



**Некоммерческое
акционерное общество**

**АЛМАТИНСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ЭНЕРГЕТИКИ И
СВЯЗИ ИМЕНИ
ГУМАРБЕКА
ДАУКЕЕВА**

Кафедра телекоммуникаций и
инновационных технологий

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СВЯЗИ

Конспект лекций

для студентов всех форм обучения по образовательной программе
6В06201 – «Радиотехника, электроника и телекоммуникации»

Алматы 2021

Составитель: Т.А. Павлова. Теория электрической связи. Конспект лекций (для студентов всех форм обучения по образовательной программе 6В06201 – «Радиотехника, электроника и телекоммуникации»). – Алматы: АУЭС, 2021. – 79 с.

Данная разработка предназначена для студентов всех форм обучения по образовательной программе 6В06201 – «Радиотехника, электроника и телекоммуникации».

В конспекте лекций рассматриваются описания систем связи, основные характеристики электрических сигналов, каналов связи и используемой аппаратуры, а также теоретические основы теории связи. В полной мере охватываются все вопросы, которые должен знать студент после изучения технологий электрической связи.

Ил. 55, табл. 2, библиогр. – 8 назв.

Рецензент: к.т.н., профессор кафедры «ИСК» Сатимова Е.Г.

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи имени Гумарбека Даукеева» на 2021 г.

© НАО «Алматинский университет энергетики и связи имени Гумарбека Даукеева», 2021 г.

Введение

Настоящий конспект лекций предназначен для студентов всех форм обучения по образовательной программе 6В06201 – «Радиотехника, электроника и телекоммуникации», обучающихся по курсу «Теория электрической связи».

Излагаются основные закономерности и методы передачи сообщений по каналам связи. Рассматриваются способы математического представления сообщений, сигналов и помех, методы формирования и преобразования сигналов в системах (каналах) электрической связи, вопросы помехоустойчивости и пропускной способности систем электросвязи, методы экономного и помехоустойчивого кодирования, оптимального приема сообщений, принципы многоканальной передачи, основы цифровой обработки сигналов.

Лекция 1. Общие сведения о системах электросвязи

Содержание лекции:

- понятия: информация, сообщения, сигналы. Системы, каналы и сети связи. Основные характеристики системы связи. Структурная схема простейшей одноканальной системы связи. Основные характеристики канала связи.

Цель лекции:

- выработка критериев классификации, а также установление определенной терминологии.

Под *информацией* понимают совокупность сведений, данных о каких-либо событиях, явлениях или предметах. В отличие от материального и энергетического ресурсов информационный ресурс не уменьшается при потреблении, накапливается со временем, сравнительно легко и просто с помощью технических средств обрабатывается, хранится и передаётся на значительные расстояния.

Сообщение – форма представления в виде различных знаков (символов) или звуков для *передачи* или *хранения* информации.

Передача сообщений (а следовательно, и информации) на расстояние осуществляется с помощью какого-либо материального носителя (бумаги, магнитной ленты и т.д.) или физического процесса (звуковых или электромагнитных волн, тока и т.д.). Физический процесс, отображающий (несущий) передаваемое сообщение, называется *первичным сигналом*. В большинстве случаев первичный сигнал является низкочастотным колебанием. При передаче речи такое преобразование выполняет микрофон, превращая акустические колебания в пропорционально изменяющееся электрическое напряжение, а при передаче изображения — телевизионная камера. Для передачи сигналов на дальние расстояния используют *модуляцию*, формирующуюся путём изменения тех или иных параметров физического носителя в соответствии с передаваемым сообщением.

Сигнал передаёт (развёртывает) сообщение во времени. Следовательно, он всегда является функцией времени, даже если сообщение (например, неподвижное изображение) таковым не является. Точно так же и сообщение, принимающее только некоторые определённые уровни, называют *дискретным по времени*, Если же сигнал (или сообщение) может принимать любые уровни в некотором интервале, то они называются *непрерывными* по времени, или *аналоговыми*. Сигнал с конечным числом дискретных уровней часто называют *цифровым*, поскольку уровни можно пронумеровать числами с конечным числом разрядов. Например, речь является сообщением непрерывным как по уровню, так и по времени, а датчик температуры, выдающий её значения через каждые 5 мин, служит источником сообщений, непрерывных по величине, но дискретных по времени. На рисунке 1.1 наглядно проиллюстрированы

различные виды сигналов: а) непрерывный сигнал; б) дискретный по времени сигнал; в) сигнал, квантованный по уровню; г) цифровой сигнал.

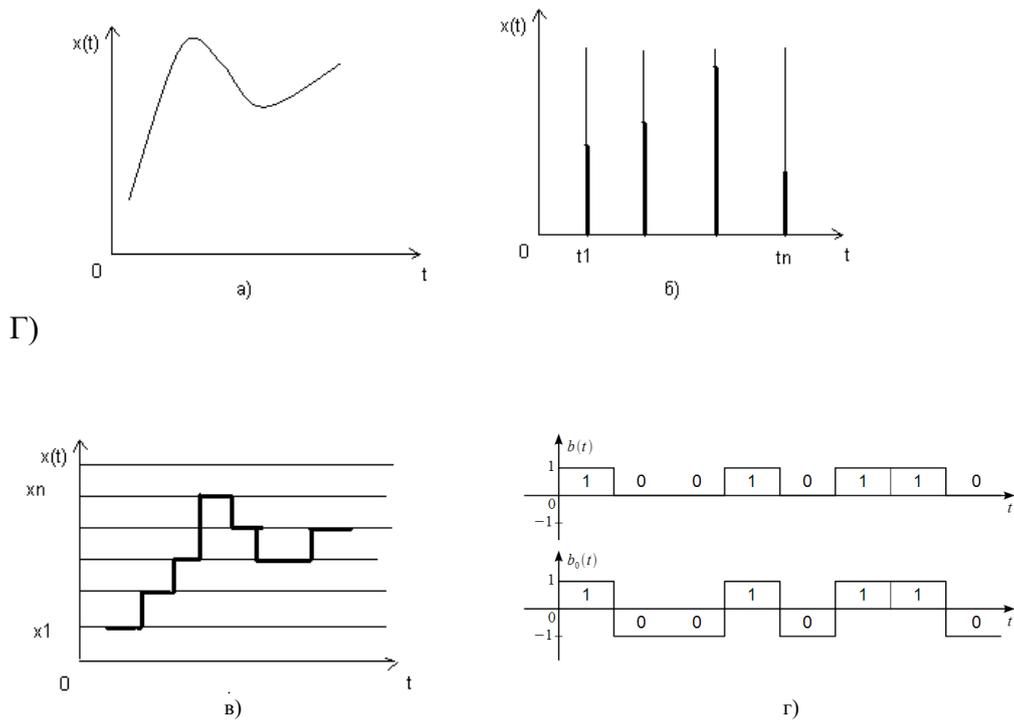


Рисунок 1.1 – Виды сигналов

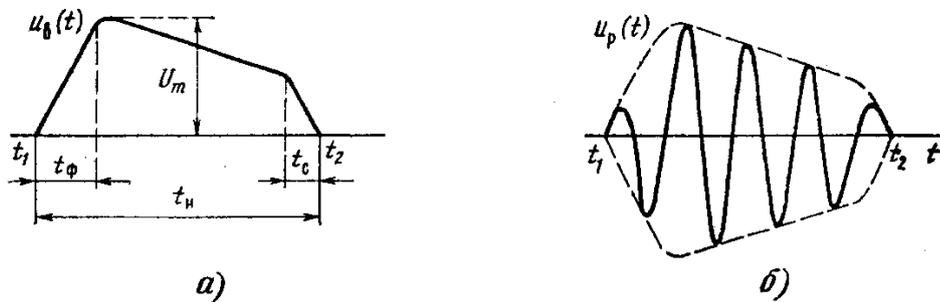


Рисунок 1.2 – Импульсные сигналы

Импульсными сигналами являются сигналы, отличные от нуля в течение ограниченного времени. Эти сигналы существуют лишь в пределах конечного отрезка (t_1, t_2). При этом различают видеоимпульсы (см. рисунок 1.2, а) и радиоимпульсы (см. рисунок 1.2, б). Если $U_B(t)$ – видеоимпульс, то соответствующий ему радиоимпульс $U_P(t) = U_B(t) \cos(\omega t + \varphi_0)$ (частота ω и начальная фаза φ_0 могут быть произвольными). В радиоимпульсе $u_B(t)$ называется *огibaющей*, а функция $\cos(\omega t + \varphi_0)$ – *заполнением*. Параметрами видеоимпульса принято считать его амплитуду U_m , длительность t_u , длительность фронта t_ϕ , длительность спада t_c . Происхождение термина «видеоимпульс» связано с тем, что впервые такие импульсы начали применять для описания сигналов в телевидении.

Если бы передаваемое сообщение было *детерминированным*, т.е. заранее известным с полной достоверностью, то передача его не имела бы смысла. Такое детерминированное сообщение не содержит информации. Поэтому сообщения следует рассматривать как *случайные события* (или *случайные величины, случайные функции*). Детерминированный сигнал не может быть носителем информации. Его можно использовать лишь для испытаний системы связи или отдельных её элементов.

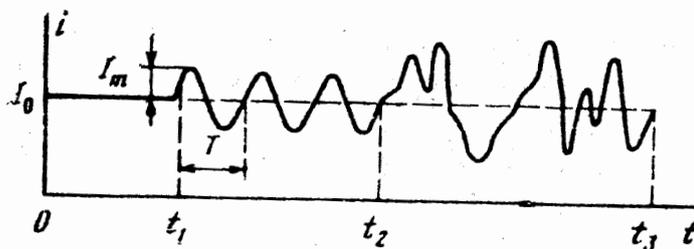


Рисунок 1.3 – Временная диаграмма тока через микрофон

Параметрами сигнала являются: *длительность T*, его *динамический диапазон D* и *ширина спектра F*. Всякий сигнал, рассматриваемый как временной процесс, имеет начало и конец. Поэтому длительность сигнала T является естественным его параметром, определяющим интервал времени, в пределах которого сигнал существует.

Динамический диапазон – это отношение наибольшей мгновенной мощности сигнала к той наименьшей мощности, которую необходимо отличать от нуля при заданном качестве передачи. Он выражается обычно в децибелах. Динамический диапазон речи диктора, например, равен 25...30 дБ, небольшого вокального ансамбля – 45...65 дБ, симфонического оркестра – 70...95 дБ. Во избежание перегрузок канала в радиовещании динамический диапазон часто сокращают до 35...45 дБ.

Ширина спектра сигнала F – интервал частот, в пределах которого сосредоточены основные спектральные составляющие сигнала. Ширина спектра различных сигналов неодинакова. Так, речевой сигнал, передаваемый по телефонным каналам, занимает спектр 300–3400 Гц, музыкальный – спектр 20–16000 Гц, а телевизионный – 50 Гц – 6,5 МГц.

Введем более общую и наглядную характеристику – *объем сигнала*:

$$V_c = T_c F_c D_c. \quad (1.1)$$

Объём сигнала V_c даёт общее представление о возможностях данного множества сигналов как переносчиков сообщений. Чем больше объём сигнала, тем больше информации можно "вложить" в этот объём и тем труднее передать такой сигнал по каналу связи с требуемым качеством.

На рисунке 1.4 изображена структурная схема простейшей *одноканальной системы связи*. Рассмотрим назначение отдельных элементов

этой схемы. *Источником* сообщений и *получателем* в одних системах связи может быть человек, в других – различного рода устройства (автомат, вычислительная машина и т.д.). Устройство, преобразующее сообщение в сигнал, называют *передающим*, а устройство, преобразующее принятый сигнал в сообщение – *приёмным*. С помощью первичного преобразователя в передающем устройстве сообщение a преобразуется в первичный электрический сигнал $b(t)$. В передатчике первичный сигнал $b(t)$ превращается во вторичный (высокочастотный модулированный) сигнал $u(t)$, пригодный для передачи по используемому каналу.

Линией связи называется *физическая среда* и совокупность аппаратных средств, используемых для передачи сигналов от передатчика к приёмнику. В системах электрической связи — это, прежде всего, кабель или волновод, в



Рисунок 1.4 – Структурная схема простейшей одноканальной системы связи

системах радиосвязи — область пространства, в котором распространяются электромагнитные волны от передатчика к приёмнику. При передаче каналный сигнал $u(t)$ может искажаться и на него могут накладываться помехи $n(t)$. Приёмное устройство обрабатывает принятое колебание $z(t) = s(t) + n(t)$, представляющее собой сумму пришедшего искажённого сигнала $s(t)$ и помехи $n(t)$, и восстанавливает по нему сообщение a , которое с некоторой погрешностью отображает переданное сообщение a . Совокупность технических средств для передачи сообщений от источника к потребителю называется *системой связи*. Этими средствами являются передающее устройство, линия связи и приёмное устройство. Внедрение высокоэффективных ЭВМ привело к необходимости быстрого развития *систем передачи данных*, обеспечивающих обмен информацией между вычислительными средствами и объектами автоматизированных систем управления.

Каналом связи называется совокупность средств, обеспечивающих передачу сигнала. Канал связи можно характеризовать так же, как и сигнал, тремя параметрами: временем T_k , в течение которого по каналу возможна передача, динамическим диапазоном D_k и полосой пропускания канала F_k . Под динамическим диапазоном канала понимают отношение допустимой мощности передаваемого сигнала к мощности неизбежно присутствующей в канале помехи, выраженное в децибелах.

Обобщённой характеристикой канала является его ёмкость (объём):

$$V_k = T_k F_k D_k. \quad (1.2)$$

Необходимым условием неискаженной передачи по каналу сигналов с объемом V_c , очевидно, должно быть $V_c < V_k$. При этом условии объём сигнала полностью "вписывается" в объём канала.

Лекция 2. Помехи и искажения. Преобразование сигналов в каналах связи

Содержание лекции:

- Аддитивные и мультипликативные помехи. Прохождение сигналов через случайные каналы связи. Искажения.

Цель лекции:

- Познакомиться с физическими явлениями, которые порождают флуктуации напряжения и тока в радиотехнических цепях.

По *характеру воздействия* на сигнал различают аддитивные и мультипликативные помехи. *Аддитивной* является помеха, мгновенные значения которой складываются с мгновенными значениями сигнала. Именно эти помехи чаще вызывают необратимые преобразования передаваемых сигналов. Аддитивные помехи по их электрической и статистической структуре разделяют на три основных класса: флуктуационные (распределённые по частоте и времени), сосредоточенные по частоте (квазигармонические) и сосредоточенные во времени (импульсные).

С физической точки зрения *аддитивные флуктуационные помехи* порождаются в системах связи различного рода флуктуациями, т.е. случайными отклонениями тех или иных физических величин (параметров) от их средних значений. Так, источником шума в электрических цепях могут быть флуктуации тока, обусловленные дискретной природой носителей заряда (электронов, ионов). Дискретная природа электрического тока проявляется в полупроводниковых приборах в виде *дробового эффекта* (при заданном режиме питания схем случайно меняется число создаваемых носителей заряда). Наиболее распространённой причиной шума в аппаратуре связи являются флуктуации, обусловленные *тепловым движением*. Одной из главных причин возникновения шума являются флуктуации объемной плотности электрического заряда в проводящих телах (резисторах) из-за хаотического теплового движения носителей заряда. Случайное тепловое движение носителей заряда в любом проводнике вызывает случайную разность потенциалов (напряжения) на его концах. Среднее значение такого напряжения равно нулю, а переменная составляющая проявляется как шум. Специфическим для полупроводниковых приборов является шум, называемый *фликер-шумом*,

который возникает в результате разного рода поверхностных явлений. Обычно на частотах выше 10 кГц фликер-шумами пренебрегают. Космические помехи в системах радиосвязи, вызванные радиоизлучением солнца и других космических объектов, – это флуктуационные шумы. Источником шума в радиотехническом устройстве может быть *приемная антенна*, на выходе которой возникает случайное напряжение под воздействием хаотических флуктуации электромагнитного поля, поскольку на выходе антенны, малой по сравнению с длиной волны, возникает напряжение $u = El$. У естественных помех земного происхождения подавляющая часть мощности этого шума сосредоточена на частотах ниже 30 МГц.

К *сосредоточенным по спектру аддитивным помехам* (явление *интерференции* электромагнитных волн) принято относить сигналы посторонних радиостанций, преднамеренные помехи, излучения генераторов высокой частоты различного назначения (промышленных, медицинских) и т.п. В общем случае – это модулированные колебания, т.е. квазигармонические колебания с изменяющимися параметрами. В одних случаях эти колебания являются непрерывными (например, сигналы вещательных и телевизионных радиостанций), в других – они носят импульсный характер (сигналы радиотелеграфных станций и систем передачи данных). Ширина спектра сосредоточенной помехи в большинстве случаев не превышает полосы пропускания приёмника, а в некоторых случаях она намного уже этой полосы. Сосредоточенные по спектру помехи являются основными, определяющими качество связи, и считаются случайными колебаниями с флуктуациями фаз и амплитуд (замираниями), распределение которых такое же, как у полезных сигналов.

К *импульсным (сосредоточенным во времени) аддитивным помехам* принято относить помехи в виде одиночных импульсов, следующих один за другим через такие большие промежутки времени, что переходные явления в приёмнике от одного импульса успевают практически затухнуть к моменту прихода следующего импульса. К таким помехам относят многие виды атмосферных и промышленных помех. Заметим, что "флуктуационная помеха" и "импульсная помеха" являются понятиями относительными. В зависимости от частоты следования импульсов одна и та же помеха может воздействовать как импульсная на приёмник с широкой полосой пропускания и как флуктуационная – на приёмник с относительной узкой полосой пропускания. На практике импульсные помехи приходится рассматривать как случайный, относительно широкополосный (тем шире, чем короче импульсы помехи) процесс. Это медленные (суточные, сезонные) флуктуации амплитуд радиосигналов, обусловленные поглощениями сигнала в среде распространения.

Мультипликативной называется помеха, мгновенные значения которой перемножаются с мгновенными значениями сигнала. Мешающее действие мультипликативных помех проявляется в виде изменения параметров полезного сигнала, в основном амплитуды. Мультипликативные помехи

непосредственно связаны с процессом прохождения сигнала в среде распространения и поэтому ощущаются только при наличии сигнала в системе связи. Например: телефонная или радиотрансляционная линия с плохими контактами, интерференционные замирания сигнала при приеме на дециметровых волнах.

Когда сигнал проходит по параллельным путям от входа канала к его выходу (рисунок 2.1), значения γ и τ для разных путей различны и к тому же в небольших пределах флуктуируют. Такого рода многопутевое распространение сигнала характерно для большинства радио-, гидроакустических и некоторых других каналов (в том числе, проводных).

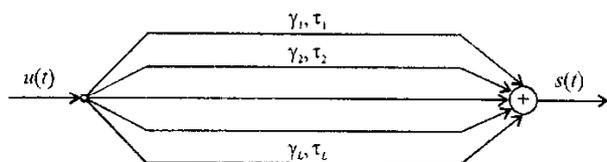


Рисунок 2.1- Многопутевое распространение

Энергия волны распространяется обычно в неоднородной среде и испытывает отражение от различных неоднородностей. Эти неоднородности могут быть распределены внутри относительно небольшого отражающего (рассеивающего) объёма. В этом случае разности хода

(разности значений τ) для отдельных путей невелики. Если по такому каналу направить очень короткий импульс, то и на его выходе импульс будет довольно коротким. Такой канал принято называть *однолучевым*. Наличие разных путей ("подлучей") не вызывает в этом случае существенного рассеяния (растяжения) сигнала во времени, но приводит к возникновению явления замираний, которое заключается в более или менее быстрых случайных изменениях передаточной функции канала.

Если по однолучевому каналу с замираниями передаётся относительно узкополосный сигнал, а среднеквадратическое отклонение запаздывания $\Delta\tau$ в отдельных подлучах удовлетворяет условию $\Delta\tau \ll 1/F_c$, где F_c – ширина спектра сигнала, то изменения начальных фаз на разных частотах ω в спектре сигнала, равные $\omega\Delta\tau$, почти одинаковы. При этом все составляющие спектра сигнала замирают "дружно", т.е. их амплитуды и фазы изменяются одинаково. Такие *замирания* называются общими, или *гладкими*. Если же условие (19.4) не выполнено, то в разных областях спектра сигнала процессы замираний не совпадают (*селективные по частоте замирания*). При этом наблюдаются существенные изменения формы сигнала, что характерно для многолучевых каналов радиосвязи (приходящие в точку приёма сигналы образованы отражением от сильно разнесённых в пространстве рассеивающих объёмов).

