приведенным коэффициентом жесткости кинематической цепи (c_n) называется коэффициент жесткости звена приведения, имеющего ту же потенциальную энергию, что и заменяемая

кинематическая цепь. Обратная величина называется приведенным коэффициентом податливости ($e_{\text{п}}$).

В приведенном на рисунке 6.2 ИКЦ примем, что внешние нагрузки приложены только к звеньям 1 и 3. Инерцией звеньев пренебрегаем, следовательно, звенья 2 и 3 испытывают только деформации растяжения - сжатия и их коэффициенты податливости

$$e_2 = \frac{l_2}{EA}, \quad e_3 = \frac{l_3}{EA} \quad (6.12)$$

Где l_2, l_3 - длины звеньев 2 и 3, E - модуль Юнга, A - площадь поперечного сечения звеньев 2 и 3.

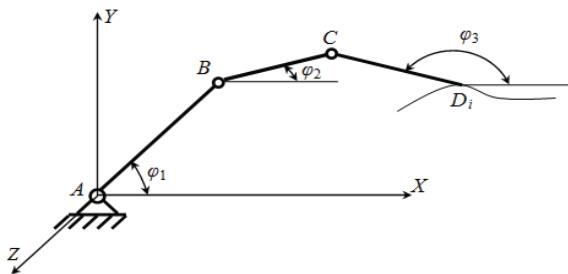


Рисунок 6.2

Коэффициент податливости вала звена 1 определяем, учитывая только деформации кручения

$$e_1 = \frac{l_1}{GI_p} \quad (6.13)$$

где l_1 - длина участка вала звена 1, на котором определяется угол закручивания, G - модуль сдвига, I_p - полярный момент инерции вала звена 1.

Если принять звено 1 за звено приведения, то приведенный к нему коэффициент податливости определится по формуле

$$e_{\text{п}} = e_1 + e_2 u_{12}^2 + e_3 u_{13}^2 \quad (6.14)$$

где u_{12} и u_{13} - передаточные отношения.

Для определения передаточных отношений u_{12} и u_{13} составляется уравнение замкнутых векторных контуров и берется производные по обобщенной координате φ_1 . Из этих уравнений определяем u_{12} и u_{13}

$$u_{12} = -\frac{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}{l_{AB} \sin(\varphi_1 - \varphi_3)} \quad (6.15)$$

$$u_{13} = -\frac{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}{l_{AB} \sin(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (6.16)$$

С учетом этих выражений получим коэффициент приведенной податливости e_n как функцию угла поворота φ_1

$$e_n = e_1 - e_2 \frac{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}{l_{AB} \sin(\varphi_1 - \varphi_3)} + e_3 \frac{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}{l_{AB} \sin(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (6.17)$$

Приведенный коэффициент жесткости определяется как величина, обратная приведенному коэффициенту податливости

$$c_n = \left[e_1 - e_2 \frac{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}{l_{AB} \sin(\varphi_1 - \varphi_3)} + e_3 \frac{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}{l_{AB} \sin(\varphi_1 - \varphi_2)} \right]^{-1} \quad (6.18)$$

После определения приведенного коэффициента жесткости c_n используем динамические модели. В отличие от приведенных в литературе двухмассовых динамических моделей, в рассматриваемом случае приведенный коэффициент жесткости является переменной величиной, зависящий от угла поворота φ_1 .

Дифференциальное уравнение движения для этой модели составляем в форме уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_D} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_D} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_D} = \tilde{M}_D \quad (6.19)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = \tilde{M}_n \quad (6.20)$$

Где φ_D - угол поворота левой массы, равный углу поворота вала двигателя,

φ_1 - угол поворота правой массы, равный углу поворота звена 1,

$\tilde{M}_D = \tilde{M}_1$ - момент сил на валу двигателя,

\tilde{M}_n - приведенный к звену 1 момент сил, приложенных к звену 3.

В рассматриваемом случае

$$\tilde{M}_{\pi 1} = \tilde{M}_3 u_{31} \quad (6.21)$$

При составлении аналитического выражения кинетической энергии механизма T учитываем только моменты инерции звеньев I_1 и I_3

$$T = \frac{I_D \dot{\phi}_D^2}{2} + \frac{I_1 \dot{\phi}_1^2}{2} + \frac{I_3 \dot{\phi}_3^2}{2}$$

$$T = \frac{I_D \dot{\phi}_D^2}{2} + \frac{I_{\pi 1} \dot{\phi}_1^2}{2} \quad (6.22)$$

где $I_{\pi 1} = I_1 + I_3 u_{31}^2$, – приведенный к звену 1 момент инерции шарнирного незамкнутого четырехзвенника, I_D – приведенный момент инерции движущихся частей двигателя, который считаем постоянным.

Потенциальная энергия ИКЦ определяется выражением

$$P = \frac{c_{\pi} (\varphi_D - \varphi_1)^2}{2} \quad (6.23)$$

Дифференцируя уравнение Лагранжа, получим

$$I_D \ddot{\phi}_D + c_{\pi} (\varphi_D - \varphi_1) = \tilde{M}_D \quad (6.24)$$

$$I_{\pi 1} \ddot{\phi}_1 + \frac{\dot{\phi}_1^2}{2} \frac{dI_{\pi 1}}{d\varphi_1} - c_{\pi} (\varphi_D - \varphi_1) + \frac{1}{2} (\varphi_D - \varphi_1)^2 \frac{dc_{\pi}}{d\varphi_1} = \tilde{M}_3 u_{31}$$

Полученная система нелинейных уравнений движения с переменными коэффициентами решается численными методами по малым участкам движения. При постоянной скорости вала двигателя $\dot{\phi}_D$ второе уравнение полученной системы решается независимо от первого и определяет колебания, происходящие от упругости звеньев механизма.

Выводы по шестому разделу

1. Рассмотрены особенности составления динамических моделей незамкнутых четырехзвенных исходных кинематических цепей с учетом упругости звеньев.
2. Получена система линейных уравнений движения в матричной форме, решение которых показало, что движение груза носит колебательный характер, а частота колебаний груза заметно изменяется с изменением угла φ_2 .

3. Составлено дифференциальное уравнение движения ИКЦ с упругими звеньями в форме уравнений Лагранжа и определены жесткостные характеристики упругих звеньев ИКЦ.

Заключение

Диссертационная работа посвящена разработке аналитического метода структурно – кинематического синтеза пространственных рычажных механизмов, включая пространственных МВК, и их использование в автоматизированном проектирование пространственных рычажных механизмов с улучшенными кинематическими и функциональными характеристиками. Сформулирована постановка задач, определены методы их исследования, найдены их решения. Полученные результаты содействуют для дальнейшего развития этого научного направления.

Краткие выводы по результатам диссертационных исследований:

1. Разработан оптимизационный метод кинематического синтеза незамкнутых четырехзвенных ИКЦ со сферическими, со сферическими с пальцем и вращательными парами по заданным законам движения входного и выходного звеньев синтезируемого механизма.

2. На основе задания движения двух подвижных тел относительно неподвижного тела сформулированы математические задачи синтеза пространственной четырехзвенной ИКЦ со сферическими парами, с девятью степенями свободы и десятью неизвестными параметрами.

3. Показано, что к задачам синтеза модификаций ИКЦ сводятся задачи синтеза четырехзвенных передаточных механизмов типа *BCCB*.

4. На основе аппроксимационного подхода разработан алгоритм решения задачи синтеза параметров пространственной ИКЦ со сферическими парами и доказана сходимость предлагаемого алгоритма.

