

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Некоммерческое акционерное общество
«Алматинский университет энергетики и связи»

Б.А. Чернов

**НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ
АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ**

Учебное пособие для студентов специальности
5В070200 - Автоматизация и управление

Алматы
АУЭС
2018

УДК 681.511.4(075.8)

ББК 32.965.5я73

Ч-49

Рецензенты:

кандидат технических наук, заместитель генерального директора
ТОО «Системотехника»

Т.Р.Амирбаев,

кандидат технических наук, ассоциированный профессор кафедры
автоматизации и управления КазННТУ им. К.И. Сатпаева

А.А.Бейсембаев,

доцент кафедры телекоммуникационных сетей и систем АУЭС

Ю.М.Гармашова.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Алматинского университета энергетики и связи (Протокол № 2 от 07.12.2018 г.). Печатается по тематическому плану выпуска ведомственной литературы АУЭС на 2018 год, позиция 25.

Чернов Б.А.

Ч-49

Нелинейные системы автоматического регулирования: Учебное пособие для студентов специальности 5В070200 - Автоматизация и управление / Б.А. Чернов. – Алматы: НАО АУЭС, 2018. – 76 с.: табл. 9, ил. 16, библиогр. – 25 назв.

ISBN 978-601-7939-11-3

В учебном пособии изложены основные понятия и особенности процессов в нелинейных автоматических системах, виды, характеристики и математические модели нелинейных элементов и звеньев. Рассмотрены исследования устойчивости и автоколебаний методами фазовой плоскости и гармонической линеаризации, методами Ляпунова, Михайлова, Попова и Гольдфарба. Дополнительно рассмотрены импульсные автоматические системы и условия их устойчивости.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности «Автоматизация и управление».

УДК 681.511.4(075.8)

ББК 32.965.5я73

ISBN 978-601-7939-11-3

© АУЭС, 2018
Чернов Б.А., 2018

Содержание

Введение.....	5
1 Общие понятия о нелинейных САР.....	7
1.1 Нелинейные эффекты.....	7
1.2 Необходимость нелинейной теории.....	8
1.3 Общие сведения о нелинейных САР.....	9
1.4 Нелинейные звенья систем регулирования.....	10
1.4.1 Симметрия.....	10
1.4.2 Гладкость.....	11
1.4.3 Однозначность и неоднозначность.....	11
1.5 Виды и типы нелинейных элементов и звеньев.....	12
1.6 Математические модели нелинейных элементов.....	14
1.7 Составление уравнений нелинейных САР.....	16
1.8 Особенности процессов в нелинейных САР.....	17
1.9 Системы автоматического регулирования с переменной структурой..	19
1.10 Контрольные вопросы и упражнения.....	20
2 Исследование устойчивости и автоколебаний методом фазовой плоскости.....	21
2.1 Фазовое пространство.....	21
2.2 Фазовые траектории для обыкновенных линейных систем.....	22
2.2.1 Шесть случаев корней характеристического уравнения.....	23
2.2.2 Особенности фазовых портретов линейных систем.....	26
2.3 Особые линии для нелинейных систем регулирования.....	28
2.4 Метод фазовой плоскости анализа и синтеза нелинейных САР.....	30
2.5 Контрольные вопросы и упражнения.....	36
3 Устойчивость по Ляпунову.....	38
3.1 Теоремы Ляпунова о линеаризованных САР.....	38
3.2 Прямой метод Ляпунова исследования устойчивости нелинейных систем общего вида.....	38
3.3 Знакоопределённые и знакопостоянные функции. Функция Ляпунова и её производная.....	39
3.4 Теоремы Ляпунова об устойчивости и неустойчивости нелинейных систем.....	40
3.4.1 Теорема Ляпунова об устойчивости нелинейных систем.....	40
3.4.2 Теорема Ляпунова о неустойчивости нелинейных систем.....	40
3.5 Контрольные вопросы и упражнения.....	41
4 Гармоническая линеаризация нелинейностей.....	42
4.1 Коэффициенты гармонической линеаризации.....	42
4.2 Вычисление коэффициентов гармонической линеаризации при симметричных колебаниях.....	44
4.3 Контрольные вопросы и упражнения.....	46
5 Исследование устойчивости и автоколебаний методом гармонической линеаризации.....	46

5.1 Алгебраические способы определения автоколебаний и устойчивости в нелинейных системах.....	46
5.2 Основной способ определения периодических решений.....	47
5.3 Устойчивость периодических решений.....	48
5.4 Использование кривой Михайлова для исследования устойчивости периодического решения.....	48
5.5 Аналитический критерий устойчивости периодического решения.....	49
5.6 Графический частотный метод исследования автоколебаний.....	50
5.7 Контрольные вопросы и упражнения.....	51
6 Частотный метод В.М. Пóпова.....	51
6.1 Условия абсолютной устойчивости.....	51
6.2 Теорема В.М. Пóпова и её графическая интерпретация.....	52
6.3 Контрольные вопросы и упражнения.....	54
7 Импульсные системы автоматического регулирования.....	55
7.1 Общие сведения.....	55
7.2 Разностные уравнения.....	57
7.3 Устойчивость автоматических импульсных систем.....	60
7.4 Контрольные вопросы и упражнения.....	61
Приложение А. Перемножители аналоговых сигналов.....	62
Приложение Б. Математические модели однозначных несимметричных и чётно-симметричных статических характеристик нелинейных безынерционных элементов.....	64
Приложение В. Сопоставление нелинейных и линейных систем автоматического управления и их моделей.....	65
Приложение Г. Нелинейные алгоритмы автоматического управления технологическими объектами.....	66
Приложение Д. Релейные следящие системы, выполненные на операционных усилителях.....	69
Перечень сокращений.....	72
Список литературы.....	74

Введение

Данное учебное пособие написано на основе лекций, читавшихся автором в Алматинском университете энергетики и связи на протяжении более чем десяти лет студентам специальности «Автоматизация и управление» и других специальностей.

В основу теории автоматического управления (ТАУ) положена теория автоматического регулирования (ТАР), которая сформировалась в самостоятельную научную дисциплину к 1940 году. Регулирование представляет собой простейшую разновидность управления. *Автоматическим регулированием называется поддержание постоянной некоторой заданной величины, характеризующей процесс, или изменение её по заданному закону, осуществляемые при помощи измерения состояния объекта или действующих на него возмущений и воздействия на регулирующий орган объекта.*

Управление охватывает бóльший круг задач. *Под автоматическим управлением понимается автоматическое осуществление совокупности воздействий, выбранных из множества возможных на основании определённой информации и направленных на поддержание или улучшение функционирования управляемого объекта в соответствии с целью управления.*

Сравнивая приведённые определения понятий регулирования и управления, можно заключить, что задачи регулирования входят в состав задач управления как более простые случаи. Теория автоматического управления включает в себя теорию автоматического регулирования как основную и наиболее разработанную часть, при этом она ставит перед собой и более сложные задачи управления, которые в данном учебном пособии не рассматриваются.

Система автоматического регулирования (САР) называется нелинейной в том случае, если хотя бы одно её звено описывается нелинейным уравнением или обладает нелинейной характеристикой. В курсе линейных САР [1] изучались непрерывные линейные системы как обыкновенные, так и с запаздыванием. Система любого из этих видов становится нелинейной, если хотя бы в одном её звене есть какое-либо отклонение от линейной зависимости.

В учебном пособии [1] рассматривались системы регулирования, которые с той или иной степенью точности можно описать линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. При этом широко применим принцип наложения (суперпозиции). Однако такое описание процессов в системах управления и регулирования подходит далеко не ко всем системам. Существует множество систем, процессы в которых принципиально не могут быть описаны линейными дифференциальными уравнениями, и при их расчёте необходимо пользоваться соответствующими нелинейными уравнениями.

Переход к нелинейным дифференциальным уравнениям определяется как учётом нелинейностей реальных характеристик элементов системы, так и дополнительным введением элементов с существенно нелинейными характеристиками. Обычно в первом случае нелинейности учитывают для рассмотре-

ния изменения качества процесса регулирования за счёт влияния нелинейностей, присущих реальной системе, и исправления нежелательного эффекта, возникающего под влиянием этих нелинейностей.

Во втором случае речь идёт о повышении качества процессов или о получении принципиально новых алгоритмов управления и регулирования за счёт введения дополнительных нелинейных элементов. При этом удаётся повысить быстродействие и точность системы, уменьшить перерегулирование или скомпенсировать нежелательное действие имеющихся нелинейностей.

Если в линейных системах работоспособными оказываются только устойчивые системы и появление нарастающих колебаний рассматривают как недопустимое явление, то в нелинейных системах вопрос об устойчивости ставят иначе. Существует большое число нелинейных автоколебательных систем управления и регулирования, в которых колебания являются свойством нормального режима их работы. В этом случае под устойчивой работой системы понимают устойчивость автоколебаний в неустойчивой с точки зрения линейной теории системе. Определение устойчивости при этом изменяется.

В линейных системах признаком устойчивости является возврат системы в исходное состояние при снижении внешнего воздействия до нуля. Такую устойчивость называют *асимптотической*, или *устойчивостью в точке*. Этим понятием можно пользоваться и для характеристики нелинейных систем. Однако в нелинейных системах большее значение имеет устойчивость в некоторой области, характеризующаяся возвратом системы в заданную область при уменьшении внешнего воздействия до нуля. При оценке устойчивости обоих видов применяют понятия устойчивости в малом, в большом и в целом, введённые в связи с рассмотрением процессов в нелинейных системах и изучаемые в разделах 2 и 3 данного пособия.

При изучении нелинейных систем неприменим принцип наложения: при сложных воздействиях процесс в нелинейной системе не может быть представлен суммой процессов, получающихся от каждой из составляющих воздействия в отдельности. Это обстоятельство чрезвычайно осложняет анализ нелинейных систем автоматического управления и регулирования.

Математический аппарат анализа нелинейных систем связан с необходимостью исследования нелинейных дифференциальных уравнений, теория которых содержит множество индивидуальных методов, присущих различным видам уравнений, описывающих систему. Сложность решения нелинейных дифференциальных уравнений вызывает необходимость создания ряда приближённых методов, позволяющих судить о характере процессов, наблюдаемых в системе. При этом нелинейные характеристики реальных элементов системы заменяют некоторыми идеализированными приближёнными характеристиками, которые обусловлены как характером нелинейного элемента, так и принятым методом анализа системы.

Таким образом, анализ процессов в реальной системе разбивается на два этапа приближения: первый этап – это составление нелинейных дифференциальных уравнений, приближённо описывающих систему, а второй этап

– приближённое решение этих уравнений. Если для полученных на первом этапе приближения уравнений находится точное решение, то говорят о точном решении задачи. Если же применяют два этапа приближения, то есть полученные нелинейные дифференциальные уравнения решают ещё и при ряде упрощений, то говорят о приближённом решении задачи.

Для решения нелинейных дифференциальных уравнений, кроме аналитических и графических методов, широко используют методы компьютерного моделирования и численного решения задач.

Все реальные САР являются в большей или меньшей степени нелинейными. Однако во всех случаях, когда с инженерной точки зрения допустимо рассматривать линеаризованную систему, обращаются к линейной теории как более простой и более разработанной. И только тогда, когда нелинейность играет существенную роль в поведении системы, прибегают к теории нелинейных систем. Последняя становится всё более важной для практики по мере повышения требований к качеству процессов и точности расчёта автоматических систем [2-17].

Курс «Нелинейные системы автоматического регулирования» ставит своей целью ознакомить обучающегося с общими принципами построения нелинейных САР, с процессами и методами исследования процессов в этих системах.

1 Общие понятия о нелинейных САР

1.1 Нелинейные эффекты

Проведя детальный анализ поведения объекта управления и рассчитав необходимый закон управления на основе линейной теории, инженер может столкнуться с неожиданными неприятностями при реализации системы на основе проведенных расчетов. Свойства «собранный» системы или ее экспериментального макета, построенного на реальных элементах, могут качественно существенно отличаться от расчетных.

Предполагалось, что система является устойчивой, а на самом деле наблюдаются незатухающие колебания. Предполагалось, что система будет с малой ошибкой отслеживать задающее воздействие, а на самом деле ошибка оказывается значительно большей или даже неограниченно возрастает (объект слежения «теряется из виду»). Предполагалось, что переходный процесс занимает малое время, а в действительности он оказывается существенно более затянутым. Система проектировалась как астатическая, а в ней наблюдается установившаяся ошибка. Причина всех этих неприятностей – несоответствие свойств реальных элементов их линейной модели, принятой при расчете. Приведём примеры.

1. Все «линейные» усилители на самом деле имеют ограниченную зону, где зависимость между входным усиливаемым сигналом и выходным сигналом сходна с линейной. За пределами этой зоны наблюдается насыщение: вы-

ход остаётся ограниченным, несмотря на рост входа. Хотя ограниченность управляющих воздействий учитывалась и при линейном расчёте, но это касалось лишь установившихся режимов, а при отработке начального рассогласования нелинейность типа «насыщение» может играть существенную роль.

2. Большинство «линейных» датчиков рассогласования на самом деле имеют зону нечувствительности, т. е. при малых измеряемых ошибках ε их выходной сигнал просто отсутствует. Поэтому установившаяся ошибка САР может быть любой в пределах некоторой зоны $|\varepsilon| \leq \Delta$, а отработка рассогласования при этом просто не будет происходить, поскольку отсутствует сигнал ошибки. Более того, датчики имеют и ограниченную зону линейности. Например, характеристика потенциометрических преобразователей «угол – напряжение» имеет и нечувствительность, и ограничение. Для таких индукционных электромеханических преобразователей, как вращающиеся трансформаторы и сельсины, характерна зависимость $U = k \sin \varepsilon$, лишь при малых ε близкая к линейной. При этом ошибка может быть равна любому числу полуоборотов, а выходной сигнал – отсутствовать; ошибка может нарастать, а выходной сигнал – убывать. Для многих оптических и радиотехнических датчиков, обладающих дискриминационной и пеленгационной характеристиками, характерно исчезновение выходного сигнала при больших ошибках. Ясно, что такие свойства датчиков могут приводить к возникновению больших установившихся ошибок или вообще к потере возможности слежения.

3. На работу кинематических передач оказывает влияние сухое и жидкостное трение скольжения и качения (при малых усилиях перемещения отсутствуют), а также неидеальность соединений из-за зазоров и люфтов. Ведущая ось поворачивается, а ведомая – нет, пока зазор в передаче не будет выбран. Поэтому между их углами поворота нет линейной зависимости. Из-за этой нелинейности, как будет показано далее, могут возникать незатухающие колебания в системе, которая, согласно линейному расчёту, должна была быть устойчивой. Таким образом, реальные элементы, характеристики которых считались при расчёте линейными, в действительности обладают существенно нелинейными свойствами. Их влиянием объясняются многие несоответствия в реальной системе, рассчитанной по линейной теории.

1.2 Необходимость нелинейной теории

Недостаточность линейной теории очевидна: получаемые с ее помощью законы управления не могут быть точно реализованы, и заранее не ясно, не являются ли другие, существенно нелинейные законы, например, с применением простых релейных элементов, более эффективными. Кроме того, важно и то, что линейные модели самого объекта управления приемлемо отражают его поведение лишь в малой зоне изменения переменных. Они сами, как правило, строятся на основе приближенной *линеаризации* физических законов. В рамках линейной теории неоднократно обращалось внимание на важность

учета даже малых отличий модели от реальности. Вместе с тем изучалось лишь влияние таких отличий, а описание поведения оставалось линейным.

Итак, приведены существенные доводы в пользу нелинейной теории. К сожалению, возможности ее заведомо *ограничены*. Действительно, если линейная теория опирается на модели в виде линейных дифференциальных уравнений, из которых легко находится явное представление управляемого процесса в зависимости от произвольных входных воздействий, то нелинейная теория должна опираться на нелинейные уравнения. А для них, как правило, не существует способов получения подобных явных представлений. При анализе поведения для конкретных начальных условий и заданных воздействий можно воспользоваться эффективными процедурами численного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений. Однако при решении задач управления, как правило, необходимо считаться с неполнотой исходных сведений об указанных факторах.

Следовательно, основное внимание важно уделить таким подходам, при которых можно получить хотя бы качественное представление о поведении систем, описываемых нелинейными соотношениями, при широком диапазоне начальных условий и возможных воздействий. Общая нелинейная теория управления сложна. Более полное знакомство с ней будет продолжено в следующих разделах.

1.3 Общие сведения о нелинейных САР

В нелинейной САР хотя бы в одном звене нарушается линейность статической характеристики или есть любое другое нарушение линейности уравнений динамики звена: произведение (перемножение), частное (деление) переменных или их производных; корень, квадрат или более высокая степень переменной; любая другая нелинейная связь переменных и их производных.

Нелинейными могут быть также системы с переменными параметрами, с распределёнными параметрами, с запаздыванием, импульсные и цифровые системы, если в них нарушается линейность уравнений динамики.

В соответствии с классификацией автоматических систем по характеру внутренних динамических процессов [2], нелинейные САР могут быть непрерывными, релейными и дискретными.

Системой непрерывного действия или, проще, *непрерывной системой* называется такая система, в которой в каждом из её звеньев непрерывному изменению входной величины во времени соответствует непрерывное изменение выходной величины. Для этого необходимо прежде всего, чтобы были непрерывными статические характеристики (СХ) всех звеньев.

Системой релейного действия или, проще, *релейной системой* называется такая система, в которой хотя бы в одном звене при непрерывном изменении входной величины выходная величина при некоторых значениях входной величины изменяется скачком. Такое звено называется *релейным* звеном. Статические характеристики релейных звеньев имеют точки разрыва.

Системой дискретного действия или, проще, *дискретной системой* называется такая система, в которой хотя бы в одном звене при непрерывном изменении входной величины выходная величина имеет вид отдельных импульсов, появляющихся через некоторые промежутки времени. Звено, преобразующее непрерывный входной сигнал в последовательность импульсов, называется *импульсным элементом* или *импульсным модулятором*. К данным САР относятся импульсные и цифровые автоматические системы.

При исследовании, расчете и синтезе САР нужно иметь в виду, что наиболее полно разработаны теория и различные прикладные методы для обыкновенных линейных систем. Поэтому в интересах простоты расчета всегда желательно (там, где это допустимо) сводить задачу к такой форме, чтобы максимально использовать методы исследования таких систем.

Однако это вовсе не значит, что при проектировании новых САР нужно стремиться к обыкновенным линейным системам. Совершенно очевидно, что обыкновенные линейные системы обладают ограниченными возможностями. Введение нелинейных и особых линейных звеньев (с переменными во времени коэффициентами, с распределёнными параметрами, с временным запаздыванием) может придать системе лучшие качества. Особенно богатыми возможностями обладают системы со специально введенными нелинейностями и дискретные системы, в том числе с цифровыми вычислительными устройствами, а также адаптивные системы.

1.4 Нелинейные звенья систем регулирования

Из приведённых выше примеров видно, что в САР могут встречаться нелинейности различного вида. Будем характеризовать каждую нелинейность соответствующей функцией $y = y(x)$. При этом будем также считать, что эта нелинейность – одномерная, т. е. переменная y является функцией только одной переменной x . Хотя возможны и многомерные нелинейности, когда переменная y является функцией нескольких переменных (аргументов). Рассмотрим некоторые показатели нелинейностей.

1.4.1. Симметрия.

Для нелинейных звеньев можно указать два вида симметрии их характеристик. Если функция $y(x)$ удовлетворяет условию

$$y(x) = -y(-x), \quad (1.1)$$

то такую характеристику и её график называют *нечётно-симметричными* или *симметричными относительно начала* (центра) *координат*, а саму функцию $y(x)$ называют *нечётной*. В математике такая симметрия рассматривается как центральная. Если функция $y(x)$ удовлетворяет условию

$$y(x) = y(-x), \quad (1.2)$$

то такую характеристику и её график называют *чётно-симметричными* или *симметричными относительно оси (прямой) ординат*, а саму функцию $y(x)$ называют *чётной*. В математике такая симметрия рассматривается как относительно прямой или осевая.

При построении графиков чётных и нечётных функций достаточно построить только правую ветвь графика для положительных значений переменной (аргумента) x . Левая ветвь достраивается симметрично оси ординат для чётной функции и кососимметрично (т. е. симметрично относительно начала координат) для нечётной функции. Нетрудно видеть, что произведение двух чётных или двух нечётных функций представляет собой чётную функцию, а произведение чётной и нечётной функций представляет собой нечётную функцию. Это свойство полезно знать и можно учитывать при преобразовании функциональных и структурных схем нелинейных САР.

Нелинейные характеристики, не удовлетворяющие ни одному из приведённых условий (1.1, 1.2), называются несимметричными.

1.4.2. Гладкость.

Если в любой точке характеристики $y(x)$ существует производная dy/dx , то характеристика относится к *гладким*. Если на характеристике имеются изломы, в которых производная dy/dx имеет разрыв, то характеристика относится к *ломаным*. Большую группу ломаных характеристик представляют *кусочно-линейные* характеристики, состоящие из отрезков прямых. Различают также нелинейные элементы с *кусочно-постоянной* характеристикой [4]. С целью облегчения расчёта гладкие характеристики бывает удобно приближённо заменить кусочно-линейными ломаными, например, путём соответствующей аппроксимации и преобразования координат.

К разрывным относятся релейные характеристики.

1.4.3. Однозначность и неоднозначность.

Если каждому значению аргумента x соответствует одно определённое значение функции y , то характеристику называют *однозначной*. Если каждому значению аргумента x соответствует несколько значений функции y , например, в зависимости от режима, предшествовавшему рассматриваемому моменту, то характеристику называют *неоднозначной* или *многозначной*. При этом число возможных значений y может быть в пределах от 2 до ∞ (бесконечности). Примерами двузначных нелинейностей являются двухпозиционное и трёхпозиционное реле с гистерезисом. Нелинейное звено с характеристикой типа *люфт* является многозначным.

В дальнейшем изложении будут рассматриваться в основном наиболее распространённые так называемые типовые звенья, характеристики которых при соответствующих упрощениях симметричны относительно начала координат и могут быть представлены кусочно-линейными кривыми.

Звенья, встречающиеся реже, характеристики которых имеют более сложный характер, относят к нетиповым или особым звеньям. К особым

звеньям относят также перемножители и делители сигналов, элементы логические, с переменной структурой и искусственно создаваемые нелинейности для удовлетворения определённым заданным требованиям.

1.5 Виды и типы нелинейных элементов и звеньев

Перечислим виды нелинейных звеньев:

- релейного типа (рисунок 1.1);
- с кусочно-линейной характеристикой (рисунок 1.2);
- с криволинейной характеристикой любого очертания;
- перемножитель и делитель сигналов (приложение А);
- логическое;
- переменной структуры.

Различают *статические* и *динамические* нелинейности. Первые описываются нелинейными алгебраическими уравнениями, а вторые – нелинейными дифференциальными уравнениями. Статические нелинейные элементы можно представить в виде нелинейных статических характеристик (СХ).