В реальных каналах электросвязи обычно имеет место не одна, а совокупность помех.

Борьба с помехами — основная задача теории и техники связи. Любые теоретические и технические решения о выполнении кодера и декодера, передатчика и приемника системы связи должны приниматься с учетом того, что в линии связи имеются помехи.

При всем многообразии методов борьбы с помехами их можно свести к трем направлениям:

1) Подавление помех в месте их возникновения. Это достаточно эффективное и широко применяемое мероприятие, но не всегда приемлемое. Ведь существуют источники помех, на которые воздействовать нельзя (грозовые разряды, шумы Солнца и др.).

2) Уменьшение помех на путях их проникновения в приемник. Следует отметить, что помехи обычно воздействуют на сигнал в среде распространения. Поэтому как проводные, так и радиолнии строятся так, чтобы обеспечить заданный уровень помех.

3) Ослабление влияния помех на принимаемое сообщение в приемнике, демодуляторе, декодере. Именно это направление борьбы с помехами является предметом изучения в теории электросвязи.

Основными показателями, характеризующими систему связи, являются качество и верность передаваемых сообщений. Критерий качества, пригодный для всех дискретных каналов, заключается в нормировании вероятности ошибки для данного вида сообщений. Так, вероятность ошибки при передаче данных – не более 10^{-6} (на единичный элемент). В реальных условиях прием двоичных символов всегда происходит с ошибками. Это означает, что вместо символа «1» принимается символ «0» и наоборот. Ошибки могут возникать из-за импульсных помех, действующих в канале связи; изменения за время передачи характеристик канала, а именно: из-за снижения уровня передачи, нестабильности амплитудно- и фазо-частотных характеристик канала; кратковременных перерывов; ремонтно-профилактических работ на линии во время сеанса связи. Часть указанных причин носит эксплуатационный характер и в принципе может быть устранена такими мерами, как повышение качественных показателей аппаратуры связи и особенно коммутационной техники. Улучшению качества канала связи, особенно на линиях большой протяженности, способствует включение таких устройств, как фазовые корректоры, регенеративные ретрансляторы и т.д. Несмотря на подобные меры, при работе по современному дискретному каналу вероятность ошибки (на единичный элемент) будет не меньше 10^{-3} – 10^{-4} , однако при передаче данных допускается, чтобы $P_{ош}$ не превышало 10^{-6} . Появление ошибок обычно носит случайный характер и, как правило, является следствием совокупности мешающих факторов, часть которых может быть вообще неизвестна. Поэтому целесообразно исследовать свойства потока ошибок математическим аппаратом теории случайных процессов. Имея такие модели, можно выбирать соответствующие меры повышения помехоустойчивости.

Методы повышения верности можно разбить на две группы. К первой группе относятся методы увеличения помехоустойчивости приема единичных элементов, связанные с выбором уровня сигнала, отношения [сигнал/помеха], ширины полосы канала, статистикой ошибок в канале связи и т. п. Ко второй группе относятся методы обнаружения и исправления ошибок, основанные на

искусственном введении избыточности в передаваемое сообщение. При отсутствии избыточности, когда любая комбинация двоичных символов представляет собой передаваемое сообщение, обнаружить ошибки в принятой кодовой комбинации невозможно. Чтобы обнаружить ошибку и даже определить место ошибочно принятого единичного элемента, необходимо увеличить объем сигнала, представляющего кодовую комбинацию. Увеличить избыточность передаваемого сигнала можно по-разному. Так как объем сигнала рассчитывается по (1.1), то его увеличение возможно за счет увеличения D_k (P_k), ΔF и T . Практические возможности увеличения избыточности за счет мощности и ширины спектра сигнала в системах передачи дискретной информации по стандартным каналам резко ограничены. Поэтому основное развитие получили методы повышения верности приёма, основанные на увеличении времени передачи. Эти методы реализуются системами без обратной связи и системами с обратной связью. В системах без обратной связи (однонаправленных системах) для повышения верности приема используются следующие основные способы:

- 1) помехоустойчивое кодирование, т.е. использование кодов, исправляющих ошибки;
- 2) многократная передача кодовых комбинаций;
- 3) одновременная передача кодовой комбинации по нескольким параллельно работающим каналам.

Повысить верность передачи без существенного снижения пропускной способности можно, вводя переменную избыточность в сообщение в зависимости от состояния канала. Такие системы являются адаптивными, т. е. приспособляющимися к условиям канала. Для их построения нужно уметь оценивать на приеме статистику ошибок в канале и передавать эти данные на передающую станцию. Таким образом, необходимо иметь дополнительный обратный канал от приемника к передающей станции, и поэтому вся система связи оказывается системой с обратной связью.

Под искажениями понимают такие изменения формы сигнала, которые обусловлены известными свойствами цепей и устройств, по которым проходит сигнал. Главная причина искажений сигнала – переходные процессы в линии связи, цепях передатчика и приемника. При этом различают искажения: *линейные*, возникающие в линейных цепях (например, в фильтрах); *нелинейные*, возникающие в нелинейных цепях (например, в модуляторах и усилителях). В общем случае искажения отрицательно сказываются на качестве воспроизведения сообщений и не должны превышать установленных значений (норм). При известных характеристиках канала связи форму сигнала на его выходе всегда можно рассчитать. А дальше изменение формы сигнала можно компенсировать корректирующими цепями. Другое дело помехи — они заранее неизвестны, поэтому не могут быть устранены полностью.

Лекция 3. Математические модели сообщений и сигналов. Спектральные представления периодических сигналов

Содержание лекции:

- Теория ортогональных сигналов. Ортогональные сигналы и обобщенные ряды Фурье. Примеры ортонормированных базисов. Периодические сигналы и ряды Фурье. Ряд Фурье. Спектральная диаграмма периодического сигнала. Комплексная форма ряда Фурье.

Цель лекции:

- возможность представлять сигналы посредством обобщенных рядов Фурье. Найти спектральное разложение периодического сигнала.

Два сигнала: u и v называются *ортогональными*, если их скалярное произведение, а значит, и взаимная энергия равны нулю:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)dt = 0. \quad (3.1)$$

Пусть H – гильбертово пространство сигналов с конечным значением энергии (линейное пространство со скалярным произведением, полное в том смысле, что оно содержит в себе все предельные точки любых сходящихся последовательностей векторов из этого пространства). Эти сигналы определены на отрезке времени $[t_1, t_2]$, конечном или бесконечном. Предположим, что на этом же отрезке задана бесконечная система функций $\{u_0, u_1, \dots, u_n, \dots\}$, ортогональных друг другу и обладающих единичными нормами:

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i=j \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad (3.2)$$

Говорят, что при этом в пространстве сигналов задан *ортонормированный базис*. Разложим произвольный сигнал $s(t) \in H$ в ряд:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i u_i(t). \quad (3.3)$$

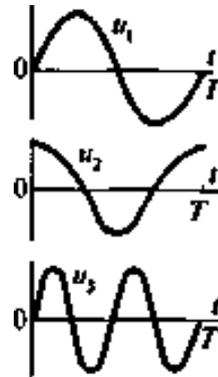
Представление (3.3) называется *обобщенным рядом Фурье* сигнала $s(t)$ в выбранном базисе. Коэффициенты данного ряда находят следующим образом:

$$c_k = \int_{t_1}^{t_2} s(t) u_k(t) dt = (s, u_k). \quad (3.5)$$

Теперь есть возможность характеризовать сигналы счетной (но, вообще говоря, бесконечной) системой коэффициентов обобщенного ряда Фурье c_k .

Ортонормированная система гармонических функций. На отрезке $[0, T]$ система тригонометрических функций с кратными частотами, дополненная постоянным сигналом образует ортонормированный базис.

$$\begin{aligned}
 u_0 &= 1/\sqrt{T}, \\
 u_1 &= \sqrt{2/T} \sin 2\pi t / T, \\
 u_2 &= \sqrt{2/T} \cos 2\pi t / T, \\
 &\dots\dots\dots \\
 u_{2m-1} &= \sqrt{2/T} \sin 2\pi m t / T, \\
 u_{2m} &= \sqrt{2/T} \cos 2\pi m t / T. \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$



Ортонормированная система функций Уолша. В последнее время под влиянием методов обработки дискретных сигналов большое внимание уделяют ортонормированной системе функций Уолша, которые на отрезке своего существования $[-T/2, T/2]$ принимают лишь значения ± 1 .

Введем безразмерное время $\vartheta = t/T$ и будем обозначать k -ю функцию Уолша, как это принято, символом $wal(k, \vartheta)$. Идею построения этой системы легко усмотреть из рисунка 3.1, на котором изображены графики нескольких первых функций Уолша. Очевидна нормированность функций Уолша при любом значении k : $\|wal(k, \vartheta)\|_2 = \int_{-1/2}^{1/2} wal^2(k, \vartheta) d\vartheta = 1$

Ортогональность этих функций следует из принципа их построения и может быть проверена непосредственно.

Разложение сигнала с конечной энергией, заданного на отрезке времени $[-T/2, T/2]$, в обобщенный ряд Фурье по функциям Уолша имеет вид:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k wal(k, t/T).
 \tag{3.7}$$

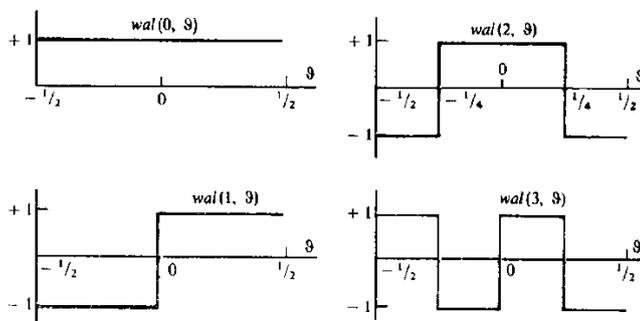


Рисунок 3.1 – Графики нескольких первых функций Уолша

Среди разнообразных систем ортогональных функций, которые могут использоваться в качестве базисов для представления радиотехнических сигналов, исключительное место занимают гармонические (синусоидальные и косинусоидальные) функции. Значение гармонических сигналов для радиотехники обусловлено рядом причин:

а) гармонические сигналы инвариантны относительно преобразований, осуществляемых стационарными линейными электрическими цепями;

б) техника генерирования гармонических сигналов относительно проста.

Если какой-либо сигнал представлен в виде суммы гармонических колебаний с различными частотами, то говорят, что осуществлено *спектральное разложение* этого сигнала. Отдельные гармонические компоненты сигнала образуют его спектр.

Математической моделью процесса, повторяющегося во времени, является периодический сигнал $s(t)$ со следующим свойством: $s(t) = s(t \pm nT)$, $n = 1, 2, \dots$ Здесь T – период сигнала.

В электросвязи наибольшее применение находят одиночные импульсы или их периодическая последовательность, форма которых приближается к прямоугольной. Для периодической последовательности импульсов, кроме перечисленных выше параметров, вводится понятие *скважности*, определяемой как отношение периода к длительности импульса: $S = T/t_u$.

Зададим на отрезке времени $[-T/2, T/2]$ ортонормированный базис (3.6). Любая функция u_m из этого базиса удовлетворяет условию периодичности. Поэтому, выполнив ортогональное разложение сигнала $s(t)$ в этом базисе, т. е. вычислив коэффициенты $C_m = (s, u_m)$, получим спектральное разложение, справедливое на всей бесконечности оси времени.

Введем *основную частоту* $\omega_1 = 2\pi/T$ последовательности, образующей периодический сигнал. Вычисляя коэффициенты разложения, запишем ряд Фурье для периодического сигнала:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t), \quad (3.8)$$

с коэффициентами:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos n\omega_1 t dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin n\omega_1 t dt. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Итак, в общем случае периодический сигнал содержит не зависящую от времени *постоянную составляющую* и бесконечный набор гармонических колебаний, так называемых *гармоник* с частотами $\omega_n = n\omega_1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$),

кратными основной частоте последовательности. Каждую гармонику можно описать ее амплитудой A_n и начальной фазой φ_n . Для этого коэффициенты ряда Фурье следует записать в виде $a_n=A_n\cos\varphi_n$, $b_n=A_n\sin\varphi_n$ так, что $A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, $\operatorname{tg}\varphi_n=b_n/a_n$.

Подставив эти выражения в (3.8), получим другую, эквивалентную форму ряда Фурье:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n). \quad (3.10)$$

Спектральная диаграмма периодического сигнала – графическое изображение коэффициентов ряда Фурье для конкретного сигнала. Различают: а) амплитудные и б) фазовые спектральные диаграммы (см. рисунок 3.2). Здесь по горизонтальной оси в некотором масштабе отложены частоты гармоник, а по вертикальной оси представлены их амплитуды и начальные фазы.

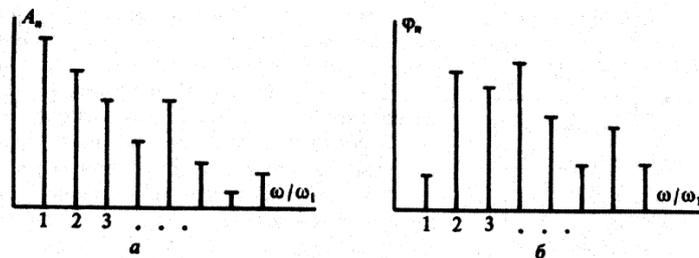


Рисунок 3.2 – Спектральные диаграммы некоторого периодического сигнала

Спектральное разложение периодического сигнала можно выполнить, используя систему базисных функций, состоящую из экспонент с мнимыми показателями:

$$\{u_k\} = \left\{ \frac{\exp(jk\omega_1 t)}{\sqrt{T}} \right\}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.11)$$

Легко видеть, что функции этой системы периодичны с периодом T и ортонормированы на отрезке времени $[-T/2, T/2]$, так как:

$$(u_m, u_n) = \int_{-T/2}^{T/2} u_m u_n^* dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m-n)x} dx = \begin{cases} 1 & \text{при } m = n \\ 0 & \text{при } m \neq n \end{cases}$$

Ряд Фурье в комплексной форме произвольного периодического сигнала в данном случае принимает вид:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}, \quad C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (3.12)$$

Лекция 4. Кодирование и модуляция

Содержание лекции:

- Преобразование дискретного сообщения в сигнал. Амплитудно-модулированные колебания. Колебания при угловой модуляции. Спектры при модуляции. Импульсно-кодовая модуляция. Выработка критериев кодирования и модуляции, а также вычисление отклика физической системы на известное входное воздействие. Цифровая модуляция.

Цель лекции:

- Выработка критериев кодирования и модуляции.

Общий принцип модуляции состоит в изменении одного или нескольких параметров *несущего* колебания (*переносчика*) $f(t, \alpha, \beta, \dots)$ в соответствии с передаваемым сообщением. Преобразование *дискретного* сообщения в сигнал обычно осуществляется в виде двух операций — *кодирования* и *модуляции*. Кодирование представляет собой преобразование сообщения в последовательность кодовых символов, а модуляция — преобразование этих символов в сигналы, пригодные для передачи по каналу. С помощью кодирования и модуляции источник сообщений согласуется с каналом.

При кодировании происходит процесс преобразования элементов сообщения в соответствующие им числа (*кодовые символы*). Каждому элементу сообщения присваивается определённая совокупность кодовых символов, которая называется *кодовой комбинацией*. Совокупность кодовых комбинаций, отображающих дискретные сообщения, образует *код*. Правило кодирования может быть выражено кодовой таблицей, в которой приводятся алфавит кодируемых сообщений и соответствующие им кодовые комбинации. Множество возможных кодовых символов называется *кодовым алфавитом*, а их количество m — *основанием кода*. В общем случае при основании кода m правила кодирования K элементов сообщения сводятся к правилам записи K различных чисел в m -ичной системе счисления. Число разрядов n , образующих кодовую комбинацию, называется *разрядностью кода*, или *длиной кодовой комбинации*. В зависимости от системы счисления, используемой при кодировании, различают *двоичные* и *m -ичные* (недвоичные) коды.

На рисунке 4.1 изображена структурная схема системы передачи дискретных сообщений, а на рисунке 4.2 поясняется процесс преобразования дискретного сообщения в сигнал. В современных системах передачи дискретных сообщений принято различать две группы относительно самостоятельных устройств: *кодеки* и *модемы*. *Кодеком* называются устройства, преобразующие сообщение в код (кодер) и код в сообщение (декодер), а *модемом* — устройства, преобразующие код в сигнал (модулятор) и сигнал в код (демодулятор). *Канальные устройства* (полосовые усилители передатчика и приёмника, корректоры и т.п.) вместе с линией связи образуют непрерывный канал, а последний вместе с модемом — дискретный канал.



Рисунок 4.1 – Структурная схема системы передачи дискретных сообщений

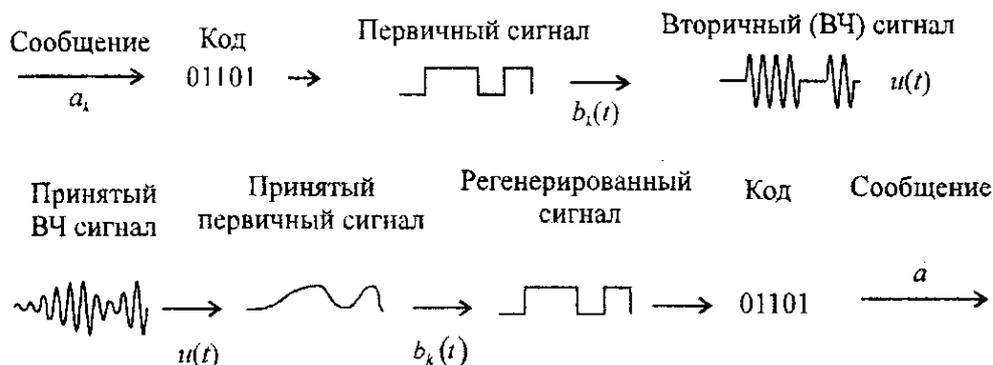


Рисунок 4.2 – Процесс преобразования дискретного сообщения в сигнал и сигнала в дискретное сообщение

Декодирование состоит в восстановлении сообщения по принимаемым кодовым символам. Устройства, осуществляющие кодирование и декодирование, называют соответственно *кодером* и *декодером*. Как правило, это логические устройства.

Поскольку каналы связи по виду передаваемого сигнала делятся на аналоговые, дискретные и цифровые, то модуляцию можно разделить на такие же типы.

Аналоговая модуляция.

Если в качестве переносчика выбрано гармоническое колебание $f(t) = U \cos(\omega_0 t + \varphi)$, то можно образовать три вида аналоговой модуляции: *амплитудную* (АМ), *частотную* (ЧМ) и *фазовую* (ФМ). *Амплитудная модуляция* состоит в пропорциональном первичному сигналу $x(t)$ изменении амплитуды переносчика $U_{AM} = U_0 + ax(t)$.

На рисунке 4.3 изображены графики колебаний $x(t)$, u и u_{AM} . Отношение амплитуды огибающей к амплитуде несущего (немодулированного) колебания называется *коэффициентом модуляции*:

$$m = U_{\Omega} / U_0. \quad (4.1)$$

В простейшем случае гармонического сигнала $x(t) = X \cos \Omega t$ имеем АМ колебание:

$$u = U_0(1 + m \cos \Omega t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.2)$$

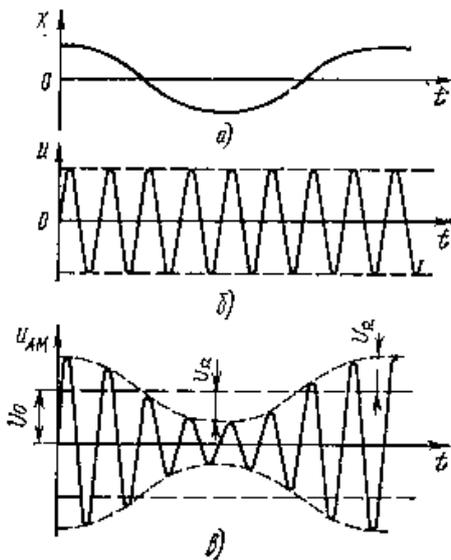


Рисунок 4.3

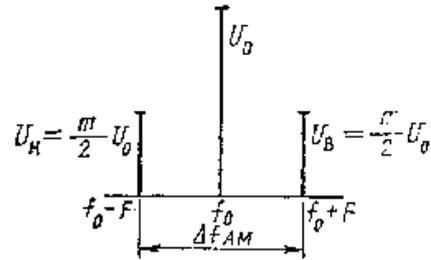


Рисунок 4.4

Обычно $m < 1$. Коэффициент модуляции, выраженный в процентах, т. е. $M = m \cdot 100\%$, называют *глубиной модуляции*. Коэффициент модуляции пропорционален амплитуде модулирующего сигнала.