5. При различных комбинациях заданных и искомых параметров пространственной ИКЦ получены различные ее модификации со сферическими, со сферическими с пальцами и вращательными парами. Составлены таблицы модификаций пространственных ИКЦ со сферическими и с вращательными парами.

6. Алгоритмы синтеза незамкнутых четырехзвенных ИКЦ и их модификации при проектировании механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев синтезируемого механизма отличается простотой программирования.

7. Показано, что синтез пространственной ИКЦ и ее модификаций в зависимости от заданных условий синтеза может привести к непосредственному синтезу пространственных четырехзвенных механизмов с различными кинематическими парами.

8. Доказана теорема существования решения задачи синтеза незамкнутой четырехзвенной ИКЦ со сферическими парами. В вырожденных случаях решения задачи, доказана необходимость замены сферической пары на плоскостную или цилиндрическую пару.

9. Разработан аналитический метод кинематического синтеза ИКЦ с вращательной, плоскостной и сферической парами по заданным законам движения входного и выходного звеньев синтезируемого механизма, основанный на применении невырожденных преобразований в пространстве искомых параметров ИКЦ.

10. Разработан аналитический метод кинематического синтеза ИКЦ с вращательной, цилиндрической и сферической парами по заданным законам движения входного и выходного звеньев синтезируемого механизма, основанный на применении невырожденных преобразований в пространстве искомых параметров ИКЦ. Показано, что задачи синтеза ИКЦ с кулисой всегда разрешимы, а в случае вырождения решения эта задача решается заданием одного или двух искомых параметров из конструктивных соображений.

11. Рассмотрены задачи кинематического синтеза модификаций ИКЦ, при задании части искомых параметров, а также составлена таблица модификаций ИКЦ с вращательными, цилиндрическими и сферическими парами. Показано, что к задачам синтеза модификаций ИКЦ сводятся задачи синтеза четырехзвенных кулисных механизмов.

12. Разработан оптимизационный метод кинематического синтеза двухэлементного звена с различными парами с точным воспроизведением заданных положений ведомого звена синтезируемого механизма.

13. Разработан оптимизационный метод кинематического синтеза ИКЦ с различными парами с точным воспроизведением заданных положений входного и выходного звеньев синтезируемого механизма

14. Предложен способ структурного образования пространственных рычажных механизмов из ИКЦ и ее модификаций, как структурных модулей, и разработан метод структурного синтеза пространственных рычажных механизмов на основе ИКЦ. Метод является универсальным с точки зрения синтеза пространственных рычажных механизмов любого класса и позволяет получить все мыслимые структурные схемы механизмов с заданным числом звеньев. Показано, что использование для синтеза механизма ИКЦ с различными (от четырех до девяти) степенями свободы и их модификации, позволяет получить 5184 структурные схемы шестизвенных одноподвижных механизмов.

15. Разработан обобщенный метод структурно – кинематического синтеза пространственных механизмов на основе ИКЦ по заданным законам движения входного и выходного звеньев механизма. В задачах синтеза без ограничений, метод позволяет осуществить целенаправленный выбор структурной схемы механизма и определить его параметры по условиям минимума целевой функции синтеза.

16. Рассмотрены особенности реализации обобщенного метода при структурно – кинематическом синтезе перемещающих, направляющих и передаточных механизмов.

17. Предложенный метод позволяет автоматизировать процесс структурно – кинематического синтеза любых схем пространственного рычажного перемещающего механизма

18. При формировании структуры механизма по заданным положениям входного и выходного звеньев в начале применяем ИКЦ и для синтеза одноподвижного механизма, налагаем геометрические связи на относительное движение звеньев механизма, используя различные модификации ИКЦ.

19. Разработанный метод синтеза позволяет спроектировать по заданным положениям входного и выходного звеньев различные классы пространственных рычажных механизмов.

20. Разработаны алгоритмы и программа автоматизированного структурно – кинематического синтеза пространственных рычажных механизмов на основе ИКЦ по заданным положениям входного и выходного звеньев механизма, ориентированных на эффективное использование ЭВМ позволяющих автоматизировать все этапы решения задач синтеза механизмов.

21. На основе разработанного метода и использование алгоритма минимума суммы функции S спроектированы семизвездные одноподвижные перемещающие пространственные механизмы по заданным положениям тела.

22. Впервые решены по предлагаемому методу задачи квадратического синтеза сферических четырехзвенников, передаточных механизмов типа *BCCB* на основе ИКЦ и пространственных передаточных, направляющих и перемещающих механизмов со сферическими, цилиндрическими, вращательными и поступательными парами по полному числу параметров.

23. Эффективность разработанного метода иллюстрируется на конкретных примерах синтеза передаточных четырех и шестизвездных механизмов, шестизвездных перемещающих механизмов грузоподъемного устройства и направляющих механизмов.

24. Синтезирован пространственный рычажный передаточный механизм с тремя выстоями на выходном звене за один оборот входного звена (кривошипа). На этот механизм получен патент РК.

25. Синтезирован пространственный рычажный направляющий механизм с четырьмя выстоями на выходном звене за один оборот входного звена (кривошипа). На этот механизм получен патент РК.

26. Показано структурно – кинематический синтез пространственных грузоподъемных механизмов со сферическими, со сферическими с пальцем и вращательными парами. При этом формируется структура проектируемого механизма на основе одной и той же целевой функции синтеза.

27. Рассмотрены особенности составления динамических моделей незамкнутых четырехзвенных исходных кинематических цепей с учетом упругости звеньев.

28. Получена система линейных уравнений движения в матричной форме, решение которых показало, что движение груза носит колебательный характер, а частота колебаний груза заметно изменяется с изменением угла φ_2 .

29. Составлено дифференциальное уравнение движения ИКЦ с упругими звеньями в форме уравнений Лагранжа и определены жесткостные характеристики упругих звеньев ИКЦ.

Результаты настоящей диссертации подтверждены патентами Республики Казахстан на устройство с тремя выстоями рабочего органа для компенсации натяжения уточных нитей на ткацких станках СТБ и на устройство с четырьмя выстоями рабочего органа для компенсации натяжения уточных нитей на ткацких станках СТБ.

Основные положения представленной диссертации, разработанные алгоритмы и программы и методы синтеза использованы и внедрены:

- в учебном процессе при чтении спецкурса «Оптимальное проектирование» для специальности «Динамика и прочность машин» и курсовом и дипломном проектировании на кафедре «Теоретическая и прикладная механика» в КазНТУ имени К.И. Сатпаева;

- в конструкторском бюро машиностроительного завода ТОО «Массагет Плюс» утверждены и приняты алгоритмы и программы и метод структурно – кинематического синтеза пространственных механизмов для проектирование прогрессивных новых машин. Ожидаемый годовой экономический эффект составляет не менее 3 млн. тенге.