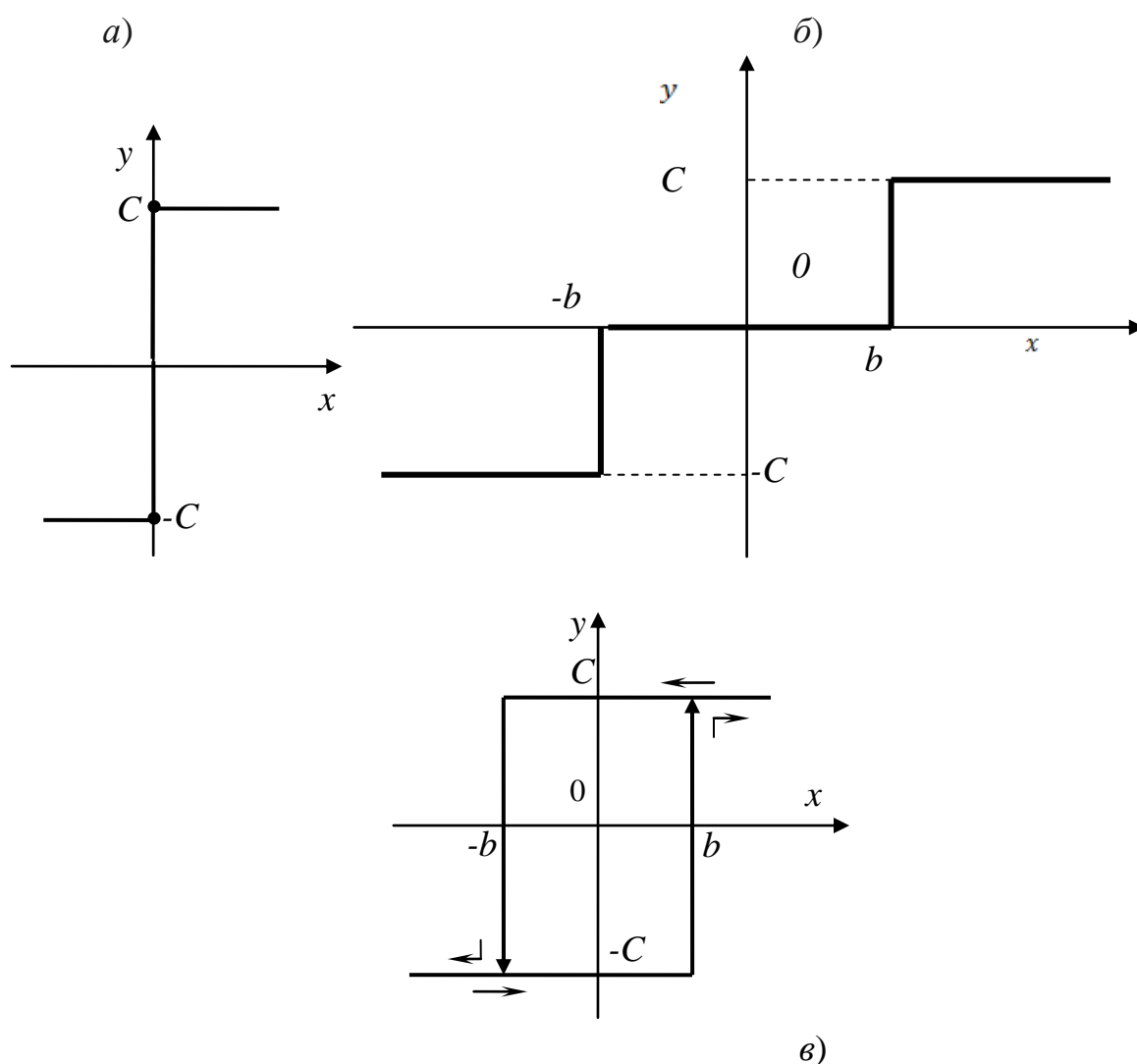


Рисунок 1.1 - Примеры распространённых релейных характеристик

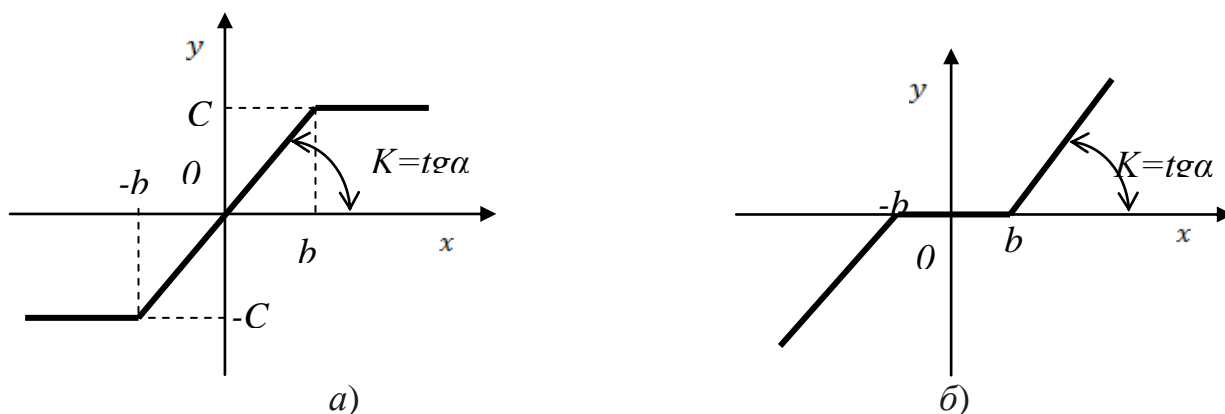


Рисунок 1.2 - Примеры распространённых кусочно-линейных характеристик

Динамические нелинейности проявляют себя только в динамике, т. е. при изменении величин во времени. Такие нелинейности зависят от производных соответствующих величин по времени. Например, нелинейными дифференциальными уравнениями и, соответственно, динамическими нелинейностями описываются и отображаются электрическое сопротивление терморезистора в электротехнике, сила вязкого трения в гидродинамике, последняя из которых описывается следующим образом:

$$y(x) = - [\kappa_1 + \kappa_2(dx/dt)^2] (dx/dt), \quad (1.3)$$

где κ_1 и κ_2 – коэффициенты, зависящие от свойств вязкой жидкости и условий её транспортирования.

Статические же нелинейности проявляют себя как в статике, так и в динамике.

В автоматических системах широко распространены следующие *типовые статические нелинейности*, отличающиеся от реальных кусочно-линейной аппроксимацией: *идеальное реле* или *сухое трение* (рисунок 1.1а), *реле с зоной нечувствительности* (рисунок 1.1б), *реле с гистерезисом* (рисунок 1.1в), *реле с зоной нечувствительности и гистерезисом*, *ограничение* или *насыщение* (рисунок 1.2а), *зона нечувствительности* (рисунок 1.2б) *мертвый ход*, *гистерезис*, *люфт*, *упор*, *диодная характеристика* (*идеальный выпрямитель*), *квантование по уровню*, и др.

Статические нелинейности могут быть *непрерывными* или *релейными*, *петлевыми гистерезисными* или *петлевыми опережающими*. *Простейшими нелинейными элементами* являются статические однозначные нелинейности, называемые также *безынерционными*.

Структура и уравнения нелинейной САР в общем случае могут быть очень сложными. Степень сложности зависит от количества, вида и места включения нелинейных элементов. Однако большинство систем, встречающихся в промышленной автоматике, содержит только *один* существенно нелинейный элемент.

1.6 Математические модели нелинейных элементов

Понятие математической модели (ММ), как и ряд других понятий, используемых в математическом моделировании, не имеет строгого формального определения. Однако в это понятие вкладывают вполне конкретное содержание, с которым связано применение математики в конкретной практике. Более того, такие, например, инженерные дисциплины, как механика, физика, электротехника являются, по существу, упорядоченным множеством ММ, построение которых сопровождается теоретическим обоснованием адекватного отражения этими моделями свойств рассматриваемых процессов и явлений. Посредством ММ инженерные дисциплины взаимодействуют между собой и с математикой.

В этом подразделе приведено несколько таблиц математических моделей распространённых нелинейных элементов, содержащих наименование статической характеристики (СХ) элемента и варианты её математического описания. Все эти характеристики симметричны относительно начала координат, т. е. нечётно-симметричны.

В таблице 1.1 представлены математические модели неоднозначных характеристик. В таблице 1.2 представлены математические модели кусочно-линейных однозначных характеристик. В таблице 1.3 представлены математические модели релейных однозначных характеристик. А в таблице 1.4 представлены математические модели релейных неоднозначных характеристик.

Таблица 1.1 - Математические модели нелинейных безынерционных элементов, статическая характеристика которых неоднозначна и симметрична относительно начала координат

№	Наименование характеристики	Математическая функция	Диапазон и скорость изменения аргумента
1	Люфт (зазор)	$y = \kappa (x + a)$ $y = \kappa (x - a)$ $\kappa (x - a) \leq y \leq \kappa (x + a)$	$dx / dt < 0$ $dx / dt > 0$ $dx / dt = 0$
2		$dy / dt = \kappa dx / dt$ $dy / dt = \kappa dx / dt$ 0 0	$dx / dt > 0, \kappa x - y = \kappa a$ $dx / dt < 0, \kappa x - y = -\kappa a$ $dx / dt > 0, -\kappa a \leq \kappa x - y < \kappa a$ $dx / dt < 0, -\kappa a < \kappa x - y \leq \kappa a$
3	Кусочно-линейная с гистерезисом и насыщением $ b_2 < b_1 $	$y = \kappa(x - b_2); \kappa = c/(b_1 - b_2)$ $y = c$ $y = -c$ $y = \kappa (x + b_2)$ $y = c$ $y = -c$ $y = \text{const}$	$-c/\kappa + b_2 \leq x \leq c/\kappa + b_2; dx/dt > 0$ $c/\kappa + b_2 \leq x; dx/dt > 0$ $x \leq -(c/\kappa + b_2); dx/dt > 0$ $-c/\kappa - b_2 \leq x \leq c/\kappa - b_2; dx/dt < 0$ $c/\kappa - b_2 \leq x; dx/dt < 0$ $x \leq -(c/\kappa + b_2); dx/dt < 0$ $dx / dt = 0$

Таблица 1.2 - Математические модели нелинейных безынерционных элементов, статическая характеристика которых однозначна и симметрична относительно начала координат

№	Наименование характеристики	Математическая функция	Диапазон изменения аргумента
1	Кусочно-линейная с насыщением (ограничением)	$y = -c$	$x \leq -b$
2		$y = (c/b)x$	$-b \leq x \leq b$
3		$y = c$	$b \leq x$
4	Кусочно-линейная с зоной нечувствительности	$y = \kappa(x + a)$	$x \leq -a$
5		$y = 0$	$-a \leq x \leq a$
6		$y = \kappa(x - a)$	$a \leq x$
7	Кусочно-линейная с зоной нечувствительности и насыщением, $ a < b $	$y = \kappa x; \kappa = c/b$	$ x \leq b$
8		$y = c \operatorname{sign} x$	$b \leq x $
9	Кусочно-линейная дискриминационная (пеленгационная)	$y = -c$	$x \leq -b$
8		$y = c(x + a)/(b - a)$	$-b \leq x \leq -a$
		$y = 0$	$-a \leq x \leq a$
		$y = c(x - a)/(b - a)$	$a \leq x \leq b$
9	$y = c$	$b < x$	
	$y = 0$	$-a \leq x \leq a$	
	$y = \kappa(x - a); \kappa = c/(b - a)$	$a \leq x \leq b$	
	$y = \kappa(x + a)$	$-b \leq x \leq -a$	
9	$y = c \operatorname{sign} x$	$b \leq x $	
	$y = \kappa_1 x$	$-c_1 \leq x \leq c_1$	
	$y = -\kappa_2(x - c_2)$	$c_1 \leq x \leq c_2$	
	$y = -\kappa_2(x + c_2)$	$-c_2 \leq x \leq -c_1$	
9	$y = 0$	$x \leq -c_2, c_2 \leq x$	

В таблицах приложения Б представлены математические модели менее распространённых нелинейных элементов с однозначной несимметричной и чётно-симметричной статической характеристикой.

Как видно из таблиц 1.2 и 1.4, в математических моделях неоднозначных характеристик нелинейных элементов могут употребляться производные по времени входного dx / dt и выходного dy / dt сигналов. Но это не означает, что рассматриваемые нелинейности являются динамическими. Потому что, во-первых, учитывается только знак и не учитывается величина (модуль) про-

Таблица 1.3 - Математические модели релейных безынерционных элементов, статическая характеристика которых однозначна и симметрична относительно начала координат

№	Наименование характеристики	Математическая функция	Диапазон изменения аргумента
1	Двухпозиционное реле	$y = -c$	$x < 0$
2		$y = c$	$0 < x$
3	Трёхпозиционное реле (с зоной нечувствительности, поляризованное)	$y = -c$	$x < -a$
4		$y = 0$	$-a < x < a$
		$y = c$	$a < x$
		$y = 0$	$-a < x < a$
		$y = c \operatorname{sign} x$	$a < x $

Таблица 1.4 - Математические модели релейных безынерционных элементов, статическая характеристика которых неоднозначна и симметрична относительно начала координат

№	Наименование характеристики	Математическая функция	Диапазон и скорость изменения аргумента
1	Двухпозиционное реле с гистерезисом	$y = c$	$b < x; \quad dx / dt > 0$
		$y = -c$	$x < b; \quad dx / dt > 0$
		$y = c$	$b < x; \quad dx / dt < 0$
		$y = -c$	$x < -b; \quad dx / dt < 0$
2		$y = c \operatorname{sign} (x - b)$	$dx / dt > 0$
		$y = c \operatorname{sign} (x + b)$	$dx / dt < 0$
3	Реле с зоной нечувствительности и гистерезисом (трёхпозиционное, поляризованное) $ a < b $	$y = c$	$a \leq x; \quad dx / dt > 0$
		$y = 0$	$-a \leq x \leq b; \quad dx / dt > 0$
		$y = -c$	$x \leq -a; \quad dx / dt > 0$
		$y = c$	$a \leq x; \quad dx / dt < 0$
		$y = 0$	$-b \leq x \leq a; \quad dx / dt < 0$
		$y = -c$	$x \leq -b; \quad dx / dt < 0$

изводных. И, во-вторых, данные производные введены в математические модели для удобства и компактности обозначения направления изменения аргумента x и функции y при снятии статических характеристик. Однако в ряде работ [24, 25], содержащих небольшие разделы по нелинейным САР, и в некоторых учебных тестах неоднозначные и даже несколько однозначных нелинейностей ошибочно считаются динамическими.

1.7 Составление уравнений нелинейных САР

Практически все системы управления, строго говоря, являются нелинейными, т.е. описываются нелинейными уравнениями. Линейные системы явля-

ются их линейными моделями, которые получаются путем *обычной линеаризации*, состоящей в разложении нелинейных функций в ряд Тейлора и отбрасывании нелинейных слагаемых. Однако такая линеаризация не всегда возможна. Если нелинейность допускает обычную линеаризацию, то такая нелинейность называется *несущественной*. В противном случае нелинейность называется *существенной*. Существенными нелинейностями обладают, например, релейные элементы. Даже в тех случаях, когда обычная линеаризация возможна, часто на конечном этапе исследования может потребоваться рассмотрение исходной нелинейной модели.

Общий метод составления уравнений нелинейной САР состоит в следующем. Сначала производится линеаризация всех звеньев системы, для которых это допустимо, кроме существенно нелинейных звеньев (чаще всего одного-двух). Затем составляются уравнения этих последних звеньев с допустимыми упрощениями их характеристик. В результате получается система линейных уравнений и одно-два нелинейных уравнений, например, кусочно-линейные. В соответствии с этим обобщённую структурную схему нелинейной САР с одним нелинейным звеном можно представить в виде замкнутого контура, состоящего из этого нелинейного звена и линейной части системы. При этом линейная часть может иметь структуру любой сложности (с обратными связями и т. п.).

Часто при исследовании нелинейных САР нелинейность описывается непосредственно зависимостью между выходной y и входной x величинами

$$y = F(x). \quad (1.4)$$

Такая зависимость присуща статическим нелинейностям. Но иногда приходится исследовать нелинейные дифференциальные зависимости, имеющие, например, вид:

$$y = F(x, sx); \quad y = F_1(x) + F_2(sy), \quad (1.5)$$

где $s = d/dt$ – символ дифференцирования, он же - оператор Лапласа.

Такие зависимости присущи динамическим нелинейностям.

Если система содержит несколько статических нелинейных звеньев, соединённых параллельно, последовательно или встречно-параллельно (с обратной связью), то их можно заменить одной результирующей (эквивалентной) статической характеристикой для упрощения анализа и расчета нелинейной САР.

1.8 Особенности процессов в нелинейных САР

Нелинейные системы, по сравнению с линейными, обладают рядом принципиальных отличий. В частности, такими отличиями является следующее:

- не выполняется принцип суперпозиции (наложения), и исследование нелинейной системы при нескольких воздействиях нельзя сводить к исследованию при одном воздействии;
- устойчивость и характер переходного процесса зависят от величины начального отклонения от положения равновесия;
- при фиксированных внешних воздействиях возможны несколько (иногда и бесконечное множество) положений равновесия;
- возникают свободные установившиеся процессы, например, автоколебания, которые в линейных системах невозможны.

Универсальных аналитических (математических) методов исследования нелинейных систем нет. В процессе развития теории автоматического управления (ТАУ) были разработаны различные математические методы анализа и синтеза нелинейных САР, каждый из которых применим для определенного класса систем и задач. Для исследования нелинейных САР наиболее широко используются методы фазовой плоскости, функций Ляпунова, гармонической линеаризации и абсолютной устойчивости, которые рассматриваются в следующих разделах. Любое исследование более или менее сложных нелинейных САР, как правило, заканчивается математическим моделированием, которое является одним из универсальных *неаналитических* методов исследования.

Как уже было отмечено, процессы в нелинейных САР имеют целый ряд особенностей, не встречающихся в линейных САР. Благодаря этому даже вопрос устойчивости здесь становится значительно более сложным. Кроме структуры САР и значений её параметров для устойчивости процесса, в отличие от линейных САР, имеют значение также и начальные условия. Возможен новый вид установившегося процесса - *автоколебания*, т. е. устойчивые собственные колебания с постоянной амплитудой при отсутствии внешних колебательных воздействий. Когда в системе возникают автоколебания, то постоянное значение управляемой величины становится невозможным.

В общем случае на плоскости параметров нелинейной САР могут быть не два вида областей (устойчивости и неустойчивости), как в линейных САР, а гораздо больше:

- область устойчивости с постоянным значением управляемой (выходной) величины;
- область автоколебаний;
- область неустойчивости системы;
- области сложных случаев.

Более детальному и углублённому сопоставлению линейных и нелинейных САР посвящено приложение В.

В приложении Г рассматриваются нелинейные задачи, характер решения которых является различным в иерархической структуре управления технологическими объектами.

В приложении Д рассматривается реализация релейных следящих систем, выполненных на интегральных операционных усилителях.

1.9 Системы автоматического регулирования с переменной структурой

Большие дополнительные возможности улучшения процессов регулирования даёт нелинейное управление работой объекта путем изменения структуры управляющего устройства в зависимости от размеров и знаков его входных величин, поступающих от измерительного устройства. При этом могут быть использованы комбинации линейных алгоритмов управления.

Например, если известно, что при одном линейном алгоритме получается быстрое начальное изменение регулируемой величины x , но с большими последующими колебаниями (кривая 1, рисунок 1.3), а при другом линейном алгоритме – медленное изменение и плавный подход к установившемуся режиму $x_{уст}$ (кривая 2, рисунок 1.3), то можно, включив сначала первый алгоритм, переключить затем систему регулирования на второй алгоритм в некоторой точке A , когда выходная величина x достигнет определённого значения x_A . В результате процесс регулирования изобразится кривой 3 (рисунок 1.3), объединяющей оба качества – быстродействие и плавность. Для этого в САР необходимо переключающее устройство, срабатывающее, например, при $x = x_A$.

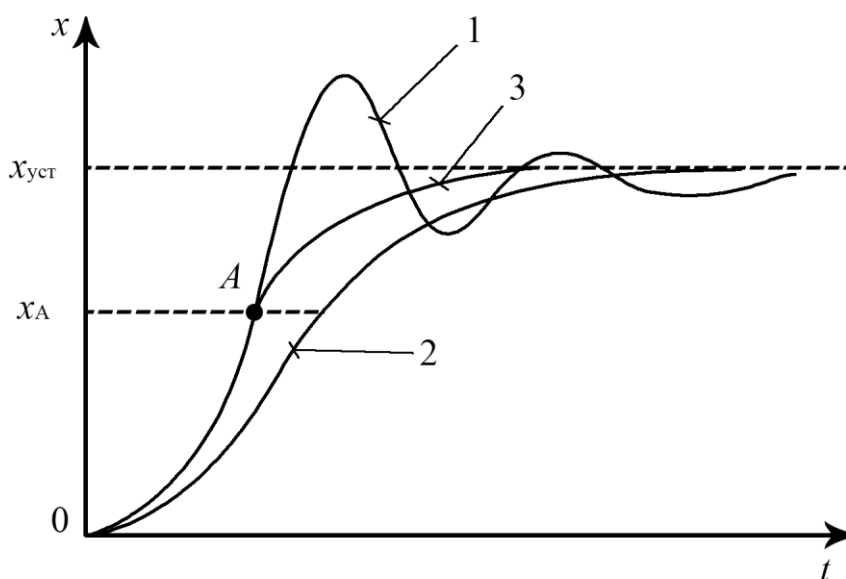


Рисунок 1.3 – Переходные процессы в линейных системах регулирования (кривые 1 и 2) и в системе регулирования с переменной структурой (кривая 3)

На рисунке 1.4 показана функциональная схема такой САР с переменной структурой, на которой обозначено: ИР – измеритель рассогласования, БИС – блок изменения структуры, КЭ – ключевой элемент, ИУ – исполнительное устройство, БА1 и БА2 – алгоритмические блоки, ОУ – объект управления, u – задающее воздействие.

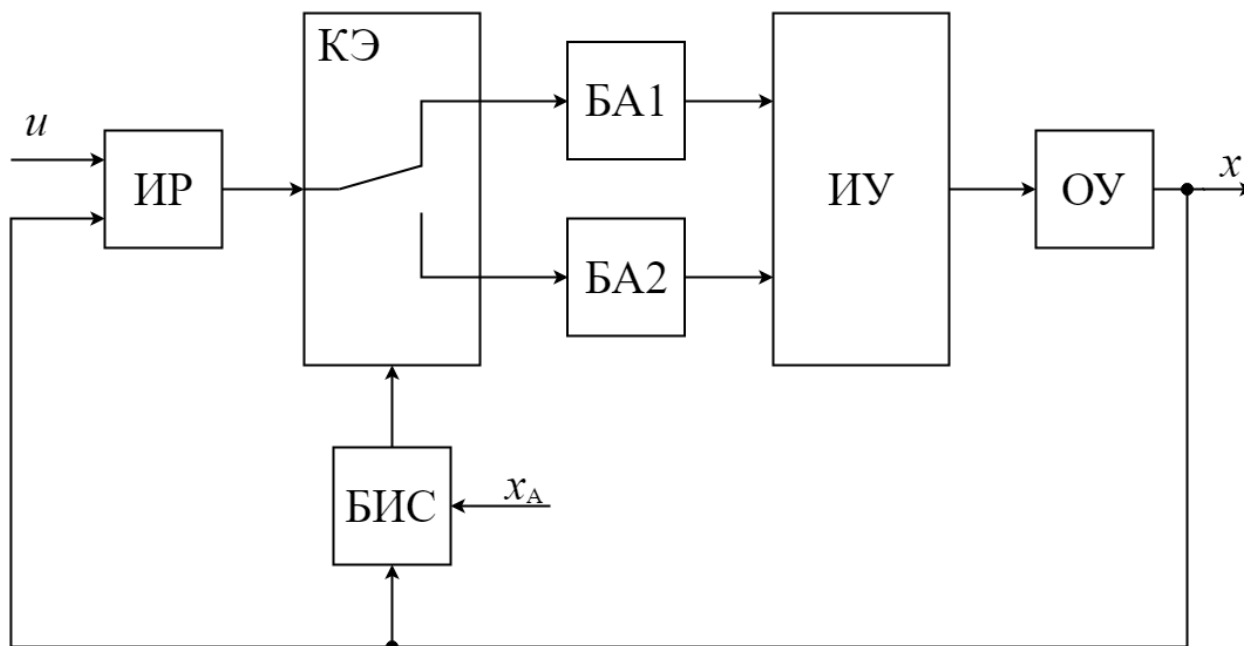


Рисунок 1.4 - Функциональная схема САР с переменной структурой

В первоначальной САР все звенья линейные, но за счёт автоматического переключения она становится нелинейной. Причём здесь в общем случае может иметь место не только статическая, но и динамическая нелинейность, составляемая из разных линейных дифференциальных уравнений, соответствующих первому и второму алгоритмам и осуществляемых с помощью алгоритмических блоков БА1 и БА2.

В простейшем случае алгоритмические блоки могут представлять из себя просто усилительные звенья с передаточными функциями $W_1(s) = k_1$ и $W_2(s) = k_2$ при $k_1 \neq k_2$. Тогда нелинейность будет статической.

1.10 Контрольные вопросы и упражнения

1. В чём заключается принцип наложения (суперпозиции) и почему он не применим в нелинейных схемах?

2. Почему реальные элементы, характеристики которых считались линейными, в действительности могут обладать существенно нелинейными свойствами?

3. Почему возможности теории нелинейных САР ограничены и каковы подходы к изучению этих систем?

4. Каковы признаки нелинейности САР?

5. Что представляют собой релейная САР и релейное звено, относятся ли они к нелинейным устройствам?

6. Почему линейные САР обладают ограниченными возможностями, а использование нелинейных звеньев может придать автоматической системе лучшие качества?

7. Какие нелинейные звенья относятся к типовым?