Для определения спектра АМ колебания раскроем скобки в выражении (4.2):

$$u = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{m}{2} U_0 \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0] + \frac{m}{2} U_0 \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0]. \quad (4.3)$$

Согласно (4.3) АМ колебание является суммой трех высокочастотных гармонических колебаний близких частот (поскольку $\Omega \ll \omega_0$ или $F \ll f_0$):

- а) колебания *несущей частоты* f_0 с амплитудой U_0 ;
- б) колебания *верхней боковой частоты* $f_0 + F$ с амплитудой $U_a = \frac{m}{2} U_0$;
- в) колебания *нижней боковой частоты* $f_0 - F$ с такой же амплитудой $U_i = \frac{m}{2} U_0$.

Спектр АМ колебания (4.3) приведен на рисунке 4.4. Ширина спектра равна удвоенной частоте модуляции: $\Delta f_{AM} = 2F$. При $m=1$ амплитуды колебаний боковых частот достигают половины несущей ($0,5U_0$).

Фазовая модуляция заключается в пропорциональном первичному сигналу $x(t) = X \sin \Omega t$ изменении фазы φ переносчика $u = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Амплитуда колебания при фазовой модуляции не изменяется.

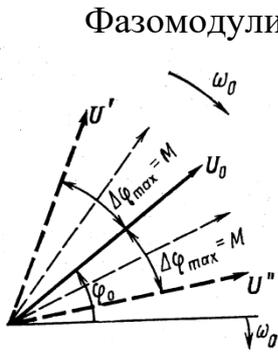


Рисунок 4.5

Фазомодулированное колебание наглядно характеризуется векторной диаграммой на рисунке 4.5, построенной на плоскости, вращающейся по часовой стрелке с угловой частотой ω_0 . Немодулированному колебанию соответствует неподвижный вектор U_0 . Фазовая модуляция заключается в периодическом с частотой Ω повороте вектора U относительно U_0 на угол $\Delta\varphi(t) = aX \sin \Omega t$. Крайние положения вектора U обозначены U' и U'' . Максимальное отклонение фазы модулированного колебания от фазы немодулированного колебания $M = \Delta\varphi_{\max} = aX$ называется *индексом модуляции*. Индекс модуляции M пропорционален амплитуде X модулирующего сигнала.

Наибольшее отклонение частоты ω от ω_0 называется *девиацией частоты* $\Delta\omega_d$.

Частотная модуляция заключается в пропорциональном первичному сигналу $x(t)$ изменении мгновенной частоты переносчика $\omega = \omega_0 + ax(t)$, где a — коэффициент пропорциональности.

ФМ и ЧМ колебания имеют много общего. В двумерной плоскости эти два колебания внешне будут выглядеть одинаково. Кроме того, ФМ и ЧМ характеризуются одними и теми же параметрами (индексом модуляции M и девиацией частоты Δf_d), связанными между собой одинаковыми соотношениями.

Таблица 3.1

Основные выражения	ФМ	ЧМ
Аналитическое выражение	$u = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + M \sin \Omega t)$	$u = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + M \cos \Omega t)$
Мгновенная фаза	$\psi(t) = \omega_0 t + \varphi_0 + ax(t)$	$\psi(t) = \omega_0 t + \varphi_0 + a \int_0^t x(t) dt$
Мгновенная частота	$\omega = \omega_0 + adx/dt$	$\omega = (\omega_0 + M\Omega \sin \Omega t)$
Девиация частоты	$\Delta\omega_d = M\Omega$ или $\Delta f_d = MF$	
Индекс модуляции		$M = \Delta\omega_d / \Omega$

Наряду с отмеченным сходством частотной и фазовой модуляции между ними имеется и существенное отличие, связанное с различным характером зависимости величин M и Δf_d от частоты F первичного сигнала:

- при ФМ индекс модуляции не зависит от частоты F , а девиация частоты согласно пропорциональна F ;

- при ЧМ девиация частоты не зависит от частоты F , а индекс модуляции согласно обратно пропорционален F .

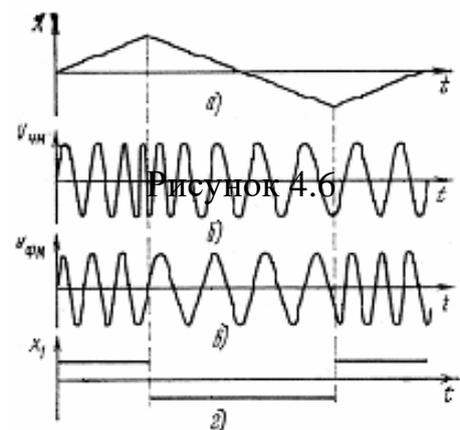


Рисунок 4.6

Различие между частотной и фазовой модуляцией особенно заметно, когда модуляция производится сложным сигналом, содержащим большое число компонент с разными частотами. Например, модулирующему сигналу треугольной формы на рисунке 4.6, а соответствует ЧМ колебание на рисунке 4.6, б. А модулирующему сигналу прямоугольной формы на рисунке 4.6, з соответствует ФМ колебание на рисунке 4.6, в. При ЧМ увеличение $x(t)$ сопровождается возрастанием ω и наоборот. При ФМ на участках, где $dx/dt > 0$, мгновенная частота ω больше несущей на величину $\Delta\omega = \omega - \omega_0 = adx/dt$; на участках с $dx/dt < 0$ частота ФМ колебания меньше ω_0 на величину $\Delta\omega$. Таким образом, ФМ сигналом $x(t)$ треугольной формы совпадает с ЧМ сигналом $x_1(t)$ (см. рисунок 4.6, з) прямоугольной формы.

Угловую модуляцию принято подразделять на узкополосную ($M < 0,5$ рад) и широкополосную ($M > 0,5$ рад). Наибольшее распространение в технике связи имеет широкополосная ЧМ с $M \gg 1$.

Спектр узкополосной угловой модуляции. Полагая $M \ll 1$, имеем:

$$u = U_0 \cos \omega_0 t + \frac{M}{2} U_0 \cos(\omega_0 + \Omega)t - \frac{M}{2} U_0 \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (4.4)$$

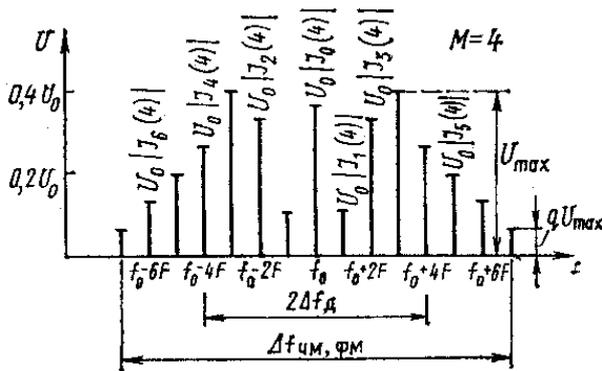


Рисунок 4.7

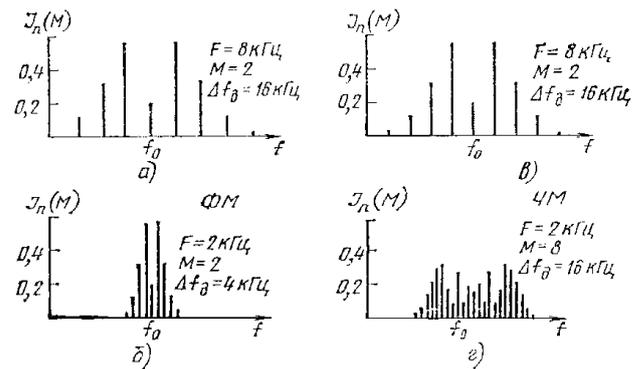


Рисунок 4.8

Таким образом, спектр узкополосных сигналов угловой модуляции аналогичен спектру простейшего АМ колебания, показанного на рисунке 3.5. Рассматриваемое колебание отличается от АМ колебания тем, что является следствием различия в знаках (т. е. в сдвиге фаз на 180°) компонент нижней боковой частоты в выражениях (4.4) и (4.3). При широкополосной угловой модуляции $M \gg 1$ спектр, модулированный гармоническим сигналом, оказывается дискретным, симметричным относительно ω_0 и содержащим бесконечное число боковых частот вида $\omega_0 \pm n\Omega$ с амплитудами $A_n = U_0 J_n(M)$. Для $M=4$ он построен на рисунке 4.7:

- а) теоретическая ширина спектра $\Delta f_{чм, фм} = \infty$;
- б) практическое ее значение при $M \ll 1$ оказывается $\Delta f_{чм, фм} = 2F \gg 2\Delta f_d$, а при $M \gg 1$ $\Delta f_{чм, фм}$ несколько превышает $2\Delta f_d$ и лишь приближенно считается равной ей. При ограничении спектра необходимо учитывать влияние двух

противоречивых факторов: в более узкой полосе частот ослабляется влияние помех, но одновременно увеличиваются искажения сигнала из-за отсутствия опускаемых составляющих.

Рассмотрим влияние параметров модулирующего сигнала $x(t) = X \cos \Omega t$ на спектры ФМ и ЧМ колебаний. Изменение частоты F модулирующего колебания по-разному влияет на изменение спектров ФМ и ЧМ колебаний. При ФМ изменение F не влияет на величину индекса модуляции, а следовательно, и на число спектральных составляющих (см. рисунки 4.8, а, б).

При ЧМ с уменьшением F индекс модуляции увеличивается, что приводит к увеличению числа спектральных компонент (см. рисунки 4.8, в, г). В итоге ширина спектра ЧМ колебания от частоты почти не зависит, а при ФМ изменяется пропорционально F .

Дискретная модуляция.

Если переносчиком является периодическая последовательность импульсов $f(t) = U_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} v(t - lT - t_0)$, то при заданной форме импульсов $v(t)$ можно образовать четыре основных вида дискретной (импульсной) модуляции: амплитудно-импульсную (АИМ), широтно-импульсную (ШИМ), время-импульсную (ВИМ, ФИМ, ДОФМ) и частотно-импульсную (ЧИМ). Применение радиоимпульсов позволяет получить ещё два вида модуляции: по частоте и по фазе высокочастотного заполнения.

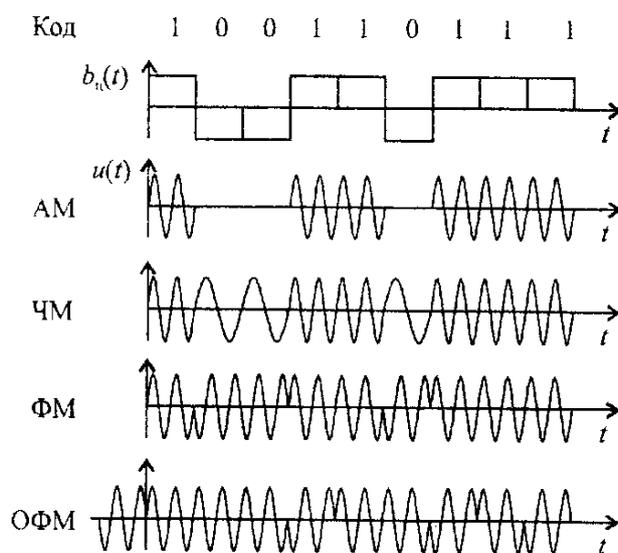


Рисунок 4.9 – Формы сигналов при двоичном коде для различных видов дискретной модуляции

первичного сигнала $b_u(t)$ при дискретной передаче определяет *скорость передачи посылок* (техническую скорость или скорость модуляции). Измеряется техническая скорость в *Бодах*. Один Бод – это скорость, при которой за 1 с передаётся одна посылка. Если длительность посылки T выражена в секундах, то скорость модуляции $\nu = 1/T$ в Бодах.

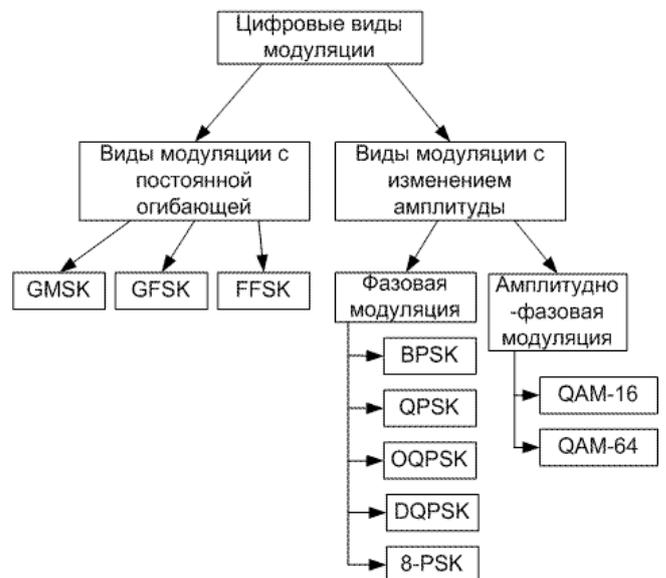


Рисунок 4.10 – Классификация цифровой

Длительность посылки

Цифровая модуляция.

Квадратурная амплитудная модуляция (КАМ, *Quadrature Amplitude Modulation, QAM*) – разновидность амплитудной модуляции сигнала, которая представляет собой сумму двух несущих колебаний одной частоты, но сдвинутых по фазе относительно друг друга на 90° ($\pi/2$ радиан, т.е. четверть полного угла, поэтому «квадратурная»), каждое из которых модулировано по амплитуде своим модулирующим сигналом:

$$S(t) = I(t)\cos(2\pi f_0 t) + Q(t)\sin(2\pi f_0 t), \quad (4.5)$$

где $I(t)$ и $Q(t)$ — модулирующие сигналы, f_0 — несущая частота.

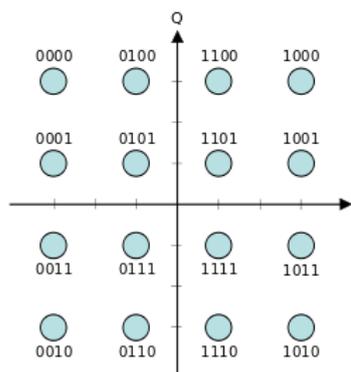


Рисунок 4.11 – Сигнальное созвездие 16-позиционного КАМн-сигнала

Квадратурная модуляция применяется для передачи сигналов цветности в телевизионном стандарте PAL и NTSC, в стереофоническом радиовещании, в системах программно-определяемого радио (ПОР, SDR). В простейшей ПОР квадратурно-модулированный сигнал с приёмника подаётся на вход звуковой карты, где оцифровывается АЦП и далее обрабатывается программно; ПОР позволяет получить с приёмника сигнал не одной радиостанции, а сразу некоторый диапазон частот.

Фазовая манипуляция (ФМн, *phase-shift keying (PSK)*) — один из видов фазовой модуляции, при которой фаза несущего колебания меняется скачкообразно в зависимости от информационного сообщения.

Фазоманипулированный сигнал имеет следующий вид:

$$s_m(t) = g(t) \cos[2\pi f_c t + \varphi_m(t)], \quad (4.6)$$

где $g(t)$ определяет огибающую сигнала; $\varphi_m(t)$ является модулирующим сигналом. $\varphi_m(t)$ может принимать M дискретных значений.

Если $M = 2$, то фазовая манипуляция называется *двоичной фазовой манипуляцией BPSK (binary phase-shift keying)* — самая простая форма фазовой манипуляции (ФМн). 1 бит на 1 смену фазы. Если $M = 4$ — *квадратурной фазовой манипуляцией QPSK (Q-Quadro)* — 2 бита на 1 смену фазы. $M = 8$, (*8-PSK*) — 3 бита на 1 смену фазы и т. д. Таким образом, количество бит n ,

передаваемых одним перескоком фазы, является степенью, в которую возводится двойка при определении числа фаз, требующихся для передачи n -порядкового двоичного числа.

Фазоманипулированный сигнал $s_i(t)$ можно рассматривать как линейную комбинацию двух ортонормированных сигналов y_1 и y_2 : $S_m(t) = S_1Y_1 + S_2Y_2$,

Где:

$$\begin{aligned} Y_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{E_g}}g(t) \cos[2\pi f_c t + \varphi_m(t)], \\ Y_2(t) &= -\sqrt{\frac{2}{E_g}}g(t) \sin[2\pi f_c t + \varphi_m(t)]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

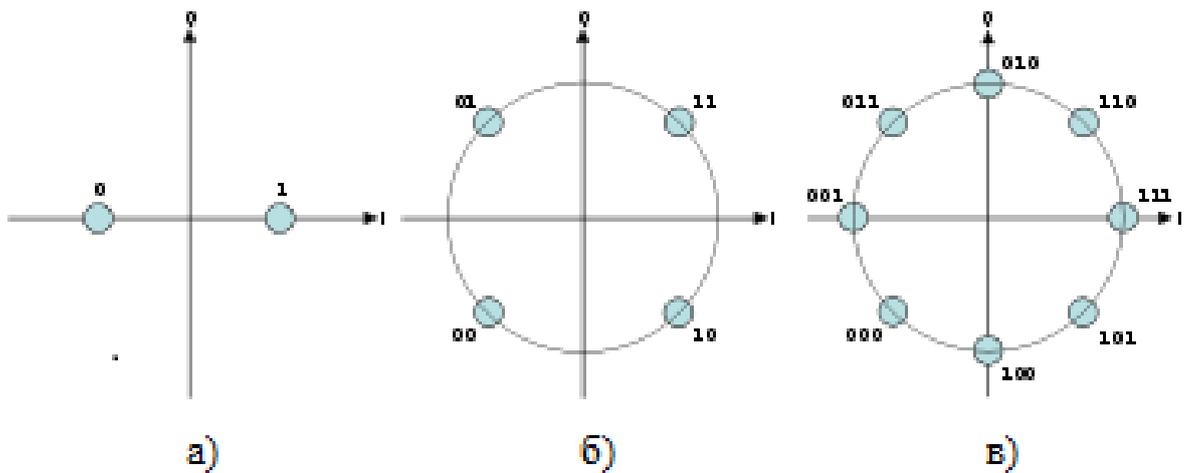


Рисунок 4.12 – а) двоичная фазовая манипуляция (*BPSK*), б) квадратурная фазовая манипуляция (*QPSK*), в) восьмеричная фазовая манипуляция (*8-PSK*)

Таким образом, сигнал $S_m(t)$ можно считать двухмерным вектором $[S_1(m, M); S_2(m, M)]$. Если значения $S_1(m, M)$ отложить по горизонтальной оси, а значения $S_2(m, M)$ — по вертикальной, то точки с координатами $S_1(m, M)$ и $S_2(m, M)$ будут образовывать пространственные диаграммы, показанные на рисунках. Работа схемы двоичной ФМн заключается в смещении фазы несущего колебания на одно из двух значений: нуль или π (180°). При *QPSK* используется созвездие из четырёх точек, размещённых на равных расстояниях на окружности.

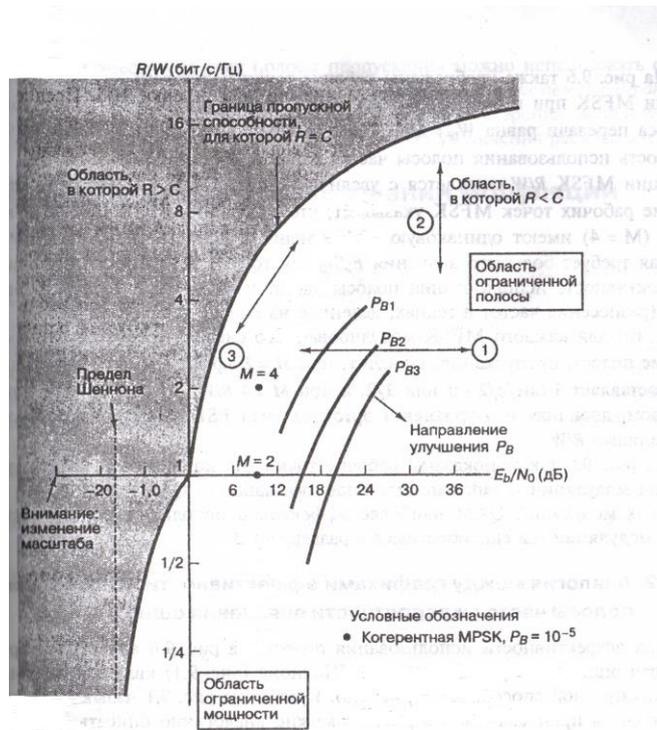


Рисунок 4.13 – График плоскости «полоса – эффективность»

можно передать через единицу полосы частот за данное время, E_b/N_0 – отношение сигнал – шум.