Список использованных источников

- 1 Джолдасбеков У.А. Графо-аналитические методы анализа и синтеза механизмов высоких классов. – Алма-Ата: Наука, 1983. – 256 с.
- 2 Чебышев П.Л. Об одном механизме. ПСС – М.: Изд-во АН СССР, 1948. - Т. 4. – С. 10-16.
- 3 Чебышев П.Л. О параллелограммах, состоящих из трех элементов и симметрических около одной оси. ПСС – М.: Изд-во АН СССР, 1948. - Т. 4. – С. 101-113.
- 4 Чебышев П.Л. О простейших сочленениях. ПСС – М.: Изд-во АН СССР, 1948. - Т. 4. – С. 92-101.
- 5 Чебышев П.Л. О преобразовании вращательного движения в движении по некоторым линиям при помощи сочлененных систем ПСС – М.: Изд-во АН СССР, 1948. - Т. 4. - С. 161-167.
- 6 Чебышев П.Л. О простейшей суставчатой системе, доставляющей движения, симметрические около одной оси. ПСС – М.: Изд-во АН СССР, 1948. - Т. 4. – С. 167-212.
- 7 Чебышев П.Л. О параллелограммах, состоящих из трех элементов. ПСС – М.: Изд-во АН СССР, 1948. - Т. 4. – С. 113-142.
- 8 Чебышев П.Л. О простейших параллелограммах, доставляющих прямолинейное движение с точностью до четвертой степени ПСС – М.: Изд-во АН СССР, 1948. - Т. 4. – С. 143-158.
- 9 Чебышев П.Л. Теория механизмов, известных под названием параллелограммов. – М., Л.: Изд-во АН СССР, 1949. – 80 с.
- 10 Чебышев П.Л. Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функции. ПСС – М., Л.: Изд-во АН СССР, 1947. - Т. 2. – С. 151-235.
- 11 Блох З.Ш. Синтез плоских кинематических цепей с низшими парами. – В книге: Прикладная математика и механика. М., 1939. – Т. 2, вып. 3. – С. 389-406.
- 12 Блох З.Ш. Приближенный синтез механизмов. –М.: Машгиз, 1948. – 172 с.
- 13 Артоболевский И.И. Теория пространственных механизмов. – М.: ОНТИ, НКТП, 1937, ч.1. – 236 с.
- 14 Артоболевский И.И. Структура, кинематика и кинетостатика многозвенных плоских механизмов. – М.,Л.: Изд-во АН СССР, 1939. – 232 с.
- 15 Артоболевский И.И. К вопросу о структуре и классификации кинематических цепей с замкнутым контуром// Изв. АН СССР, ОНТ, 1939, вып. 4. – С. 27-34.
- 16 Артоболевский И.И., Левитский Н.И. Механизмы П.Л. Чебышева. – Сб. «Научное наследие Чебышева». – М.: Изд-во АН СССР, 1945, вып. 2.

- 17 Артоболевский И.И., Добровольский В.В., Блох З.Ш. Синтез механизмов. – М.: Гостехиздат, 1944. – 255 с.
- 18 Артоболевский И.И. Основные проблемы современной теории машин// Механика машин. – М.: Наука, 1966, вып. 1-2.
- 19 Левитский Н.И., Шахбазян К.Х. Синтез пространственных четырехзвенных механизмов с низшими парами. – В кн.: Труды семинара по ТММ. – М.: Изд-во АН СССР, 1953. – Т. 11, вып. 54. – С. 5-24.
- 20 Левитский Н.И. и др. Синтез пространственных механизмов с помощью двойных рядов Фурье. – В кн. Механика машин. – М.: Наука, 1983, вып. 61. – С. 59-62.
- 21 Левитский Н.И. Применение квадратического приближения функции к решению задач синтеза механизмов // Тр. Семинара по ТММ. – М.: 1948. – Т. 5, вып. 17. – С. 40-68.
- 22 Черкудинов С.А. К синтезу кривошипно – шатунного механизма, осуществляющий приближенно – равномерное движение // Труды семинара по ТММ. – М.: Издательство АН СССР, 1948. - Т. 5, вып. 18. – С. 5-24.
- 23 Черкудинов С.А. Синтез некоторых механизмов приближенно–равномерного движения // Труды семинара по ТММ. – М.: Издательство АН СССР, 1949. - Т. 6, вып. 21. – С. 5-27.
- 24 Черкудинов С.А. Об одном методе приближения в синтезе механизмов. – М.: АН СССР, 1959.
- 25 Баранов Г.Г. К синтезу четырехзвенных плоских механизмов. Труды семинара по ТММ. – М.: Издательство АН СССР, 1939. – Т. 4, вып. 1. – С. 5-29.
- 26 Семенов М.В. Аналитический метод синтеза стержневых механизмов, заданных двумя и тремя положениями // Вестник инж. и техн. – 1938. – №12.
- 27 Геронимус Я.Л. Геометрический аппарат теории синтеза плоских механизмов. – М.: Физматгиз, 1962. – 399 с.
- 28 Новодворский Е.П. Об одном способе синтеза механизмов // Труды семинара по ТММ. – М.: Издательство АН СССР, 1951. – Т. 11, вып. 42. – С. 5-51.
- 29 Зиновьев В.А. Пространственные механизмы с низшими парами. М.: Гостехиздат, 1952. – 432 с.
- 30 Зиновьев В.А. Проектирование пространственных четырехзвенных механизмов по полному числу параметров // Труды семинара по ТММ. – М.: Издательство АН СССР, 1954. – Т. 14, вып. 55. – С. 49-62.
- 31 Степанов Б.И. Проектирование пространственных передаточных механизмов с низшими парами // Труды семинара по ТММ. – М.: Издательство АН СССР, 1952. – Т. 12, вып. 45. – С. 46-58.
- 32 Асур Л.В. Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации // Известия

СПб политехнического института, отделения математики. – 1913-1914. -Т. 20, 21; 1915. -Т. 21-23; дополн. 1915. -Т. 24; дополн. 1918. -Т. 27.

33 Асур Л.В. Исследование плоских стержневых механизмов с низшими параметрами с точки зрения их структуры и классификации. – М.: Издательство АН СССР, 1952. – 529 с.

34 Кожевников С.Н. Основание структурного синтеза механизмов. – Киев, 1979. – 231 с.

35 Доронин В.И. Алгебраический синтез рычажных механизмов по заданному движению ведомого объекта: диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. – Хабаровск, 1969. – 242 с.

36 Доронин В.И. Синтез плоских стержневых механизмов, приближенно воспроизводящих заданное движение ведомого объекта // Механика машин. – М.: Наука, вып. 15-16, 1969. – С. 5-23.

37 Доронин В.И. Алгебраический синтез пространственных рычажных механизмов по заданному движению объекта // Механика машин. – М.: Наука, вып. 25-26, 1970. – С. 100-118.

38 Доронин В.И. Динамический синтез пространственного кривошипно-ползунного механизма // Механика машин. – М.: Наука, вып. 5, 1982. – С. 71-78.

39 Саркисян Ю.Л. Аппроксимационный синтез механизмов. – М.: Наука, 1982. – 304 с.

40 Пейсах Э.Е., Нестеров В.А. Система проектирования плоских рычажных механизмов. – М.: Машиностроение, 1988. – 232 с.

41 Диментберг Ф.М., Саркисян Ю.Л., Усков М.К. Пространственные механизмы (обзор современных исследований). – М.: Наука, 1983. – 95 с.

42 Лебедев П.А. Кинематика пространственных механизмов – М., Л.: Машиностроение, 1966. – 280 с.

43 Джолдасбеков У.А., Молдабеков М.М., Мурушкин С.А. Применение описание вращения параметрами Кэли-Клейна в кинематическом анализе пространственных механизмов. International Conference “Spatial mechanisms and high class mechanisms”. – Almaty, 1994. - Vol. 2. – P. 47-53.

44 Молдабеков М.М., Мурушкин С.А. Анализ положений пространственных механизмов с применением комплексных матриц размерностью 2×2 : Материалы международной конференции «Механизмы переменной структуры и вибрационные машины». – Бишкек, 1995. – С. 30-34.

45 Молдабеков М.М., Мурушкин С.А. Анализ положений сферических механизмов с применением комплексных матриц размерностью 2×2 . Материалы школы-семинара по математике и механике посвященного 60-летию чл.-корр. НАН РК Касымова К.А. – 1995. – 32 с.