8. Какие нелинейные звенья относятся к особым?
9. Отличия статических нелинейностей от динамических.
10. В чём состоит общий метод составления уравнений нелинейных систем регулирования?
11. Как и в каких случаях несколько нелинейных звеньев можно заменить одним нелинейным звеном и зачем это делается?
12. Охарактеризуйте принципиальные отличия нелинейных систем от линейных систем.
13. Охарактеризуйте системы автоматического регулирования с переменной структурой и почему они относятся к нелинейным системам?

2 Исследование устойчивости и автоколебаний методом фазовой плоскости

2.1 Фазовое пространство

Для наглядного представления сложных нелинейных процессов регулирования прибегают к понятию фазового пространства, которое заключается в следующем. Дифференциальное уравнение замкнутой системы n -го порядка можно преобразовать в систему n дифференциальных уравнений первого порядка в виде:

$$\frac{dx_1}{dt} = \Phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, f, g); \dots \frac{dx_n}{dt} = \Phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, f, g), \quad (2.1)$$

где x_1, x_2, \dots, x_n – переменные, являющиеся искомыми функциями времени, причем x_1 может обозначать управляемую величину;

x_2, \dots, x_n – вспомогательные переменные;

f и g – возмущающее и задающее воздействия.

Пусть $n = 3$ (т. е. система третьего порядка). Переменные x_1, x_2, x_3 могут иметь любой физический смысл, но условно их можно представить как прямоугольные координаты некоторой точки M . С течением времени x_1, x_2, x_3 меняются, что соответствует перемещению точки M в пространстве по определенной траектории. Следовательно, траектория точки M может служить наглядной геометрической иллюстрацией поведения системы в процессе регулирования. Точка M называется *изображающей точкой*. Её траектория называется *фазовой траекторией*, а пространство (x_1, x_2, x_3) называется *фазовым*. Начальные условия ($x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, x_3 = x_{30}$ при времени $t = 0$) определяют координаты начальной точки M_0 .

Совокупность фазовых траекторий, соответствующая всевозможным начальным условиям, называется *фазовым портретом*. Ещё более наглядно фазовую траекторию и фазовый портрет можно представить в случае двумерного фазового пространства ($n = 2$). Двухмерное фазовое пространство называется *фазовой плоскостью*.

В рассмотренном геометрическом представлении участвуют координаты и исключено время t . Фазовая траектория дает лишь качественную кар-

тину поведения системы. Чтобы определить количественное положение изображающей точки в любой момент времени, нужно найти решение дифференциальных уравнений (2.1) во времени.

Если уравнения (2.1) составлены в отклонениях от установившегося состояния, то последнее характеризуется значениями $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Следовательно, изображением установившегося состояния системы является начало координат фазового пространства. Отсюда вытекает, что фазовые траектории устойчивой линейной системы будут асимптотически приближаться к началу координат при неограниченном увеличении времени. А фазовые траектории неустойчивой линейной системы будут неограниченно удаляться от начала координат.

Фазовая плоскость – это координатная плоскость, в которой по осям координат откладываются две переменные (*фазовые координаты*), однозначно определяющие состояние системы второго порядка. Метод анализа и синтеза САР, основанный на построении фазового портрета, называют *методом фазовой плоскости*.

Часто при изображении процессов на фазовой плоскости за фазовую координату x_2 , которую откладывают по оси ординат, принимают производную координаты x_1 , откладываемой по оси абсцисс. В этом случае фазовые траектории обладают следующими свойствами.

В верхней полуплоскости изображающая точка движется слева направо, так как $x_2 > 0$ и x_1 возрастает. В нижней полуплоскости, наоборот, изображающая точка движется справа налево, так как $x_2 < 0$ и x_1 убывает. Поэтому *фазовые траектории пересекают ось абсцисс под прямым углом*.

По фазовому портрету можно судить о характере переходных процессов. В частности, по фазовой траектории можно построить без расчетов качественно временную характеристику – кривую зависимости x_1 от времени t , и, наоборот, по временной характеристике можно построить без расчетов качественно фазовую траекторию.

Фазовые портреты нелинейных систем характеризуются бóльшим разнообразием, чем фазовые портреты линейных систем. Однако типы особых точек (которые будут рассмотрены далее) фазовых портретов линейных и нелинейных систем совпадают. Здесь имеются в виду те особые точки, в окрестностях которых уравнения нелинейных систем допускают линеаризацию.

2.2 Фазовые траектории для обыкновенных линейных систем

Пусть переходный процесс в некоторой системе описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$d^2x_1/dt^2 + a_1dx_1/dt + a_2x_1 = 0. \quad (2.2)$$

Обозначим скорость отклонения управляемой величины $dx_1/dt = x_2$. Тогда выражение (2.2) преобразуется в систему двух уравнений первого порядка:

$$dx_2/dt = -a_1x_2 - a_2x_1, \quad dx_1/dt = x_2. \quad (2.3)$$

Исключим из этих уравнений время t , разделив первое уравнение на второе,

$$dx_2/dx_1 = -a_1 - a_2x_1/x_2. \quad (2.4)$$

Решение $x_2 = \varphi(x_1)$ этого дифференциального уравнения представляет собой все возможные фазовые траектории. Рассмотрим эти траектории.

2.2.1 Шесть случаев корней характеристического уравнения.

Уравнению (2.2) соответствуют корни характеристического уравнения

$$s_{1,2} = -a_1/2 \pm (a_1^2/4 - a_2)^{0,5}. \quad (2.5)$$

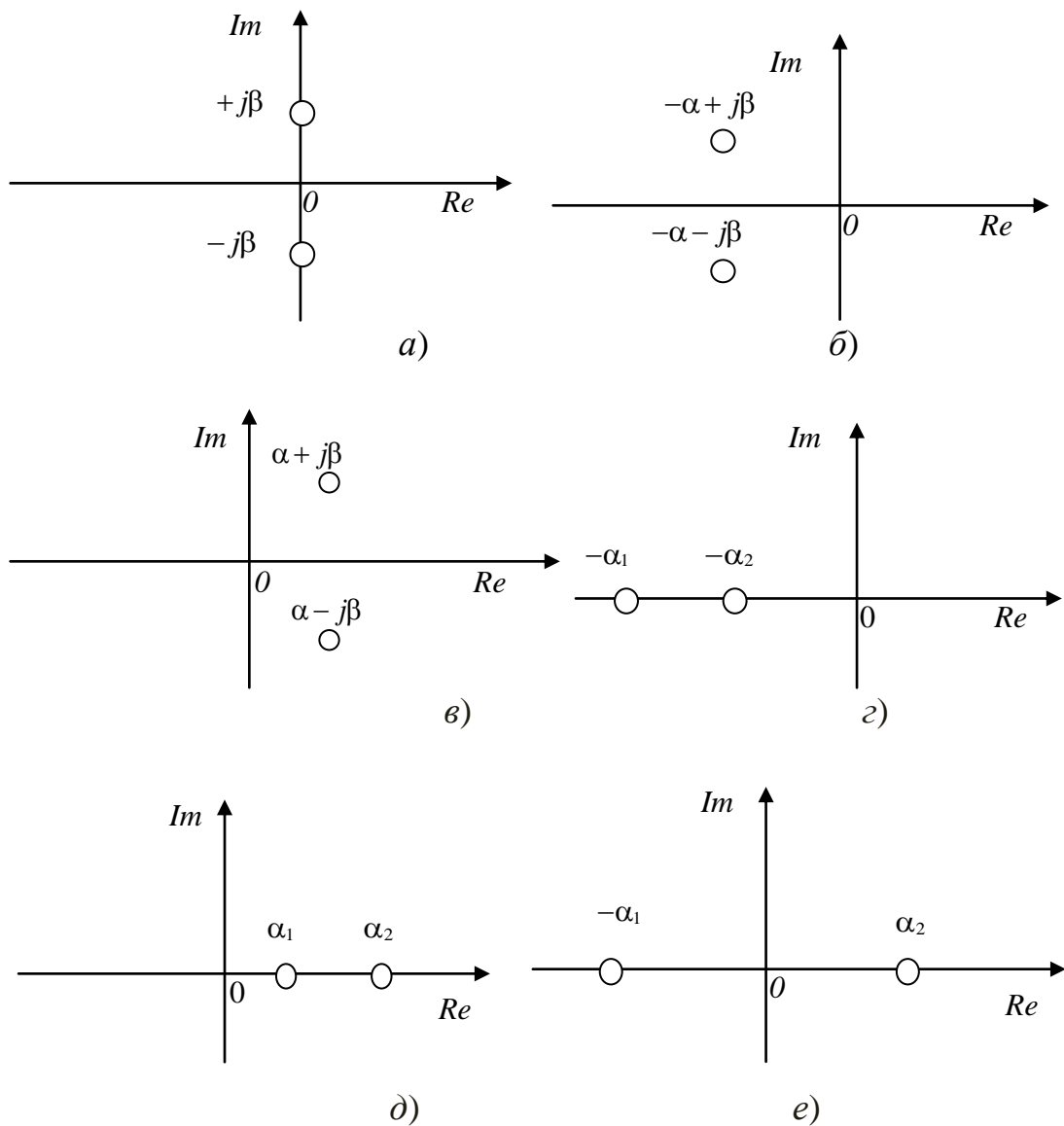


Рисунок 2.1 - Варианты расположения корней линейного характеристического уравнения второго порядка на комплексной плоскости

Возможны шесть случаев, которые отображены на рисунке 2.1:

- корни чисто мнимые (рисунок 2.1а), что соответствует колебательной границе устойчивости линейной системы:

$$s_{1,2} = \pm j\beta; \quad (2.6)$$

- корни комплексные с отрицательной вещественной частью (рисунок 2.1б), что соответствует устойчивой линейной системе с затухающим колебательным переходным процессом:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta; \quad (2.7)$$

- корни комплексные с положительной вещественной частью (рисунок 2.1в), что соответствует неустойчивой линейной системе с расходящимся колебательным переходным процессом:

$$s_{1,2} = \alpha \pm j\beta; \quad (2.8)$$

- корни отрицательные вещественные (рисунок 2.1г), что соответствует устойчивой линейной системе с переходным процессом без колебаний:

$$s_1 = -\alpha_1, \quad s_2 = -\alpha_2; \quad (2.9)$$

- корни положительные вещественные (рисунок 2.1д), что соответствует неустойчивой линейной системе с переходным процессом без колебаний:

$$s_1 = \alpha_1, \quad s_2 = \alpha_2; \quad (2.10)$$

- корни вещественные и имеют разные знаки (рисунок 2.1е), что соответствует неустойчивой линейной системе:

$$s_1 = -\alpha_1, \quad s_2 = \alpha_2. \quad (2.11)$$

Частный случай – один из корней равен нулю, что соответствует апериодической границе устойчивости линейной системы.

Рассмотрим подробно и отдельно различные случаи.

Случай 1. Получаются незатухающие колебания с постоянной амплитудой A и начальной фазой β , которые зависят от начальных условий:

$$x_1 = A\sin(\omega t + \beta), \quad x_2 = dx_1/dt = \omega A\cos(\omega t + \beta). \quad (2.12)$$

Угловая частота этих незатухающих колебаний $\omega = a_2^{0,5}$. Для фазовой плоскости уравнения (2.12) представляют собой параметрические уравнения

эллипса, в которых параметром является время t . Воспользовавшись тригонометрическим тождеством

$$\sin^2(\omega t + \beta) + \cos^2(\omega t + \beta) = 1,$$

исключим из параметрических уравнений время t и получим уравнение фазовой траектории в прямоугольных координатах x_1 и x_2 :

$$(x_1/A)^2 + (x_2/\omega A)^2 = 1. \quad (2.13)$$

Таким образом, периодическим колебаниям в САР соответствует движение изображающей точки по замкнутой кривой по часовой стрелке. Точки, в которых невозможно установить направление касательных к фазовым траекториям, называются *особыми*. В данном случае особой является точка в начале координат фазовой плоскости. Её название – *центр*.

Случай 2. Имеют место затухающие колебания $x_1 = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t + \beta)$, где $\alpha = a_1/2$. Как и раньше, постоянные A и β определяются начальными условиями. Затухающим колебаниям системы отвечают фазовые траектории в виде логарифмических спиралей, по которым изображающая точка по часовой стрелке приближается к началу координат (рисунок 2.2а). Особой является точка в начале координат фазовой плоскости. Её название – *устойчивый фокус*.

Случай 3. Имеют место расходящиеся колебания. Фазовые траектории тоже в виде логарифмических спиралей, только изображающая точка двигается по ним по часовой стрелке не к началу координат, а от него. Особой является точка в начале координат фазовой плоскости. Её название – *неустойчивый фокус*.

Случай 4. Он соответствует аperiodическому (не колебательному) процессу $x_1 = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$. В отличие от прежнего, здесь фазовые траектории вливаются непосредственно (без спиралей) в начало координат фазовой плоскости. Однако изображающая точка не попадает в начало координат за конечное время, а приближается к нему асимптотически (рисунок 2.2б).

Итак, затухающим аperiodическим процессам в системе отвечают фазовые траектории, вливающиеся в начало координат. Особой является точка в начале координат фазовой плоскости. Её название – *устойчивый узел*.

Случай 5. Этот случай также соответствует аperiodическому процессу, но изображающая точка удаляется от начала координат (рисунок 2.2в). Особой является точка в начале координат фазовой плоскости. Её название – *неустойчивый узел*.

Случай 6. Этот случай также соответствует расходящемуся аperiodическому процессу, но фазовые траектории здесь иные и представляют собой семейство гипербол. Изображающая точка, двигаясь по ним, в конечном итоге, удаляется от начала координат (рисунок 2.2г).

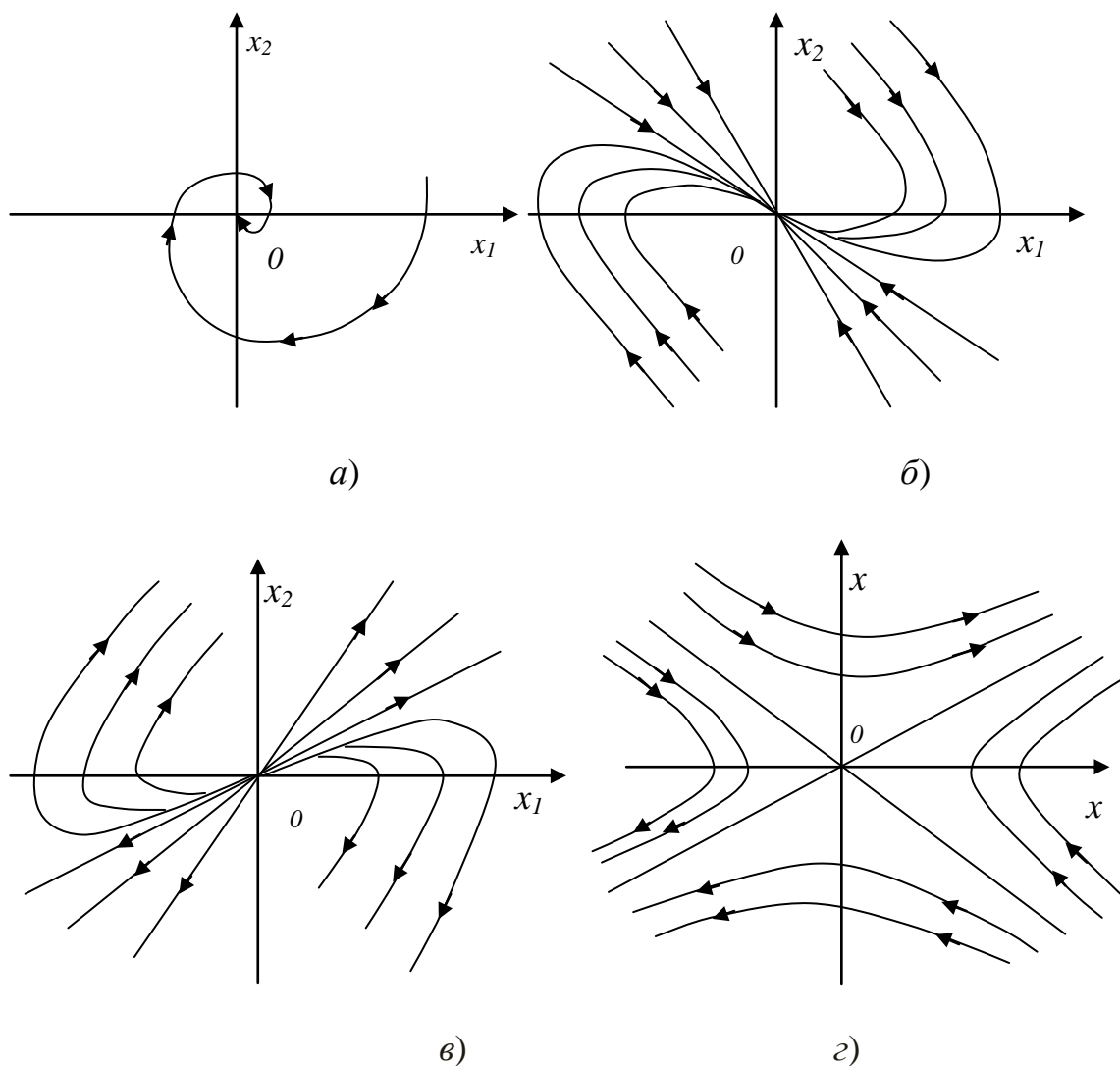


Рисунок 2.2 – Примеры фазовых траекторий

Особой является точка в начале координат фазовой плоскости. Её название – *седло*. В отличие от фокуса и узла, седло всегда неустойчиво.

В таблице 2.1 приведены рассмотренные выше переходные процессы, фазовые портреты и типы особых точек при различных корнях характеристического уравнения.

2.2.2 Особенности фазовых портретов линейных систем.

В отличие от семейства временных диаграмм, на фазовом портрете траектории могут пересекаться лишь в ограниченном числе точек, а применительно к рассматриваемому линейному случаю – только в одной точке – в начале координат. Начало координат фазовой плоскости соответствует регулируемому режиму.

Устойчива или неустойчива линейная система – это не зависит от величины начального отклонения. В силу этого фазовый портрет устойчивой линейной системы всегда такой, что изображающая точка из любой точки

Таблица 2.1- Характеристики нелинейных систем при различных корнях характеристического уравнения

№	Корни уравнения	Характер переходного процесса	Фазовый портрет	Тип особой точки
1	Чисто мнимые	Незатухающие колебания. Колебательная граница устойчивости	Замкнутые кривые – эллипсы	Центр
2	Комплексные с отрицательной вещественной частью	Колебательный затухающий. Система устойчива	Логарифмические спирали. Изображающая точка движется к началу координат по часовой стрелке	Устойчивый фокус
3	Комплексные с положительной вещественной частью	Колебательный расходящийся. Система неустойчива	Логарифмические спирали. Изображающая точка движется из начала координат по часовой стрелке	Неустойчивый фокус
4	Вещественные отрицательные	Монотонный или апериодический сходящийся. Система устойчива	Фазовые траектории асимптотически <i>вливаются</i> в начало координат	Устойчивый узел
5	Вещественные положительные	Монотонный или апериодический расходящийся. Система неустойчива	Изображающая точка удаляется от начала координат	Неустойчивый узел
6	Вещественные с разными знаками	Апериодический расходящийся. Система неустойчива	Изображающая точка в конечном счете удаляется от начала координат	Седло

фазовой плоскости перемещается к началу координат. *Область притяжения* особой точки – начала координат – охватывает всю фазовую плоскость.

Точки и другие части фазового пространства, притягивающие к себе траектории, называются *аттракторами*. Каждый аттрактор имеет свою область притяжения. Для устойчивой линейной системы начало координат – единственный аттрактор на фазовой плоскости, и вся плоскость – его область притяжения.

У неустойчивой линейной системы изображающая точка из любой точки фазовой плоскости по фазовой траектории неограниченно удаляется от начала координат. *Область отталкивания* особой точки – начала координат – охватывает всю фазовую плоскость.

Фазовый портрет линейной системы не содержит замкнутых фазовых траекторий.

2.3 Особые линии для нелинейных систем регулирования

Реальные САР можно считать линейными чаще всего в предположении малости отклонений переменных от их значений в определенном установившемся состоянии. За пределами указанной области вследствие значительного отклонения характеристик от линейных картина фазовых траекторий может сильно измениться и стать качественно иной.

В частности, если по линейной теории САР оказывается неустойчивой и процесс начинает расходиться, то может оказаться, что из-за фактической нелинейности характеристик он не будет расходиться неограниченно. Амплитуда расходящихся колебаний может увеличиваться только до определённого значения, а затем оставаться постоянной, т. е. неустойчивая линейная САР как бы превращается в устойчивую нелинейную автоколебательную САР (система генерирует устойчивые колебания определенной формы).

Картина фазовых траекторий для этого случая такова (рисунок 2.3). Вблизи начала координат получаются спирали, как в неустойчивой линейной системе, но далее все они по часовой стрелке расходятся не до бесконечности ∞ , а приближаются асимптотически к некоторому замкнутому контуру. К нему же по часовой стрелке приближаются и все спирали, находящиеся вне контура. Этот контур – наиболее важный для теории тип особых линий на фазовой плоскости – называется *устойчивым предельным циклом*. Он соответствует автоколебаниям в системе.

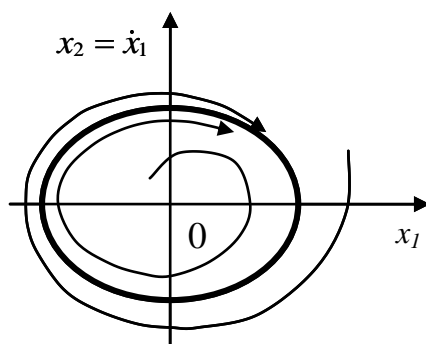


Рисунок 2.3 – Устойчивый предельный цикл

Второй важный тип особых линий, определяющий устойчивость системы «в малом» и неустойчивость «в большом», называется *неустойчивым предельным циклом* (рисунок 2.4). Он является границей начальных условий, до которой САР устойчива. От него в обе стороны (внутри и наружу) удаляются по часовой стрелке спиралевидные фазовые траектории. Заметим, что в этом случае может быть также ещё более удалённый устойчивый предельный цикл, соответствующий автоколебаниям с большой амплитудой.

Третий тип особых линий называется *сепаратрисами*. Они имеют более сложное и разнообразное очертание и в данном пособии не рассматриваются.

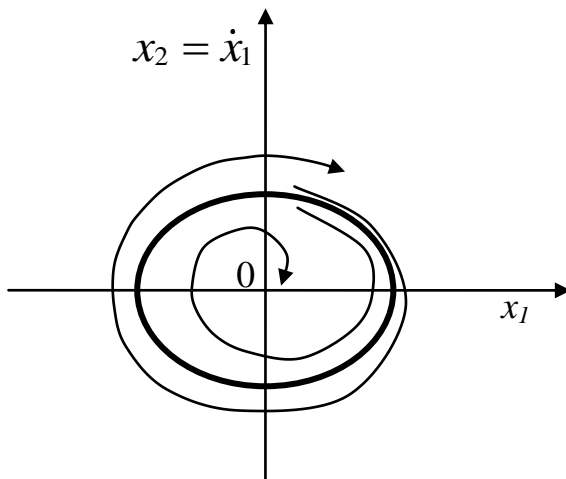


Рисунок 2.4 – Неустойчивый предельный цикл

Пока говорилось о САР, которые при малых отклонениях рассматриваются как линейные, а при больших - как нелинейные. Аналогичная картина получается и для таких нелинейных САР, которые, даже «в малом», нельзя рассматривать как линейные. Таковыми являются многочисленные релейные САР, а также САР с зоной нечувствительности, гистерезисом, зазором (люфтом). Интересно отметить, что такие системы скорее «в большом», чем «в малом», приближаются к линейным, когда зона нечувствительности, гистерезис, зазор оказываются малыми по сравнению с величиной отклонения x .

В САР с зоной нечувствительности существуют *области застоя*, когда установившемуся состоянию соответствует не одна, а целая область равновесных состояний системы. На фазовой плоскости это выражается в том, что особая точка вытягивается в *особый отрезок*.

Рассмотренный метод фазовой плоскости является точным, но имеет ограниченное применение, т. к. практически не применим для САР выше второго порядка. Для систем выше второго порядка придётся иметь дело с фазовым пространством, что чрезвычайно сложно из-за появления новых особенностей процессов. Данный метод был введён в теорию автоматических систем Андроновым А.А. в 1959 г.