Лекция 5. Дискретизация сигналов во времени

Содержание лекции:

- свойства дельта-функции. Представление непрерывной функции дискретной последовательностью отсчётов её мгновенных значений. Спектральная трактовка дискретизации. Теорема отсчётов. Восстановление непрерывной функции по отсчётам.

Цель лекции:

- установить возможность сколь угодно точного восстановления мгновенных значений сигнала с ограниченным спектром исходя из отсчетных значений (выборок), взятых через равные промежутки времени.

Рассмотрим импульсный сигнал прямоугольной формы, заданный следующим образом:

$$v(t; \xi) = \frac{1}{\xi} \left[\sigma\left(t + \frac{\xi}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{\xi}{2}\right) \right]. \quad (5.1)$$

При любом выборе параметра ξ площадь этого импульса равна единице:

Хотя QPSK можно считать квадратурной манипуляцией (QAM-4), иногда её проще рассматривать в виде двух независимых модулированных несущих, сдвинутых на 90° . При таком подходе чётные (нечётные) биты используются для модуляции синфазной составляющей I , а нечётные (чётные) — квадратурной составляющей несущей Q . Так как BPSK используется для обеих составляющих несущей, то они могут быть демодулированы независимо. Анализ показывает, что скорость можно увеличить в два раза относительно BPSK при той же полосе сигнала либо оставить скорость прежней, но уменьшить полосу вдвое. На рисунке 4.13: R/W – это мера объема данных, которые

$$\prod_v = \int_{-\infty}^{\infty} v dt = 1.$$

Пусть теперь величина ξ стремится к нулю. Импульс, сокращаясь по длительности, сохраняет свою площадь, поэтому его высота должна неограниченно возрастать. Предел последовательности таких функций при $\xi \rightarrow 0$ носит название *дельта-функции*, или *функции Дирака*: $\delta(t) = \lim_{\xi \rightarrow 0} v(t; \xi)$.

Дельта-функция — интересный математический объект. Будучи равной нулю всюду, за исключением точки $t = 0$ (принято говорить, что она сосредоточена в этой точке), дельта-функция тем не менее обладает единичным интегралом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (5.2)$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (5.3)$$

Если непрерывную функцию умножить на дельта-функцию и произведение проинтегрировать по времени, то результат будет равен значению непрерывной функции в той точке, где сосредоточен δ -импульс. Принято говорить, что в этом состоит *фильтрующее свойство* дельта-функции.

Для точного представления произвольной непрерывной функции $x(t)$ на конечном интервале времени T необходимо располагать данными о мгновенных значениях (отсчётах) этой функции во всех точках интервала, т.е. непрерывным множеством отсчётов, отстоящих друг от друга на бесконечно малые интервалы. Некоторое приближённое представление о функции $x(t)$ можно составить по её отображению в виде дискретной последовательности импульсов, имеющих на интервалах Δ значения $x(i\Delta)$, называемых отсчётами. Операция замены непрерывной функции последовательностью отсчётов её мгновенных значений называется *дискретизацией*. В качестве простейшей физической модели дискретизации рассмотрим коммутационное устройство (см. рисунок 5.2, а).

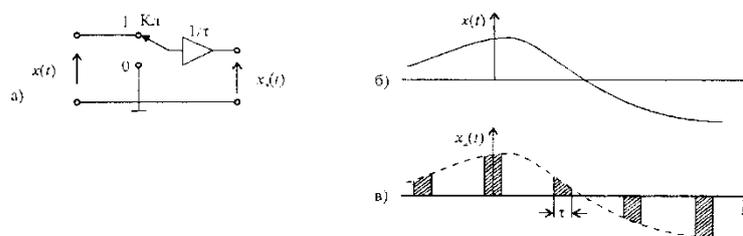


Рисунок 5.2

С помощью ключа Кл обеспечивается периодическое с частотой дискретизации $f_{\text{д}} = 1/\Delta$ подключение к источнику непрерывного сигнала $x(t)$ (см. рисунок 4.2, б) на время τ , т.е. производится замена непрерывной функции $x(t)$ последовательностью $x_{\text{д}}(t)$ на интервалах τ (см. рисунок 5.2, в).

Дискретный

сигнал

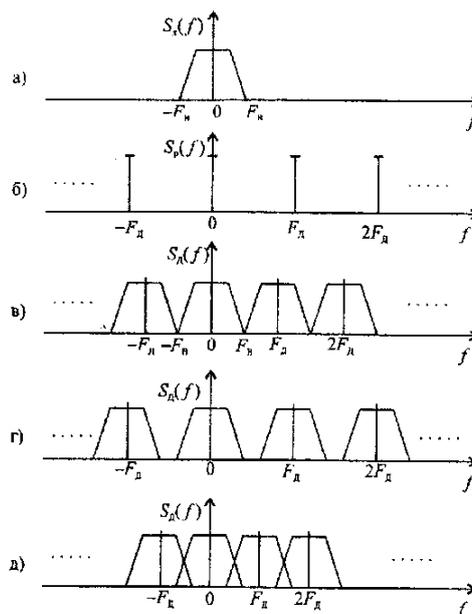


Рисунок 5.3

$$x_{\text{д}}(t) = x(t)f_p(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta(t - k\Delta).$$

В спектральной области произведению функций времени соответствует свёртка их спектров. Пусть спектр функции $x(t)$ финитен и имеет вид, представленный на рисунке 5.3, а, где F_B – верхняя (граничная) частота. Спектр периодической последовательности импульсов дискретизации является линейчатым (см. рисунок 5.3, б); частота дискретизации определяется интервалом дискретизации $F_{\text{д}} = 1/\Delta$. Спектры дискретизированного сигнала представлены для случаев, когда $F_{\text{д}} = 2F_B$ (см. рисунок 5.3, в), $F_{\text{д}} > 2F_B$ (см. рисунок 5.3, г) и $F_{\text{д}} < 2F_B$ (см. рисунок 5.3, д). Для неискажённого воспроизведения функции $x(t)$ по последовательности отсчётов посредством идеального фильтра низких частот необходимо выбирать частоту дискретизации так, чтобы спектральные компоненты свёртки $S_x(f)$ с каждой и дискретных составляющих периодической функции $pF_{\text{д}}$ ($p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) располагались в не перекрывающихся областях (см. рисунок 5.3). Этому соответствуют значения $F_{\text{д}} \leq 2F_B$. При $F_{\text{д}} < 2F_B$ спектральные области перекрываются, в полосу частот $(-F_B, 2F_B)$ дискретизируемого сигнала попадут спектральные компоненты смежных областей и возникнут искажения при восстановлении функции по отсчётам. Для точного воспроизведения непрерывной функции с *ограниченным (финитным) спектром* достаточно располагать значениями функции (отсчётами) лишь в отдельных точках. Модели сигналов с ограниченным спектром часто используются в технике связи.

Теорема отсчётов Котельникова: непрерывная функция $x(t)$, не содержащая частот выше граничной F_B , полностью определяется отсчётами мгновенных значений $x(k\Delta)$ в точках, отстоящих друг от друга на интервалы $\Delta \leq 1/2F_B$. Интервал Δ называется интервалом Котельникова. Эта теорема позволяет представить непрерывную функцию $x(t)$ в виде ряда:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \frac{\sin \omega_B(t - k\Delta)}{\omega_B(t - k\Delta)}. \quad (5.4)$$

Из сопоставления ряда (5.4) с общим видом обобщённого ряда Фурье в пространстве Гильберта следует, что элементарными базисными функциями в разложении Котельникова являются отсчетные функции:

$$\Psi_k(t) = a \frac{\sin \omega_B(t - k\Delta)}{\omega_B(t - k\Delta)}, \quad (5.5)$$

где постоянная a вводится с учетом нормировки функций (4.8).

Процедура *восстановления непрерывной функции $x(t)$* по отсчётам её мгновенных значений $x(k\Delta)$ вытекает непосредственно из (4.7): нужно перемножить значения отсчётов $x(k\Delta)$ на соответствующие отсчётные функции (4.8) и просуммировать полученные произведения. Эти операции иллюстрирует рисунок 4.4. Спектральная трактовка процесса восстановления $x(t)$ следует из рисунка 4.3. Для полного восстановления необходимо просуммировать бесконечное множество членов ряда (4.7). Однако если функция с ограниченным спектром $x(t)$ рассматривается на конечном интервале T (см. рисунок 5.4, *a*), то конечное число отсчётов n , определяющее $x_\varepsilon(t)$, равно ($\Delta = 1/2F_B$), $n = T/\Delta + 1 = 2F_B T + 1$.

Параметр $B = 2F_B T$, играющий важную роль в ТЭС, называют базой сигнала.

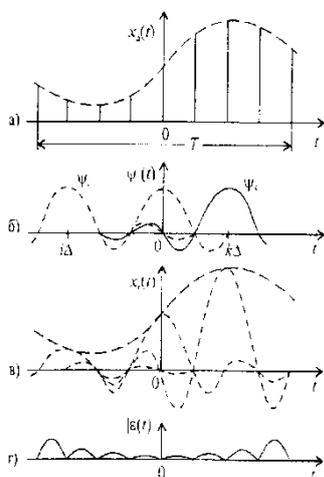


Рисунок 5.4

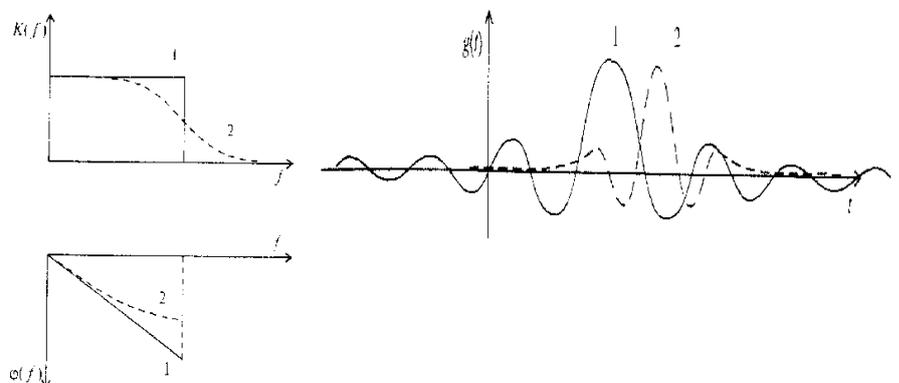


Рисунок 5.5 – Импульсная характеристика

Лекция 6. Аналоговые модуляторы

Содержание лекции:

- Амплитудный и частотный модуляторы.

Цель лекции:

- Получение амплитудно- и частотно- модулированных сигналов.

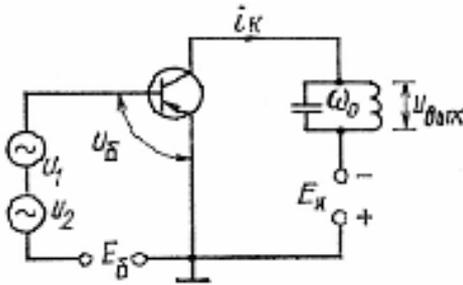


Рисунок 6.1

Напряжение на базе содержит, кроме смещения $E_б$, определяющего положение рабочей точки, колебания низкой и высокой частот:

$$u_а = u_1 + u_2 + E_а. \quad (6.1)$$

Здесь $u_1 = U_1 \cos \omega_0 t$ – высокочастотное напряжение; $u_2 = U_2 \cos \Omega t$ – модулирующее низкочастотное напряжение. На рисунке 6.2, а, б, в по характеристике прибора $i_к = \Phi(u_б)$ методом проекций построена зависимость $i_к$ от времени. Коллекторный ток представляет последовательность импульсов, отличающихся друг от друга высотой I_{\max} и углом отсечки θ . Если разложить каждый из этих импульсов тока в ряд Фурье за период высокой частоты $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, получим постоянную составляющую и гармоники высокой частоты.

Напряжение на контуре, настроенном на частоту ω_0 , создается только первой гармоникой $i_{к1} = I_{к1} \cos \omega_0 t$: $u_{\text{вых}} = i_{к1} R_с = I_{к1} R_с \cos \omega_0 t$. Изменение высоты и ширины импульсов тока во времени приводит к изменению амплитуды $I_{к1}$ с низкой частотой Ω . Поэтому выходное напряжение получается модулированным по амплитуде (см. рисунок 6.2, г). Режим работы модулятора, определяемый величинами $E_б$, U_1 и U_2 , нельзя выбирать таким, чтобы все мгновенные значения находились в пределах линейного участка характеристики транзистора, так как в этом случае коллекторный ток будет иметь такую же форму, что и $u_б$, амплитуда высокочастотной составляющей тока $i_{к1}$ будет постоянной, а потому напряжение на выходе окажется немодулированным.

При осуществлении модуляции могут возникать искажения огибающей АМ колебания. Напряжение u_6 можно рассматривать как сумму высокочастотного колебания u_1 и напряжения смещения $u_6(t) = E_6 + u_2(t)$, медленно изменяющегося с низкой частотой, а модуляцию – как следствие изменения смещения, приводящего к изменению импульсов тока и их первой гармоники.

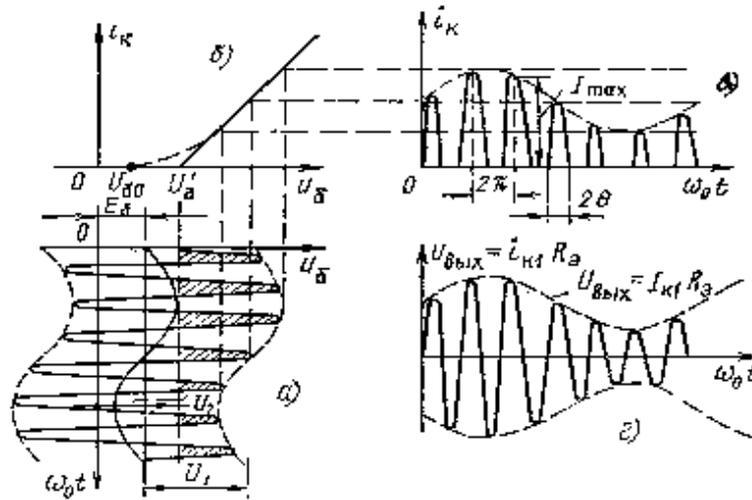


Рисунок 6.2

Так как амплитуда выходного напряжения пропорциональна $I_{к1}$, для получения неискаженной модуляции требуется, чтобы амплитуда $I_{к1}$ изменялась пропорционально изменению напряжения смещения. Зависимость $I_{к1}$ от E_6 при постоянной амплитуде U_1 называется *статической модуляционной характеристикой*. Она может быть рассчитана по статической характеристике прибора (см. рисунок 6.3, а): при неизменной амплитуде U_1 и различных смещениях E_6 с помощью одного из методов спектрального анализа определяем амплитуду $I_{к1}$ и строим зависимость $I_{к1}(E_6)$ (см. рисунок 6.3, б), которая и является статической модуляционной характеристикой.

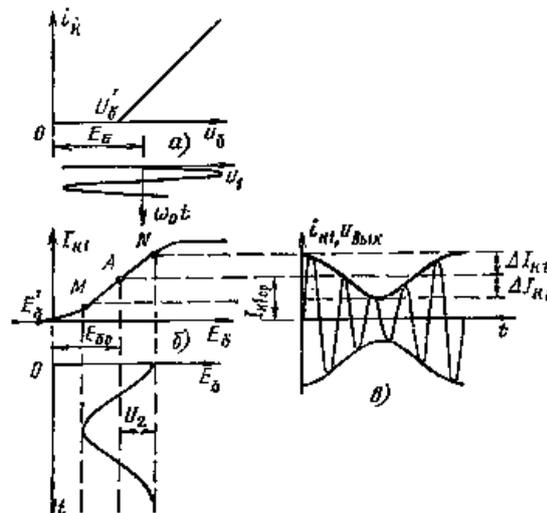


Рисунок 6.3

Отметим некоторые ее особенности. При смещении, равном напряжению запираения U'_6 , получаются импульсы тока i_k с углом отсечки $\theta=90^\circ$, а потому $I_{k1} \neq 0$. Амплитуда I_{k1} уменьшится до нуля, когда смещение достигнет величины $E'_6 = U'_6 - U_1$. Если при изменении смещения колебание u_1 не выходит за пределы линейного участка статической характеристики транзистора, амплитуда I_{k1} не меняется. Обычно в средней части статической модуляционной характеристики имеется линейный участок MN . Для получения неискаженной модуляции с наибольшей глубиной m нужно выбрать рабочую точку A на середине этого участка (смещение E_{60}) и использовать низкочастотный модулирующий сигнал с такой амплитудой U_2 , при которой работа происходит в пределах участка MN . В этом случае изменение I_{k1} во времени (жирная линия на графике $I_{k1}(t)$) не отличается от модулирующего сигнала, т. е. имеет место неискаженная модуляция. Если взять большую амплитуду U_2 , при которой в процессе работы будут использоваться нелинейные участки модуляционной характеристики, огибающие I_{k1} и $U_{\text{вых}}$ окажутся искаженными и притом тем сильнее, чем больше U_2 . Для построения зависимости $i_{k1}(t)$ и аналогичного графика $U_{\text{вых}}(t)$ достаточно симметрично ниже оси абсцисс провести вторую огибающую и промежуток между огибающими заполнить колебаниями частоты ω_0 (см. рисунок 6.3в). Коэффициент модуляции в соответствии с обозначениями рисунка 6.3 может быть подсчитан по статической модуляционной характеристике как $m = \Delta I_{k1} / I_{k1\text{cp}}$.

Для получения *частотной модуляции* нужно, чтобы частота колебаний автогенератора изменялась под действием первичного сигнала u_Ω . На рисунке 6.4 приведена схема автогенератора (обведена пунктирной линией), вырабатывающего синусоидальное напряжение $u = U \cos \omega t$ с частотой ω , приблизительно равной резонансной частоте контура ω_0 . Следовательно, изменение частоты генерируемых колебаний может быть достигнуто изменением емкости или индуктивности контура. Для осуществления частотной модуляции параллельно контуру генератора подключают параметрический элемент — реактивное управляемое сопротивление $X_y(t)$, величина которого изменяется под воздействием модулирующего сигнала: $X_y(t) = \Phi(u_\Omega)$.

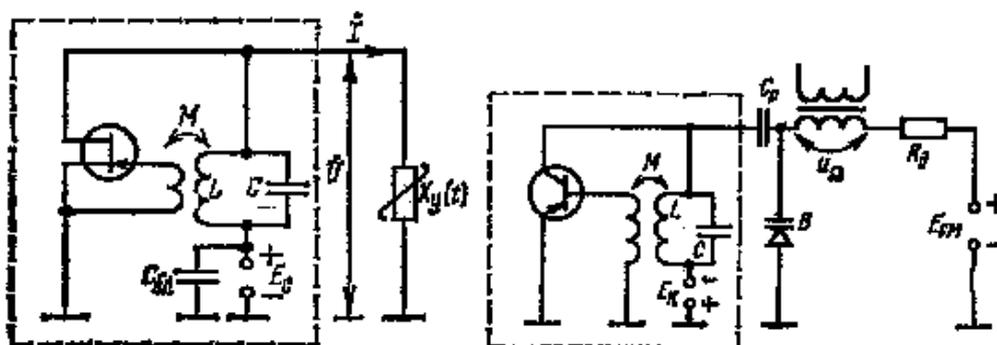


Рисунок 6.4

В рассмотренных случаях изменение частоты колебаний происходит пропорционально изменениям емкости или индуктивности. *Если емкость или индуктивность изменяются пропорционально первичному сигналу и притом в небольших пределах*, изменение частоты также пропорционально ω , т. е. частотная модуляция будет неискаженной.