46 Молдабеков М.М., Мурушкин С.А. Применение спинорного преобразования трехмерного пространства при анализе положений

пространственных механизмов: Материалы I-го Республиканского съезда по теоретической и прикладной механике. – Алматы, 1996. – 24 с.

47 Иванов К.С. Синтез пространственных механизмов с использованием обращения движения // Машиноведение. – 1978. – №1. – С. 48-54.

48 Иванов К.С. Синтез пространственных механизмов на основе кинематической геометрии конечно-удаленных положений точки // Механика машин. – М.: Наука, 1979, вып. 56. – С. 12-17.

49 Иванов К.С., Шишлевский С.П. Синтез пространственного направляющего механизма // Технология машиностроения. – Алма-Ата, 1980. – С. 84-89.

50 Иванов К.С. Синтез пространственных механизмов переменной структуры // Механика машин. – М.: Наука, 1983. -№60. – С.39-45.

51 Иванов К.С., Шишлевский С.П. Синтез пространственных рычажных механизмов на основе преобразования положений точек. Рукопись деп. в КазНИИТИ, Ка-84, №785 от 9.11.84.

52 Иванов К.С., Шишлевский С.П. Синтез пространственного многозвенного передаточного механизма // Известие вузов. Машиностроение. – 1984. – №7. – С. 56-60.

53 Иванов К.С., Шишлевский С.П. Синтез пространственного направляющего механизма // Технология и оборудование мет. – Алма-Ата, 1986. – С. 57-61.

54 Байгунчеков Ж.Ж., Джолдасбеков С.У., Нурахметов Б.К. Принцип образования регулируемых пространственных механизмов высоких классов: Материалы международной научно-технической конференции «Проблемы и перспективы развития науки и техники в области механики, геофизики, нефти, газа, энергетики и химии Казахстана». – Актау, 1996. – 75 с.

55 Байгунчеков Ж.Ж., Джолдасбеков С.У., Нурахметов Б.К. Алгоритмы структурных модулей перемещающих регулируемых ПМВК: Материалы I-го Республиканского съезда по теоретической и прикладной механике. – Алматы, 1996. – 24 с.

56 Бруевич Н.Г. Применение векторных уравнений в кинематике плоских механизмов // Труды ВВА. – 1934. – №10.

57 Бруевич Н.Г. Кинетостатика плоских механизмов // Труды ВВА. – 1934. – №10.

58 Бруевич Н.Г. Кинетостатика пространственных механизмов // Труды ВВИА имени Н.Е. Жуковского. – 1937. – вып. 22. – С. 3-85.

59 Джолдасбеков У.А., Байгунчеков Ж.Ж. Аналитическая кинематика плоских рычажных механизмов высоких классов: Учебное пособие по спец. курсу. – Алма-Ата, 1980. – 102 с.

60 Djoldasbekov U.A., Khozamberdiev M.M., Baigunchekov Zh.Zh. Kinematics of Assur groups of high classes and orders. Proceedings of the

Fourth World Congress on the TMM. Newcastle upon Tune. – England, 1975. - Vol. 3.

61 Байгунчеков Ж.Ж. Структурно-кинематический синтез МВК с равномерно распределенными поводками // Анализ и синтез механизмов. - Алма-Ата, 1983. - С. 90-95.

62 Байгунчеков Ж.Ж., Джолдасбеков С.У., Симаков М.А. Синтез диады, имеющей круговые квадратические точки в шатунной плоскости. Изв. АН СССР. Серия «Физ.-мат.» -1985. -№5. - С. 70-74.

63 Баугунчеков Ж.Ж., Джолдасбеков С.У. Градиентные методы нахождения круговых квадратических точек. Теория механизмов и машин, - Алма-Ата, 1985. - С. 3-11.

64 Джолдасбеков У.А., Байгунчеков Ж.Ж. Структурно-кинематический синтез направляющих МВК // Труды Казахского филиала семинара по ТММ. -Алма-Ата, 1980, вып. 3. - С. 7-19.

65 Джолдасбеков У.А., Байгунчеков Ж.Ж. Структурно-кинематический синтез передаточных МВК // Труды Казахского филиала семинара по ТММ. -Алма-Ата, 1980, вып. 3. - С. 7-19.

66 Schoenfliss A. Geometrie der Bewegung in Synthetischer Darstellung. - Leipzig, 1886. - 194 s.

67 Добровольский В.В. О точках Бурмистера в сферическом движении. ПММ. -1945. -Т. IX. -№6. - С. 480-491.

68 Добровольский В.В. Синтез сферических механизмов. В кн.: Труды семинара по ТММ. -М.: Изд-во АН СССР. - Т. 1, вып. 1. - С. 5-20.

69 Бейер Р. Кинематический синтез механизмов. -М.: Машгиз, 1959.

70 Hain K. Applied kinematics. New York, McGraw-Hill book. Co., 1967.

71 Лихтенхельд В. Синтез механизмов. -М.: Наука, 1964. - 227 с.

72 Росс Ч. Расчетные уравнения синтеза кинематических цепей по раздельным и бесконечно близким положениям // Конструирование и технология машиностроения. -М.: Мир, 1969, № 1. - С. 227-237.

73 Росс Ч. Общая теория кинематического синтеза по раздельным и бесконечно близким положениям // Конструирование и технология машиностроения. -М.: Мир, 1969. - С. 220-226.

74 Черкудинов С.А. Об одном методе приближения в синтезе механизмов. -М.: АН СССР, 1959.

75 Озол О.Г. Аналитическое решение задачи Бурмистера с использованием формул Сомова. В кн.: Анализ и синтез механизмов. -М.: Машиностроение, 1969. - С. 137-150.

76 Wilson D.T. Analytical kinematics synthesis by finite displacements. Trans. ASME B. -1965. - Vol. 87. -№ 2. - P. 161-169.

77 Bottema O., Roth B. Theoretical kinematics. North-Holland pub listing company, -Amsterdam, New York, Oxford, 1979.

78 Аверьянова В.Г., Диментберг Ф.М. Задача Бурместера для пространственного четырехзвенника с цилиндрическими шарнирами // Машиноведение. -1966. -№ 6. - С. 36-41.

79 Саркисян Ю.Л. и др. Алгоритмы решения аппроксимационных задач синтеза рычажных механизмов с билинейными функциями отклонения. The fifth IFToMM international symposium on linkages and computer aided design methods. -Bucharest, Romania, 1989. - Vol. II. - P. 535-542.

80 Саркисян Ю.Л. и др. Унифицированные итерационные методы аппроксимационного синтеза механизмов для управляемого перемещения твердого тела // Машиноведение. -1987. -№ 1. - С. 68-76.

81 Саркисян Ю.Л. и др. Аппроксимационный синтез пространственного передоточного механизма ВССССВП. The fifth IFToMM international symposium on linkages and computer aided design methods. -Bucharest, Romania, 1989. - Vol. II, 2. - P. 535-542.

82 Саркисян Ю.Л., Парикян Т.Ф. Прямая задача о положениях механизма (СПС) и ассоциированная задача синтеза. The fifth IFToMM international symposium on linkages and computer aided design methods. - Bucharest, Romania, 1989 - Vol. II, 2. - P. 543-550.

83 Саркисян Ю.Л., Парикян Т.Ф. Принципы построения пространственных поступательно направляющих механизмов // Машиноведение. -1988. -№ 4. - С. 12-20.

84 Саркисян Ю.Л., Гекchan Г.С. Оптимальный синтез передаточного четырехзвенника // Машиноведение. -1969. -№ 3. - С. 25-31.

85 Саркисян Ю.Л., Егишян К.М., Степанян К.Г. Некоторые задачи бифункциональных пространственных механизмов // Машиноведение. - 1978. -№3.