Фазовые портреты особенно удобны для оценки качественной картины движений, возможных в системе. Качественная картина движений целиком определяется *топологической структурой* фазового пространства, а именно: наличием, типом и взаимным расположением особых траекторий – особых точек, предельных циклов, сепаратрис. При изменении какого-либо параметра в системе количественные характеристики фазового портрета меняются непрерывно, а топологическая структура претерпевает резкие изменения при дискретных значениях параметра, называемых *бифуркационными*. Бифуркационные точки разделяют всю область возможных значений рассматриваемого параметра на участки, соответствующие системам, имеющим одинаковую структуру фазового пространства.

У линейных систем возможны только две топологические структуры фазового пространства: единственная особая точка в начале координат (устойчивая при одной структуре и неустойчивая при другой), особых траекторий нет, область устойчивости или неустойчивости не ограничены. Смена этих топологических структур происходит на границе области устойчивости. В этом смысле значение параметра на границе устойчивости является бифуркационным. Но у нелинейных систем понятие бифуркации более общее, соответствующее не только смене устойчивости особой точки, но и зарождению, либо исчезновению предельного цикла, изменению числа особых точек и т.д.

Задача расчета нелинейной САР может считаться полностью качественно решенной, если определены фазовые портреты, возможные в этой системе, и если в ее пространстве параметров определены бифуркационные границы.

2.4 Метод фазовой плоскости анализа и синтеза нелинейных САР

Выше было показано, что по фазовому портрету системы можно судить о её устойчивости и характере переходных процессов. А метод фазовой плоскости основывается на построении фазового портрета системы. Достоинство данного метода заключается в том, что он позволяет наглядно представить всевозможные процессы, происходящие в системе, и является точным, а не приближённым (как, например, метод гармонической линеаризации, который будет рассмотрен далее). Его недостатком является то, что он применим только к системам не выше второго порядка.

В данном подразделе на конкретных примерах рассмотрим некоторые важные особенности процессов в нелинейных САР.

Пример 2.1. На рисунке 2.5а представлена функционально-структурная схема нелинейной САР с объектом управления (ОУ) без самовыравнивания и сервоприводом постоянной скорости. Такой привод перемещает регулируемый орган (РО) с постоянной скоростью. Привод может находиться в двух состояниях: перемещение РО в одну сторону с постоянной скоростью C и перемещение РО в обратную сторону также с постоянной скоростью C . Без учёта времени разгона и торможения статическая характеристика сервопривода приведена на рисунке 2.5б, где $d\xi/dt = s\xi$ – обозначение скорости перемещения РО как координаты, σ – входной сигнал реле привода.

Как видно из рисунка 2.5а, САР имеет главную отрицательную обратную связь (ГООС) по выходной регулируемой величине x и местную отрицательную обратную связь (ООС) по положению ξ регулирующего органа, которые описываются соответственно уравнениями $\eta = u - x$, $\sigma = \eta - \xi$. Уравнение объекта управления – передаточная функция – имеет вид:

$$X(s) = \xi(s) / Ts, \quad (2.14)$$

где T – постоянная времени интегрирования.

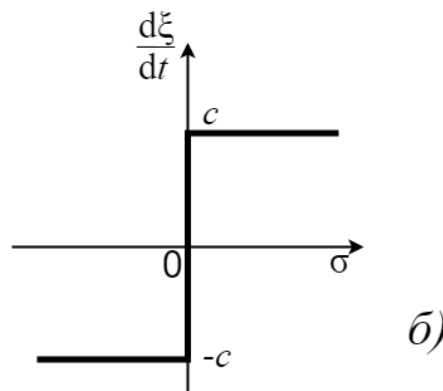
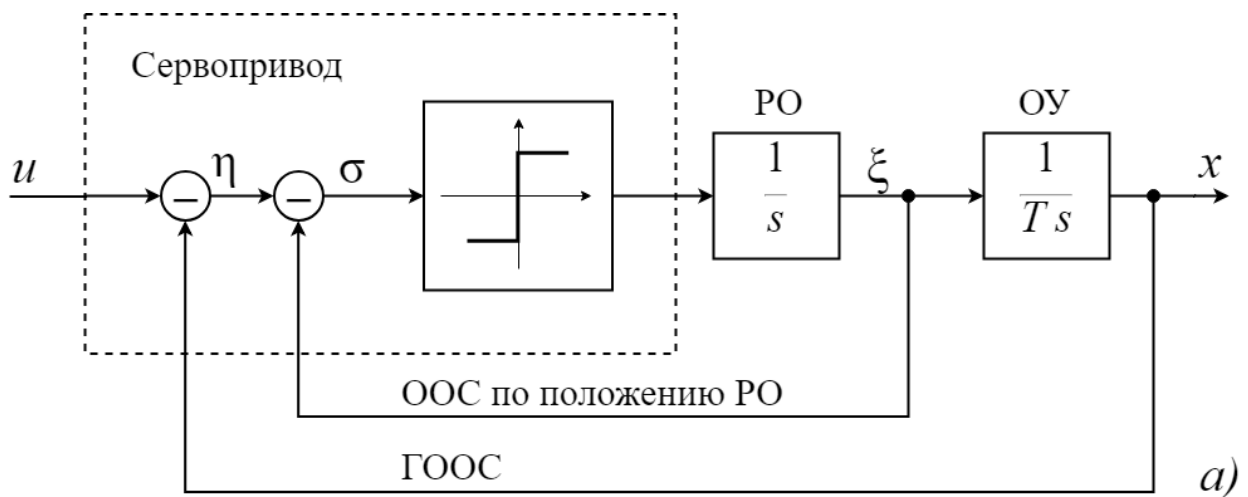


Рисунок 2.5 – Функционально-структурная схема нелинейной САР с двухпозиционным реле (а) и нелинейная статическая характеристика её сервопривода (б)

Возьмём фазовую плоскость (x, y) , приняв за x выходную величину САР, а за y – скорость изменения x (рисунок 2.6):

$$y = dx/dt = s x. \quad (2.15)$$

Переключения привода происходят при входном сигнале реле привода $\sigma = 0$, что имеет место при соблюдении формулы:

$$y = -x/T \quad (2.16)$$

и соответствует прямой AB на фазовой плоскости (рисунок 2.6). Причём значениям $\sigma > 0$ соответствует часть плоскости слева от прямой AB , а значениям $\sigma < 0$ соответствует вторая часть плоскости справа от прямой AB .

При $\sigma < 0$, когда скорость сервопривода равна $d\xi/dt = -C$ (рисунок 2.5б), уравнения фазовых траекторий имеют вид:

$$dy/dx = -C/Ty. \quad (2.17)$$

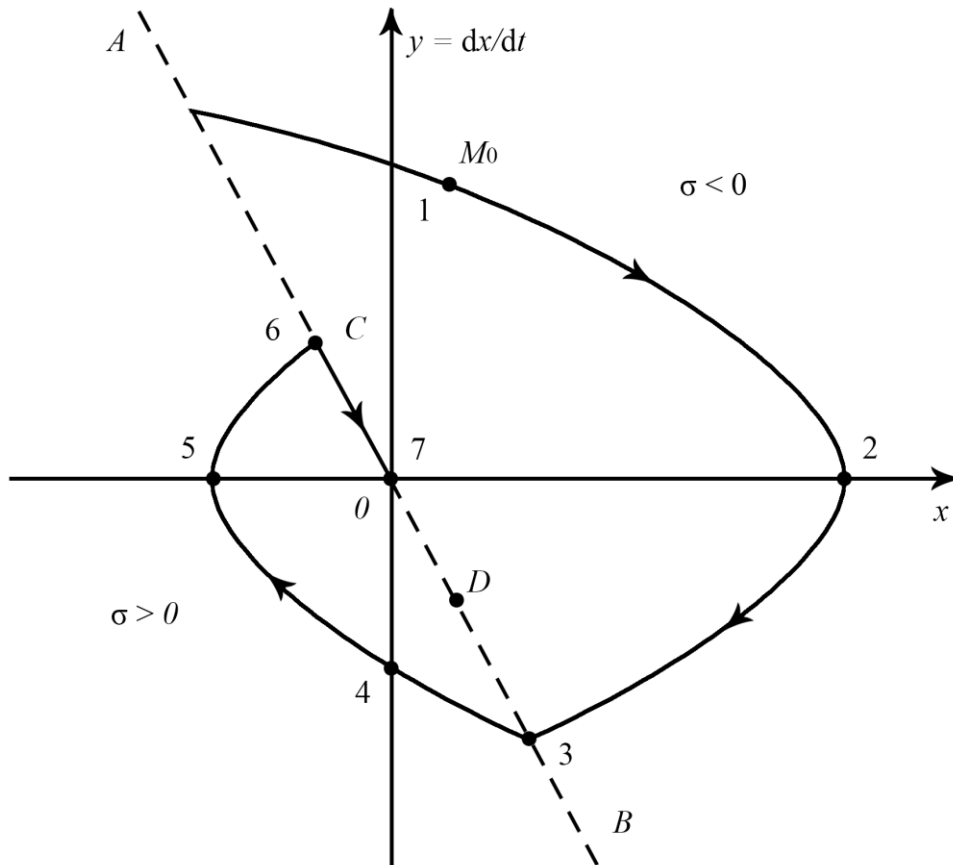


Рисунок 2.6 – Фазовая траектория нелинейной САР

Разделим переменные в (2.17):

$$dx = -Ty \, dy / C. \quad (2.18)$$

После интегрирования формулы (2.18) получим:

$$x = -Ty^2 / 2C + C_1, \quad (2.19)$$

где C_1 – константа.

Уравнение (2.19) определяет семейство парабол справа от линии переключения AB , симметричных относительно оси абсцисс и ветвями направленными влево.

При $\sigma > 0$, когда скорость сервопривода меняет знак и становится равной $d\xi/dt = C$ (рисунок 2.5б), аналогично (2.19) получаем:

$$x = Ty^2 / 2C + C_2. \quad (2.20)$$

Это есть семейство парабол слева от линии переключения AB , симметричных относительно оси абсцисс и ветвями направленных вправо.

На рисунке 2.6 стрелками указано направление движения по часовой стрелке изображающей точки M по одной из фазовых траекторий. Как видно из этого рисунка, получается устойчивая система с затухающим колебательным переходным процессом. Но число колебаний будет ограниченным. Дело в том, что здесь имеется особый отрезок CD , в который все фазовые траектории только вливаются. Крайние точки особого отрезка CD являются точками, в которых прямая AB касается одной из парабол соответственно правого и левого семейств. Попадая на отрезок CD , изображающая точка не может с него уйти (ведь фазовые траектории только вливаются), она будет аperiodически приближаться по линии переключения к началу координат, которое соответствует установившемуся состоянию системы. Таким образом, затухающий колебательный переходный процесс после конечного числа колебаний вырождается в так называемый *скользящий процесс* (или *скользящий режим*).

По найденной картине расположения фазовых траекторий (рисунок 2.6) можно качественно представить себе кривую переходного процесса выходной величины $x(t)$ при любых начальных условиях. Начальными условиями определяется начальное положение изображающей точки M_0 и, тем самым, конкретная фазовая траектория, иллюстрирующая протекание переходного процесса.

На рисунке 2.7 показан переходный процесс в рассматриваемой САР, соответствующий её конкретной фазовой траектории на рисунке 2.6. При этом цифрами 1...6 отмечены соответствующие друг другу характерные точки на этих рисунках:

- а) 1 - начало переходного процесса;
- б) 2 - $x = x_{\max}$;
- в) 3 - точка перегиба на кривой $x(t)$ из-за смены знака второй производной $d^2 x/dt^2$ выходной величины;
- г) 4 - $x = 0$;
- д) 5 - $x = x_{\min}$;
- е) 6 - точка перегиба на кривой $x(t)$ из-за смены знака второй производной $d^2 x/dt^2$ выходной величины и начало скользящего режима;
- ж) 7 - окончание скользящего режима.

Анализ рисунков 2.6 и 2.7 показывает, что чем больше постоянная времени интегрирования T , тем более полого располагается линия переключения AB , тем длиннее отрезок CD и, наконец, тем быстрее затухают колебания переходного процесса САР и меньше их число.

Пример 2.2. На рисунке 2.8а представлена функционально-структурная схема нелинейной САР, в которой, в отличие от примера 2.1, реле сервопривода является трёхпозиционным (поляризованным) и имеет зону нечувствительности b . Поэтому привод постоянной скорости может находиться уже в трёх состояниях: перемещение РО в одну сторону с постоянной скоростью C , не-

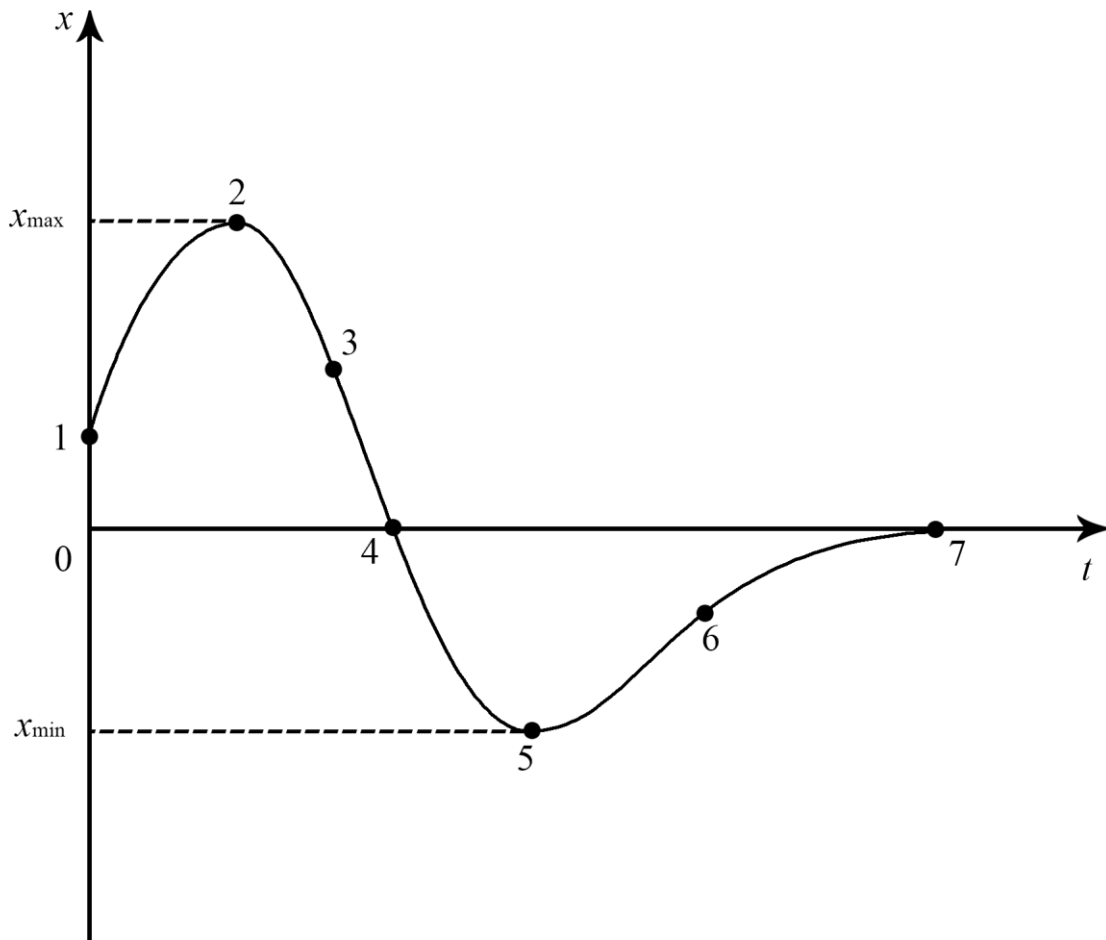


Рисунок 2.7 - Переходный процесс в нелинейной САР, соответствующий её фазовой траектории

подвижность, перемещение РО в обратную сторону также с постоянной скоростью C . Без учёта времени разгона и торможения статическая характеристика сервопривода приведена на рисунке 2.8б.

Согласно выражению 2.16, на фазовой плоскости (рисунок 2.9) переключениям сервопривода при входном сигнале реле привода $\sigma = -b$ и $\sigma = b$ соответствуют две наклонные прямые в полосе AB , описываемые уравнением:

$$y = -(x \pm b) / T. \quad (2.21)$$

При $|\sigma| < b$ уравнения фазовых траекторий получаются из следующих выражений:

$$dy/dt = 0; \quad dx/dt = y, \quad (2.22)$$

откуда при $y \neq 0$ получаем:

$$dy/dx = 0 \quad \text{или} \quad y = C_3, \quad (2.23)$$

где C_3 – константа.

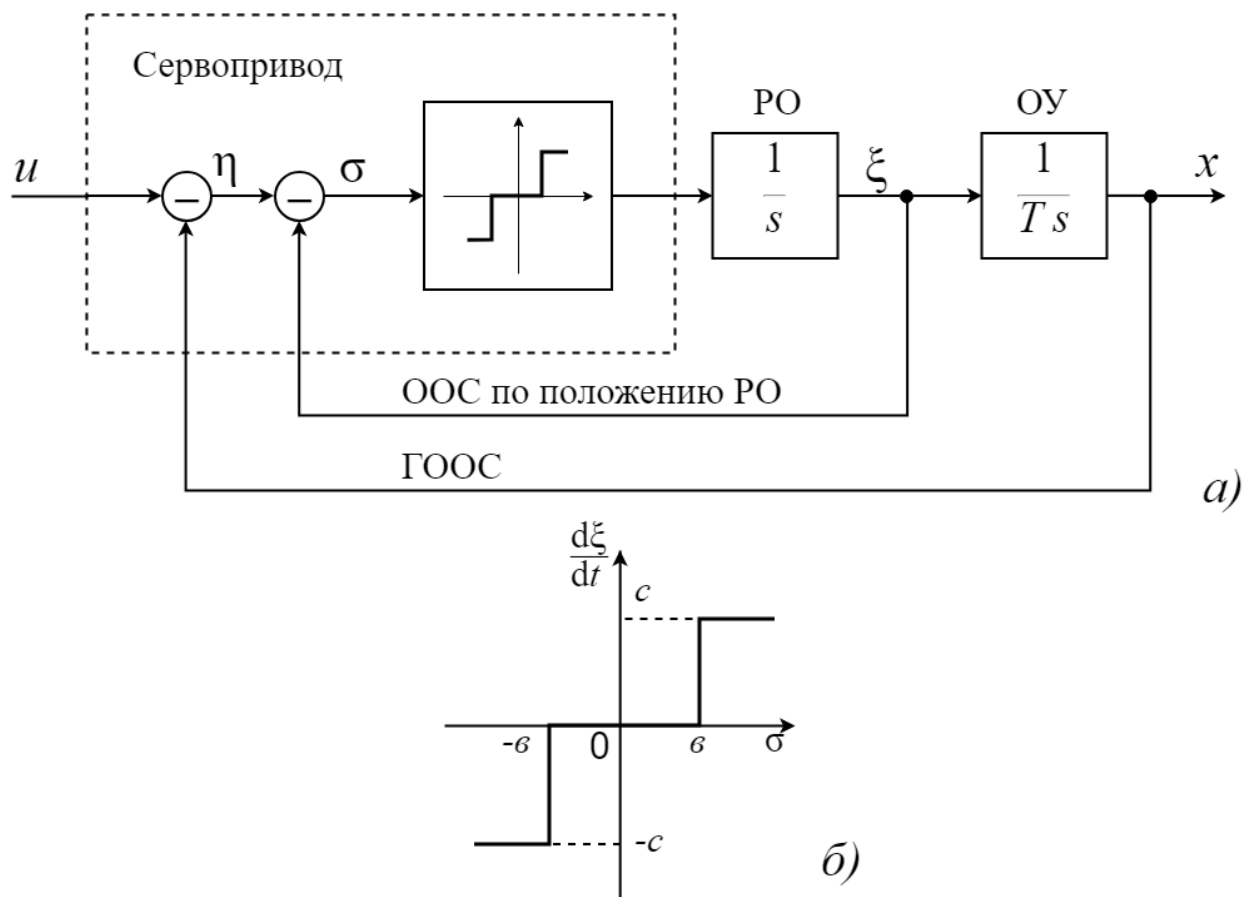


Рисунок 2.8 – Функционально-структурная схема нелинейной САР с трёхпозиционным реле с зоной нечувствительности (а) и нелинейная статическая характеристика её сервопривода (б)

Формула (2.23) - это уравнение отрезков прямых линий, параллельных оси абсцисс в полосе AB (рисунок 2.9). Направление фазовых траекторий в этой полосе – обычное (подраздел 2.1): слева направо в верхней полуплоскости и справа налево в нижней полуплоскости.

При $|\sigma| > b$ получим такие же, как в примере 2.1, параболы. Итак, САР опять оказывается устойчивой и имеет затухающий колебательный переходный процесс (рисунки 2.9 и 2.10). Но вместо особой точки O получили особый отрезок: $y = 0$; $-b < x < b$, то есть установившееся состояние в зависимости от внешних воздействий определяется неоднозначно, автоматическая система может находиться в равновесии в любом месте внутри зоны нечувствительности. Здесь так же, как и в примере 2.1 возможен скользящий режим, но уже по двум линиям переключений полосы AB .

На рисунке 2.10 показан переходный процесс в рассматриваемой САР, соответствующий её конкретной фазовой траектории на рисунке 2.9. При этом цифрами 1...8 отмечены соответствующие друг другу характерные точки на этих рисунках:

- а) 1 - начало переходного процесса;

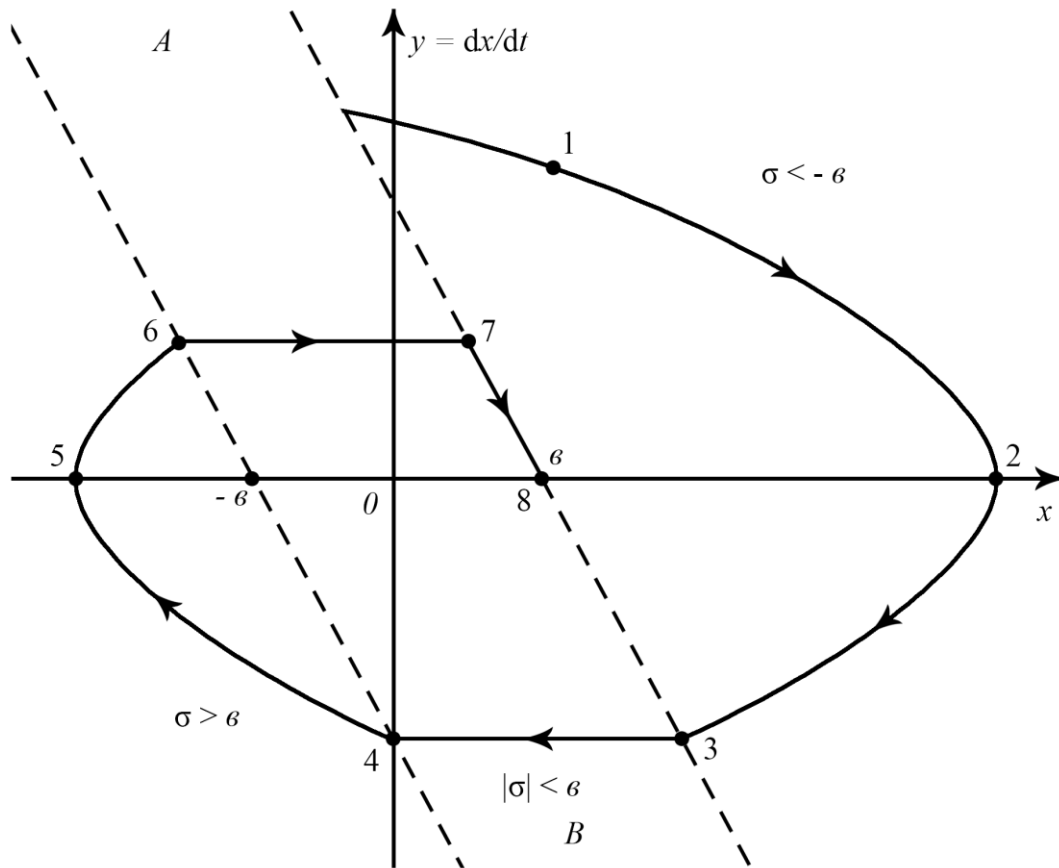


Рисунок 2.9 - Фазовая траектория нелинейной САР с зоной нечувствительности

- б) 2 - $x = x_{\max}$;
- в) 3 и 4 - концы ниспадающего прямолинейного отрезка зависимости $x(t)$ при постоянной отрицательной скорости $dx/dt = y_{3-4}$;
- г) 5 - $x = x_{\min}$;
- д) 6 и 7 - концы восходящего прямолинейного отрезка зависимости $x(t)$ при постоянной положительной скорости $dx/dt = y_{6-7}$, по модулю меньшей, чем на отрезке 3 - 4, то есть $|y_{3-4}| > |y_{6-7}|$;
- е) 7 и 8 - начало и окончание скользящего режима.