В качестве управляемого сопротивления в транзисторных генераторах обычно используют варикапы, подключаемые к генератору, как показано на рисунке 6.4. На варикап В подается смещение $E_{см}$ и модулирующее напряжение u_{Ω} . Остальные элементы на рисунке 6.4 имеют вспомогательное значение: емкость C_p большей величины разделяют цепи питания генератора и варикапа по постоянному току, позволяя в каждой из них установить нужные напряжения; добавочное сопротивление R_d величиной порядка сотен килоом включается для того, чтобы источник смещения и вторичная обмотка трансформатора не шунтировали контур генератора.

Следовательно, емкость варикапа изменяется с частотой Ω и ее гармоник; кроме того, изменяется и ее среднее значение.

Если емкость контура состоит только из емкости варикапа ($C_0=C_{в0}$), то модуляционная характеристика автогенератора с варикапом - зависимости отклонения частоты генератора от изменения напряжения Δu на варикапе. Поскольку эта зависимость нелинейная, ЧМ, возникающая при воздействии низкочастотного модулирующего напряжения, должна сопровождаться искажениями (изменением частоты генерации с частотами $2\Omega, 3\Omega, \dots$) и сдвигом средней частоты. Увеличение девиации частоты сопровождается увеличением искажений и сдвига средней частоты.

Лекция 7. Детектирование АМ и ЧМ-колебаний в нелинейных цепях

Содержание лекции:

- детекторы АМ- и ЧМ-сигналов.

Цель лекции:

- изучение процессов детектирования амплитудно-модулированных и частотно-модулированных и сигналов.

Детектирование представляет собой процесс, обратный модуляции. Детектирование заключается в восстановлении того первичного сигнала, которым производилась модуляция. Детектирование считается неискаженным, если напряжение на выходе детектора повторяет закон изменения параметра модулированного колебания (амплитуды в случае АМ, частоты в случае ЧМ, фазы в случае ФМ).

Поскольку в спектре модулированного колебания содержатся только высокочастотные компоненты (несущая и боковые частоты), результатом детектирования является получение низкочастотных колебаний.

При подаче на вход модулированного колебания, один из параметров

которого меняется с низкой частотой, постоянная составляющая тока I_0 на выходе соответствующего детектора также будет изменяться с низкой частотой, и это колебание после ФНЧ выделится на выходе детектора. Для неискаженного детектирования необходимо, чтобы компонента тока I_0 изменялась пропорционально модулируемому параметру (U , ω или φ). В связи с этим важнейшими характеристиками детекторов являются *характеристики детектирования*, под которыми подразумеваются зависимости тока I_0 от напряжения U в амплитудных детекторах, тока I_0 от частоты ω – в частотных детекторах и от φ в фазовых детекторах.

На рисунке 7.1, а–в показано графическое определение тока, протекающего через диод при воздействии на него АМ напряжения:

$$u_{BX} = U(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t. \quad (7.1)$$

Поскольку диод обладает односторонней проводимостью, ток i имеет характер импульсов длительностью в половину периода частоты ω , амплитуда которых изменяется при изменении огибающей входного напряжения. В получившейся последовательности импульсов тока содержится уже и низкочастотная составляющая частоты Ω . Действительно, импульсы тока i различаются, главным образом, амплитудой I . Зависимость $i(t)$ можно рассматривать как результат модуляции импульсов тока, записанных в виде ряда Фурье $I_0 + I_1 \cos \omega_0 t + I_2 \cos 2\omega_0 t + \dots$, колебанием низкой частоты Ω :

$$i = (1 + m \cos \Omega t)(I_0 + I_1 \cos \omega_0 t + I_2 \cos 2\omega_0 t + \dots). \quad (7.2)$$

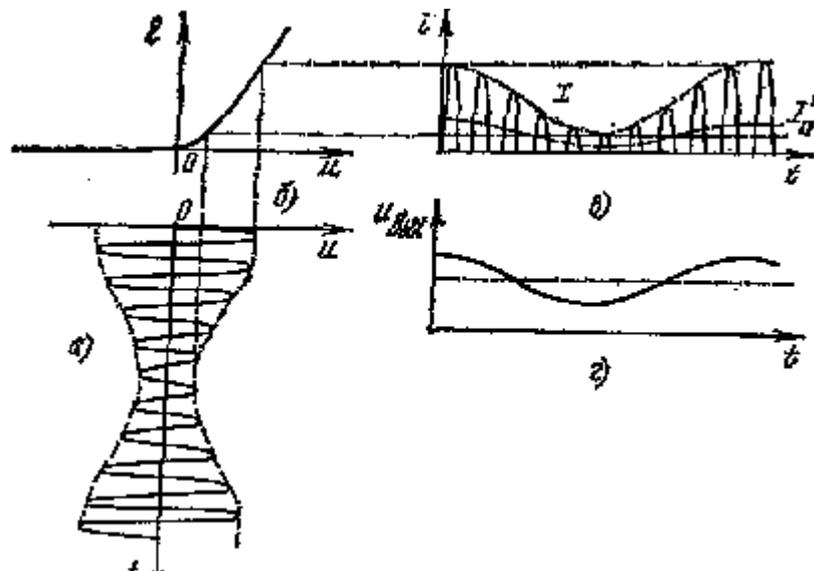
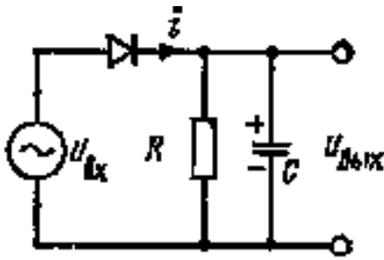


Рисунок 7.1

Таким образом, ток i содержит постоянную составляющую и компоненты высокой частоты ω и ее гармоник, каждая из которых модулирована

низкочастотным сигналом.

На рисунке 7.1, в штрихпунктирная линия изображает зависимость постоянной составляющей тока от времени $I'_0(t)$, определяемой как среднее значение тока i за период высокой частоты ω : $I'_0 = (1 + m \cos \Omega t) I_0$.



Для выделения низкочастотного сигнала последовательно с нелинейным элементом включают такую цепь RC (см. рисунок 7.2), чтобы

$$1/\omega_0 C \ll R. \quad (7.3)$$

Рисунок 7.2

(7.3) высокочастотные компоненты тока напряжения на выходе почти не создают. Для того чтобы низкочастотные компоненты тока создавали большое выходное напряжение, сопротивление R должно быть достаточно большим и притом $1/\Omega C \gg R$ с тем, чтобы для низких частот сопротивление нагрузочной цепи $Z_H \approx R$. Объединяя эти неравенства, получаем условия, определяющие выбор емкости C:

$$1/\omega_0 C \ll R \ll 1/\Omega C. \quad (7.4)$$

График $u_{\text{вых}}(t)$ рисунке 7.1, г показывает форму выходного напряжения.

На рисунках 7.3, а и б представлены спектры напряжения (7.1) и тока (7.2). Пунктирная линия на рисунке 7.3, б изображает зависимость $Z_H(\omega)$ при условии (7.4). Перемножая амплитуды спектральных компонент на соответствующие величины Z_H , получаем спектр выходного напряжения (см. рисунок 7.3, в).

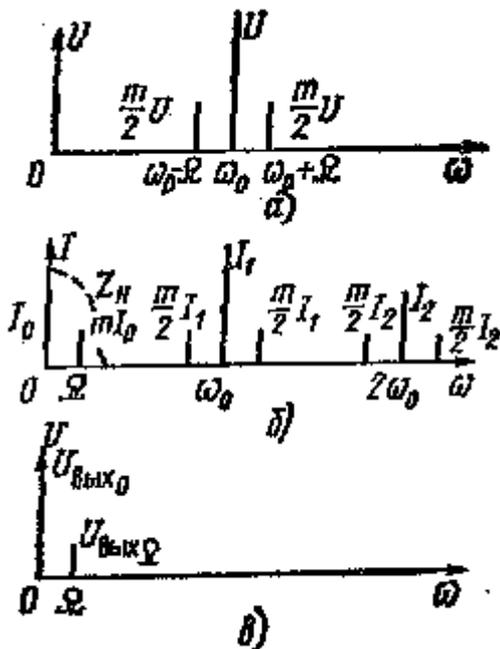


Рисунок 7.3

Переходя к более подробному рассмотрению процесса детектирования, отметим, что сопротивление нагрузки R обычно выбирается настолько большим, что учет его влияния на ток i оказывается необходимым. Пусть на детектор в схеме (см. рисунок 7.2) действует синусоидальное напряжение частоты $\omega_0 = 2\pi/T_0$:

$$u_{\text{вх}} = U \cos \omega_0 t. \quad (7.5)$$

Напряжение на диоде $u = u_{\text{вх}} + U_0$. Вследствие наличия цепочки RC оно отличается от напряжения (7.5) на величину постоянного смещения $U_0 =$

$-I'_0 R$. При больших R диод работает с небольшими

углами отсечки θ , т. е. ток через диод протекает только в течение небольшой части периода. Так как сопротивление открытого диода мало, в это время происходит быстрый заряд конденсатора C , сопровождающийся возрастанием напряжения u_c на нем. Когда $u_{вх}$ оказывается меньшим u_c , диод запирается, входное напряжение перестает влиять на процессы в RC -цепи, конденсатор C разряжается через большое сопротивление R . Согласно (7.4) постоянная времени разряда $\tau_{раз}=RC \gg T_0/2\pi$ или $\tau_{раз} \gg T_0$. Поэтому за ту часть периода T_0 , пока конденсатор разряжается, напряжение u_c уменьшается незначительно. Характер изменения по времени $u_{вх}$, $u_{вых}=u_c$ и тока i , протекающего через диод, показан на рисунке 7.4. Пренебрегая пульсацией напряжения $u_{вых}$, будем в дальнейшем считать его при воздействии сигнала (7.5) постоянным и равным U_0 (штрих-пунктирная на рисунке 7.4). Это позволяет записать напряжение на диоде как $u=U\cos\omega_0 t - I_0 R$.

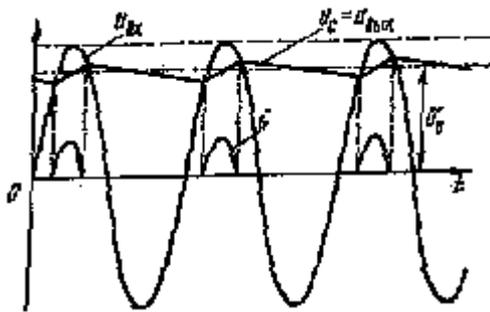


Рисунок 7.4

диоде как $u=U\cos\omega_0 t - I_0 R$.

Данный детектор обладает линейной характеристикой детектирования, и детектирование в нем происходит без искажений. Детектор с линейной характеристикой детектирования называется *линейным детектором*.

Диодный детектор является линейным в случае достаточно больших амплитуд входного сигнала, когда пригодна кусочно-

линейная аппроксимация его характеристики. При этом следует помнить, что *линейный детектор является устройством нелинейным*, работающим с отсечкой тока. Из-за нелинейности характеристики детектирования изменение амплитуды входного сигнала вызывает непропорциональное изменение постоянной составляющей тока детектора, поэтому низкочастотные колебания на выходе детектора искажаются по сравнению с огибающей АМ колебания.

Диодные детекторы обычно бывают квадратичными при амплитудах входных сигналов $U \leq 0,1 \div 0,2$ В и линейными при $U > 0,5 \div 1$ В. Чтобы избежать искажений, следует принимаемый АМ сигнал усилить до детектора настолько, чтобы его амплитуда была достаточно большой.

На выходе *детектора ЧМ* колебаний должно получаться напряжение, пропорциональное отклонению частоты колебаний от среднего значения. Существуют две группы методов решения этой задачи:

1) ЧМ сигнал преобразуется в АМ или ФМ сигнал и затем детектируется амплитудным или фазовым детектором;

2) ЧМ сигнал преобразуется в последовательность коротких импульсов той же частоты, создающих постоянное напряжение, пропорциональное числу импульсов в единицу времени.

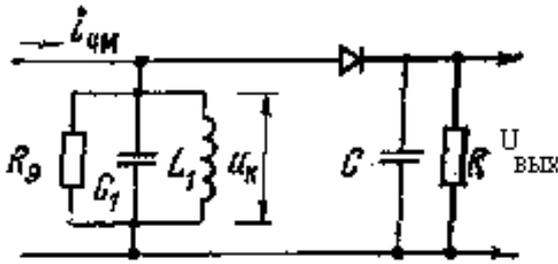


Рисунок 7.5

Рассмотрим работу детектора, основанного на преобразовании ЧМ в АМ с помощью *расстроенного колебательного контура* (см. рисунок 7.5). Пусть через контур, настроенный на частоту ω_p , протекает ЧМ ток $i_{чм}$ с постоянной амплитудой I и меняющейся частотой $\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega(t)$. На рисунке 7.6

приведены частотная характеристика контура $Z_{\Sigma}(\omega)$ и зависимость $\omega(t)$. Если частота $\omega(t)$ изменяется достаточно медленно, можно в любой момент определять амплитуду напряжения на контуре $U_{к}$ как произведение амплитуды тока I на величину сопротивления $Z_{\Sigma}(\omega)$ для данной мгновенной частоты

$$U_{к}(\omega) = I Z_{\Sigma}(\omega).$$

Амплитуда $U_{к}$ будет изменяться

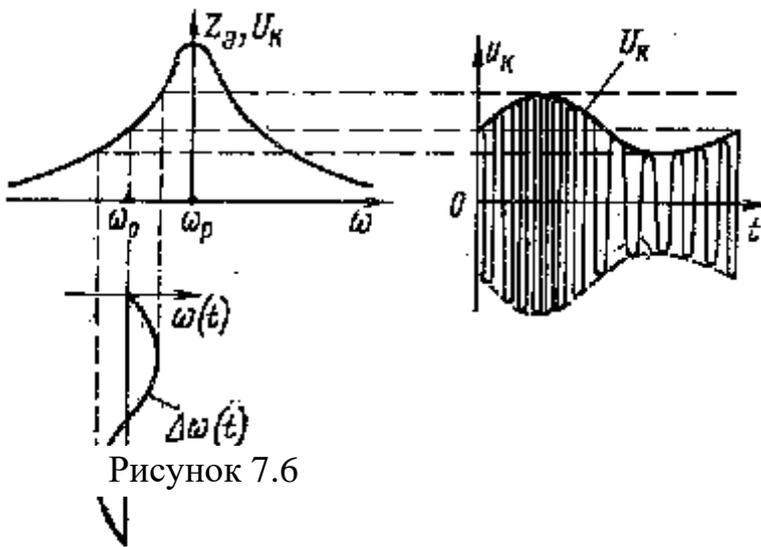


Рисунок 7.6

приблизительно пропорционально $\Delta\omega(t)$, если несколько расстроить контур относительно несущей частоты сигнала ω_0 , как показано на рисунке 7.6. Определяем $U_{к}(t)$ на рисунке 7.6 методом проекций. Если нанести симметрично вторую огибающую (пунктир) и

высокочастотное заполнение, получим форму напряжения $u_{к}(t)$. Последнее

оказывается модулированным одновременно и по амплитуде и по частоте, причем закон изменения $U_{к}(t)$ примерно такой же, что и $\Delta\omega(t)$. Для получения низкочастотного сигнала $u_{ввых}$ достаточно $u_{к}(t)$ подать на линейный амплитудный детектор, как показано на рисунке 7.2. Недосток схемы заключается в появлении искажений вследствие нелинейности скатов частотной характеристики контура.

В рассмотренной схеме детектора, как и в детекторах, основанных на преобразовании ЧМ в ФМ, выходное напряжение зависит не только от величины отклонения частоты $\Delta\omega$, но также и от амплитуды входного ЧМ сигнала. Последняя же может меняться, например, из-за воздействия помех, что приводит к искажениям $u_{ввых}$. Для предотвращения этого ЧМ сигнал перед частотным детектором пропускают через ограничитель амплитуды.

Наличие индуктивностей в рассмотренных частотных детекторах первой группы затрудняет их реализацию средствами микроэлектроники. Поэтому все

большее распространение получают методы детектирования ДЧМ.

Лекция 8. Принципы помехоустойчивого кодирования. Классификация помехоустойчивых кодов.

Содержание лекции:

- Принципы помехоустойчивого кодирования. Кодовое расстояние. Число обнаруживаемых и исправляемых ошибок. Классификация помехоустойчивых кодов. Вектор ошибок.

Цель лекции:

- рассмотреть методы повышения верности передачи и надежности систем ПДИ.

В обычном равномерном непомехоустойчивом коде число разрядов в кодовых комбинациях определяется числом сообщений и основанием кода $n = \log_2 K$. Любая из n кодовых комбинаций представляет собой какой-то знак алфавита. Если в процессе передачи такой кодовой комбинации произойдет одна ошибка, то принятая кодовая комбинация будет интерпретироваться приемником как кодовая комбинация, соответствующая другому знаку. Таким образом, возникающие в кодовых комбинациях ошибки обнаружить невозможно, поскольку нельзя отличить ошибочную комбинацию от безошибочной. Все n кодовые комбинации разрешены. За счет огромной языковой и смысловой избыточности текста можно легко восстановить переданное сообщение. Коды, у которых все кодовые комбинации разрешены к передаче, называются *простыми*, или *равнодоступными*.

Будем называть *вектором ошибок* поразрядную разность (по модулю m) между принятым и переданным векторами. В общем случае для любых входных и выходных сигналов последовательностей n кодовых символов должна быть указана вероятность того, что при подаче на вход канала любой заданной последовательности $V^{[n]}$ кодовых символов на выходе появится некоторая реализация случайной последовательности $\hat{V}^{[n]}$. Кодовые символы обозначим числами от 0 до $m-1$, где m является основанием кода, что позволит производить над ними арифметические операции.

Прохождение дискретного сигнала через канал можно рассматривать как сложение входного вектора с вектором ошибки. Вектор ошибки играет в дискретном канале примерно ту же роль, что и помеха в непрерывном канале. Таким образом, для любой модели дискретного канала можно записать, пользуясь сложением в векторном пространстве (поразрядным, по модулю m) $\hat{V}^{[n]} = V^{[n]} + E^{[n]}$, где $V^{[n]}$ и $\hat{V}^{[n]}$ — случайные последовательности из n символов на входе и выходе канала; $E^{[n]}$ — случайный вектор ошибки, который в общем случае зависит от $V^{[n]}$. Различные модели отличаются распределением вероятностей вектора $E^{[n]}$. Смысл вектора ошибки особенно прост в случае

двоичных каналов ($m = 2$), когда его компоненты принимают значения 0 и 1. Всякая единица в векторе ошибок означает, что в соответствующем месте передаваемой последовательности символ принят ошибочно, а всякий нуль означает безошибочный приём символа. Число ненулевых символов в векторе ошибок называется его *весом*. Образно говоря, модем, осуществляющий переход от непрерывного канала к дискретному, преобразует помехи и искажения непрерывного канала в поток ошибок.

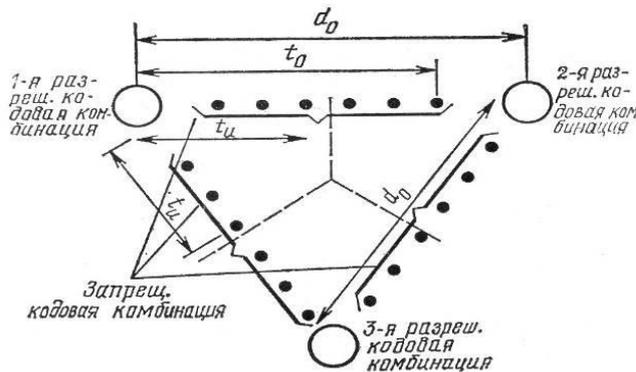
Очевидно, что при передаче цифровой информации восстановление ошибочно принятых цифр невозможно. Цифровая информация избыточностью не обладает. Ясно, что текстовое сообщение, принятое с ошибками, верно восстанавливается только за счет содержащейся в нем избыточности. В этом состоит идея *помехоустойчивого кодирования*: в передаваемую кодовую комбинацию необходимо внести по определенным «грамматическим» правилам избыточность (признаки разрешенной комбинации). Правила внесения избыточности, т. е. признаки, должны быть известны не только на передаче, но и на приеме. Если на приемной стороне эти признаки в кодовой комбинации не обнаруживаются, то считается, что произошла ошибка (или ошибки). В противном случае (при наличии признаков) считается, что кодовая комбинация принята правильно (является разрешенной). Внесение избыточности при использовании корректирующих (помехоустойчивых) кодов обязательно связано с увеличением n — числа разрядов (длины) кодовой комбинации. Таким образом, все множество $N_0 = 2^n$ комбинаций можно разбить на два подмножества: подмножество разрешенных комбинаций, т. е. обладающих определенными признаками, и подмножество запрещенных комбинаций, этими признаками не обладающих. Помехоустойчивый код отличается от обычного тем, что в канал передаются не все кодовые комбинации N_0 , которые можно сформировать из имеющегося числа разрядов n — N_0 , а только их часть N , которая составляет подмножество разрешенных комбинаций: $N < N_0$. Если в результате искажений переданная кодовая комбинация переходит в подмножество запрещенных кодовых комбинаций, то ошибка будет обнаружена. Однако, если совокупность ошибок в данной кодовой комбинации превращает ее в какую-либо другую разрешенную, то в этом случае ошибки не могут быть обнаружены.