86 Саркисян Ю.Л. и др. Синтез шестизвенных передаточных механизмов для реализации прерывистого вращательного движения // Машиноведение. -1988. -№ 1. - С. 82-91.

87 Саркисян Ю.Л. и др. Синтез двухподвижных механизмов – приближенных генераторов семейства одномерных функций // Машиноведение. -1982. -№ 5. - С. 55-64.

88 Саркисян Ю.Л., Асланян Х.Г., Степанян К.Г. К аппроксимационному синтезу незамкнутых механизмов // Машиноведение. -1980. -№ 3. - С. 56-63.

89 Иванов К.С. Синтез пространственных механизмов с использованием обращения движения // Машиноведение. -1978. -№ 1. - С. 48-54.

90 Иванов К.С. Синтез пространственных механизмов на основе кинематической геометрии конечно – удаленных положений точки. В кн.: Механика машин, -М.: Наука, 1979, вып. 56. - С. 12-17.

91 Djoldasbekov U.A., Baigunchekov Zh. Zh. High class spatial mechanisms. Proceedings of the 7-th World Congress. -Seville, Spain, 1987. - Vol. 1. - P. 309-311.

92 Байгунчеков Ж.Ж., Джолдасбеков С.У., Саурбаев Б.С. Синтез пространственных трех- четырехзвенных незамкнутых кинематических цепей вида ВС и ВСС. Проектирование и исследование механизмов. - Алма-Ата, 1990. - С. 3-11.

93 Байгунчеков Ж.Ж., Джолдасбеков С.У., Саурбаев Б.С. Координация движений двух пространственных систем координат при помощи бинарных звеньев. -Алма-Ата, 1991. - 46 с.

94 Джолдасбеков С.У. Структурный синтез пространственных механизмов высоких классов. -Алма-Ата, 1990. - 55 с.

95 Джолдасбеков С.У. Структурно-кинематический синтез пространственных механизмов высоких классов. -Алма-Ата, 1991. - 19 с.

96 Джолдасбеков С.У. Теоретические основы анализа и синтеза пространственных механизмов высоких классов. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. -Алма-Ата, 1992. - 337 с.

97 Байгунчеков Ж.Ж., Джолдасбеков С.У. Основы структурного, кинематического и динамического анализа пространственных механизмов высоких классов. -Алма-Ата: «Гылым», 1993. - 148 с.

98 Байгунчеков Ж.Ж., Джолдасбеков С.У. Основы структурно-кинематического синтеза пространственных механизмов высоких классов. -Алма-Ата: «Гылым», 1993. - 117 с.

99 Саурбаев Б.С. Новые численные и аналитические методы анализа и синтеза пространственных механизмов высоких классов и создание на их базе новых механизмов и манипуляционных устройств; диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. -Алматы, 1998. - 444 с.

100 Нурахметов Б.К. Структурно – кинематический синтез перемещающих и передаточных регулируемых пространственных механизмов высоких классов. -Алматы, 1999. - 294 с.

101 Бебешин А.В., Гензехадзе Т.Н. Проектирование механизмов и динамика машин // Труды Московского института приборостроения № -М., 1991. - С. 67-72.

102 Уплисашвили Дж.М., Чирикашвили Н.С. Проблемы машиностроения и надежности машин. 1991, № 6. - С. 14-18.

103 Халилов А.М. Синтез пространственного четырехзвенного механизма вида ВСпСВ для воспроизведения прямой линии методом оптимизации: Международная научно – техническая конференция «Актуальные проблемы фундаментальных наук». -Москва, 28 октября – 3 ноября 1991. - С. 133-135.

- 104 Тавхелидзе Д.С. Анализ и синтез стержневых механизмов. – Тбилиси: Мецнереба, 1990. - 363 с.
- 105 Пейсах Э.Е. Полный атлас структурных схем одноконтурных пространственных рычажных механизмов и их классификация // Известие ВУЗов. Машиностроение. -1991. № 1-3. - С. 3-6.
- 106 Richter Jan. Steuerung offener Auslegerstrukturen mit linearen Antrieben/ Wiss. Z. Techn. Univ. –Dresden, 1994, 43, №3. - P. 22-28.
- 107 McCarthy J.M. The synthesis of planar RR and spatial CC chains and the equation of a triangle. Trans. ASME. J. Mech. Des. 1995, Suppl. “50th anniv. des. eng. div.” - P. 101-106.
- 108 Modler Karl- Heinz. Lehre und Forschung in der Getriebetechnic. Wiss. Z. Techn. Univ. –Dresden, 1994, 43, №3. - P. 17-19.
- 109 Глазунов В.А. Принципы построения и анализа пространственных механизмов с параллельной структурой // Проблемы машиностроения и надежности машин. -1995. -№ 1. - С. 14-19.
- 110 Innocenti C. Direct kinematics in analytical form of the 6-4 fully-parallel mechanisms. Trans. ASME. J. Mech. Des. -1995, 117. -№ 1. - P. 85-95.
- 111 Innocenti C. Polinomial solution of the spatial Burmester problem. Trans. ASME. J. Mech. Des. -1995, 117. -№ 1. - P. 64-68.
- 112 Park F.C., Ravani B. Bezier curves on Riemannian manifolds and Lie groups with kinematics applications. Trans. ASME. J. Mech. Des. -1995, 117. -№ 1. - P. 36-40.
- 113 Mavroidis C., Roth B. Analysis of overconstrained mechanisms. Trans. ASME. J. Mech. Des. -1995, 117. -№ 1. - P. 69-74.
- 114 Wohlhart K. A parallel redundant manipulator based on the Assur group. Zesz. nauk. Mech. Psl. -1994. -№ 118. - P. 371-378.
- 115 Нестеров В.А., Пейсах Э.Е. База знаний по анализу и синтезу рычажных механизмов в компьютерной системе LINKAGES // Вестник Московского авиационного института. -1995, 2. -№ 1. - С. 51-58.
- 116 Angeles J., Daniali H.R. Mohammadi, Zsombor-Murray P.J. The kinematics of spatial double-triangular parallel manipulators. Trans. ASME. J. Mech. Des. -1995, 117. -№ 4. -P. 658-661.
- 117 Juttler B., Wagner M.G. Computer – aided design with spatial rational B – spline motions. Trans. ASME. J. Mech. Des. -1996, 118. -№ 2, -P. 193-201.
- 118 Пейсах Э.Е. Кинематически эквивалентные пространственные рычажные механизмы. Проблемы машиностроения и надежности машин. - 1996. -№ 5. -С. 18-23.
- 119 Varbanov Hristo Varbanov, Georgiev Stefan Ivanov. Comp. Syst. And Autom. Proc. 9th Int. Conf. “Syst. Autom. End. and Res.” (SAER'95) and DECUS Nat. Users Group Semin. 95. -Varna, sept. 24-26, 1995. Sofia, 1995, - С. 349-353.