2.5 Контрольные вопросы и упражнения

1. Как строится фазовый портрет и из каких элементов он состоит?
2. Дают ли фазовые траектории непосредственное представление о длительности временных процессов?
3. Почему особые точки фазовых траекторий совпадают с началом координат фазового пространства?

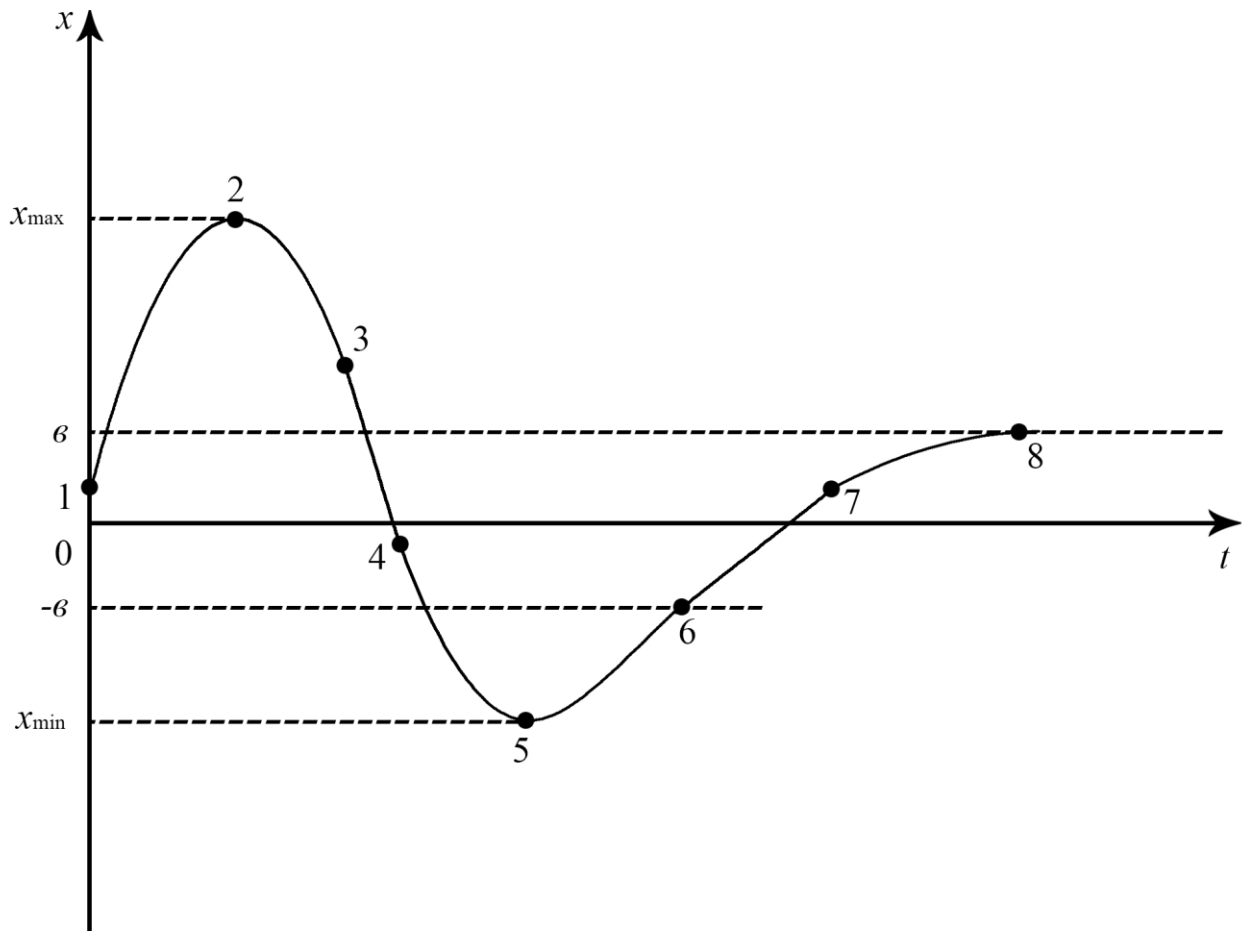


Рисунок 2.10 - Переходный процесс в нелинейной САР с зоной нечувствительности, соответствующий её фазовой траектории

4. Почему периодическим процессам соответствуют фазовые траектории в виде спиралей?
5. Что общего и в чём различие устойчивого предельного цикла и неустойчивого предельного цикла?
6. В каких случаях САР имеет несколько предельных циклов и каков характер этих предельных циклов?
7. Почему метод фазовой плоскости, дающий лишь качественную картину поведения САР, считается точным?
8. Почему фазовые портреты линейных САР имеют шесть типов особых точек?
9. Охарактеризуйте известные виды переходных процессов.
10. Может ли изображающая точка двигаться по фазовой траектории против часовой стрелки?
11. Охарактеризуйте скользящий режим в нелинейных САР.
12. Каким процессам в автоматической системе соответствует особый отрезок на фазовой плоскости?
13. Почему в курсе нелинейных САР рассматриваются фазовые портреты линейных САР?

3 Устойчивость по Ляпунову

3.1 Теоремы Ляпунова о линеаризованных САР

Ни одна реальная автоматическая система не является строго линейной. Линейные характеристики звеньев и линейные дифференциальные уравнения САР получаются путем линеаризации реальных характеристик и уравнений. При разложении в ряд Тейлора удерживаются линейные члены и отбрасываются члены высших порядков, которые для малых отклонений считаются пренебрежимо малыми. Обоснование законности такой линеаризации содержится в трех *теоремах А.М.Ляпунова* (1892 г.):

1) Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет все корни с отрицательными вещественными частями, то реальная система будет также устойчивой, т. е. малые нелинейные члены не могут в этом случае нарушить устойчивость.

2) Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то реальная система будет также неустойчивой, т. е. малые нелинейные члены не могут сделать ее устойчивой.

3) При наличии нулевых и чисто мнимых корней поведение реальной системы не всегда даже качественно определяется ее линеаризованными уравнениями. При этом даже малые нелинейные члены могут коренным образом изменить вид переходного процесса, сделав систему устойчивой или неустойчивой.

Опираясь в линейных расчетах на эти теоремы, надо иметь в виду, что они, во-первых, относятся к исследованию *устойчивости в малом*, т. е. в малой окрестности данного состояния равновесия, когда отбрасываемые в формуле Тейлора члены малы.

Во-вторых, все это относится только к описанному способу линеаризации уравнений – разложению нелинейных функций в степенные ряды, что геометрически соответствует замене кривой отрезком касательной, а не какому-либо другому способу линеаризации (например, по методу секущей).

3.2 Прямой метод Ляпунова исследования устойчивости нелинейных систем общего вида

К сильно выраженным нелинейностям на больших участках, в том числе и к нелинейностям релейного типа приведенные выше теоремы не применимы. Для исследования устойчивости нелинейных систем общего вида есть другие теоремы Ляпунова, так называемый *прямой метод Ляпунова* (1892 г.).

Важная заслуга А.М. Ляпунова заключается в том, что он указал подход к определению устойчивости, не связанный с анализом фазовых траекторий, и, следовательно, не требующий трудоёмкого нахождения решения дифференциальных уравнений. Этот подход основан на простой идее, известной из механики: в положении равновесия система имеет минимум потенциальной

энергии. Минимум потенциальной энергии всегда можно считать равным нулю. Тогда в окрестности положения равновесия потенциальная энергия будет положительной. Применение функций, которые положительны всюду, за исключением положения равновесия, к анализу устойчивости и лежит в основе прямого метода Ляпунова, который по старой терминологии именуется также «второй методой Ляпунова».

3.3 Знакоопределённые и знакопостоянные функции. Функция Ляпунова и её производная

Пусть имеется функция нескольких переменных $V = V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая равна нулю в начале координат ($V = 0$ при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$) и непрерывна в некоторой области вокруг него.

Функция V называется *знакоопределённой*, если она во всех точках этой области сохраняет один и тот же знак и нигде не обращается в ноль, кроме начала координат.

Функция V называется *знакопостоянной*, если она сохраняет один и тот же знак, но может обращаться в ноль не только в начале координат.

Функция V называется *знакопеременной*, если она в данной области вокруг начала координат может иметь разные знаки.

Пример 3.1. При $n = 2$ функция $V = x_1^2 + x_2^2$ является положительно определенной, т. к. $V = 0$ только при $x_1 = x_2 = 0$ (в начале координат).

Пример 3.2. При любом n функция $V = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ является также положительно определенной.

Пример 3.3. А функция $V = -(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$ при любом n является отрицательно определенной.

Пример 3.4. При $n = 3$ функция $V = x_1^2 + x_2^2$ является знакоположительной (знакопостоянной положительной), т. к. обращается в ноль не только в начале координат (при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$), но и при любом значении x_3 , если $x_1 = x_2 = 0$.

Пример 3.5. Аналогично, при $n = 3$ функция $V = -(x_1^2 + x_2^2)$ является знакоотрицательной (знакопостоянной отрицательной).

Пример 3.6. Функция $V = x_1 + x_2$, очевидно, является знакопеременной.

Любая функция нескольких переменных $V = V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, тождественно обращающаяся в ноль при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, называется *функцией Ляпунова*, если в ней в качестве величин x_1, x_2, \dots, x_n взяты отклонения переменных $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ нелинейной автоматической системы от их значений в установившемся процессе.

Производная от функции Ляпунова по времени имеет вид:

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2, \dots, x_n) &= dV/dt = \\ &= (\partial V/\partial x_1)(dx_1/dt) + (\partial V/\partial x_2)(dx_2/dt) + \dots + (\partial V/\partial x_n)(dx_n/dt). \end{aligned} \quad (3.1)$$

В установившемся состоянии САР все отклонения её переменных и их производные по времени равны нулю по самому определению этих понятий. Поэтому функция W , как и функция V , тождественно обращается в ноль в начале координат (при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$). Следовательно, к ней применимы понятия знакоопределённости, знакопостоянства и знакопеременности.

Здесь шла речь только об уравнениях, в которые не входит в явном виде время t . Вообще же метод Ляпунова применим и при наличии времени t в явном виде, в частности, для линейных и нелинейных уравнений с переменными коэффициентами.

3.4 Теоремы Ляпунова об устойчивости и неустойчивости нелинейных систем

Базируясь на приведенных выше в подразделе 3.3 предварительных сведениях, дадим формулировки двух теорем Ляпунова об устойчивости и неустойчивости нелинейных систем. Эти теоремы пригодны для исследования устойчивости САР не только при малых, но и при больших отклонениях, если для них справедливы исходные уравнения данной САР.

Устойчивость САР при любых больших начальных отклонениях называется коротко – *устойчивость в целом*.

3.4.1 Теорема Ляпунова об устойчивости нелинейных систем.

Теорема формулируется следующим образом: если можно подобрать такую функцию Ляпунова V , чтобы её производная по времени W также была знакоопределённой (или знакопостоянной), но имела противоположный знак, то система устойчива. При знакоопределённой функции W имеет место асимптотическая устойчивость.

В теореме речь идет о подборе функции Ляпунова $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Можно выбрать различные функции V , поскольку требуется только знакоопределённость её и её производной. Это может дать различные варианты условий устойчивости для одной и той же системы. Одни из них будут шире, другие – уже. Поэтому данная теорема дает достаточные условия, которые не всегда необходимы. В ряде задач можно удовлетвориться этими достаточными условиями. От выбора функции V будет зависеть бóльшая или меньшая близость полученных достаточных условий устойчивости к необходимым и достаточным, т. е. более или менее полный охват всей области устойчивости данной системы.

3.4.2 Теорема Ляпунова о неустойчивости нелинейных систем.

К сожалению, не существует единого способа формирования функций Ляпунова. Наибольшее распространение находят функции V в виде квадратичных форм, а также линейных интегралов. Поскольку предыдущая теорема не дает всей области устойчивости, то может возникнуть потребность в отдельном определении области неустойчивости.

Теорема, которая дает достаточные условия неустойчивости системы, формулируется следующим образом: *если производная функция W от какой-нибудь функции Ляпунова V окажется знакоопределённой, а сама функция V в области, примыкающей к началу координат, будет иметь одинаковый с производной W знак, то система неустойчива.*

Пример 3.7. Автоматическая система описывается уравнениями:

$$dx_1/dt = -2x_1, \quad dx_2/dt = -4x_1 - 2x_2. \quad (3.2)$$

Исследовать устойчивость этой системы с помощью функции Ляпунова:

$$V = x_1^2 + x_2^2. \quad (3.3)$$

Дифференцируя (3.3), находим, что в данном случае производная функции Ляпунова имеет вид:

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2) = dV/dt &= (\partial V/\partial x_1)(dx_1/dt) + (\partial V/\partial x_2)(dx_2/dt) = \\ &= 2x_1(dx_1/dt) + 2x_2(dx_2/dt). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Подставим в это соотношение заданные производные по времени dx_1/dt и dx_2/dt (3.2) координат системы. Тогда, последовательно выполняя очевидные преобразования, получим:

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2) &= 2x_1(-2x_1) + 2x_2(-4x_1 - 2x_2) = -4x_1^2 - 8x_1x_2 - 4x_2^2 = \\ &= -4(x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2) = -4(x_1 + x_2)^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Полученная функция (3.5) является знакопостоянной отрицательной, а заданная функция Ляпунова (3.3) является знакоопределённой положительной. Поэтому в соответствии с теоремой Ляпунова об устойчивости (пункт 3.4.1) рассмотренная САР является устойчивой.

3.5 Контрольные вопросы и упражнения

1. Охарактеризуйте понятия «устойчивость в малом» и «устойчивость в целом».
2. Охарактеризуйте линеаризацию статических характеристик нелинейных устройств по методу касательной.
3. Охарактеризуйте линеаризацию статических характеристик нелинейных устройств по методу секущей.
4. В чём заключается идея прямого метода Ляпунова?
5. Какая функция автоматической системы есть функция Ляпунова?
6. На каком основании выведено уравнение (3.1)?

7. Как соотносятся между собой функции Ляпунова V и W в теореме об устойчивости нелинейных систем?

8. Как соотносятся между собой функции Ляпунова V и W в теореме о неустойчивости нелинейных систем?

9. Прямой метод Ляпунова исследования устойчивости нелинейных систем является точным или приближённым?

10. Почему в прямом методе Ляпунова, кроме теоремы об устойчивости, есть ещё теорема о неустойчивости нелинейных систем?

11. Как и в каком виде подбираются функции Ляпунова?

12. Отличия теорем Ляпунова об устойчивости линеаризованных нелинейных систем и нелинейных систем общего вида.

4 Гармоническая линеаризация нелинейностей

4.1 Коэффициенты гармонической линеаризации

4.1.1 Пусть дана нелинейность, в общем случае динамическая, вида

$$y = F(x, sx) \quad (4.1)$$

и задан её входной синусоидально изменяющийся сигнал с амплитудой A и угловой частотой ω

$$x = A \sin \omega t, \quad \omega t = \psi. \quad (4.2)$$

Тогда
$$sx = A\omega \cos \psi. \quad (4.3)$$

Разложив (4.1) в ряд Фурье и используя выражения (4.2) и (4.3), получим:

$$y = 1/2\pi \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\omega \cos \psi) d\psi + [1/\pi] \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\omega \cos \psi) \sin \psi d\psi \sin \psi + \\ + [1/\pi] \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\omega \cos \psi) \cos \psi d\psi \cos \psi + \text{высшие гармоники}. \quad (4.4)$$

Положим
$$1/2\pi \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\omega \cos \psi) d\psi = 0, \quad (4.5)$$

что означает отсутствие постоянной составляющей в данном разложении. Из (4.2) и (4.3) следует:

$$\sin \psi = x/A, \quad \cos \psi = sx / A\omega. \quad (4.6)$$

Тогда с учетом (4.5) и (4.6) формулу (4.4) можно записать в виде:

$$y = q(A, \omega) x + [q'(A, \omega) / \omega] sx + \text{высшие гармоники}, \quad (4.7)$$

где q и q' – коэффициенты гармонической линеаризации, определяемые формулами:

$$q = 1/\pi \int F(A \sin \psi, A \omega \cos \psi) \sin \psi \, d\psi, \quad q' = 1/\pi \int F(A \sin \psi, A \omega \cos \psi) \cos \psi \, d\psi. \quad (4.8)$$

Таким образом, нелинейное выражение (4.1) заменяется выражением (4.7), которое с точностью до высших гармоник аналогично линейному. Эта операция перехода от исходного нелинейного выражения (4.1) к линеаризованному выражению (4.7) и называется *гармонической линеаризацией*. Коэффициенты $q(A, \omega)$ и $q'(A, \omega)$ постоянны при постоянных значениях A и ω в случае периодического процесса. В переходном колебательном процессе с изменением A и ω коэффициенты $q(A, \omega)$ и $q'(A, \omega)$ изменяются. Для разных амплитуд и частот периодических процессов коэффициенты выражения (4.7) будут различны по величине. Это является существенным отличием гармонической линеаризации от обычной линеаризации, приводящей к чисто линейным выражениям.

Применение к соотношению (4.7) линейных методов исследования позволяет анализировать основные свойства нелинейных систем, которые не могут быть обнаружены при обычной линеаризации.

4.1.2 При более простой статической нелинейности $y = F(x)$ возможны два варианта:

- кривая $F(x)$ имеет гистерезисную петлю;
- кривая $F(x)$ не имеет гистерезисной петли.

При гистерезисной петле, когда наблюдается зависимость от знака производной dx_1/dt , функция $y = F(x)$ после гармонической линеаризации заменяется выражением:

$$y = q(A) x + [q'(A) / \omega] s x + \text{высшие гармоники}. \quad (4.9)$$

Согласно выражению (4.9), гистерезисная петля вводит производную, дающую отставание по фазе, так как $q'(A) < 0$. Таким образом, нелинейное отставание по координате в виде гистерезисной петли превращается при гармонической линеаризации в эквивалентное линейное отставание по фазе.

Передаточную функцию

$$W_H(A, s) = q(A) + q'(A) s / \omega \quad (4.10)$$

называют *передаточной функцией нелинейного звена*. После подстановки в уравнение (4.10) $s = j\omega$ получается выражение:

$$W_H(A) = q(A) + jq'(A), \quad (4.11)$$

называемое *частотной передаточной функцией нелинейного звена*. В соотношении (4.11) коэффициенты $q(A)$ и $q'(A)$ представляют вещественную и мни-

мую части. Поэтому $q(A)$ называют *вещественным коэффициентом*, а $q'(A)$ – *мнимым коэффициентом гармонической линеаризации*.

4.1.3 Если кривая $F(x)$ не имеет гистерезисной петли, то нелинейная функция $y = F(x)$ после гармонической линеаризации заменяется на ещё более простое выражение:

$$y = q(A)x + \text{высшие гармоники}, \quad (4.12)$$

то есть нелинейность $y = F(x)$ с точностью до высших гармоник заменяется прямолинейной характеристикой, наклон которой q зависит от амплитуды колебаний A входной величины x .

4.2 Вычисление коэффициентов гармонической линеаризации при симметричных колебаниях

Нелинейное звено после гармонической линеаризации представляется линейным звеном с передаточной функцией (4.10). Вычисление коэффициен-

Таблица 4.1 - Коэффициенты гармонической линеаризации нелинейных звеньев с неоднозначной статической характеристикой при симметричных колебаниях

№	Наименование характеристики	Коэффициенты гармонической линеаризации
1	Реле с гистерезисом (двухпозиционное)	$q(A) = 4c \sqrt{(1 - b^2/A^2)} / (\pi A),$ $q'(A) = -4cb / (\pi A^2), \quad A > b$
2	Реле с зоной нечувствительности и гистерезисом (трехпозиционное, поляризованное)	$q(A) = 2c[\sqrt{(1 - b^2/A^2)} - \sqrt{(1 - a^2/A^2)}] / (\pi A),$ $q'(A) = -2c(b - a) / (\pi A^2), \quad b > a$
3	Люфт (зазор)	$q(A) = \kappa \{ \pi/2 + \arcsin(1 - 2a/A) + 2(1 - 2a/A) \sqrt{[a(1 - a/A) / A]} \} / \pi,$ $q'(A) = -4\kappa a(1 - a/A) / (\pi A), \quad A > a$
4	Кусочно линейная с гистерезисом и насыщением	$q(A) = \kappa \{ \arcsin(b_1/A) + \arcsin(b_2/A) + (b_1/A) \sqrt{[1 - (b_1/A)^2]} + (b_2/A) \sqrt{[1 - (b_2/A)^2]} \} / \pi,$ $q'(A) = \kappa(b_2^2 - b_1^2) / (\pi A^2), \quad A > b_1, \quad b_1 > b_2$

Таблица 4.2 - Коэффициенты гармонической линейаризации нелинейных звеньев с однозначной статической характеристикой при симметричных колебаниях

№	Наименование характеристики	Коэффициенты гармонической линейаризации
1	Кусочно-линейная с насыщением (ограничением)	$q(A) = 2c[\arcsin (b/A) + (b/A)\sqrt{(1- b^2/A^2)}] / \pi b, A > b$
2	Идеальное реле (момент сухого трения)	$q(A) = 4c / (\pi A)$
3	Реле с зоной нечувствительности (трехпозиционное, поляризованное)	$q(A) = 4c \sqrt{(1- a^2/A^2)} / (\pi A), A > a$
4	Кусочно-линейная с зоной нечувствительности	$q(A) = 2c\{\pi/2 - \arcsin (a/A) - (a/A)[\sqrt{(1- a^2/A^2)}]\} / \pi, A > a$
5	Кусочно-линейная с зоной нечувствительности и насыщением	$q(A) = 2c[\arcsin (b/A) - \arcsin (a/A) + (b/A)\sqrt{(1- b^2/A^2)} - (a/A)\sqrt{(1- a^2/A^2)}] / [\pi(b - a)], b > a, A > b$
6	Кусочно-линейная дискриминационная (пеленгационная)	$q(A) = 2(\kappa_1 + \kappa_2)[\arcsin (c_1/A) + (c_1/A)\sqrt{(1- c_1^2/A^2)}] / \pi - \kappa_2,$ $c_1 < A < c_2;$ $q(A) = 2\{(\kappa_1 + \kappa_2)[\arcsin (c_1/A) + (c_1/A)\sqrt{(1- c_1^2/A^2)}] / \pi - \kappa_2[\arcsin (c_2/A) + (c_2/A)\sqrt{(1- c_2^2/A^2)}]\} / \pi, c_2 < A$

тов $q(A)$ и $q'(A)$ основывается на построении графика выходного сигнала нелинейного звена, когда на его вход подается гармонический сигнал.

Если статическая характеристика нелинейного звена является однозначной и симметричной относительно начала координат, то функция $F(x)$ будет нечётной (разделы 1.4, 1.6). В этом случае мнимый коэффициент линейаризации $q'(A) = 0$. Если статическая характеристика нелинейного звена симметрична относительно начала координат, но не однозначна, то мнимый коэффициент гармонической линейаризации не равен нулю. Поэтому нужно вычислять оба коэффициента.

В таблицах 4.1 и 4.2 приведены справочные выражения для коэффициентов $q(A)$ и $q'(A)$ некоторых простейших нелинейных звеньев. Их можно непосредственно использовать при решении задач. При этом: a – нечувствительность, зазор; b – порог переключения; c – величина ограничения, насыщения; k – коэффициент усиления в линейном диапазоне.

4.3 Контрольные вопросы и упражнения

1. Существенные отличия гармонической линеаризации от обычной линеаризации.
2. Чем отличается передаточная функция нелинейного устройства от передаточной функции линейного устройства?
3. Чем отличается частотная передаточная функция нелинейного устройства от частотной передаточной функции линейного устройства?
4. Как вычисляются коэффициенты гармонической линеаризации?

5 Исследование устойчивости и автоколебаний методом гармонической линеаризации

Метод гармонической линеаризации применяется для *приближенного* определения периодических решений (автоколебаний) и устойчивости нелинейных систем любого порядка.

Рассматриваемый *метод гармонической линеаризации* – мощное средство исследования нелинейных САУ из-за простоты и большой универсальности его аппарата в применении к самым разнообразным нелинейностям. Имеются определенные ограничения его применимости, которые обычно хорошо соблюдаются в ТАУ. Практические расчеты и эксперимент показывают приемлемость этого метода для многих видов нелинейных САУ.