Аналогичное рассуждение можно провести и для случая исправления ошибок, если рассматривать код, исправляющий ошибки. Для того чтобы можно было *обнаруживать и исправлять ошибки*, разрешенная комбинация должна как можно больше отличаться от неразрешенной. Если ошибки действуют независимым образом (как случайные независимые события), то вероятность преобразования одной кодовой комбинации в другую будет тем меньше, чем большим числом разрядов они различаются. Если интерпретировать кодовые комбинации как точки в пространстве, то отличие выражается в расстоянии между ними. Количество разрядов, которыми отличаются две кодовые комбинации, можно принять за расстояние между ними. Для определения этого расстояния нужно сложить две кодовые

комбинации по модулю 2 и подсчитать число единиц в полученной сумме. Обозначим кодовое расстояние через d . При $d_0 > 2$ код способен обнаруживать и исправлять ошибки. При $d_0 = 1$ такой возможности нет.

Нужное кодовое расстояние устанавливается введением определенного количества дополнительных разрядов в кодовую комбинацию. Обозначим число (кратность) обнаруживаемых ошибок через t_o , а число исправляемых ошибок — через t_u . Ошибка не обнаруживается, если одна разрешенная комбинация переходит в другую разрешенную. Для обеспечения возможности обнаружения всех ошибок кратностью до t_o кодовое расстояние определяется неравенством:

$$d_0 \geq t_o + 1. \quad (8.1)$$



Это соотношение иллюстрируется рисунком 8.1. Переход от одной точки к другой на рисунке 8.1 соответствует искажению одного разряда.

Для обеспечения возможности исправления всех ошибок кратности до t_u включительно кодовое расстояние:

Рисунок 8.1

$$d_0 \geq 2t_u + 1. \quad (8.2)$$

Чтобы код обнаруживал ошибки кратностью t_o и исправлял ошибки кратностью t_u , кодовое расстояние должно быть равно:

$$d_0 \geq t_o + t_u + 1. \quad (8.3)$$

Очевидно, что количество дополнительных разрядов r связано с кодовым расстоянием d_0 . Кодовое расстояние будет тем большим, чем больше избыточность кода и чем равномернее распределены расстояния между разрешенными кодовыми комбинациями. Формула для кода с $d_0 = 3$:

$$r \geq \log_2(n+1). \quad (8.4)$$

Помехоустойчивые коды (см. рисунок 8.2) делятся на блочные и непрерывные. К блочным относятся коды, в которых каждому сообщению соответствует блок из n символов (разрядов), или блоки с разным числом символов.

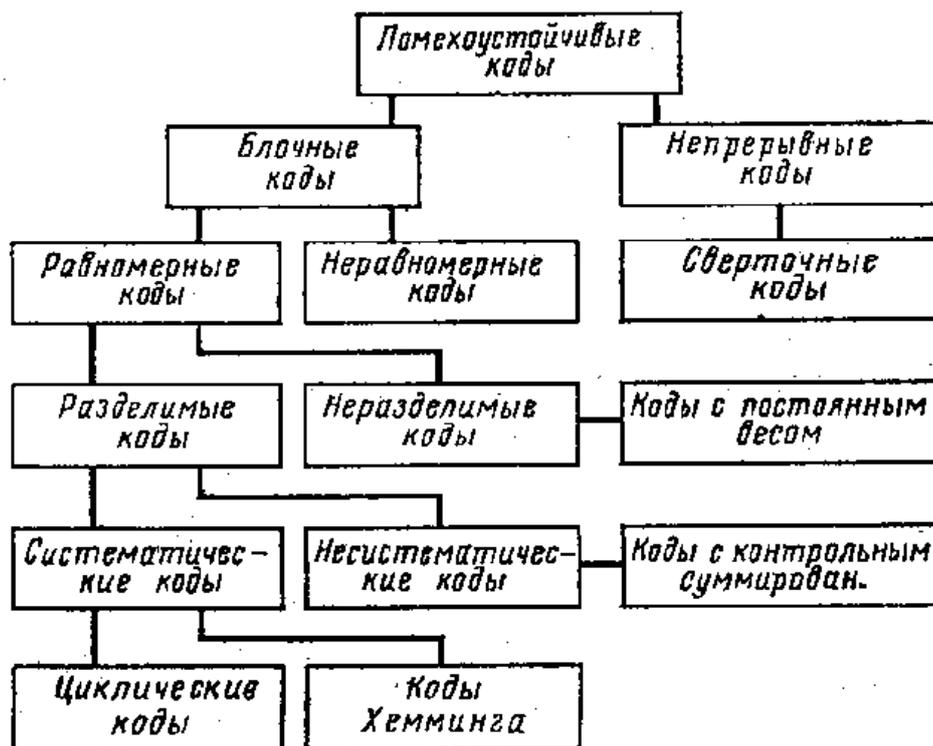


Рисунок 8.2

Непрерывные коды, к которым относятся рекуррентные (называемые также сверточными), представляют собой непрерывные последовательности единичных элементов, не разделенные на блоки. В таких кодах избыточные разряды помещаются в определенном порядке между информационными. В разделимых кодах элементы информационной и проверочной частей кодовой комбинации всегда стоят на определенных местах. В неразделимых кодах деление на информационные и проверочные разряды отсутствует. К таким кодам относится код с постоянным весом. Код называется линейным, если любая разрешенная кодовая комбинация может быть получена в результате линейной операции над набором k ненулевых линейно-независимых кодовых комбинаций. В систематических кодах проверочные элементы формируются линейным преобразованием информационных.

Лекция 9. Циклические коды

Содержание лекции:

- Циклические коды. Обнаружение ошибок при циклическом кодировании. Определение места ошибки. Выбор образующего полинома.

Цель лекции:

– получить знания основ помехоустойчивого кодирования.

Циклические коды относятся к классу линейных систематических кодов и обладают всеми их свойствами. Удобно рассматривать кодовые комбинации

циклического кода не в виде последовательности нулей и единиц, а в виде полинома некоторой степени. Любое число в любой системе счисления можно представить в общем виде как:

$$F(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0, \quad (9.1)$$

где x – основание системы счисления; a_i – цифры данной системы счисления; $n-1, n-2, \dots$ – показатели степени, в которую возводится основание, и одновременно порядковые номера, которые занимают разряды, начиная от старшего, кончая нулевым. Для двоичной системы $x=2$, а a_i – либо «0», либо «1». Очевидно, что при записи кодовой комбинации в виде многочлена единица в i -м разряде записывается членом x^{i-1} , а нуль вообще не записывается.

Коды названы циклическими потому, что циклический сдвиг $a_{n-2}, a_{n-3}, \dots, a_2, a_1, a_0, a_{n-1}$ разрешенной комбинации $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ также является разрешенной комбинацией. Такая циклическая перестановка при использовании представления в виде полиномов появляется в результате умножения данного полинома на x . Если $V(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$, то $V(x)x = a_{n-1}x^n + a_{n-2}x^{n-1} + \dots + a_1x^2 + a_0x$. Чтобы степень многочлена не превышала $n-1$, член $a_{n-1}x^n$ заменяется единицей: $V(x)x = F(x) = a_{n-2}x^{n-1} + \dots + a_1x^2 + a_0x + a_{n-1}$.

Например, имеем кодовую комбинацию $0101110 \rightarrow x^5 + x^3 + x^2 + x$. Сдвинем ее на один разряд: $1011100 \rightarrow x^6 + x^4 + x^3 + x^2$.

Очевидно, что $x^6 + x^4 + x^3 + x^2 = x(x^5 + x^3 + x^2 + x)$.

Теория построения циклических кодов базируется на разделах высшей алгебры, изучающей свойства двоичных многочленов. Особую роль в этой теории играют так называемые *неприводимые* многочлены, т.е. полиномы, которые не могут быть представлены в виде произведения многочленов низших степеней. Такой многочлен делится только на самого себя и на единицу. Из высшей алгебры известно, что на неприводимый многочлен делится без остатка двучлен $x^n + 1$. В теории кодирования неприводимые многочлены называются *образующими полиномами*, поскольку они «образуют» разрешенные кодовые комбинации. В качестве образующих многочленов используют примитивные многочлены.

Идея построения циклического кода сводится к тому, что полином, представляющий информационную часть кодовой комбинации, нужно преобразовать в полином степени не более $n-1$, который без остатка делится на образующий полином $P(x)$. Существенно при этом, что степень последнего соответствует числу разрядов проверочной части кодовой комбинации. В циклических кодах проверочная часть получается сразу, т.е. используется алгоритм $\{b_i\} = R\{a_k\}$. Тогда все разрешенные комбинации циклического кода, представленные в виде полиномов, будут обладать одним признаком: делимостью без остатка на образующий полином $P(x)$.

Построение разрешенной кодовой комбинации сводится к следующему:

- 1) Представляем информационную часть кодовой комбинации длиной k в

виде полинома $Q(x)$.

2) Умножаем $Q(x)$ на одночлен x^r и получаем $Q(x)x^r$, т. е. производим сдвиг k -разрядной кодовой комбинации на r разрядов.

3) Делим многочлен $Q(x)x^r$ на образующий полином $P(x)$, степень которого равна r .

В результате умножения $Q(x)$ на x^r степень каждого одночлена, входящего в $Q(x)$, повышается на r . При делении произведения $x^r Q(x)$ на образующий полином степени r получается частное $C(x)$ такой же степени, что и $Q(x)$. Результаты этих операций можно представить в виде:

$$\frac{Q(x)x^r}{P(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{P(x)}, \quad (9.2)$$

где $R(x)$ — остаток от деления $Q(x)x^r$ на $P(x)$. Поскольку $C(x)$ имеет такую же степень, что и $Q(x)$, то $C(x)$ представляет собой кодовую комбинацию того же k -разрядного кода. Степень остатка не может быть, очевидно, больше степени образующего полинома, т. е. его наивысшая степень равна $r-1$. Следовательно, наибольшее число разрядов остатка не превышает r . Умножив обе части (9.2) на $P(x)$, получим:

$$F(x) = C(x)P(x) = Q(x)x^r + R(x), \quad (9.2)$$

(знак вычитания заменяется знаком сложения по модулю 2). Очевидно, что $F(x)$ делится на $P(x)$ без остатка. Полином $F(x)$ представляет собой разрешенную кодовую комбинацию циклического кода. Из (9.2) следует, что разрешенную кодовую комбинацию циклического кода можно получить умножением кодовой комбинации $Q(x)$ простого кода на одночлен x^r и добавлением к этому произведению остатка $R(x)$, полученного в результате деления произведения на образующий полином $P(x)$.

Обнаружение ошибок при циклическом кодировании сводится к делению принятой кодовой комбинации на тот же образующий полином, который использовался при кодировании (вид его, разумеется, должен быть известен на приеме). Если ошибок в принятой кодовой комбинации нет (или они такие, что данную передаваемую кодовую комбинацию превращают в другую разрешенную), то деление на образующий полином произведется без остатка. Если при делении получится остаток, то это и свидетельствует о наличии ошибки. Остаток от деления в циклических кодах играет роль синдрома. Остаток от деления — синдром циклического кода, не равный нулю, — свидетельствует о *наличии ошибки*. В кодах с образующим полиномом степени r остаток представляется в виде полинома, степень которого меньше r . Это означает, что количество различных ненулевых остатков может быть равным $2^r - 1$. Номер разряда, в котором произошла ошибка, однозначно связан с видом получающегося при этом ненулевого остатка. Это позволяет по виду синдрома (остатка)

определить место ошибки. Таким образом, для *исправления ошибок* необходимо обеспечить условие, при котором количество различных ненулевых остатков будет равно количеству элементов n (при исправлении одной ошибки) или числу комбинаций из n по $t_{и}$.

Для *определения места ошибки* в циклическом коде существует несколько методов, основанных на анализе синдрома $P(x)$. Принятую кодовую комбинацию $F'(x)$ можно представить в виде $F'(x) = F(x) \oplus E(x)$, где $E(x)$ — многочлен ошибки. Остаток от деления принятой кодовой комбинации $F'_n(x)$ на $P(x)$ равен остатку от деления на $P(x)$ кодовой комбинации ошибки $E_n(x)$, если $F_n(x) = F'_n(x) \oplus E_n(x)$. Это условие справедливо, если код способен исправлять количество ошибок $t_{и}$, равное или меньшее веса комбинации $E_n(0,1)$. На основе этого свойства можно заключить, что синдром не зависит от переданной кодовой комбинации, а определяется лишь наличием ошибок. Указанное свойство можно использовать для определения ошибочно принятого элемента. Предположим, что ошибка произошла в старшем разряде переданной кодовой комбинации a_1 . В этом случае $R_1(x)$ есть остаток от деления принятой комбинации $F_n(x)$ на $P(x)$. Такой же остаток $R_1(x)$ получается, если разделить на $P(x)$ комбинацию ошибки, т. е. многочлен x^{n-1} . Но такой же остаток получится при ошибке в разряде a_2 , если $F'_n(x)$ умножить на x . То же будет и при ошибке в разряде a_3 , если $F_n(x)$ умножить на x^2 , и т. д.

Принципиальная электрическая схема кодера циклического кода (7,4) приведена на рисунке 9.1. Кодер построен на многотактном фильтре (МФ), в качестве которого используется регистр. Количество D-триггеров в МФ соответствует степени порождающего полинома. Также в состав МФ входят логические элементы сложения по модулю два, их количество на один меньше ненулевых членов порождающего полинома. Данные элементы располагаются на месте нулевого члена порождающего полинома и после триггера соответствующего члену x^0 . В данной схеме МФ соответствует полиному $G(x) = x^3 + x^2 + x^0$. Также в схему кодера входят два ключа, в качестве которых используются логические элементы И, тактового RS-триггера и логического элемента ИЛИ.

Формирование кодовой комбинации на выходе схемы происходит за 7 тактов. За первые четыре такта на выход поступают информационные разряды: тактовые импульсы подаются на установочный вход единицы «S» RS-триггера, в результате чего открывается ключ К1 и входные информационные разряды через элемент ИЛИ поступают на выход. Одновременно информационные разряды поступают в МФ, где осуществляется вычисление проверочных разрядов. С пятого по седьмой такты формируются проверочные разряды. При этом тактовые импульсы подаются на установочный вход нуля «R» RS-триггера. Ключ К1 закрывается, а К2 открывается, и проверочные разряды из МФ через К2 и элемент ИЛИ поступают на выход.

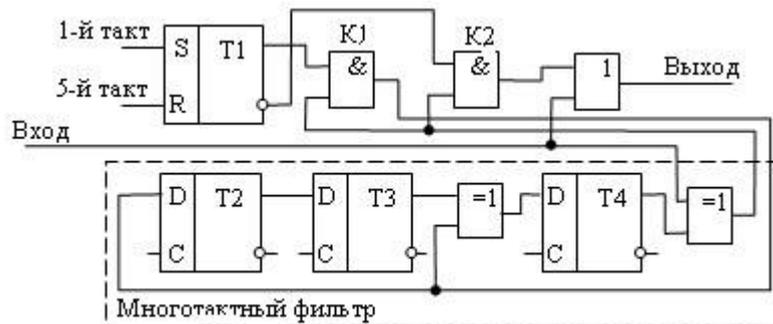


Рисунок 9.1 – Принципиальная электрическая схема кодера циклического кода (7,4)

Лекция 10. Потенциальные возможности дискретных каналов связи

Содержание лекции:

- основной понятийный аппарат теории информации. Поток ошибок в реальных каналах. Теоремы Шеннона.

Цель лекции:

- сформулировать исходные понятия: частное количество информации, энтропия источника, количество информации, передаваемой по каналу связи (взаимная информация).

Пусть дискретный источник сообщений выдал некоторую последовательность символов \mathbf{a} . Дадим формальное определение *частного количества информации* $i(\mathbf{a})$, содержащейся в этом сообщении, исходя из следующих естественных требований:

а) количество информации $i(d)$ должно быть аддитивной функцией, т.е. для пары взаимно независимых сообщений $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ оно должно равняться сумме количества информации в каждом из них, т.е. $i(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = i(\mathbf{a}_1) + i(\mathbf{a}_2)$;

б) количество информации, содержащейся в достоверном сообщении (имеющем вероятность $P(\mathbf{a}) = 1$), равно нулю;

в) количество информации должно зависеть только от вероятности переданного сообщения, т.е. $i(d) = f(P(\mathbf{a}))$;

г) количество информации должно быть непрерывной функцией от $P(\mathbf{a})$.

Можно показать, что единственная функция, удовлетворяющая всем этим условиям, имеет вид:

$$i(\mathbf{a}) = -\log P(\mathbf{a}) \geq 0. \quad (10.1)$$

Основание логарифма в (10.1) может быть выбрано произвольным, что влияет лишь на единицу измерения количества информации. Если в качестве основания выбрано 2, то информация измеряется в двоичных единицах или в

битах, а если e (как в натуральных логарифмах), то информация будет измеряться в натуральных единицах, или в *нотах*. Из соотношения (10.1) видно, что количество информации, содержащейся в сообщении, тем больше, чем меньше вероятность его появления, причём количество информации, содержащейся в сообщении о "невозможном" событии, равно бесконечности.

Энтропия источника сообщений. Для того чтобы получить исчерпывающую информационную характеристику источника сообщений, который, вообще говоря, может выдавать последовательности неограниченной длины, нужно вычислить предел среднего количества информации $i(a^{[n]})$, отнесённый к одному символу последовательности. Полученная величина, обозначенная через $H(A)$, называется *энтропией* источника сообщений, т.е. если источник не обладает памятью, то, используя свойство логарифмической функции, легко показать, что его энтропия будет:

$$H(A) = -\sum_{i=0}^{K-1} P(a_i) \log P(a_i), \quad (10.2)$$

где $P(a_i)$, $i=0,1,\dots,K-1$, — вероятности выдачи источником символов $a_i \in A$, причём они не зависят от номера элемента последовательности, так как источник является стационарным. Прежде чем пояснить наглядный смысл нового понятия энтропии, опишем её основные свойства:

а) $H(A) \geq 0$, причём $H(A) = 0$ тогда и только тогда, когда одна из последовательностей имеет единичную вероятность, а все остальные — нулевую. (Это свойство очевидно из определения энтропии);

б) для любого стационарного источника сообщений:

$$H(A) \leq -\sum_{i=0}^{K-1} P(a_i) \log P(a_i). \quad (8.3)$$

Поскольку выражение в правой части (10.3) — это энтропия источника без памяти, то данное свойство означает, что память уменьшает энтропию источника;

в) для любого стационарного источника сообщений:

$$H(A) \leq \log K = H_{\max}(A), \quad (10.4)$$

Причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда источник не имеет памяти и все его символы равновероятны.

Воспользовавшись свойствами 1–3, можно наглядно пояснить смысл понятия энтропии — это средняя информативность источника на один символ, определяющая "неожиданность" или "непредсказуемость" выдаваемых им сообщений. Полностью детерминированный источник, выдающий лишь одну, заранее известную последовательность, обладает нулевой информативностью.

Наоборот, наиболее "хаотический" источник, выдающий взаимно независимые и равновероятные символы, обладает максимальной информативностью. Энтропия источника сообщений тесно связана с понятием его *избыточности*, которое формально определяется следующим образом

$$\chi = \frac{\log K - H(A)}{\log K} \cdot 100\% = \left(1 - \frac{H(A)}{\log K}\right) \cdot 100\% \geq 0. \quad (10.5)$$

Как видно из выражения (10.5), чем больше энтропия источника, тем меньше его избыточность и наоборот. Понятие «*избыточность*» определяется средним количеством информации, содержащемся в передаваемом сообщении. При двоичном кодировании в условиях равновероятности передаваемых двоичных символов «0» и «1» каждый единичный элемент содержит максимальное количество информации: $I_{\max} = \log_2 R = \log_2 2 = 1$ бит, где $R = 2$ — основание кода. Если же единичные элементы поступают в канал с разными вероятностями, то один единичный элемент переносит меньшее количество информации. В этом случае говорят, что в сигнале есть избыточность. Ее можно оценить как отношение $I_{\max} / I_{cp} > 1$. Наиболее эффективно избыточность используется при применении помехоустойчивых кодов для исправления ошибок. При этом в кодовые комбинации вводится постоянная, заранее рассчитанная избыточность (дополнительные элементы, сформированные по известным правилам).