- 120 Golynski Z. O optimalnej syntesie maszyn metodami Monte – Karlo. Arch. Budowy Maszyn, tom 12, 1965, Zesryt 3, - P. 353-384.
- 121 Golynski Z. Optimal synthesis problems solved by means of nonlinear programming and random methods. Journal of mechanisms. -Vol. 5. - № 3. 1970. -P. 287-309.
- 122 Одерфельд Я. Некоторые методы оптимального синтеза машин. В кн.: Анализ и синтез механизмов. -М.: Машиностроение, 1969. - С. 227-233.
- 123 Tomas J. The synthesis of mechanisms as a nonlinear programming problem journal of mechanisms. -1968. Vol. 3. -P. 119-130.
- 124 Эшенбах, Тесар. Оптимизация шарнирных четырехзвенников, удовлетворяющих четырем положениям в одной плоскости. Конструирование и технология машиностроения. -М.: Мир, 1969, № 1. -С. 70-87.
- 125 Гаррет, Холл мл. Оптимальный синтез многозвенников при помощи метода статических испытаний // Конструирование и технология машиностроения. М.: Мир, 1968, № 3. -С. 40-46.
- 126 Гусейнов Н.Н., Ализаде Р.И. Синтез шарнирно-рычажных механизмов методом статистических испытаний (метод Монте-Карло). В сб.: Механика машин. -М.: 1970, вып. 25-26. -С. 77-78.
- 127 Андрейченко Г.П. Метод статистических испытаний при синтезе кривошипно-коромыслового механизма // Изв. ВУЗов СССР. Машиностроение. -1993. -№ 2. -С. 50-54.
- 128 Klein Breteler A.J. Partial derivatives in kinematic optimization. Proc. of 5-th World Congress on the theory of machines and mechanisms. - Montreal, Canada, 1979.
- 129 Льюис, Диснори. Кинематический синтез плоских кривых. Конструирование и технология машиностроения. -М.: Мир, 1967, № 1. -С. 202-205.
- 130 Han Chi-Yeh. A general method for the optimal design of mechanisms. Journal of mechanisms. -1966. -Vol. 1. -P. 301-312.
- 131 Handra-Luka V. The synthesis of mechanisms on the basis of positional shifts determination of the output links. Proc. of the 7-th World congress on the theory of machines and mechanisms. - Seville, Spain, 1987. -P. 99-102.
- 132 Чжень, Чжань. Размерный синтез механизмов для воспроизведения функции при помощи компромиссной схемы Марквалрата // Конструирование и технология машиностроения. -М.: Мир, 1974, № 1. -С. 30-37.
- 133 Прасад, Бегси. Применение метода минимизации ошибок при синтезе многоконтурных плоских механизмов // Конструирование и технология машиностроения. -М.: Мир, 1974, № 1. -С. 16-17.

- 134 Сохони В., Хог Е. Применение методов пространства состояний для оптимизации кинематики машин и механизмов. Конструирование и технология машиностроения. -М.: Мир, 1982, № 1. -С. 21-27.
- 135 Новгородцев В.А. Некоторые вопросы проектирования оптимальных механизмов. В сб.: Применение методов оптимизации в теории механизмов и машин. -М.: Наука, 1979.
- 136 Джолдасбеков С.У., Байгунчеков Ж.Ж., Ибраев С.М. Структурно-кинематический синтез плоских механизмов и манипуляционных устройств высоких классов со многими степенями свободы. -Алматы: Изд. «Ғылым», 1993. -188 с.
- 137 Байгунчеков Ж.Ж., Джолдасбеков С.У., Саурбаев Б.С., Нурахметов Б.К. Синтез пространственного перемещающего механизма IV класса вида ВССВВСС: деп. в КазНИИКИ, № 3992-КацЗ от 21.01.93.
- 138 Байгунчеков Ж.Ж., Джолдасбеков С.У., Саурбаев Б.С., Нурахметов Б.К. Градиентный синтез пространственной перемещающей исполнительной кинематической цепи: Материалы научной сессии отд. физ.-мат. наук по проблемам развития механики и машиностроения РК. - Алматы, 1993. -С. 59-61.
- 139 Байгунчеков Ж.Ж., Джолдасбеков С.У., Саурбаев Б.С., Нурахметов Б.К. Матрицы преобразования в анализе и синтезе пространственных механизмов высоких классов: материалы II международной конференции «Механизмы переменной структуры и вибрационные машины». -Бишкек, 1995.
- 140 Джолдасбеков С.У., Саурбаев Б.С., Нурахметов Б.К. Градиентный синтез бинарного звена вида ЦЦ: Материалы научной сессии отд. физ.-мат. наук по проблемам развития механики и машиностроения РК, Алматы, 1993. -С. 57-59.
- 141 Джолдасбеков С.У., Саурбаев Б.С., Нурахметов Б.К. Градиентный синтез пространственных замыкающих кинематических цепей: материалы международной конференции «Проблемы механики и технологий». -Иссык-Куль, Кыргызская Республика, 1994.
- 142 Джолдасбеков С.У., Саурбаев Б.С., Нурахметов Б.К. Градиентный синтез пятизвенных замкнутых пространственных направляющих исполнительных кинематических цепей: материалы II международной конференции «Механизмы переменной структуры и вибрационные машины» -Бишкек, 1995.
- 143 Джолдасбеков С.У., Нурахметов Б.К., Байгунчеков Т.Ж. Градиентный синтез четырехзвенных пространственных направляющих исполнительных кинематических цепей // Журнал «Вестник КазГУ». - Алматы, № 5, 1996. -С. 62-71.
- 144 Нурахметов Б.К., Байгунчеков Т.Ж. Составление функций взвешенных разностей пространственных трехзвенных направляющих

кинематических цепей // Журнал «Наука и образование Южного Казахстана». -Шымкент. -1995, №1. -С. 67-72.

145 Нурахметов Б.К., Байгунчеков Т.Ж. Синтез пространственных трехзвенных направляющих кинематических цепей // Журнал «Наука и образование Южного Казахстана». -Шымкент. -1995, №1. -С. 62-67.

146 Саурбаев Б.С., Нурахметов Б.К. Градиентный синтез бинарного звена вида СВ // Изв. НАН РК. Серия «Физ.-мат. науки», - Алматы, 1993, № 3. -С. 85-88.

147 Саурбаев Б.С., Нурахметов Б.К. Градиентный синтез пространственного перемещающего механизма IV класса вида ПССВВСС. International conference “Spatial mechanisms and high class mechanisms”, October 4-6, 1994, Almaty, Republic of Kazakhstan, vol. 2.

148 Ализаде Р.И. Синтез шарнирно-рычажных механизмов методом статических испытаний // Машиноведение. -1986. - № 3. -С. 58-61.

149 Казыханов Х.Р., Феофанова Е.А. Синтез механизма высокого класса методом штрафных функций. В сборнике: Расчет и конструирование машин и механизмов. -Алма-Ата, 1982. -С. 25-32.

150 Culafic G.D., Pantelic T.L. Technological approximative synthesis of a path generating mechanism. Proc. of the 7-th World congress on the theory of machines and mechanisms. -Seville, Spain, 1987. -P. 119-124.

151 Марианте В., Уилмерт К. Оптимальное проектирование сложного плоского механизма // Конструирование и технология машиностроения. М.: Мир, 1977, №3. -С. 24-33.

152 Пейсах Э.Е. Синтез рычажных механизмов на основе методов маги оптимизации// В сб.: Механика машин. -М.: Наука, 1973, вып.41. -С. 4.

153 Пейсах Э.Е. Синтез рычажных механизмов на основе методов нелинейного программирования. В сб.: Механика машин. -М.: Наука, 1974. вып. 44. -С. 69-77.

154 Пейсах Э.Е. Оптимационно-квадратический синтез плоских рычажных механизмов // Машиноведение, -1986. -№5. -С. 71-78.

155 Пейсах Э.Е. Анализ положений манипуляторов с шестью степенями свободы. Робототехника. Межвузовский сборник, -Л.: ЛПИ, 1979, вып. 2. -С. 70-76.

156 Пономаренко С.С, Прасолов В.Г. Оптимизация параметров плоских и пространственных шарнирно-рычажных печатающих механизмов методом штрафных функций // В сб.: Механика машин, 1983, вып.61, -С. 134-137.