5.1 Алгебраические способы определения автоколебаний и устойчивости в нелинейных системах

Составим *гармонически линеаризованное характеристическое уравнение* замкнутой нелинейной системы, состоящей из нелинейного звена и линейной части. Уравнение (4.1) нелинейного звена $y = F(x, sx)$ в колебательном процессе после гармонической линеаризации (4.7) запишем в виде:

$$y = [q(A, \omega) + q'(A, \omega) s / \omega] x = W_H x. \quad (5.1)$$

Уравнение (5.1) записано без учета высших гармоник, упоминавшихся в разделе 4 и фигурировавших в формуле (4.7). Это сделано не только потому, что они малы в ряде Фурье (4.4). В нелинейном звене при подаче на вход гармонического (синусоидального) воздействия в общем случае на выходе обязательно появятся высшие гармоники. Однако в замкнутой нелинейной системе

высшие гармоники, имеющиеся в переменной y , гасятся (демпфируются) линейной частью, являющейся своего рода фильтром низкой частоты (ФНЧ) или сглаживающим фильтром. Поэтому переменная x становится близкой к синусоиде. В таком виде и будем искать приближенное периодическое решение для нелинейной САР. Свойство линейной части демпфировать высшие гармоники называется *свойством фильтра*.

Пусть известна передаточная функция линейной части в виде отношения полиномов $R(s)/Q(s)$. Она может быть любой сложности и любого порядка. Передаточная функция замкнутой нелинейной системы будет иметь вид:

$$W(s) = W_H R(s)/[Q(s) + W_H R(s)]. \quad (5.2)$$

Тогда на основании формул (5.1) и (5.2) искомое гармонически линеаризованное характеристическое уравнение замкнутой нелинейной САР можно написать в виде:

$$Q(s) + W_H R(s) = Q(s) + [q(A, \omega) + q'(A, \omega) s / \omega] R(s) = 0. \quad (5.3)$$

Когда в замкнутой САР возникают незатухающие колебания постоянной амплитуды $A = A_{\Pi}$ и постоянной частоты $\omega = \omega_{\Pi}$, коэффициенты уравнения (5.1), а значит, и коэффициенты характеристического уравнения (5.3) становятся постоянными. А из линейной части ТАУ и курса «Линейные САР» известно, что появление указанных колебаний в системе при постоянных коэффициентах соответствует паре чисто мнимых корней в характеристическом уравнении.

Таким образом, если в (5.3) подставить $s = j\omega_{\Pi}$, то можно обнаружить в замкнутой САР автоколебания. Если эта подстановка $s = j\omega_{\Pi}$ соответствует вещественным положительным значениям $A = A_{\Pi}$, то такие автоколебания возможны. Но поиск A_{Π} и ω_{Π} эквивалентен отысканию границы устойчивости линейной САР. Следовательно, автоколебания в нелинейной САР можно обнаружить, применив к уравнению (5.3) любой метод определения границы устойчивости линейной системы.

5.2 Основной способ определения периодических решений

Используем подстановку $s = j\omega$ в уравнение (5.3):

$$Q(j\omega) + [q(A, \omega) + j q'(A, \omega)] R(j\omega) = 0. \quad (5.4)$$

В выражении (5.4) выделим вещественную $X(\omega)$ и мнимую $Y(\omega)$ части:

$$X(\omega) + jY(\omega) = 0. \quad (5.5)$$

Для искомого периодического решения $A = A_{\Pi}$ и $\omega = \omega_{\Pi}$ из формулы (5.5) получаем два уравнения

$$X(A_{\Pi}, \omega_{\Pi}) = 0, \quad Y(A_{\Pi}, \omega_{\Pi}) = 0, \quad (5.6)$$

из которых и определяются неизвестные A_{Π} и ω_{Π} . Если (5.6) не имеет положительных вещественных решений A_{Π} и ω_{Π} , то автоколебания в САР невозможны.

С помощью уравнений (5.6) можно не только определять A_{Π} и ω_{Π} при заданных параметрах САР, но и построить графики зависимости A_{Π} и ω_{Π} от какого-нибудь параметра САР, например, коэффициента усиления K . Для этого в уравнениях (5.6) нужно параметр K считать переменным и записать эти уравнения в виде:

$$X(A_{\Pi}, \omega_{\Pi}, K) = 0, \quad Y(A_{\Pi}, \omega_{\Pi}, K) = 0. \quad (5.7)$$

Отсюда можно найти зависимости $A_{\Pi} = f_A(K)$, $\omega_{\Pi} = f_{\omega}(K)$ и построить их в виде графиков. На основании этих графиков можно, например, выбрать K таким, чтобы амплитуда A_{Π} была малой, или чтобы частота ω_{Π} не была опасной для данной САР или чтобы автоколебаний не было вовсе.

5.3 Устойчивость периодических решений

Не всякое периодическое решение уравнений собственного движения нелинейной системы будет соответствовать автоколебаниям, а только устойчивое. В конкретных задачах часто просто из физических соображений бывает видно, возникают автоколебания или нет. Однако в ряде случаев всё же приходится этот вопрос исследовать.

Данная задача исследования устойчивости сводится к анализу линейного уравнения с периодическими переменными коэффициентами. Ляпуновым А.М. разработаны соответствующие методы. Но они во многих случаях очень трудны. Поэтому рассмотрим приближенные способы исследования устойчивости периодического решения, а именно: использование кривой Михайлова и аналитический критерий.

5.4 Использование кривой Михайлова для исследования устойчивости периодического решения

5.4.1 В 1936 г. А.В. Михайлов сформулировал один из частотных критериев устойчивости. *Критерий Михайлова* позволяет судить об устойчивости САР на основании рассмотрения *кривой Михайлова*.

Если в характеристический полином (то есть в левую часть характеристического уравнения) подставить $s = j\omega$, то получим *характеристический вектор*:

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega), \quad (5.8)$$

где $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ – соответственно *вещественная функция* и *мнимая функция Михайлова*.

При изменении частоты ω от 0 до ∞ вектор $D(j\omega)$ будет описывать своим концом в комплексной плоскости кривую, называемую *годографом Михайлова*.

Одна из формулировок критерия Михайлова: *для устойчивости САР n -го порядка необходимо и достаточно, чтобы вектор $D(j\omega)$, описывающий кривую Михайлова, при изменении частоты ω от 0 до ∞ имел угол поворота $n\pi/2$.*

Кривая Михайлова для устойчивых САР всегда имеет плавную спиралевидную форму, причем конец её уходит в бесконечность в том квадранте комплексной плоскости, номер которого равен степени характеристического уравнения n автоматической системы.

Измененная формулировка критерия Михайлова: *для устойчивой САР кривая Михайлова проходит последовательно n квадрантов*. При колебательной границе устойчивости кривая Михайлова при частоте $\omega = \omega_{\Pi}$ проходит через начало координат комплексной плоскости.

5.4.2 Каждому конкретному значению амплитуды колебаний A будет соответствовать определённая кривая Михайлова. При $A = A_{\Pi}$ она проходит через начало координат.

Дадим малое приращение амплитуде ΔA . Тогда при $A = A_{\Pi} + \Delta A$ кривая Михайлова займет положение либо 1, либо 2. При этом кривая 1, охватывающая начало координат, соответствует затухающим колебаниям переходного процесса, а кривая 2, не охватывающая начало координат, - расходящимся колебаниям.

Если при $\Delta A > 0$ кривая займет положение 1, а при $\Delta A < 0$ - положение 2, то переходный процесс в САР будет таким, что колебания с амплитудой больше A_{Π} затухают, а колебания с амплитудой меньше A_{Π} - расходятся. Следовательно, переходный процесс с обеих сторон сходится к устойчивому периодическому процессу с амплитудой A_{Π} , то есть в САР есть автоколебания.

Если же при $\Delta A > 0$ получится кривая 2, а при $\Delta A < 0$ - кривая 1, то переходный процесс в обе стороны расходится, то есть периодическое решение - неустойчиво.

5.5 Аналитический критерий устойчивости периодического решения

Развивая предыдущий способ, видно, что нет необходимости строить сами кривые Михайлова. Всё можно сделать аналитически. Для того чтобы узнать, примет ли кривая Михайлова при $\Delta A > 0$ положение 1, достаточно лишь определить, куда будет перемещаться с увеличением A та точка кривой Михайлова ($\omega = \omega_{\Pi}$), которая при $A = A_{\Pi}$ находится в начале координат. Если она будет перемещаться в сторону положения 1, то периодическое решение устойчиво. Это геометрическое условие устойчивости можно записать в аналитическом виде:

$$(\partial X/\partial A)_{\Pi}(\partial Y/\partial \omega)_{\Pi} - (\partial X/\partial \omega)_{\Pi}(\partial Y/\partial A)_{\Pi} > 0, \quad (5.9)$$

где X и Y обозначают вещественную и мнимую части аналитического выражения (5.8) кривой Михайлова, а индекс «П» означает подстановку $A = A_{\text{П}}$ и $\omega = \omega_{\text{П}}$ в найденные частные производные.

Выполнение неравенства (5.9) достаточно для систем третьего и четвертого порядков, если все коэффициенты гармонически линеаризованного характеристического уравнения САР положительны. Для систем же более высокого порядка требуется дополнительно проверить общий ход кривой Михайлова.

5.6 Графический частотный метод исследования автоколебаний

Рассматриваемый далее метод предложен Л.С. Гольдфарбом в 1940 г. и называется его именем. Пусть одноконтурная нелинейная система содержит простую нелинейность $y = F(x)$ с передаточной функцией $W_{\text{Н}}(A)$ и линейную часть с частотной передаточной функцией $W_{\text{Л}}(j\omega)$. В данной системе могут возникнуть гармонические колебания, если её характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни или, что то же самое, если амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) разомкнутой системы проходит через точку $(-1, j0)$, т. е. выполняется равенство

$$W_{\text{Н}}(A) W_{\text{Л}}(j\omega) = -1. \quad (5.10)$$

Данное соотношение является уравнением относительно неизвестных параметров – частоты $\omega_{\text{П}}$ и амплитуды $A_{\text{П}}$ колебаний и определяет *основное условие возникновения периодических процессов* в САР. Автоколебания возможны, если это уравнение имеет действительные положительные корни. Используя формулу (4.11), условие (5.10) можно записать в виде:

$$W_{\text{Л}}(j\omega) = -1 / W_{\text{Н}}(A) = -1 / [q(A) + jq'(A)]. \quad (5.11)$$

В случае отсутствия гистерезисной петли из пункта 4.1.3 следует, что $q'(A) = 0$ и правая часть (5.11) будет вещественной. Левая часть (5.11) – это АФЧХ линейной части, а правая часть (5.11) – это обратная АФЧХ нелинейного звена (для первой гармоники), взятая с обратным знаком. Решение этого уравнения можно получить графически как точку пересечения двух указанных характеристик.

В точке пересечения из кривой $W_{\text{Л}}(j\omega)$ берём значение частоты $\omega_{\text{П}}$, а из кривой $-W_{\text{Н}}^{-1}(A)$ берём значение амплитуды $A_{\text{П}}$ искомого периодического решения. Вместо (5.10) можно пользоваться также выражением

$$W_{\text{Н}}(A) = -1 / W_{\text{Л}}(j\omega), \quad (5.12)$$

т. е. искать решение как точку пересечения АФЧХ нелинейного звена с обратной АФЧХ линейной части системы, взятой с обратным знаком.

Устойчивость найденного периодического решения оценивается так. Дадим малое приращение амплитуде: $A = A_{\Pi} + \Delta A$. Тогда на кривой $-W_{\text{H}}^{-1}(A)$ получим точку, например, точку A_1 при положительном ΔA и точку A_2 - при отрицательном ΔA . Для устойчивости периодического решения необходимо, чтобы АФЧХ $W_{\text{Л}}(j\omega)$ не охватывала точку A_1 , а охватывала точку A_2 .

Можно использовать и другую формулировку оценки устойчивости полученного периодического решения: для устойчивости периодического решения необходимо, чтобы АФЧХ $W_{\text{Л}}(j\omega)$ охватывала часть годографа $-W_{\text{H}}^{-1}(A)$ с уменьшающимися амплитудами.

Если годографы $W_{\text{Л}}(j\omega)$ и $-W_{\text{H}}^{-1}(A)$ не пересекаются, то состояние равновесия устойчиво, а автоколебания отсутствуют.

5.7 Контрольные вопросы и упражнения

1. Для систем какого порядка и с какими нелинейными и линейными частями применяется метод гармонической линеаризации?
2. Как получить гармонически линеаризованное характеристическое уравнение нелинейной САР?
3. Что такое автоколебания? Как их можно обнаружить в нелинейной САР, применяя методы определения границы устойчивости линейной автоматической системы?
4. В чём заключается основной способ определения периодических решений в автоматических системах?
5. Какое периодическое решение соответствует автоколебаниям?
6. Охарактеризуйте критерий устойчивости Михайлова и несколько его формулировок.
7. В каких случаях кривая Михайлова проходит через центр координат комплексной плоскости?
8. В чём заключается исследование устойчивости периодического решения с помощью кривой Михайлова?
9. Достоинства и достаточность аналитического критерия устойчивости периодического решения.
10. Основное условие возникновения периодических процессов в нелинейных САР.
11. Как по методу Гольдфарба определить параметры и устойчивость периодического решения?

6 Частотный метод В. М. Попова

6.1 Условия абсолютной устойчивости

Пусть в нелинейной САР имеется лишь одна однозначная нелинейность $F(x)$. Все остальные звенья системы – линейные. Нелинейность может иметь произвольное криволинейное очертание с зоной нечувствительности и с зоной

насыщения. Наклон характеристики и её криволинейность могут быть любыми, лишь бы соблюдалось условие:

$$dF(x) / dx \geq 0. \quad (6.1)$$

Если найдены условия устойчивости такой САР, то они называются *условиями абсолютной устойчивости*. Они гарантируют устойчивость САР при любой нелинейности при выполнении лишь неравенства (6.1). В действительности САР может быть устойчивой и в некоторой области за пределами этих условий устойчивости при конкретно заданной форме нелинейности.

Абсолютная устойчивость означает устойчивость не одной конкретной системы, а некоторого множества систем, определяемых заданным множеством нелинейных звеньев [3].

6.2 Теорема В.М. Попова и её графическая интерпретация

Частотный метод В.М. Попова предложен в 1961 г. для решения задачи об абсолютной устойчивости САР с одной однозначной нелинейностью приёмными, аналогичными частотным способом исследования устойчивости линейных САР. Пусть нелинейность $F(x)$ имеет любое очертание, не выходящее за пределы угла $\arctg K$:

$$0 < F(x) < Kx. \quad (6.2)$$

Пусть также характеристическое уравнение линейной части имеет все корни с отрицательными вещественными частями или, кроме них, имеется ещё не более двух нулевых корней.

Теорема В.М. Попова (без доказательства): для установления устойчивости нелинейной системы достаточно подобрать такое конечное действительное число h , при котором при всех $\omega \geq 0$

$$\operatorname{Re}[(1 + j\omega h) W(j\omega)] + 1/K > 0, \quad (6.3)$$

где $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$ – АФЧХ линейной части системы.

Другая формулировка теоремы, дающая удобную графическую интерпретацию, связана с введением *видоизменённой (модифицированной) частотной характеристики $W^*(j\omega)$* , у которой

$$W^*(j\omega) = U^*(\omega) + jV^*(\omega), \quad U^*(\omega) = U(\omega), \quad V^*(\omega) = \omega T_0 V(\omega), \quad (6.4)$$

где $T_0 = 1$ с – множитель, нормирующий размерности величин.

Преобразуем левую часть неравенства (6.3), используя выражение (6.4) и упрощённые обозначения

$$U(\omega) + jV(\omega) = U + jV, \quad U^*(\omega) + jV^*(\omega) = U^* + jV^*: \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}[(1 + j\omega h)(U + jV)] + 1/K = \\ & = \operatorname{Re}(U + jV + j\omega hU - \omega hV) + 1/K = U^* - hV^* + 1/K > 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Для суждения о полученном неравенстве (6.6), рассмотрим соотношение

$$U^* - hV^* + 1/K = 0. \quad (6.7)$$

Равенство (6.7) представляет собой уравнение прямой на комплексной плоскости $W^*(j\omega)$. Отсюда вытекает *графическая интерпретация теоремы В.М. Пóпова*: для установления устойчивости нелинейной системы достаточно подобрать такую прямую на плоскости $W^*(j\omega)$, проходящую через точку $(-1/K, j0)$, чтобы вся кривая $W^*(j\omega)$ лежала справа от этой прямой. Упомянутая прямая называется *прямой В.М. Пóпова*.

Описанный частотный критерий в его графической форме может быть применён при любой сложности линейной части системы и численно заданных коэффициентах уравнений. Более того, он может быть применён даже тогда, когда не заданы уравнения, а известна лишь экспериментальная снятая АФЧХ линейной части $W(j\omega)$ автоматической системы.

Чтобы установить устойчивость, надо АФЧХ $W(j\omega)$ перестроить в характеристику $W^*(j\omega)$. Очертание нелинейности может быть неизвестным. Необходимо лишь знать, в пределах какого угла (сектора) она расположена. С увеличением параметра K точка $(-1/K, j0)$ смещается вправо к центру координат комплексной плоскости, что уменьшает область устойчивости нелинейной автоматической системы.

Пример 6.1. Определить условия абсолютной устойчивости системы, передаточная функция линейной части которой имеет вид $W(s) = \kappa / (1 + sT)$.

Частотная характеристика линейной части системы определяется выражением:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = \kappa / (1 + \omega^2 T^2) - j\kappa\omega T / (1 + \omega^2 T^2). \quad (6.8)$$

Вещественная и мнимая части модифицированной АФЧХ $W^*(j\omega)$ равны:

$$U^*(\omega) = \kappa / (1 + \omega^2 T^2); \quad V^*(\omega) = -\kappa\omega^2 T / (1 + \omega^2 T^2) = -\omega^2 T U^*(\omega). \quad (6.9)$$

Для нахождения уравнения $V^*(U^*)$ модифицированной АФЧХ без использования частоты ω запишем ряд преобразований, следующих из (6.9):

$$U^*(1 + \omega^2 T^2) = \kappa; \quad U^* + \omega^2 T^2 U^* = \kappa; \quad \omega^2 T U^* = (\kappa - U^*)/T = -V^*. \quad (6.10)$$

Из последнего выражения (6.10) следует, что график $V^*(U^*)$ модифицированной АФЧХ имеет вид прямой линии, описываемой уравнением:

$$V^* = (U^* - \kappa)/T. \quad (6.11)$$

Из уравнений (6.9) также видно, что $V^*(\omega) \leq 0$, а $U^*(\omega) \geq 0$. Поэтому график $V^*(U^*)$ располагается в четвёртом квадранте комплексной полуплоскости в виде прямолинейного отрезка, исходящего при $\omega = 0$ из точки $(\kappa, 0)$ на вещественной оси и входящего при $\omega = \infty$ в точку $(0, -\kappa/T)$ на мнимой оси. Поэтому прямую Попова можно провести даже через начало координат, что соответствует $\kappa = \infty$.

Таким образом, положение равновесия абсолютно устойчиво при всех нелинейных элементах с однозначной СХ, лежащей в секторе $(0, \infty)$, то есть в первом и в третьем квадрантах СХ.

Пример 6.2. Определить условия абсолютной устойчивости системы, передаточная функция линейной части которой имеет вид:

$$W(s) = \kappa / [(1 + sT_1)(1 + sT_2)].$$

Частотная характеристика линейной части системы определяется выражением

$$\begin{aligned} W(j\omega) = & \kappa(1 - \omega^2 T_1 T_2) / [(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)] - \\ & - j\kappa\omega(T_1 + T_2) / [(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)]. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Вещественная и мнимая части модифицированной АФЧХ $W^*(j\omega)$ равны:

$$\begin{aligned} U^*(\omega) = & \kappa(1 - \omega^2 T_1 T_2) / [(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)]; \\ V^*(\omega) = & - \kappa\omega^2(T_1 + T_2) / [(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)]. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Из выражений (6.13) видно, что $V^*(\omega) \leq 0$, а $U^*(\omega)$ при $\omega = (T_1 T_2)^{-0.5}$ изменяет свой знак, то есть характеристика $V^*(U^*)$ целиком располагается в нижней комплексной полуплоскости и имеет вид деформированной влево полуокружности, исходящей при $\omega = 0$ из точки $(\kappa, 0)$ на вещественной оси и входящей при $\omega = \infty$ в центр координат. Поэтому прямую Попова можно провести практически через начало координат, что соответствует $\kappa = \infty$.

Таким образом, система устойчива при всех κ и для всех нелинейных звеньев, СХ которых располагаются в секторе $(0, \infty)$, то есть в первом и в третьем квадрантах СХ.

6.3 Контрольные вопросы и упражнения

1. Для решения какой задачи применяется частотный метод Попова?
2. В чём заключаются условия абсолютной устойчивости нелинейной автоматической системы?

3. Как получить модифицированную частотную характеристику?
4. Графическая интерпретация теоремы Пóпова.
5. Для систем какого порядка и с какими нелинейными и линейными частями применяется метод Пóпова?

7 Импульсные системы автоматического регулирования

7.1 Общие сведения

Как отмечалось в подразделе 1.3, по одному из двух известных признаков классификации по характеру внутренних динамических процессов [2] автоматические системы подразделяются на непрерывные, дискретные и релейные. По второму признаку классификации непрерывные и дискретные САР подразделяются на линейные и нелинейные. Релейные САР целиком относятся к нелинейным.

Дискретной называется система, в которой хотя бы в одном звене при непрерывном изменении входной величины выходная величина изменяется в виде отдельных импульсов, появляющихся через некоторые промежутки времени. Звено, преобразующее непрерывный входной сигнал в последовательность импульсов, называется *импульсным элементом (ИЭ)* или *импульсным модулятором*, а сам процесс преобразования - *импульсной модуляцией*.

К дискретным относятся импульсные системы, а также системы с цифровыми вычислительными устройствами.

Линейной импульсной САР называется такая система, которая, кроме звеньев, описываемых линейными дифференциальными уравнениями, содержит импульсный элемент.

Цифровой САР называется такая система, в состав управляющего устройства которой включена цифровая управляющая машина (ЦВМ) или специализированное цифровое вычислительное устройство (ЦВУ).

В современных импульсных автоматических системах используются *амплитудно-импульсная (АИМ), широтно-импульсная (ШИМ) и – редко - частотно-импульсная (ЧИМ) модуляции*.

При АИМ с изменением входной величины ИЭ изменяется амплитуда A выходных импульсов, а их длительность τ и период дискретности T остаются постоянными.

При ШИМ с изменением входной величины ИЭ изменяется длительность τ (ширина) выходных импульсов, а их амплитуда A и период дискретности T остаются постоянными.

При ЧИМ с изменением входной величины ИЭ изменяется частота следования выходных импульсов, а их длительность τ и амплитуда A остаются постоянными.

Первые ИЭ были электромеханическими. Сейчас же широко используются бесконтактные электронные и микроэлектронные ИЭ. Они применяются

для управления электродвигателями, приводами летательных аппаратов, для стабилизации напряжения в источниках электропитания и т. д.

В качестве примера сравним стабилизаторы напряжения непрерывного действия (последовательный компенсационный) и импульсный (ключевой). В стабилизаторе напряжения непрерывного действия выполненный на транзисторах регулирующий элемент работает в активном режиме, на нём падает до 50 % подаваемого напряжения. Коэффициент полезного действия (КПД) такого стабилизатора составляет около 40 %.

В импульсном стабилизаторе напряжения ключевой (импульсный) элемент то замкнут (и на нём падает не более 1 В в режиме насыщения), то разомкнут (и его электрический ток равен нулю). Поэтому КПД такого стабилизатора может составлять более 90 %, что значительно выше КПД стабилизатора непрерывного действия.

Ещё один пример того, когда импульсная САР может иметь лучшие характеристики по сравнению с непрерывной САР. При ШИМ-управлении скоростью вращения электродвигателя не только экономится энергия (как в первом примере), но и обеспечивается плавность хода на малых («ползучих») скоростях. Это объясняется тем, что при непрерывном управлении для обеспечения малой скорости на двигатель подаётся небольшое напряжение, сопоставимое с напряжением *трогания* двигателя. Поэтому вращение проходит рывками, что объясняется наличием в нелинейной САР скорости нелинейности *сухое трение*. А при ШИМ-управлении на двигатель подаётся максимальное напряжение, но кратковременно.

ШИМ-модулятор, в отличие от АИМ-модулятора, является нелинейным звеном. Поэтому САР с ШИМ является нелинейной дискретной системой. А САР с АИМ является линейной дискретной системой.