Если источник сообщений имеет фиксированную скорость $v_n = \frac{1}{T_n}$ симв/с, то определим *производительность* источника $H'(A)$ как энтропию в единицу времени, (секунду):

$$H'(A) = v_n H(A). \quad (10.6)$$

Количество информации, передаваемой по каналу связи (взаимная информация). Определим *условную энтропию* $H(X|Y)$ входа канала X при известном выходе Y как МО. В частном случае канала без памяти:

$$H(X|Y) = - \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{m-1} P(x_i, y_j) \log P(x_i | y_j). \quad (10.7)$$

Условная энтропия обладает следующими свойствами:

- а) $H(X|Y) \geq 0$. (Доказывается по определению $H(X|Y)$);
- б) если вход и выход канала связаны взаимно однозначно, т.е.

$$P(x|y) = \begin{cases} 1, & y = \tilde{y}(x) \in Y^n \\ 0, & y \neq \tilde{y}(x), \tilde{y}(x_1) \neq \tilde{y}(x_2), \text{ при } x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

то $H(X|Y) = 0$ (Это свойство очевидно);

$$\text{в) } H(X|Y) \leq H(X); \quad (10.8)$$

$$\text{г) } H(X|Y) = H(X), \quad (10.9)$$

тогда и только тогда, когда $P(x|y) = P(x)$ при всех $x \in X$, $y \in Y$, т.е. когда x и y взаимно независимы.

Приведённые выше свойства позволяют наглядно пояснить смысл понятия условной энтропии $H(X|Y)$. Это средняя информация, теряемая с каждым символом в канале связи из-за помех.

Определим *количество информации*, передаваемой по каналу связи $I(X, Y)$, или взаимную информацию между выходом Y и входом X как разность между количеством информации, поступающей на вход (которое, как мы знаем, равно энтропии входа $H(X)$), и количеством информации, потерянном в канале связи (которое, как мы только что выяснили, равно условной энтропии $H(X|Y)$).

$$I(X, Y) = H(X) - H(X|Y). \quad (10.10)$$

Эта величина обладает следующими свойствами:

а) $I(X, Y) = I(Y, X) = H(Y) - H(Y|X)$;

б) $I(X, Y) \geq 0$. (Следует непосредственно из свойства 3 условной энтропии);

в) $I(X, Y) = 0$ тогда и только тогда, когда вход и выход канала статистически независимы, т.е. $P(y|x) = p(y)$ при всех $x \in X$, $y \in Y$. (Следует непосредственно из свойства 4 условной энтропии.)

Определение взаимной информации иллюстрируется рисунком 10.1.

Если для канала связи задана скорость передачи v_k [симв/с], то аналогично определению производительности источника можно определить скорость передачи информации по каналу связи $I(X, Y)$:

$$I'(X, Y) = v_k I(X, Y) \text{ [бит/с]}. \quad (10.11)$$

Определим *пропускную способность* C дискретного канала связи с помехами как максимум количества информации $I(X, Y)$ по всевозможным распределениям $p(x)$ входа канала, т.е.:

$$C = \max_{P(x)} I(X, Y) \text{ и } C = I_{cp} / \tau_0, \quad (10.12)$$

где τ_0 — длительность передаваемого единичного элемента. Из определения видно, что пропускная способность канала связи зависит только от свойств самого канала, т.е. входного и выходного алфавитов X , Y и заданного на них условного распределения вероятностей $p(y|x)$, $x \in X$, $y \in Y$, и не зависит от того источника, который подключён ко входу канала. Поскольку пропускная способность определяется в виде (10.12), то систему передачи надо строить так, чтобы I_{cp} было максимальным, т.е. требовать, чтобы среднее количество информации I_{cp} было равно I_{max} (1 бит для двоичного кода).

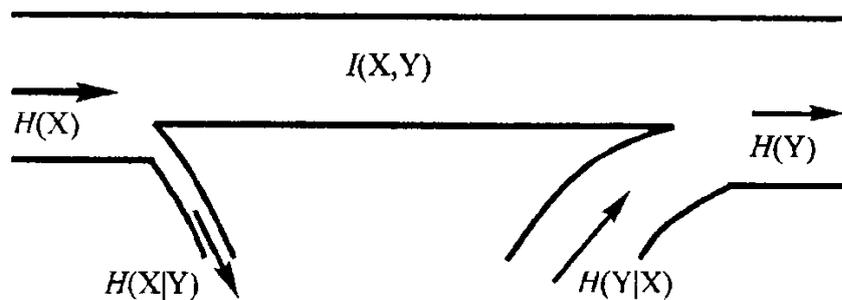


Рисунок 10.1 – Иллюстрация передачи информации по каналу с помехами

Согласно *теореме Шеннона-Хартли* пропускная способность канала с аддитивным гауссовым шумом (AWGN – additive white Gaussian noise) является функцией по мощности принятого сигнала S , средней мощности шума N и ширины полосы пропускания W :

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right). \quad (10.13)$$

Если W измеряется в Гц, а логарифм берется по основанию 2, то пропускная способность будет иметь размерность бит/с.

Лекция 11. Спектральный анализ непериодических сигналов. Преобразование Фурье. Спектральные плотности неинтегрируемых сигналов. Энергетические спектры сигналов. Принципы корреляционного анализа.

Содержание лекции:

- периодическое продолжение импульса. Понятие спектральной плотности сигнала. Обратное преобразование Фурье. Условие существования спектральной плотности сигнала. Связь между длительностью импульса и шириной его спектра. Обобщенная формула Рэлея. Взаимная спектральная плотность сигналов. Энергетический спектр. Корреляционный анализ сигналов. Сравнение сигналов, сдвинутых во времени, автокорреляционная функция сигнала. Связь между энергетическим спектром сигнала и его автокорреляционной функцией. Взаимокорреляционная функция двух сигналов. Некоторые свойства взаимокорреляционной функции. Связь ВКФ с взаимной спектральной плотностью.

Цель лекции:

- получить спектральные характеристики непериодических (импульсных) сигналов методом обобщения рядов Фурье. Определить требования к ширине полосы пропускания радиотехнического устройства.

Представить сигналы посредством их спектральных плотностей. Использовать энергетический спектр для получения различных инженерных оценок. Понять, как возникает потребность в сигналах со специально выбранными свойствами. Показать связь между АКФ и энергетическим спектром сигнала. Ввести характеристику совокупности двух сигналов — их *взаимокорреляционную функцию* (ВКФ).

Пусть $s(t)$ — одиночный импульсный сигнал конечной длительности. Дополнив его мысленно такими же сигналами, периодически следующими через некоторый интервал времени T , получим изученную ранее периодическую последовательность $S_{\text{пер}}(t)$, которая может быть представлена в виде комплексного ряда Фурье (3.12). Для того чтобы вернуться к одиночному импульсному сигналу, устремим к бесконечности период повторения T . При этом очевидно:

а) частоты соседних гармоник $n\omega_1$ и $(n + l)\omega_1$ окажутся сколь угодно близкими, так что в формулах (3.12) дискретную переменную $n\omega_1$ можно заменить непрерывной переменной ω — текущей частотой;

б) амплитудные коэффициенты C_n станут неограниченными малыми из-за наличия величины T в знаменателе формулы (3.12).

Наша задача состоит теперь в нахождении предельного вида формулы (3.12) при $T \rightarrow \infty$. Рассмотрим малый интервал частот $\Delta\omega$, образующий окрестность некоторого выбранного значения частоты ω_0 . В пределах этого интервала будет содержаться $N = \Delta\omega/\omega_1 = \Delta\omega T/(2\pi)$ отдельных пар спектральных составляющих, частоты которых отличаются сколь угодно мало. Поэтому составляющие можно складывать так, как *будто все они имеют одну и ту же частоту и характеризуются одинаковыми комплексными амплитудами*

$$2C_n = \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt.$$

В результате находим комплексную амплитуду эквивалентного гармонического сигнала, отображающего вклад всех спектральных составляющих, содержащихся внутри интервала $\Delta\omega$:

$$\Delta A_{\omega_0} = \frac{2N}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega_0 t} dt. \quad (11.1)$$

$$\text{Функция:} \quad S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad (11.2)$$

носит название *спектральной плотности* сигнала $s(t)$. Формула (11.2) осуществляет *преобразование Фурье* данного сигнала.

Решим обратную задачу спектральной теории сигналов: найдем сигнал по его спектральной плотности, которую будем считать заданной:

$$s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} [n\omega_1 - (n-1)\omega_1].$$

Поскольку в пределе частотные интервалы между соседними гармониками неограниченно сокращаются, последнюю сумму следует заменить интегралом:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (11.3)$$

Эта важная формула называется *обратным преобразованием Фурье* для сигнала $s(t)$.

Спектральное представление сигналов открывает прямой путь к анализу прохождения сигналов через широкий класс радиотехнических цепей, устройств и систем.

Сигналу $s(t)$ можно сопоставить его спектральную плотность $s(\omega)$ в том случае, если этот сигнал *абсолютно интегрируем*, т. е. существует интеграл:

$$\int |s(t)| dt < \infty.$$

Подобное условие значительно сужает класс допустимых сигналов. Так, в указанном классическом смысле невозможно говорить о спектральной плотности гармонического сигнала $u(t) = U_m \cos \omega_0 t$, существующего на всей бесконечной оси времени.

Важный вывод: *чем меньше длительность импульса, тем шире его спектр.*

Под шириной спектра понимают частотный интервал, в пределах которого модуль спектральной плотности не меньше некоторого наперед заданного уровня, например, изменяется в пределах от $|S|_{\max}$, до $0.1|S|_{\max}$.

Произведение ширины спектра импульса на его длительность есть постоянное число, зависящее только от формы импульса и, как правило, имеющее порядок единицы: $f_s \tau_u = O(1)$. Чем короче длительность импульса, тем шире должна быть полоса пропускания соответствующего усилителя. Короткие импульсные помехи имеют широкий спектр и поэтому могут ухудшать условия радиоприема в значительной полосе частот.

Математические модели многих сигналов, широко применяемых в радиотехнике, не удовлетворяют условию абсолютной интегрируемости, поэтому метод преобразований Фурье в обычном виде к ним неприменим. Однако можно говорить о спектральных плотностях таких сигналов, если допустить, что эти плотности описываются обобщенными функциями.

Пусть два сигнала $u(t)$ и $v(t)$, в общем случае комплекснозначные, определены своими обратными преобразованиями Фурье.

Найдем скалярное произведение этих сигналов, выразив один из них, например $v(t)$, через его спектральную плотность:

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int U(\omega) V^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} (U, V). \quad (11.4)$$

Полученное соотношение представляет собой обобщенную формулу Рэля. Легко запоминающаяся трактовка этой формулы такова: скалярное произведение двух сигналов с точностью до коэффициента пропорционально скалярному произведению их спектральных плотностей. Если сигналы тождественно совпадают, то скалярное произведение становится равным энергии:

$$E_u = (u, u) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt. \quad (11.5)$$

Назовем *взаимным энергетическим спектром* вещественных сигналов $u(t)$ и $v(t)$ функцию:

$$W_{uv}(\omega) = U(\omega)V^*(\omega). \quad (11.6)$$

Нетрудно заметить, что $\text{Re } W_{uv}(\omega)$ — четная, а $\text{Im } W_{uv}(\omega)$ — нечетная функция частоты. Вклад в интеграл (11.6) дает только вещественная часть, поэтому:

$$(u, v) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re } W_{uv}(\omega) d\omega. \quad (11.7)$$

Последняя формула дает возможность проанализировать «тонкую структуру» взаимосвязи сигналов.

Обобщенная формула Рэля указывает на принципиальный путь, позволяющий уменьшить степень связи между двумя сигналами, добившись в пределе их ортогональности. Для этого один из сигналов необходимо подвергнуть обработке в особой физической системе, называемой *частотным фильтром*. К этому фильтру предъявляется требование: не пропускать на выход спектральные составляющие, находящиеся в пределах частотного интервала, где вещественная часть взаимного энергетического спектра велика. Частотная зависимость коэффициента передачи такого *ортогонализирующего фильтра* будет обладать резко выраженным минимумом в пределах указанной области частот.

Спектральное представление энергии сигнала легко получить из обобщенной формулы Рэля, если в ней сигналы $u(t)$ и $v(t)$ считать одинаковыми. Формула (11.4), выражающая спектральную плотность энергии, приобретает вид:

$$W_u(\omega) = U(\omega)U^*(\omega) = |U(\omega)|^2. \quad (11.8)$$

Величина $W_u(\omega)$ носит название *спектральной плотности энергии* сигнала $u(t)$ или, короче, его *энергетического спектра*. Формула (11.5) при этом запишется так:

$$E_u = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_u(\omega) d\omega. \quad (11.9)$$

Соотношение (11.9) известно как *формула Рэля* (в узком смысле), которая констатирует следующее: энергия любого сигнала есть результат суммирования вкладов от различных интервалов частотной оси.

Изучая сигнал с помощью его энергетического спектра, мы неизбежно теряем информацию, которая заключена в фазовом спектре сигнала, поскольку в соответствии с формулой (11.8) энергетический спектр есть квадрат модуля спектральной плотности и не зависит от ее фазы.

Для количественного определения степени отличия сигнала $u(t)$ и его смещенной во времени копии $u(t-\tau)$ принято вводить *автокорреляционную функцию* (АКФ) сигнала $u(t)$, равную скалярному произведению сигнала и копии:

$$B_u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)u(t-\tau)dt. \quad (11.10)$$

В дальнейшем будем предполагать, что исследуемый сигнал имеет локализованный во времени импульсный характер, так что интеграл вида (11.10) заведомо существует.

К числу простейших *свойств АКФ* можно отнести ее четность:

$$B_u(\tau) = B_u(-\tau). \quad (11.11)$$

Наконец, важное свойство автокорреляционной функции состоит в следующем: при любом значении временного сдвига τ модуль АКФ не превосходит энергии сигнала:

$$|B_u(\tau)| \leq B_u(0) = E_u. \quad (11.12)$$

Итак, АКФ представляется симметричной кривой с центральным максимумом, который всегда положителен. При этом в зависимости от вида сигнала $u(t)$ автокорреляционная функция может иметь как монотонно убывающий, так и колеблющийся характер.

Действительно, в соответствии с формулой (11.10) АКФ есть скалярное произведение: $B_u(\tau) = (u, u_\tau)$. Здесь символом u_τ обозначена смещенная во времени копия сигнала $u(t-\tau)$.

Обратившись к обобщенной формуле Рэлея, можно записать равенство:

$$(u, u_\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega)U_\tau^*(\omega)d\omega.$$

Спектральная плотность смещенного во времени сигнала $U_\tau(\omega) = U(\omega)\exp(-j\omega\tau)$, откуда $U_\tau^*(\omega) = U^*(\omega)\exp(j\omega\tau)$.

Таким образом, приходим к результату:

$$B_u(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (11.13)$$

Квадрат модуля спектральной плотности, как известно, представляет собой энергетический спектр сигнала. Итак, энергетический спектр и автокорреляционная функция связаны преобразованием Фурье.

Имеется и обратное соотношение:

$$|U(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} B_u(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (11.14)$$

Эти результаты принципиально важны по двум причинам. Во-первых, оказывается возможным оценивать корреляционные свойства сигналов, исходя из распределения их энергии по спектру. Чем шире полоса частот сигнала, тем уже основной лепесток автокорреляционной функции и тем совершеннее сигнал с точки зрения возможности точного измерения момента его начала.

Во-вторых, формулы (11.13) и (11.14) указывают путь экспериментального определения энергетического спектра. Часто удобнее вначале получить автокорреляционную функцию, а затем, используя преобразование Фурье, найти энергетический спектр сигнала.

Обобщая формулу (11.10), назовем *взаимокорреляционной функцией* двух вещественных сигналов $u(t)$ и $v(t)$ скалярное произведение вида:

$$B_{uv}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x+\tau)v(x)dx. \quad (11.15)$$

Поэтому:

$$B_{uv}(\tau) = B_{vu}(-\tau). \quad (11.16)$$

В отличие от автокорреляционной функции одиночного сигнала, ВКФ, описывающая свойства системы двух неодинаковых сигналов, не является четной функцией аргумента τ : $B_{uv}(\tau) \neq B_{uv}(-\tau)$.

Если рассматриваемые сигналы имеют конечные энергии, то их взаимокорреляционная функция ограничена. Это утверждение следует из неравенства Коши — Буняковского: $|B_{uv}(\tau)| = |(u, v_\tau)| \leq \|u\| \cdot \|v_\tau\|$, откуда:

$$|B_{uv}(\tau)| \leq \|u\| \cdot \|v\|, \quad (11.17)$$

так как сдвиг сигнала во времени не влияет на значение его нормы.

Следует обратить внимание на то, что при $\tau=0$ значения ВКФ вовсе не обязаны достигать максимума.

Выразим ВКФ двух сигналов через их спектральные характеристики. На основании обобщенной формулы Рэлея:

$$B_{uv}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega)V^*(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Имея в виду, что величина $W_{uv}(\omega) = U(\omega)V^*(\omega)$ есть взаимный энергетический спектр сигналов $u(t)$ и $v(t)$, определенный в бесконечном интервале частот $-\infty < \omega < \infty$, приходим к выводу: *взаимокорреляционная функция и взаимный энергетический спектр двух сигналов связаны парой преобразований Фурье.*

Лекция 12. Модель дискретно-непрерывного канала. Критерии качества и правила приема дискретных сообщений. Теория помехоустойчивости систем передачи дискретных сообщений. Оптимальный приемник с согласованным фильтром. Помехоустойчивость оптимального когерентного приема

Содержание лекции:

- модель дискретно-непрерывного канала. Критерий Котельникова. Оптимальные алгоритмы приема при полностью известных сигналах (когерентный прием). Реализация оптимального алгоритма приема при полностью известных сигналах (когерентный прием) на СФ. Помехоустойчивость оптимального когерентного приема.

Цель лекции:

- дать математическое описание канала. Синтезировать оптимальный демодулятор. Определить потенциальную помехоустойчивость для двоичной системы с аддитивным БГШ в канале, когда при приеме точно известны оба ожидаемых сигнала: $s_1(t)$ и $s_0(t)$, полагая, что априорные вероятности этих сигналов одинаковы.

Дискретно-непрерывный канал с независимыми символами b_i , на входе и непрерывным сигналом $z(t)$ на выходе описывается формулой Байеса $P(b_i | z) = \frac{P(b_i)w[z | b_i]}{w(z)}$, где безусловная плотность вероятности принимаемого колебания (функцией правдоподобия):

$$w[z] = \sum_{i=0}^{m-1} P(b_i)w[z | b_i], \quad (14.1)$$

где $P(b_i)$ — априорная вероятность передачи символа b_i (т.е. та вероятность, которая имеет место до наблюдения и анализа и определяется статистикой источника сообщения и правилом кодирования).

Критерий идеального наблюдателя обеспечивается решающей схемой (приёмником Котельникова), построенной по правилу максимума апостериорной вероятности — решение \hat{b}_i , принимается в том случае, если выполняется система из m -неравенств:

$$P(b_i)w(z | b_i) > P(b_j)w(z | b_j), \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad j \neq i, \quad (14.2)$$

Вероятность того, что это решение правильно, равна *апостериорной вероятности символа b_i* (т.е. вероятности, определённой после опыта, заключающегося в наблюдении и анализе сигнала $z(t)$) $P(b_i|z(t))$.

Для двоичной системы правило сводится к проверке неравенства:

$$P(1)w(z | 1) > P(0)w(z | 0), \quad (14.3)$$

при выполнении которого регистрируется символ 1, а при невыполнении — 0.

Для построения решающей схемы по правилу критерия идеального наблюдателя необходимо знать априорные вероятности символов $P(b_i)$, а также свойства модулятора и канала, определяющие условные плотности $w(z|b_i)$, j – функции правдоподобия.