157 Rao S.S. and Ambekar A.G. Optimum design of spherical 4-R function generating mechanisms. Mechanisms and machine theory, -Autumn, 1974, vol.9, №3. -P. 405-410.

158 Фокс, Уилмерт. Проектирование механизмов воспроизводящих заданную шатунную кривую при ограничениях в

- форме неравенств // Конструирование и технология машиностроения. - М.: Мир, 1967, №1. -С. 169-170.
- 159 Шпигнагель, Тесар. Многопараметрическая оптимизация шарнирных четырехзвенников // Конструирование и технология машиностроения. -М.: Мир, 1979, №3. -С. 17-23.
- 160 Сохони В., Хог Е. Применение методов пространства состояний для оптимизации кинематики машин и механизмов // Конструирование и технология машиностроения. -М.: Мир, 1982, №1. -С. 21-27.
- 161 Fenton R.G. and Jinshu Xu. Kinematics Synthesis of Mechanisms Using the Flexible Toleranse Algorithm. Proc. of the 7-th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms. -Seville, Spain, 1987. -P. 37-40.
- 162 Song S.M., Waldron K.J. Geometric Design of a Walking Machine for Optimal Mobility. Trans of the ASME Journal of Mech., Trans, and Autom. in Design. March. -1987. -V.109. -P.21-28.
- 163 Закиров Г.Ш. Алгоритмический подход к решению задач синтеза механизмов. В кн.: Механика машин. -М.: Наука, 1981, вып. 58. - С. 115-121.
- 164 Халилов А.М. Анализ и синтез плоских регулируемых круговых направляющих шестизвенных механизмов. В сб.: Анализ и синтез исполнительных шарнирных механизмов манипуляторов и расчет их элементов на точность, прочность и долговечность. -Баку: АзГУ, 1991. -С. 30-38.
- 165 Пейсах Э.Е. Структура и кинематика пространственных рычажных механизмов. Монография. – СПб.: СПГУТД, 2004. -212 с.
- 166 Хорунжин В.С. Кинематический и динамический синтез пространственных рычажных механизмов с выстоями выходного звена по заданной циклограмме: диссертация доктора технических наук: 05.02.18. - Омск, 2004.
- 167 Бакшеев В.А. Кинематический синтез пространственных шарнирных механизмов с выстоями выходного звена по заданной циклограмме: диссертация кандидата технических наук: 05.02.18. –Омск, 1999.
- 168 Кушнаренко А.В. Кинематический синтез плоских рычажных механизмов второго класса по заданному семейству циклограмм с выстоем выходного звена: диссертация кандидата технических наук: 05.02.18. - Омск, 1999.
- 169 Кузнецов С.А. Анализ и синтез механизмов индифферентной структуры со сложным огибающим движением исполнительного органа: диссертация доктора технических наук: 05.02.18. -Шахты, 1999.
- 170 Канлыбаев О. Разработка методов интерполяционного кинематического синтеза пространственных передаточных механизмов

высоких классов: диссертация доктора технических наук: 05.02.18, Алматы, 2005.

171 Дракунов Ю.М., Тулемшов А.К. Диалоговая система синтеза кривошипно – ползунного механизма по коэффициенту изменения средней скорости выходного звена: Материалы III международной конференции «Проблемы механики современных машин». -Улан – Уде. 2006. – С. 121-127.

172 Тулемшов А.К., Дракунов Ю.М., Суюндыков А. Квадратическое приближение N положений точки к кривой второго порядка при синтезе механизмов // Вестник КазНУ. Серия «математика, механика, информатика». –Алматы, № 2, 2006. – С. 168-173.

173 Госселен, Анджелес. Оптимальная кинематика структура плоского параллельного манипулятора с тремя степенями свободы. Конструирование и технология. -М., 1988, №4. -С. 337-347.

174 Монашко Н.Т., Щекин Б.М. Структурный и кинематический синтез манипуляторов с замкнутыми кинематическими цепями. Теория механизмов и машин: (Республиканский межвузовский научно – технический сборник Харьковского университета). -1986. -Вып.40. -С. 129-136.

175 Росс Б. Роботы. Состояние вопроса с точки зрения теории механизмов. Конструирование и технология машиностроения. -М., 1983, №1. -С. 144-146.

176 Хант К.Х. Кинематические структуры манипуляторов с параллельным приводом // Конструирование и технология машиностроения. -М: Мир, 1983, №4. -С. 201-210.

177 Хант К.Х. Направления исследований в кинематике и геометрии механизмов // Конструирование и технология машиностроения. -М.: Мир, 1984, №3. -С. 179-181.

178 Шет, Уикер мл. Программа синтеза механизмов (ПСМ): Система машинного анализа и проектирования механизмов различного назначения. – Динамические системы и управление. -1972. -№ 2. – С. 193-202.

179 Косболов С.Б., Молдабеков М.М. Синтез исходных кинематических цепей со сферическими парами для пространственных механизмов. Вестник КазНТУ. -№ 1(29). -2002. – С. 39-43.

180 Косболов С.Б., Бекенов Е.Т. Кинематический синтез исходных кинематических цепей типа СС_ПС для пространственных механизмов: Труды международной научно-практической конференции «Естественно-гуманитарные науки и их роль в подготовке инженерных кадров». – Алматы: КазНТУ. -2002. – С. 245-248.

181 Косболов С.Б., Дракунов Ю.М., Калиаждаров Р.С. Оптимизационный синтез пространственных механизмов: IV науч.-метод.

совещ. зав. каф., лекторов по ТММ ВУЗов республики Ср. Азии и Казахстана. -Алма-Ата. -1991. - С. 49-52.

182 Косболов С.Б., Джумагулова Н.Б. Структурно-параметрический синтез пространственных механизмов на основе исходных кинематических цепей: Труды Международного Симпозиума, посвященного 100-летию К.И. Сатпаева, часть II. -1999. – С.347-350.

183 Kosbolov S., Moldabekov M., Bekenov E. Kinematic synthesis of spatial lever motion – generating mechanisms by use of initial kinematic chain. The NINTH IFToMM international symposium on teori of machines and mechanisms. -Bucharest, Romania, September 1-4, 2005. SYROM 2005. -P. 245-250.

184 Косболов С.Б. О существовании решения задачи синтеза ИКЦ со сферическими кинематическими парами: Доклады НАН РК. -Алматы. - №6. -2004. – С. 54-59.

185 Косболов С.Б., Молдабеков М.М., Бекенов Е.Т. Синтез пространственных кулисных механизмов по задним движениям входного и выходного звеньев // Известия МОН, НАН РК. Серия «физ.-мат». -№ 5 - 2002. – С. 59-65.

186 Косболов С.Б., Казыханов Х.Р. Синтез пятизвенных и семизвенных механизмов переменной структуры: Труды Всесоюзной конференции по механизмам переменной структуры в технике. -Фрунзе. - 1991. – С. 88-89.

187 Косболов С.Б., Дракунов Ю.М., Калиаждаров Р.С. Синтез пространственных четырехзвенных механизмов со сферическими парами // Сборник научных статей «Проектирование и исследование механизмов» ИММ АН КазССР. -1991. – С. 64-69.

188 Косболов С.Б., Джумагулова Н.Б. Автоматизированный синтез плоских рычажных механизмов на основе исходных кинематических цепей // Вестник КазНТУ. -№ 1-2. -1999. – С. 164-169.

189 Косболов С.Б., Молдабеков М.М. Структурно-параметрический синтез плоских рычажных механизмов на основе исходных кинематических цепей: деп. в КазНИИНТИ, № 2187 – Кац 88. - Алма-Ата.