В общем случае обобщенная структурная схема импульсной САР может быть представлена в виде замкнутого контура, состоящего из ИЭ (импульсного элемента) и непрерывной части, в которую сведены все непрерывные звенья. Непрерывная часть может быть любой сложности, с обратными связями и т. п. ИЭ может представлять собой самостоятельное функциональное устройство или являться составной частью аналого-цифровых преобразователей (АЦП), входящих в систему управления с ЦВМ.

В качестве импульсной системы можно рассматривать и САР с ЦВМ, т. к. дискретный характер получения и обработки информации в ЦВМ приводит к квантованию по времени, что и позволяет применить здесь теорию импульсных систем.

Однако системы с ЦВМ оказываются более сложными, чем импульсные САР, вследствие квантования не только по времени, но и по уровню, что делает их нелинейными. Поэтому теория импульсных систем в случае использования ЦВМ применима только для приближённых исследований, когда задача может быть линеаризована.

В процессе преобразования непрерывного входного сигнала $u(t)$ в дискретный выходной $u^*(t)$ ИЭ выполняет две операции: квантование по време-

ни и импульсную модуляцию. Первая из них состоит в том, что сигнал $u^*(t)$ появляется в дискретные моменты времени $t = t_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). При АИМ и ШИМ эти моменты времени чаще всего равноотстоящие, т. е. $t_i = iT$, где T – период дискретности (дискретизации).

В результате импульсной модуляции изменяется какой-либо параметр импульса (амплитуда, длительность). Форма импульса может быть любой (прямоугольной, трапецеидальной и т. п.), но обычно используются импульсы прямоугольной формы.

В АЦП применяется АИМ первого рода (АИМ-I). Здесь за время длительности импульса τ АЦП вырабатывает выходной сигнал. Импульсы имеют прямоугольную форму. Амплитуда импульса постоянна, как в начальный момент времени iT .

При АИМ второго рода (АИМ-II) через ИЭ за время τ проходит весь сигнал $u(t)$. Поэтому импульсы имеют непрямоугольную форму. Ниже рассматриваются только системы с АИМ.

7.2 Разностные уравнения

Для исследования импульсных систем автоматического регулирования дифференциальные уравнения неприменимы из-за разрывного характера сигнала $u^*(t)$, а используются *разностные уравнения*.

Рассмотрим разомкнутую систему, состоящую из ИЭ и непрерывной части. В ней ИЭ условно заменён последовательным соединением ключа и некоторого формирующего устройства (ФУ) с передаточной функцией $W_\Phi(s)$. Ключ периодически с периодом T замыкается на очень короткий промежуток времени и выделяет из непрерывного сигнала $u(t)$ его мгновенные значения $u(iT)$. Формирующее устройство образует из этих значений импульсы прямоугольной формы по АИМ-I. Непрерывная часть имеет передаточную функцию $W_0(s)$ и непрерывный выходной сигнал $y(t)$.

Для получения разностного уравнения системы в качестве её входного сигнала будем рассматривать $u(iT)$, или в сокращённой записи $u(i)$. В качестве выходного сигнала будем рассматривать $y(iT)$, или в сокращённой записи $y(i)$. Последовательности типа $u(i)$ и $y(i)$ иногда называют *решетчатыми функциями*, хотя в строгом понимании они математическими функциями не являются.

Аналогом первой производной непрерывной функции для любой последовательности $f(i)$ служит конечная разность 1-го порядка или первая разность (обратная)

$$\Delta f(i) = f(i) - f(i - 1). \quad (7.1)$$

Она определяется для момента времени iT по прошлому значению последовательности f в момент времени $(i - 1)T$.

Аналогом второй производной непрерывной функции для последовательности $f(i)$ служит конечная разность 2-го порядка или вторая разность (обратная):

$$\Delta^2 f(i) = \Delta f(i) - \Delta f(i-1) = f(i) - f(i-1) - f(i-1) + f(i-2) = f(i) - 2f(i-1) + f(i-2). \quad (7.2)$$

Для вычисления k -й разности аналогично можно записать

$$\Delta^K f(i) = \Delta^{K-1} f(i) - \Delta^{K-1} f(i-1). \quad (7.3)$$

В качестве аналога дифференциального уравнения рассматриваемой системы может являться *уравнение в конечных разностях* (обратных)

$$b_0 \Delta^n y(i) + b_1 \Delta^{n-1} y(i) + \dots + b_n \Delta y(i) = c_0 \Delta^m u(i) + c_1 \Delta^{m-1} u(i) + \dots + c_m \Delta u(i), \quad (7.4)$$

где $u(i)$ и $y(i)$ – соответственно заданная и искомая последовательности (решетчатые функции).

При вычислениях же удобнее пользоваться *разностным уравнением*

$$a_0 y(i) + a_1 y(i-1) + \dots + a_n y(i-n) = d_0 u(i) + d_1 u(i-1) + \dots + d_m u(i-m). \quad (7.5)$$

В уравнениях (7.4) и (7.5) $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n, c_0, \dots, c_m, d_0, \dots, d_m$ являются коэффициентами.

Пример 7.1. Получить разностное уравнение устройства, имеющего следующую передаточную функцию:

$$W(s) = Y(s)/X(s) = \kappa / (1 + sT_1). \quad (7.6)$$

На основании (7.6) запишем дифференциальное уравнение заданного инерционного устройства:

$$T_1 dy/dt + y = \kappa x. \quad (7.7)$$

Проведём ряд последовательных преобразований. Используем обратную конечную разность 1-го порядка:

$$T_1[y(i) - y(i-1)] / T + y(i) = \kappa x(i). \quad (7.8)$$

Приведём к общему знаменателю и перегруппируем слагаемые:

$$T_1 y(i) - T_1 y(i-1) + T y(i) = \kappa T x(i);$$

$$(T_1 + T) y(i) = T_1 y(i-1) + \kappa T x(i);$$

$$y(i) = y(i-1) T_1 / (T_1 + T) + x(i) \kappa T / (T_1 + T). \quad (7.9)$$

Если обозначить константы

$$T_1 / (T_1 + T) = A, \quad \kappa T / (T_1 + T) = B, \quad (7.10)$$

то окончательно получим искомое разностное уравнение в таком виде, что его можно будет использовать для программирования контроллера:

$$y(i) = A y(i - 1) + B x(i). \quad (7.11)$$

Пример 7.2. Получить разностное уравнение устройства, имеющего следующую передаточную функцию:

$$W(s) = Y(s)/X(s) = (0,3s + 1) / (0,4s + 1). \quad (7.12)$$

На основании выражения (7.12) дифференциальное уравнение заданного интегро-дифференцирующего устройства представим следующим образом:

$$0,4 \, dy/dt + y = 0,3 \, dx/dt + x. \quad (7.13)$$

Далее проведём ряд последовательных преобразований, аналогичных примеру 7.1. Используем обратные конечные разности 1-го порядка:

$$0,4[y(i) - y(i - 1)] / T + y(i) = 0,3[x(i) - x(i - 1)] / T + x(i). \quad (7.14)$$

Приведём к общему знаменателю и перегруппируем слагаемые:

$$0,4y(i) - 0,4y(i - 1) + Ty(i) = 0,3x(i) - 0,3x(i - 1) + Tx(i);$$

$$(0,4 + T) y(i) = 0,4 y(i - 1) + (0,3 + T) x(i) - 0,3 x(i - 1);$$

$$y(i) = y(i - 1) 0,4 / (0,4 + T) + x(i) (0,3 + T) / (0,4 + T) - x(i - 1) 0,3 / (0,4 + T). \quad (7.15)$$

После обозначений констант

$$0,4 / (0,4 + T) = A; \quad (0,3 + T) / (0,4 + T) = B; \quad - 0,3 / (0,4 + T) = C$$

получим искомое разностное уравнение, удобное для программирования контроллера:

$$y(i) = A y(i - 1) + B x(i) + C x(i - 1). \quad (7.16)$$

Разностные уравнения, как показывают и соотношения (7.11, 7.16), по существу, являются *рекуррентными* соотношениями, позволяющими последовательно, шаг за шагом (то есть *рекуррентно*) при $i = 0, 1, 2, \dots$ вычислять значения выходной величины $y(i)$ при заданных её начальных значениях и любых заданных аналитически, графически или таблично значениях входной ве-

личины $u(i)$. Такие вычисления, как будет показано в приведённом ниже примере 7.3, легко механизуются, а также не представляют никаких принципиальных трудностей и при ручном счёте (кроме затрат времени) даже тогда, когда коэффициенты $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n, c_0, \dots, c_m, d_0, \dots, d_m$ разностного уравнения с течением времени изменяются. Это отличает разностные уравнения от их непрерывных аналогов – дифференциальных уравнений.

7.3 Устойчивость автоматических импульсных систем

Общее решение неоднородного разностного уравнения (7.5), как и решение неоднородного дифференциального уравнения, представляется в виде суммы переходной и вынужденной составляющих. Если Z_j ($j = 1, 2, \dots, n$) – некрратные корни получаемого из (7.5) характеристического уравнения импульсной САР

$$a_0 Z^n + a_1 Z^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (7.17)$$

то условие затухания свободного движения системы, описываемой разностным уравнением (7.5), т. е. условие устойчивости выглядит так:

$$|Z_j| < 1. \quad (7.18)$$

Решение разностного уравнения даёт значение выходной величины $y(t)$ лишь в дискретные моменты времени $t_i = iT$. Во многих случаях этого вполне достаточно для суждения о поведении системы. Для получения информации об $y(t)$ в любой момент времени используется *смещённая последовательность* $y(iT + \varepsilon T)$ или в сокращённой записи $y(i, \varepsilon)$, где ε – параметр, которому можно придавать любые значения в пределах $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

Пример 7.3. Исследовать автоматическую импульсную систему, разностное уравнение которой имеет вид

$$y(i) - 0,27 y(i-1) + 0,135 y(i-2) = 0,865 u(i-1), \quad (7.19)$$

при начальных значениях выходной величины $y(-1) = y(-2) = 0$ и единичной входной последовательности $u(-1) = 0, u(0) = u(1) = u(2) = \dots = u(\infty) = 1$.

Из заданного выражения (7.19) следует, что в соответствии с (7.17) характеристическое уравнение импульсной САР имеет вид:

$$Z^2 - 0,27 Z + 0,135 = 0. \quad (7.20)$$

Корни этого характеристического уравнения вычисляются следующим образом:

$$Z_{1,2} = 0,135 \pm (0,135^2 - 0,135)^{0,5} = 0,135 \pm j0,342. \quad (7.21)$$

Полученные значения корней удовлетворяют условию (7.18), так как их модуль

$$(0,135^2 + 0,342^2)^{0,5} = (0,018 + 0,117)^{0,5} = 0,367 < 1. \quad (7.22)$$

Следовательно, исследуемая импульсная САР - устойчива.

Так как $u(i)$ - единичная последовательность, то уравнение (7.19) можно преобразовать в следующую формулу для расчёта переходной характеристики импульсной системы:

$$y(i) = 0,27 y(i - 1) - 0,135 y(i - 2) + 0,865 u(i - 1). \quad (7.23)$$

Из уравнения (7.23) последовательно, шаг за шагом, подставляя соответствующие начальные и предыдущие значения входной и выходной величин, найдём выходную величину $y(i)$ в моменты времени $t_i = iT$:

$$y(0) = 0,27 y(-1) - 0,135 y(-2) + 0,865 u(-1) = 0,27 \cdot 0 - 0,135 \cdot 0 + 0,865 \cdot 0 = 0;$$

$$y(1) = 0,27 y(0) - 0,135 y(-1) + 0,865 u(0) = 0,27 \cdot 0 - 0,135 \cdot 0 + 0,865 \cdot 1 = 0,865;$$

$$y(2) = 0,27 y(1) - 0,135 y(0) + 0,865 u(1) = 0,27 \cdot 0,865 - 0,135 \cdot 0 + 0,865 \cdot 1 = 1,099;$$

$$y(3) = 0,27 y(2) - 0,135 y(1) + 0,865 u(2) = 0,27 \cdot 1,099 - 0,135 \cdot 0,865 + 0,865 = 1,045;$$

$$y(4) = 0,27 y(3) - 0,135 y(2) + 0,865 u(3) = 0,27 \cdot 1,045 - 0,135 \cdot 1,099 + 0,865 = 0,999;$$

$$y(5) = 0,27 y(4) - 0,135 y(3) + 0,865 u(4) = 0,27 \cdot 0,999 - 0,135 \cdot 1,045 + 0,865 = 0,993.$$

Продолжая вычисления, убеждаемся, что переходный процесс является колебательным затухающим, а выходная величина стремится к установившемуся значению, равному 1.

7.4 Контрольные вопросы и упражнения

1. Какие САР относятся к дискретным системам?
2. Какие виды модуляции используются в автоматике наиболее широко? Какие параметры импульсной модуляции являются информационными?
3. Объясните, почему КПД импульсных стабилизаторов напряжения значительно выше, чем в стабилизаторах напряжения непрерывного действия.
4. Какие функции и операции выполняет импульсный элемент?
5. Почему САР с ЦВМ являются нелинейными и более сложными, чем импульсные САР? Охарактеризуйте условие устойчивости импульсной САР.
6. С какой целью используются разностные уравнения и уравнения в конечных разностях?
7. Что является аналогом производной непрерывной функции?
8. Что является аналогом дифференциального уравнения?

Приложение А

Перемножители аналоговых сигналов

Из определения нелинейных САР следует, что они описываются нелинейными дифференциальными и алгебраическими уравнениями. Один из признаков нелинейности любого уравнения, в том числе и дифференциального – применение в нём нелинейных математических операций в виде перемножения и/или деления друг на друга переменных во времени величин. Перемножение и деление переменных во времени величин происходит в основном по двум причинам. Первая причина – наличие в САР либо нелинейного объекта управления, либо нелинейных средств автоматизации и других нелинейных узлов, сами механические, физические, химические и другие процессы в которых описываются с помощью рассматриваемых операций. Например, для технологических процессов намотки и размотки длинномерных (рулонных) материалов применяются уравнения:

$$M_C(t) = F(t) \cdot R(t); \quad M_{\text{ВР}}(t) = I(t) \cdot C_M \Phi(t); \quad (\text{A.1})$$

$$V(t) = \omega_C(t) \cdot R(t); \quad E(t) = C_E \Phi(t) \cdot \omega_C(t), \quad (\text{A.2})$$

где M_C – момент сопротивления на валу приводного двигательного устройства – электрического двигателя постоянного тока (ЭДПТ);

F – натяжение наматываемого или разматываемого материала;

R – радиус формируемой цилиндрической паковки или рулона;

V – окружная (линейная, тангенциальная, касательная) скорость на поверхности цилиндрической паковки или рулона;

ω_C – угловая скорость паковки или рулона;

$M_{\text{ВР}}$ – момент вращения ЭДПТ;

I – ток якоря ЭДПТ;

Φ – магнитный поток возбуждения ЭДПТ;

E – электродвижущая сила (ЭДС) ЭДПТ;

C_M, C_E – константы ЭДПТ;

t – время.

Вторая причина – наличие в САР вычислительных устройств, содержащих перемножители и делители сигналов для реализации сложных алгоритмов адаптивного управления [18 - 23]. Например, в упомянутых выше намоточных и размоточных установках во время технологического процесса изменяются в больших диапазонах габариты и моменты инерции (маховые массы) паковок и рулонов. Эти явления отражаются на функциональных и структурных схемах САР данных установок наличием большого количества блоков перемножения и деления.

Отмеченный автоматизированный электропривод намоточных и размоточных установок и машин применяется в прокатных и волочильных станах, в

Продолжение приложения А

производстве оптического волокна, в целлюлозно-бумажной, химической, текстильной, лёгкой и других отраслях промышленности.

В промышленной автоматике широкое распространение получили две типовые схемы перемножения аналоговых сигналов постоянного тока. Одна из них – с *квадратичными преобразователями (квадраторами)* – имеет невысокую точность (погрешность в пределах 0,25...1 %), но обладает широкой полосой пропускания (до 100 кГц) без существенных фазовых сдвигов. Другая схема, основанная на амплитудно-широтной импульсной модуляции (АШИМ), обладает узкой полосой пропускания (до нескольких кГц), но обеспечивает высокую точность (статическая погрешность не более 0,1 %, нелинейность 0,02 %).

Схема на квадраторах основана на алгебраическом соотношении

$$a \cdot b = [(a + b)/2]^2 - [(a - b)/2]^2. \quad (\text{A.3})$$

Схема *четырёхквadrантного перемножителя* позволяет перемножать два разнополярных сигнала.

Амплитудно-широтная импульсная модуляция широко используется при прямом умножении сигналов X и Y . Способ, основанный на одновременной модуляции амплитуды A и длительности (ширины) $t_{и}$ прямоугольного импульса, заключается в том, что в случае линейных зависимостей

$$X = K_X A, \quad Y = K_Y t_{и}, \quad Z = K_Z S, \quad (\text{A.4})$$

где K_X , K_Y и K_Z – масштабные коэффициенты,

используется параметрическая зависимость площади S импульса:

$$S = A t_{и}. \quad (\text{A.5})$$

Тогда

$$Z = K_Z X Y / (K_X K_Y). \quad (\text{A.6})$$

В схеме перемножителя X -вход используется для линейного управления амплитудой импульса, а Y -вход – для линейного управления коэффициентом γ заполнения последовательности выходных импульсов схемы. Среднее значение последовательности импульсов на Z -выходе схемы, зависящее от обоих входных сигналов, получается с помощью фильтра нижних частот (ФНЧ). Частота последовательности прямоугольных импульсов задается встроенным генератором *треугольного* напряжения.

На базе перемножителей сигналов строятся устройства деления, возведения в степень, извлечения квадратного корня и квадраторы сигналов.

Приложение Б
Математические модели однозначных несимметричных и чётно-симметричных статических характеристик нелинейных безынерционных элементов

Таблица Б.1- Несимметричные статические характеристики

№	Наименование характеристики	Математическая функция	Диапазон изменения аргумента
1	Кусочно-линейная диодная (однополупериодная выпрямительная)	$y = \kappa x$ $y = 0$	$0 \leq x$ $x \leq 0$
2	Кусочно-линейная диодная с зоной нечувствительности	$y = \kappa(x - a)$ $y = 0$	$a \leq x$ $x \leq a$
3	Кусочно-линейная диодная с насыщением (ограничением)	$y = c$ $y = (c/b)x$ $y = 0$	$b \leq x$ $0 \leq x \leq b$ $x \leq 0$
4	Кусочно-линейная диодная с зоной нечувствительности и насыщением (ограничением)	$y = c$ $y = c(x - a)/(b - a)$ $y = 0$	$b \leq x$ $a \leq x \leq b$ $x \leq a$
5	Компаратор однополярный	$y = 0$ $y = c$	$x \leq 0$ $0 < x$

Таблица Б.2 - Чётно-симметричные статические характеристики

№	Наименование характеристики	Математическая функция	Диапазон изменения аргумента
1	Кусочно-линейная двухполупериодная выпрямительная (V-образная)	$y = \kappa x $	-
2	Кусочно-линейная выделения модуля	$y = x $	-
3	Кусочно-линейная двухполупериодная выпрямительная с зоной нечувствительности	$y = \kappa(x - a)$ $y = 0$ $y = -\kappa(x + a)$	$a \leq x$ $-a \leq x \leq a$ $x \leq -a$
4	Кусочно-линейная двухполупериодная выпрямительная с насыщением (ограничением)	$y = \kappa x $ $y = c$	$-b \leq x \leq b$ $b \leq x, x \leq -b$
5	Кусочно-линейная двухполупериодная выпрямительная с зоной нечувствительности и насыщением (ограничением)	$y = c$ $y = -\kappa(x + a)$ $y = \kappa(x - a)$ $y = 0$	$b \leq x, x \leq -b$ $-b \leq x \leq -a$ $a \leq x \leq b$ $-a \leq x \leq a$
6	Кусочно-линейная W-образная	$y = \kappa x - c $	-
7	Кусочно-линейная WW-образная (зубчатая)	$y = \kappa x - c - c - c $	-

Приложение В

Сопоставление нелинейных и линейных систем автоматического управления и их моделей

Все реальные системы управления – нелинейные. Линейные модели систем управления являются идеализациями реальных систем. Когда линейная модель довольно точно описывает динамику процессов и нет смысла учитывать нелинейные особенности движения, тогда говорят о *линеаризуемой нелинейной модели* системы или просто о линейной системе. Однако существует обширный класс систем, динамика движения которых не может быть описана линейными моделями без существенного изменения качества движения системы. Такие системы и их математические модели называют *нелинейными*.

Основная проблема анализа нелинейных систем состоит в том, что не существует универсального метода решения нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих их движение. Для линейных моделей такой универсальный метод имеется. Для линейных систем управления справедлив принцип суперпозиции, который позволяет исследовать эти системы парциально, то есть по частям. Для нелинейных систем управления так делать невозможно.

В самом деле, для линейной системы сумма нескольких движений является движением этой системы и всякое движение, умноженной на константу, вновь является движением этой системы. Поэтому, зная поведение линейной системы в малой окрестности, например, начала координат, можно узнать её поведение всюду в пространстве состояний. Фазовый портрет линейной системы в этом смысле *однороден* во всём пространстве состояний.

Свойства же движений нелинейной системы управления являются локальными и не распространяются на всё пространство состояний. Её фазовый портрет оказывается *неоднородным*. Поэтому устойчивость нелинейной системы зависит не только от параметров системы, но и от начальных условий и возмущений, тогда как устойчивость линейной системы управления зависит только от её параметров.

Фазовый портрет линейной системы управления имеет одну особую точку, устойчивую или неустойчивую. А фазовый портрет нелинейной системы может иметь более чем одну особую точку: конечное, счётное или континуальное (непрерывное, сплошное) множество особых точек.

Если линейная система управления имеет периодическое движение, то для неё существует замкнутая траектория в пространстве состояний, и эта траектория не может быть изолированной, так как всякое движение, умноженное на константу, тоже является движением этой системы. А для нелинейных систем управления могут существовать *изолированные замкнутые траектории*, которым отвечают в общем случае негармонические колебания.

В нелинейной системе управления в отличие от линейной возможна скачкообразная реакция на плавное изменение внешних условий, допустимы нарушения непрерывности амплитуды и частоты колебаний, возможны *бифуркации* (разветвления) и другие особенности движений.

Приложение Г

Нелинейные алгоритмы автоматического управления технологическими объектами

Хотя все технологические объекты управления в большей или меньшей степени нелинейны, обычно придерживаются классической концепции Вышнеградского-Максвелла, в соответствии с которой расчёт систем управления проводится методами линейной теории путём перехода к приближённым линейным моделям. Это в значительной степени предопределило и выбор алгоритмов функционирования управляющих устройств – регуляторов, блоков компенсации и командных блоков – в классе линейных алгоритмов.

Главное достоинство линейных методов состоит в общности получаемых с их помощью результатов. Однако при разработке САУ встречаются существенно нелинейные задачи, решение которых в линейном приближении невозможно. Характер этих задач оказывается различным для различных уровней иерархической структуры управления [15].

Основная задача первого (нижнего) уровня управления, каким является уровень регулирования, состоит в устранении недетерминизма объекта управления, обусловленного действием неконтролируемых случайных возмущений и неполнотой априорной информации о модели объекта.

Синтез регулятора для решения подобной задачи может быть выполнен практически только тогда, когда поведение объекта можно рассмотреть в линейном приближении. Обеспечить такой режим работы подсистемы регулирования часто удаётся переносом функции компенсации сильных изменений возмущений и связанных с этим изменений коэффициентов модели объекта на более верхние второй и третий уровни системы управления. Это предъявляет дополнительные требования к режимам работы объекта управления. Но реальная ситуация обычно благоприятствует такому решению. Так, например, если речь идёт об управлении энергоблоками, сильные возмущения обусловлены или изменением нагрузки, или изменением структуры технологического объекта, т. е. доступными для контроля факторами. Подобным же образом можно контролировать изменения заданного значения регулируемых величин, и нет основания пытаться возложить на систему регулирования отработку глубоких и быстрых изменений задания – для выполнения этих функций целесообразно применять командные блоки управления. Наконец, изменение динамических свойств объекта, обусловленное изменением режимных факторов (например, изменением нагрузки), также доступно для контроля, и соответствующая коррекция может быть введена в настройку регуляторов соответствующим блоком, в памяти которого заложены заранее рассчитанные зависимости или алгоритмы, оперативно рассчитывающие оптимальные значения параметров настройки.

В этих условиях нелинейные задачи, возникающие при разработке подсистем регулирования, в значительной мере ограничиваются проверкой устойчивости их состояния равновесия не только при малых (что обычно гарантируется линейными критериями), но и при больших отклонениях, а также выяс-

нением влияния на устойчивость и качество работы таких нежелательных, как правило, нелинейных факторов, как сухого трения и зазоров в механических передачах, зон нечувствительности.

Нелинейные звенья могут вводиться в системы регулирования и преднамеренно. Например, в практике автоматизации распространение получили *нелинейные позиционные алгоритмы регулирования*.

Особенность *позиционных регуляторов* состоит в том, формируемое ими регулирующее воздействие или его скорость могут принимать лишь ограниченное число фиксированных значений. Хорошо известными примерами *двухпозиционных регуляторов* являются регуляторы температуры маломощных бытовых приборов. Однако такие регуляторы можно использовать и для регулирования мощных промышленных объектов, конструкция которых допускает работу в режиме периодических включений и отключений источника энергии, например, рефрижераторов в пищевой промышленности. Регулирующее воздействие двухпозиционных регуляторов принимает только два значения – максимальное и минимальное в зависимости от того, выше или ниже заданного значения находится регулируемая величина. Многие электронные регуляторы имеют более сложный *трёхпозиционный алгоритм* работы.

В системах регулирования с позиционными регуляторами могут возникать незатухающие колебания, называемые *автоколебаниями*. Поэтому в число задач, решаемых при разработке систем регулирования, нужно включить и задачу исследования возникновения автоколебаний и их параметров.

Во всех случаях использования нелинейных регуляторов должно быть приведено веское обоснование отказа от линейных регуляторов. При этом нужно учитывать то обстоятельство, что критерии, применяемые при оценке качества работы линейных САР, могут оказаться непоказательными или даже неприменимыми для систем с нелинейными регуляторами.

Так, принцип накопления возмущений, позволяющий определить наиболее тяжёлую реализацию возмущений, приводящий к наибольшему возможному отклонению регулируемой величины от желаемого значения (для слабоколебательной системы таким возмущением можно считать ступенчатое воздействие), справедлив только для линейных систем. Выбрав линейный алгоритм функционирования регулятора так, чтобы отклонение регулируемой величины при расчётном ступенчатом возмущении укладывалось в допустимые пределы, можно быть уверенным, что в процессе реальной эксплуатации, когда на объект будут действовать самые разнообразные возмущения, отклонение регулируемой величины не превзойдёт расчётного значения. По отношению же к нелинейным системам, в частности, к системам с нелинейными регуляторами подобное утверждение будет ошибочным. Потому что хорошая реакция такой системы на ступенчатое возмущение не гарантирует удовлетворительного поведения системы в реальных условиях работы. Не исключено, что возникаю-

щие в процессе нормальной эксплуатации возмущения, форма которых отлична от ступенчатой, приведут к бóльшим отклонениям регулируемой величины, чем отклонение, вызванное ступенчатым возмущением.

Кроме того, хорошая переходная составляющая реакции нелинейной системы на ступенчатое возмущение может сопровождаться автоколебаниями в установившемся режиме, что может быть недопустимым для объекта по технологическим причинам. Именно такая ситуация встречается в системах с двухпозиционным регулятором – этот регулятор быстро ликвидирует отклонение регулируемой величины, вызванное ступенчатым возмущением, за счёт быстрого перемещения регулирующего органа на максимально возможное расстояние. Если не обратить внимания на последующую генерацию автоколебаний, может создаться ошибочное представление о действительной эффективности двухпозиционного регулятора.

Для второго уровня иерархической структуры системы управления – подсистемы формирования командных воздействий – характерной нелинейной задачей является формирование этих воздействий с учётом ограничений на регулирующее воздействие и его производные. Решение задачи оптимального управления в такой постановке существенно упрощается в связи с возможностью считать входное задающее воздействие детерминированной заранее известной функцией времени – чаще всего ступенчатой, когда требуется быстро перевести объект управления с одного режима на другой. Например, возможно быстрее изменить нагрузку энергоблока. В этом случае нелинейную задачу оптимального управления называют *задачей максимального быстрогодействия* при наличии ограничений на управляющее воздействие.

Упрощению решения задач второго уровня способствует также практическое отсутствие случайных неконтролируемых возмущений. Эти возмущения подавляются подсистемой регулирования, а отсутствие замкнутых контуров устраняет проблему устойчивости.

Для последнего – третьего - уровня управления характерными являются нелинейные задачи оптимизации режима работы объекта по технико-экономическим критериям и оптимизации параметров нижних – первого и второго – уровней системы управления. Например, адаптация к изменяющимся свойствам объекта и среды функционирования.

Успешному решению задач оптимизации режима работы объекта способствует то обстоятельство, что устранение действия быстрых возмущений и выработка быстрых задающих воздействий, требующих учёта динамики объекта, принимают на себя два нижних уровня управления. Поэтому при осуществлении оптимизационных алгоритмов третьего уровня объект управления можно считать статическим.

Приложение Д

Релейные следящие системы, выполненные на операционных усилителях

На рисунке Д.1 приведена функционально-принципиальная схема установки, собранной на многофункциональном настольном лабораторном стенде и предназначенной для приобретения навыков исследования, наладки и настройки автоматической следящей системы с двухпозиционным релейным регулятором. На рисунке Д.1 обозначены:

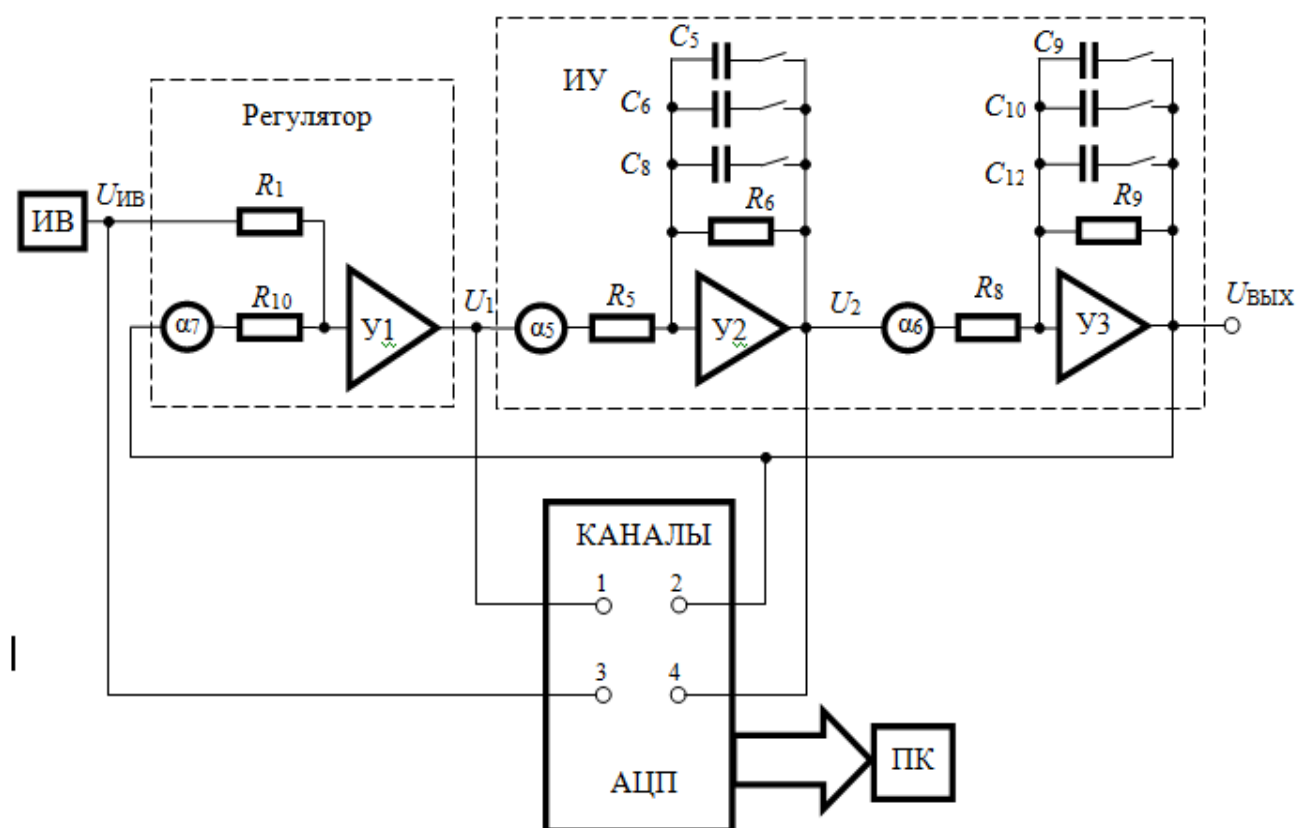


Рисунок Д.1 - Функционально-принципиальная схема следящей системы с двухпозиционным релейным регулятором

- ИВ - регулируемый стабилизированный двухполярный источник задающего воздействия в виде напряжения $U_{ИВ}$, измеряемого встроенным стрелочным вольтметром;
- АЦП - четырехканальный аналого-цифровой преобразователь для оцифровки аналоговых сигналов, снимаемых с выбранных точек стенда;
- ПК – персональный компьютер со специальным программным обеспечением, совместно с АЦП позволяющий измерять и регистрировать одновременно до четырёх сигналов с построением графиков их функциональных зависимостей;

Продолжение приложения Д

- U_1 , U_2 и U_3 – интегральные операционные усилители с инвертирующим входом, выполненные на микросхемах LM 358 М;
- α_5 , α_6 , α_7 – потенциометры (делители напряжения) и их коэффициенты передачи, изменяемые в пределах $0 \dots 1$;
- ИУ – исполнительное устройство второго порядка, выполненное на усилителях U_2 и U_3 ;
- $R_1 \dots R_{10}$ – резисторы с номинальными значениями электрического сопротивления $200 \text{ кОм} \dots 1 \text{ Мом}$;
- $C_5 \dots C_{12}$ – конденсаторы с номинальными значениями электрической ёмкости $0,22 \dots 4,7 \text{ мкФ}$.

Потенциометром α_5 изменяется влияние регулирующего воздействия U_1 на исполнительное устройство следящей системы. На потенциометр α_7 регулятора заводится отрицательная обратная связь (ООС) с выхода системы. Во всех режимах устойчивой работы следящей системы, в том числе при снятии её регулировочной характеристики $U_{\text{ВЫХ}}(U_{\text{ИВ}})$ и переходной характеристики $h(t)$ по задающему воздействию $U_{\text{ИВ}}$, на мониторе ПК автоматически строится график зависимости релейного регулятора $U_1(U_{\text{ВЫХ}})$. Этот регулятор, как видно из рисунка Д.1, не содержит реактивных элементов и является безынерци-

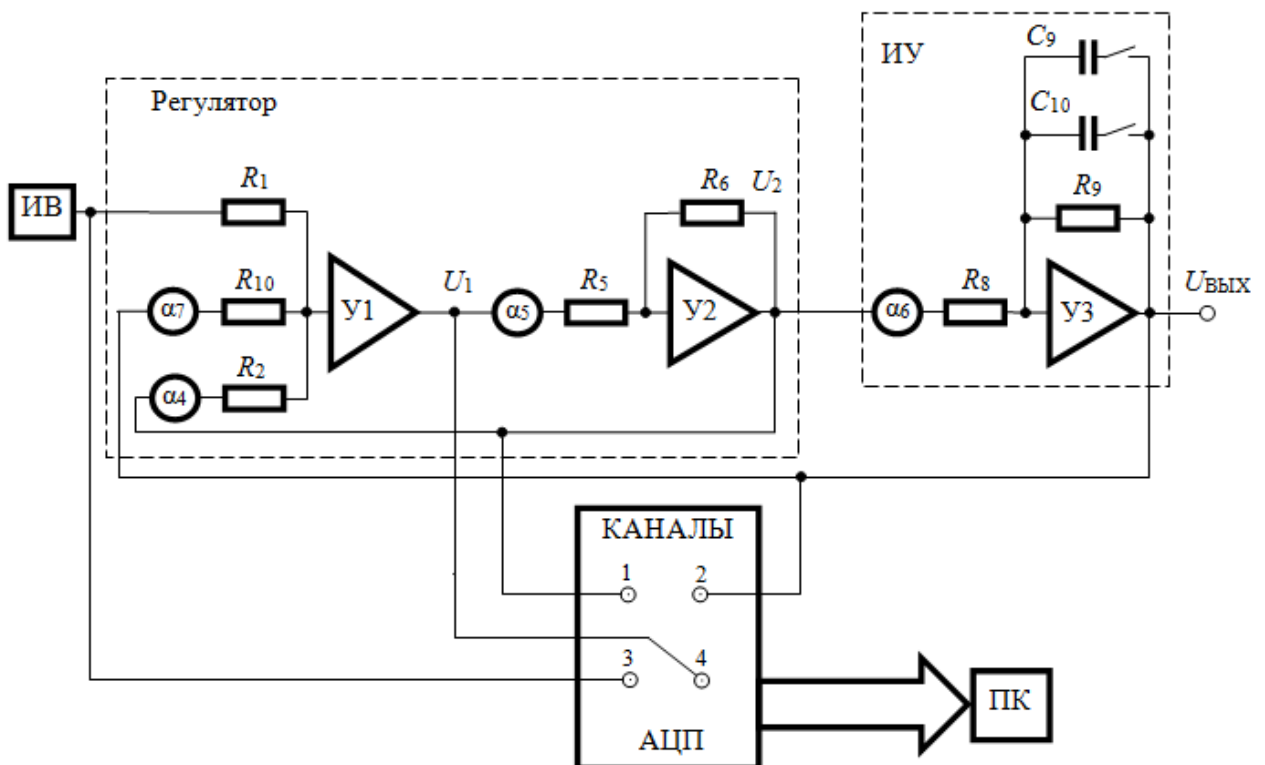


Рисунок Д.2 - Функционально-принципиальная схема следящей системы с двухпозиционным гистерезисным релейным регулятором

Продолжение приложения Д

онным звеном. Поэтому зависимость $U_1(U_{\text{ВЫХ}})$ является статической характеристикой (СХ) регулятора. При этом наблюдаемое на мониторе возвратно - поступательное движение рабочей (изображающей) точки по СХ регулятора, т. е. сканирование СХ регулятора, происходит непрерывно благодаря автоколебаниям в следящей системе.

На рисунке Д.2 приведена схема, аналогичная схеме на рисунке Д.1, но для следящей системы с двухпозиционным релейным регулятором с гистерезисом. В отличие от схемы на рисунке Д.1, регулятор выполнен на усилителях У1 и У2, а исполнительное устройство первого порядка (ИУ) выполнено на усилителе У3.

Регулятор обладает гистерезисом благодаря положительной обратной связи (ПОС) с выхода усилителя У2 на вход дополнительного потенциометра α_4 усилителя У1. Потенциометр α_5 служит для изменения величины регулирующего воздействия U_2 . Произведение коэффициентов $\alpha_4 \alpha_5$ определяет ширину петли гистерезиса регулятора. Как видно из схемы, гистерезисный регулятор тоже не содержит реактивных элементов и является поэтому также безынерционным звеном. На мониторе ПК автоматически строится график статической характеристики регулятора (СХ) $U_2(U_{\text{ВЫХ}})$. При этом наблюдаемое на мониторе ПК направленное против часовой стрелки движение рабочей (изображающей) точки по гистерезисной петле СХ регулятора, т. е. сканирование СХ регулятора, происходит непрерывно благодаря автоколебаниям в следящей системе.

Перечень сокращений

Общие обозначения

АИМ - амплитудно-импульсная модуляция
АИМ-I - амплитудно-импульсная модуляция первого рода
АИМ-II - амплитудно-импульсная модуляция второго рода
АЦП - аналого-цифровой преобразователь
АФЧХ - амплитудно-фазовая частотная характеристика
АШИМ - амплитудно-широтная импульсная модуляция
ГООС – главная отрицательная обратная связь
ИУ – исполнительное устройство
ИЭ – импульсный элемент
КПД – коэффициент полезного действия
ММ – математическая модель
ООС - отрицательная обратная связь
ОУ – объект управления
ПК – персональный компьютер
ПОС – положительная обратная связь
РО – регулирующий орган
САР - система автоматического регулирования
СХ – статическая характеристика
ТАР - теория автоматического регулирования
ТАУ – теория автоматического управления
У – операционный усилитель с инвертирующим входом
ФНЧ – фильтр низкой частоты
ФУ - формирующее устройство импульсного элемента
ЦВМ - цифровая вычислительная управляющая машина
ЦВУ – цифровое вычислительное устройство
ЧИМ - частотно-импульсная модуляция
ШИМ - широтно-импульсная модуляция
ЭДПТ – электрический двигатель постоянного тока
ЭДС – электродвижущая сила $E(t)$
 A_{Π} – постоянная амплитуда незатухающих колебаний
 $D(j\omega)$ – характеристический вектор
 f – возмущающее воздействие
 g, u – задающие воздействия
 $u^*(t)$ - дискретный выходной сигнал импульсного элемента
 q - вещественный коэффициент гармонической линеаризации
 q' - мнимый коэффициент гармонической линеаризации
 Re – символ действительной части комплексной функции
 Im - символ мнимой части комплексной функции
 s – оператор Лапласа, символ дифференцирования
 t - время
 t_i - дискретные моменты времени

T – период дискретности (дискретизации)
 τ - длительность импульсов
 $U(\omega)$ – вещественная частотная характеристика линейной части системы
 $U^*(\omega)$ - видоизменённая (модифицированная) $U(\omega)$
 $V(\omega)$ – мнимая частотная характеристика линейной части системы
 $V^*(\omega)$ - видоизменённая (модифицированная) $V(\omega)$
 V - функция Ляпунова
 W - производная от функции Ляпунова
 $W_L(j\omega)$ – частотная передаточная функция линейной части
 W_H - передаточная функция нелинейного звена
 $W^*(j\omega)$ – видоизменённая (модифицированная) АФЧХ
 $W_\Phi(s)$ - передаточная функция формирующего устройства импульсного элемента
 $X(\omega)$ – вещественная функция Михайлова
 $Y(\omega)$ – мнимая функция Михайлова
 Z_j - корни характеристического уравнения импульсной системы
 α – вещественная часть комплексного корня характеристического уравнения
 $j\beta$ – мнимая часть комплексного корня характеристического уравнения
 β – начальная фаза
 γ - коэффициент заполнения последовательности импульсов
 Δ – малое приращение
 ω - угловая частота
 ω_Π – постоянная угловая частота незатухающих колебаний
 $j\omega$ – оператор Фурье

Обозначения параметров элементов и систем регулирования

M_{BP} – момент вращения электродвигателя постоянного тока
 M_C – момент сопротивления на валу электродвигателя постоянного тока
 $\Phi(t)$ - магнитный поток возбуждения электродвигателя постоянного тока
 b – нечувствительность, зазор, порог переключения
 c – величина насыщения, ограничения
 C – скорость сервопривода
 C_M, C_E – константы электродвигателя постоянного тока
 $F(t)$ - натяжение наматываемого или разматываемого материала;
 $I(t)$ - ток якоря электродвигателя постоянного тока
 K_X, K_Y и K_Z – масштабные коэффициенты перемножителя сигналов
 R – радиус цилиндрической паковки или рулона
 S – площадь прямоугольного импульса
 t_M - длительность (ширина) прямоугольного импульса
 $V(t)$ – линейная скорость на поверхности цилиндрической паковки или рулона
 ξ - положение регулирующего органа
 σ - входной сигнал реле сервопривода
 η – рассогласование в следящей системе
 ω_C – угловая скорость паковки или рулона

Список литературы

Основная

- 1 Чернов Б.А. Линейные системы автоматического регулирования: Учебное пособие (для студентов высших учебных заведений специальности «Автоматизация и управление»). – Алматы: НАО АУЭС, 2015. – 80 с.
- 2 Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. – СПб.: Изд-во «Профессия», 2004. – 752 с. (Серия: Специалист).
- 3 Ким Д.П. Теория автоматического управления. В 2-х т. Т.2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 440 с.
- 4 Теория автоматического управления: Учеб. для вузов / Под ред. В.Б. Яковлева. – М.: Высшая школа, 2009. – 567 с.
- 5 Певзнер Л.Д. Теория систем управления: Учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2013. – 424 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
- 6 Малафеев С.И., Малафеева А.А. Теория автоматического управления: Учебник для студ. учреж. высш. образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 384 с. – (Сер. Бакалавриат).
- 7 Гайдук А.Р., Беляев В.Е., Пьявченко Т.А. Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB: Учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2011. – 464 с. (Учебники для вузов).
- 8 Певзнер Л.Д. Теория автоматического управления. Задачи и решения: Учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2016. – 604 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
- 9 Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления: Учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 624 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
- 10 Кудинов Ю.И., Пашенко Ф.Ф. Теория автоматического управления (с использованием MATLAB-SIMULINK): Учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2016. – 256 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
- 11 Шишмарев В.Ю. Основы автоматического управления: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 352 с.
- 12 Юревич Е.И. Теория автоматического управления. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 560 с.
- 13 Пупков К.А., Коньков В.Г. Теория нелинейных систем автоматического регулирования: Учебное пособие. – М.: РУДН, 2009. – 258 с.
- 14 Волобуева О.П. Основы теории управления. Учебник для вузов. – Алматы: КазНТУ, 2005. – 256 с.
- 15 Ротач В.Я. Теория автоматического управления: Учебник для вузов. – М.: Издательство МЭИ, 2008. – 400 с.
- 16 Гальперин М.В. Автоматическое управление: Учебник. – М.: ИД «ФОРУМ»: ИНФРА-М, 2007. – 224 с. (Профессиональное образование).

17 Арсеньев Г.Н., Замуруев С.Н. Радиоавтоматика: Учебник. – М.: ИД «ФОРУМ»: ИНФРА-М, 2016. - 592 с.

Дополнительная

18 А.с. 1802315 СССР, МКИ G 01N 3/32. Устройство для контроля продольной жёсткости основы в выпускной части шлихтовальной машины / Б.А. Чернов, О.З. Рутгайзер. - № 4920491/12; Заяв. 19.03.91.; Оpubл. 15.03.93, Бюл. № 10. – 4с.; ил. 1.

19 А.с. 1702236 СССР, МКИ G 01 N 3/32. Способ контроля продольной жёсткости рулонных материалов и устройство для его осуществления / Б.А. Чернов, О.З. Рутгайзер. - № 4333929/28; Заяв. 26.11.87.; Оpubл. 30.12.91, Бюл. № 48. – 3с.; ил. 2.

20 А.с. 1619118 СССР, МКИ G 01 N 3/32. Устройство для контроля продольной жёсткости образцов текстильного материала / Б.А. Чернов, О.З. Рутгайзер. - № 4333393/28; Заяв. 26.11.87.; Оpubл. 07.01.91, Бюл. № 1. – 4с.; ил.3.

21 А.с. 1359371 СССР, МКИ G 01 N 3/36, 3/32. Устройство для контроля жёсткости наматываемого материала / Б.А. Чернов, О.З. Рутгайзер. - № 3893333/31-12; Заяв. 06.05.85.; Оpubл. 23.01.88, Бюл. № 3. – 3с.; ил.1.

22 А.с. 1321654 СССР, МКИ В 65 Н 77/00, D 06 В 3/36. Устройство для регулирования плотности паковки в процессе наматывания длинномерного материала / Б.А. Чернов, О.З. Рутгайзер. - № 3845224/31-12; Заяв. 31.10.84.; Оpubл. 07.07.87, Бюл. № 25. – 3с.; ил.1.

23 А.с. 1245531 СССР, МКИ В 65 Н 77/00. Устройство для регулирования жёсткости материала / Б.А. Чернов, О.З. Рутгайзер. - № 3765386/28-12; Заяв. 04.07.84.; Оpubл. 23.07.86, Бюл. № 27. – 2с.; ил.1.

24 Теория автоматического управления: Учеб. пособие / Под ред. В.И. Лачина. – Ростов н /Д: Феникс, 2007. - 469 с. (Высшее образование).

25 Лукас В.А. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов. – М.: Недра, 1990. – 416 с.

Чернов Борис Алексеевич

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ
АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Учебное пособие для студентов специальности
5В070200 - Автоматизация и управление

Редактор

Л.Т. Сластихина

Подписано в печать _____ 2018
Тираж 100 экз. Формат 60x84 1/16

Бумага типографская № 2
Уч.-изд. л. 4,75. Заказ № _____
Цена 2375 тенге.

Некоммерческое АО «АУЭС»
г. Алматы, ул. Байтурсынова, 126

Копировально-множительное бюро
некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
г. Алматы, ул. Байтурсынова, 126