190 Косболов С.Б., Алтынов Ж. Кинематический анализ механизмов IV- класса с применением векторного исчисления // Вестник КазНТУ. -№ 1, 1996. – С. 75-80.

191 Косболов С.Б., Кансеитов К.И., Кажекенов Д.Х. Сравнительный кинематический анализ механизма III-класса: Материалы международной научно-технической конференции "Творчество молодых XXI века". -Петропавловск. -Том II. -2003. – С. 64-67.

192 Косболов С.Б., Молдабеков М.М., Бекенов Е.Т. Общая методика синтеза пространственных рычажных механизмов на основе

ИКЦ // Тезисы 10-й Межвузовской конференции по математике и механике. -Алматы, 7-9 октября, 2004. – С. 183.

193 Косболов С.Б., Бекенов Е.Т. Структурно-кинематический синтез пространственных рычажных перемещающих механизмов на основе ИКЦ и их модификации // Вестник национальной академии наук Республики Казахстан. -Алматы. -№1. -2005. –С. 68-73.

194 Косболов С.Б. Структурный синтез пространственных рычажных механизмов высоких классов на основе исходных кинематических цепей: Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения». –Алматы. -Том II. 17-19 июня 2005. – С. 249-254.

195 Косболов С.Б., Молдабеков М.М., Бекенов Е.Т. Кинематический синтез пространственных шестизвездных перемещающих механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев // Труды Международной научно-технической конференции «Современные проблемы механики, строительства и машиностроения». –Павлодар. 16-17 ноября 2006. – С. 3-9.

196 Косболов С.Б. Структурно-кинематический синтез пространственных рычажных направляющих механизмов на основе ИКЦ // Вестник КазНТУ. -6(44). -2004. – С. 94-100.

197 Косболов С.Б., Молдабеков М.М., Бекенов Е.Т. Общая методика синтеза пространственных рычажных механизмов на основе ИКЦ: Материалы 10 Межвузовской конференции по математике и механике. -Том 2. -Алматы. -2005. – С. 51-56.

198 Косболов С.Б. Структурно-кинематический синтез пространственных передаточных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев механизма // Вестник национальной инженерной академии Республики Казахстан. -№1(15). -2005. – С. 97-100.

199 Косболов С.Б., Молдабеков М.М., Бекенов Е.Т. Кинематический синтез пространственных перемещающих механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев. Материалы II международной конференции "Проблемы механики современных машин", том 1, издательство ВСГТУ, -Улан-Удэ, Россия. 2003. – С. 111-113.

200 Косболов С.Б., Молдабеков М.М., Бекенов Е.Т. Структурно-кинематический синтез пространственных грузоподъемных механизмов. Сборник докладов Международного конгресса "Механика и трибология транспортных систем - 2003" -Ростов на Дону. 10-13 сентябрь, 2003. – С. 155-157.

201 Косболов С.Б., Молдабеков М.М., Бекенов Е.Т., Акимжанова М.М. Численное решение задачи синтеза механизма для реализации заданного пространственного движения тела // Тезисы докладов Международной научной конференции «Проблемы теоретической и прикладной механики». -Алматы. 1-2 марта, 2006. – С. 171.

- 202 Косболов С.Б., Молдабеков М.М., Бекенов Е.Т. Кинематический синтез направляющего пространственного рычажного механизма с четырьмя выстоями // Тезисы докладов 10-й Межвузовской конференции по математике и механике. -Алматы. -2004. – С. 182.
- 203 А. с. 39048. Республика Казахстан. Устройство компенсации уточных нитей к многоцветному бесчелочному ткацкому станку / Косболов С.Б., Бекенов Е.Т., Кансентов К.И. (Республика Казахстан). - 2002/0909.1; опубл. 15.01.2004. Бюл. №1.
- 204 Косболов С.Б., Дракунов Ю.М. Кинематический анализ кулачкового механизма векторным методом с применением ЭВМ // Тезисы докладов научно-методической конференции. -Караганда. -1986. – С. 68.
- 205 Косболов С.Б., Дракунов Ю.М. Профилирование цилиндрических кулачков с коромыслом // Сборник научных статей «Рычажные механизмы и манипуляционные устройства». -1989. – С. 42-47.
- 206 Косболов С.Б. Синтез передаточных сферических механизмов // Вестник КазНТУ. -№ 1(29). -2002. – С. 44-46.
- 207 Косболов С.Б. Кинематический синтез пространственного четырехзвенного передаточного механизма на основе ИКЦ: Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения». -Алматы. -Том II. 17-19 июня 2005. – С. 243-248
- 208 Косболов С.Б., Молдабеков М.М., Бекенов Е.Т. Кинематический синтез пространственного механизма с тремя выстоями на основе ИКЦ: Труды международной конференции "Actual problems of computer sciences" КазНУ. -Алматы, 4-6 марта 2003. – С. 109-110.
- 209 Косболов С.Б., Молдабеков М.М., Бекенов Е.Т. Кинематический синтез пространственного механизма с тремя выстоями на основе ИКЦ // Вестник КазНУ. Серия «мат., мех., инф.» -№2 (37). -2003. – С. 124 - 127.
- 210 А. с. 46886 Республика Казахстан. Устройство компенсации уточных нитей к многоцветному бесчелочному ткацкому станку / Косболов С.Б., Бекенов Е.Т. (Республика Казахстан) -№ 2003/1701.1; опубл. 15.12.2005. Бюл. №12.
- 211 Косболов С.Б., Бекенов Е.Т. Динамические модели исходных кинематических цепей механизмов высоких классов с учетом упругости звеньев // Труды международной конференции «Современные проблемы механики». Часть П. -Алматы. -2001. – С. 133-139.
- 212 Косболов С.Б., Бекенов Е.Т. Определение жесткостных характеристик для составления уравнения движения исходных кинематических цепей механизмов высоких классов с упругими звеньями // Труды 2-й международной научно-практической конференции молодых ученных. КазНТУ. -Алматы. -2002. – С. 277-280.
- 213 Косболов С.Б. К геометрическому синтезу незамкнутой четырехзвенной исходной кинематической цепи с плоскостной парой //

Тезисы международной конференции «Проблемы современной математики и механики». –Алматы, 20-22 сентября, 2005. – С. 223-224.

214 Косболов С.Б., Казыханов Х.Р. Қазақ тіліндегі тұнғыш оқулық // Тезисы докладов 10-й Межвузовской конференции по математике и механике. -Алматы. -2004. – С. 202.

215 Косболов С.Б. Аппроксимационный синтез пространственных четырехзвенных механизмов типа ВЦСП // Труды Международной научно – практической конференции «Научно – технические ценности в наследии мыслителей Востока и А. Машани» КазНТУ. –Алматы, 5 июня 2007. – С. 210-215.



yes I want morebooks!

Покупайте Ваши книги быстро и без посредников он-лайн - в одном из самых быстрорастущих книжных он-лайн магазинов!

Мы используем экологически безопасную технологию "Печать-на-Заказ".

Покупайте Ваши книги на
www.morebooks.de

Buy your books fast and straightforward online - at one of the world's fastest growing online book stores! Environmentally sound due to Print-on-Demand technologies.

Buy your books online at
www.morebooks.de

SIA OmniScriptum Publishing
Brivibas gatve 1 97
LV-103 9 Riga, Latvia
Telefax: +371 68620455

info@omnascriptum.com
www.omnascriptum.com

OMNIscriptum The logo for OMNIscriptum consists of the brand name in a stylized, rounded font next to a circular icon containing a pencil.