Критерий Котельникова можно записать иначе. Решение о том, что передавался символ b_i , должно приниматься, если для всех $j \neq i$ выполняются $m - 1$ неравенств:

$$\frac{w(z | b_i)}{w(z | b_j)} > \frac{P(b_j)}{P(b_i)}. \quad (14.4)$$

Отношение в левой части этого неравенства называется *отношением правдоподобия* двух гипотез: о том, что передавался символ b_i , и о том, что передавался символ b_j . Его обозначают Λ_{ij} .

Отношение правдоподобия $\frac{w(z | b_i)}{w(z | b_u)} = \Lambda_{iu}$. Тогда правило (14.4) можно записать так:

$$\Lambda_i > \Lambda_j \text{ при всех } j \neq i. \quad (14.5)$$

Такое правило максимума правдоподобия реализует критерий идеального наблюдателя при том условии, что все символы передаются равновероятно.

Для двоичной системы правило (14.5) сводится к проверке неравенства:

$$\Lambda_1 > \Lambda_0. \quad (14.6)$$

В технике связи преимущественно применяют правило максимального правдоподобия (14.5), (14.6). Изменив решающую схему на схему, построенную по правилу максимальной апостериорной вероятности (14.2), реализующему критерий идеального наблюдателя можно было бы уменьшить вероятность ошибок. При этом, очевидно, пришлось бы сократить области приёма маловероятных и расширить области высоковероятных символов. В результате редко передаваемые символы принимались бы менее надёжно, нежели часто передаваемые. Но редкие символы несут больше информации, чем частые, что может привести к увеличению потери информации при демодуляции.

Предположим, что все искажения в канале строго детерминированы и случайным является только гауссовский аддитивный шум $n(t)$, который вначале полагаем белым, со спектральной плотностью N_0 . Это значит, что при передаче

символа b_i ($i=0,1,\dots,m-1$) принимаемое колебание можно описать моделью: $z(t)=s_i(t)+n(t)$, $0 \leq t \leq T$, где все $s_i(t)=\gamma f(t-\tau-kT, b_k^{(i)}) = \gamma u_i(t-\tau)$ известны.

Определим в этих условиях алгоритм работы оптимального (т.е. основанного на правиле максимального правдоподобия) демодулятора, анализирующего сигнал на тактовом интервале $0 \dots T$.

Правило приёма сводится к проверке системы неравенств:

$$\int_0^T z(t)s_i(t)dt - 0,5E_i > \int_0^T z(t)s_j(t)dt - 0,5E_j, \quad j \neq i, \quad (14.7)$$

где $E_i = \int s_i^2(t)dt$ — энергия ожидаемого сигнала $S_i(t)$. Выражение (14.7)

определяет те операции (*алгоритм приёма*), которые должен совершать оптимальный приёмник над входным колебанием.

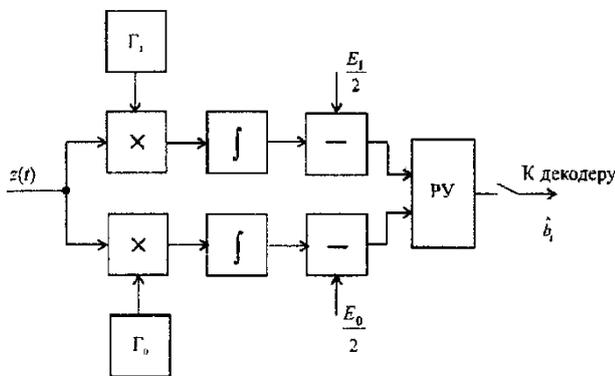


Рисунок 14.1

Устройство, непосредственно вычисляющее скалярное произведение (или *корреляционный интеграл*):

$$(z, s_i) = \int_0^T z(t)s_i(t)dt, \quad (14.8)$$

называют *активным фильтром* или *коррелятором*, поэтому приёмник, реализующий алгоритм (14.7), называют *корреляционным*.

На рисунке 14.1 показана структурная схема приёмного устройства, работающего в соответствии с (14.7).

Из (14.7) видно, что правило решения не изменится, если сигнал $z(t)$, поступающий на вход демодулятора, умножить на любое число. Поэтому система, в которой все реализации сигнала имеют равную энергию, отличается тем, что оптимальный алгоритм приёма в ней не требует знания коэффициента передачи γ канала. Эта особенность обусловила широкое распространение систем сигналов с равной энергией, что важно для каналов с замираниями, в которых коэффициент передачи флуктуирует. Заметим, что для двоичной системы неравенство (14.7) можно представить в более простом виде:

$$\int_0^T z(t)s_{\Delta}(t)dt > \lambda, \quad (14.9)$$

где $s_{\Delta}(t)=s_1(t)-s_0(t)$ — разностный сигнал; $\lambda = 0,5(E_1-E_0)$ — *пороговый уровень*.

Скалярное произведение (14.9) можно вычислить не только с помощью активного фильтра (коррелятора), но и с помощью описанного линейного фильтра с постоянными параметрами. Если на вход фильтра подать принимаемый сигнал $z(t)$, то напряжение на выходе фильтра в момент времени:

$$y_c(t) = \int_0^t s(t-\tau)g(\tau)d\tau = a \int_0^t s(t-\tau)s(t_0-\tau)d\tau = aB_s(t_0-t), \quad (14.10)$$

где $g(\tau)$ — импульсная характеристика фильтра. Выберем её такой, чтобы в момент $t = T$ получить значение $y(T)$, равное скалярному произведению (14.7). Это будет выполнено при следующем согласовании: $g(T-\tau) = s_i(\tau)$ или $g(t) = s_i(T-t)$. $B_s\{t_0-t\}$ — ФК сигнала $s(t)$ при аргументе t_0-t . Для финитного сигнала она определена на интервале $(0, 2T)$ и имеет максимум в точке $t = t_0 = T$. Рисунке 14.2 приведено сравнение сигналов на выходе АФ и СФ.

Согласно формуле (14.10) в момент времени T напряжение на выходе согласованного фильтра пропорционально сигналу на выходе интегратора активного фильтра в схеме рис. 14.1. Поэтому демодулятор, реализующий алгоритм (14.10), может быть выполнен и на базе согласованных фильтров. Структурная схема такого демодулятора для двоичной системы показана на рисунке 14.2, где СФ — фильтр, согласованный с сигналом $S_i(f)$.

Подчеркнём, что формы полезного сигнала на входе и выходе согласованного фильтра, как правило, существенно отличаются друг от друга. Задачей согласованного фильтра является не восстановление формы сигнала, искажённой шумом, а получение одного отсчёта, по которому можно судить о присутствии или отсутствии на входе фильтра сигнала известной формы.

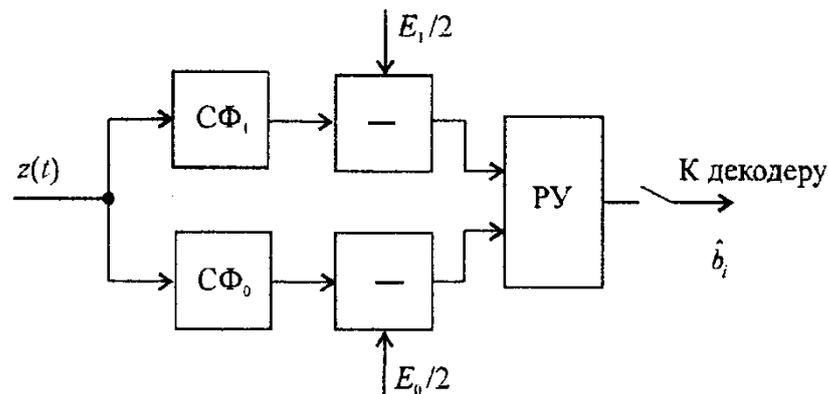


Рисунок 14.2 – Оптимальный демодулятор на основе согласованных фильтров

При активном фильтре достаточно потребовать, чтобы неточность взятия отсчёта была мала по сравнению с тактовым интервалом, а при согласованном фильтре — по сравнению с периодом высокочастотного заполнения радиоимпульса (так называемый *когерентный отсчёт*). Трудность обеспечения когерентного отсчёта в согласованном фильтре вполне соизмерима с трудностью реализации *когерентных опорных генераторов* в активном фильтре.

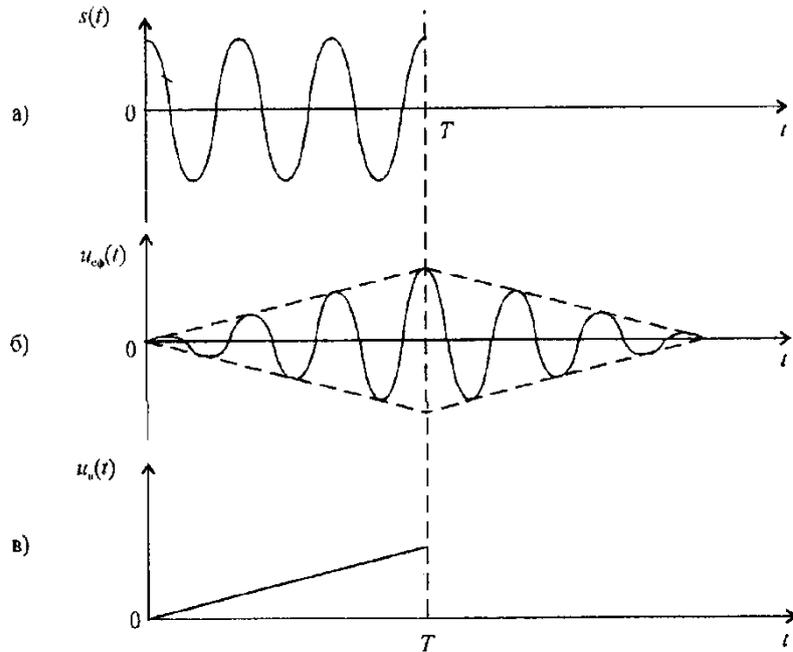


Рисунок 14.3 – Сигналы на выходе согласованного фильтра и корреляционной схемы при подаче на вход прямоугольного радиоимпульса

Вероятность ошибки через Q-функцию можно записать в виде:

$$p = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right). \quad (14.11)$$

Функция $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ табулирована и называется дополнительной

функцией ошибок. При заданной интенсивности помехи N_0 потенциальная помехоустойчивость двоичной системы зависит только от так называемой эквивалентной энергии сигналов:

$$E_s = \int_0^T (s_1(t) - s_0(t))^2 dt = d_{s_1, s_0}^2, \quad (14.12)$$

которая равна квадрату расстояния между сигнальными точками в пространстве Гильберта. Помехоустойчивость выше (вероятность ошибки меньше) у той системы, у которой больше эквивалентная энергия используемых сигналов независимо от формы используемых сигналов.

На рисунке 14.4 в двумерном пространстве показаны точки сигналов для двоичной системы: рисунок 14.4, а – АМ при $s_0(t)=0$, $\int_0^T s_1^2(t)dt = E$; рисунок 14.4, б – ЧМ с ортогональными сигналами $\int_0^T s_1(t)s_0(t)dt = 0$, $\int_0^T s_1^2(t)dt = \int_0^T s_0^2(t)dt = E$; рисунок 14.4, в – ФМ с противоположными сигналами $s_1(t)=-s_0(t)$.

Из рисунка видно, что по сравнению с двоичной АМ для двоичной ЧМ эквивалентная энергия сигнала $E_э = ||s_1 - s_0||^2$ в 2 раза больше, а для двоичной ФМ – в 4 раза больше.

Соотношение (14.11) позволяет осуществлять оптимальный выбор сигналов $s_1(t)$ и $s_0(t)$ или соответственно $u_1(t)$ и $u_0(t)$, обеспечивающих максимально возможную помехоустойчивость при заданной энергии сигналов E .

$h^2 = \frac{E}{N_0}$ – отношение энергии сигнала на входе демодулятора к спектральной плотности мощности флуктуационной помехи.

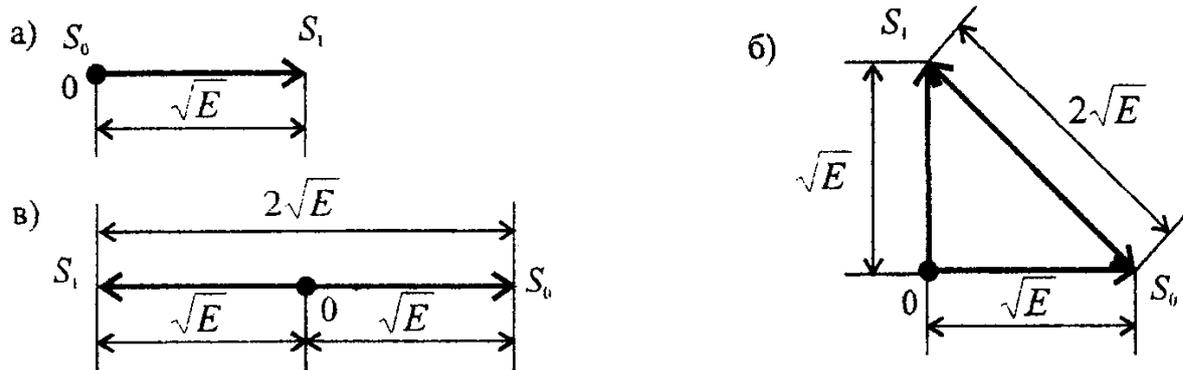


Рисунок 14.4 – К определению эквивалентной энергии двоичных систем АМ, ЧМ, ФМ

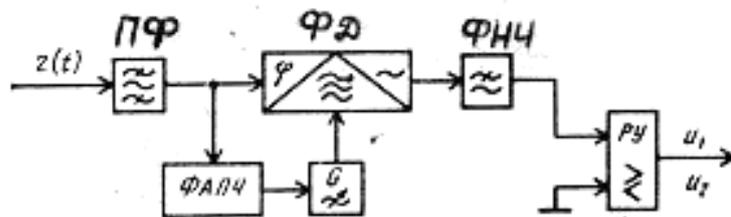


Рисунок 14.5 – Структурная схема неоптимального когерентного приемника ФМн сигналов.

При переходе от системы АМ к системе ЧМ энергетический выигрыш по максимальной мощности равен 2, а при переходе к системе ФМ – 4. Если же сравнение вести не по пиковой, а по средней мощности, то переход от АМ к ЧМ не даёт энергетического выигрыша, поскольку при ЧМ средняя мощность равна максимальной, а при АМ – вдвое меньше максимальной (если s_1 и s_0 передаются с одинаковой вероятностью).

Таблица 14.1

Вид модуляции	Вид системы	Вероятность ошибки	Энергия

ДФМ	система с противоположными сигналами $\Delta\varphi=\pi$	$p = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right) = Q(\sqrt{2}h)$	$E_9 = 4E$
ДЧМ	с ортогональными сигналами равной энергии	$p = Q(h)$.	$E_9 = 2E$
ДАМ	с пассивной паузой	$p = Q\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)$	$E_9 = E$
ДОФМ	система с противоположными сигналами $\Delta\varphi=\pi$	$p_{\text{ФМ}}=2Q[\sqrt{2}h]$.	$E_9 = 4E$

В структурной схеме неоптимальных демодуляторов АМн и ЧМн сигналов применяют полосовые фильтры (ПФ) до детектора и манипуляционный ФНЧ – после детектора. ПФ до детекторной обработки ограничивает мощность помех на входе детектора. В зависимости от полярности напряжения на выходе ФНЧ в решающем устройстве РУ формируются выходные сигналы u_1 или u_2 . ФД выполняет роль множителя, ФНЧ – интегратора. Опорный генератор G системой ФАПЧ подстраивается так, чтобы частота и фаза его колебаний совпадала с частотой и фазой одного из сигналов (например, $s_1(\tau)$).

Приведенный приемник обладает существенным недостатком: использование для фазовой синхронизации принимаемого сигнала $z(t)$ приводит к обратной работе (выходной сигнал u_1 заменяется на u_2 и наоборот). Обратная работа возникает, когда фаза колебаний генератора меняется на противоположную случайным образом в результате воздействия помех в канале. Этот недостаток устранен в системах с ОФМн. Наибольшее распространение получил метод приема ОФМн сигналов – метод сравнения полярностей.

Метод сравнения полярностей обеспечивает когерентный прием. Принимаемый сигнал сначала обрабатывается когерентным демодулятором ФМн. На его выходе наблюдается обратная работа. Ее устраняет относительный декодер (схема сравнения полярностей), который состоит из ЛЗ и сравнивающего устройства (СУ)). В СУ сравниваются полярности настоящей и предыдущей посылок и вырабатывается выходной сигнал: положительное напряжение – если полярности совпадают, отрицательное – если полярности разные.

Для систем равновероятных ортогональных сигналов равной энергии канал симметричен, и можно оценить вероятность ошибки простым неравенством:

$$p_m \leq (m-1)Q(\sqrt{h^2}). \quad (14.13)$$

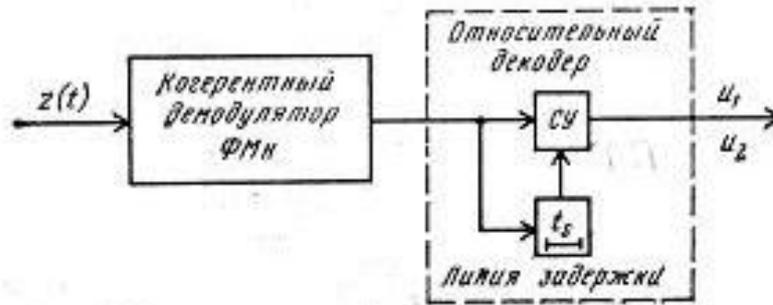


Рисунок 14.6 – Структурная схема приемника ОФМн сигналов по методу сравнения полярностей.

Лекция 13. Прием сигналов с неопределенной фазой (некогерентный прием).

Содержание лекции:

- прием сигналов с неопределенной фазой (некогерентный прием).

Цель лекции:

- синтезировать оптимальный демодулятор.

Нередко фаза в каналах флуктуирует довольно быстро, и точную её оценку получить не удаётся. Кроме того, оценка фазы требует иногда применения сложных устройств. Поэтому даже в тех случаях, когда принципиально можно оценить начальную фазу входящего сигнала, порой от этого отказываются и используют алгоритм, построенный в предположении, что начальная фаза входящего сигнала не известна и может принимать любое значение на интервале $(0, 2\pi)$. Такой метод приёма называется *некогерентным*.

Для вывода правила оптимального некогерентного приёма будем исходить из логарифма отношения правдоподобия $\ln \Lambda_i$ для сигнала $s_i(t)$, которое при точно известной начальной фазе выражается формулой:

$$\ln \Lambda_i^{[n]} = -\frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^n [z(t_k) - s_i(t_k)]^2 \Delta t + \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^n z^2(t_k) \Delta t .$$

Используя представление для сигнала,

$$Y(t) = \gamma A(t - \tau) \cos[\omega_0(t - \tau) + \Phi(t - \tau)] \approx \gamma A(t) \cos[\omega_0 t + \Phi(t) + \theta] = \gamma \cos \theta X(t) - \gamma \sin \theta \bar{X}(t) ,$$

где γ — известный коэффициент передачи канала, а θ — случайный сдвиг в канале, формулу для $\ln \Lambda_i$ можно (после устремления $\Delta t \rightarrow 0$) записать так:

$$\ln \Lambda_i = \frac{2\gamma}{N_0} \int_0^T z(t) [\cos \theta u_i(t) - \sin \theta \hat{u}_i(t)] dt - \frac{\gamma^2}{N_0} \int_0^T [\cos \theta u_i(t) - \sin \theta \hat{u}_i(t)]^2 dt . \quad (15.1)$$

Здесь $\ln L_i$ является случайной величиной, принимающей различные значения при различных θ . Правило максимума правдоподобия в такой ситуации заключается в выборе такого решения, для которого математическое ожидание L_i будет наибольшим. При нахождении $\bar{L}_i(\theta)$ заметим, что второй интеграл в правой части (15.1) от θ не зависит и равен энергии E_{Pi} сигнала $u_i(t)$ на входе канала (на передатчике). Это ясно из того, что подынтегральной функцией является квадрат сигнала $U_i(t)$, сдвинутого по фазе на θ , что, как известно, не влияет на его энергию. Таким образом, учитывая, что $\frac{\gamma^2 E_{Pi}}{N_0} = h_i^2$,

получаем с введением обозначений $y_i = \gamma \int_0^T z(t)u_i(t)dt$; $\hat{y}_i = \gamma \int_0^T z(t)\hat{u}_i(t)dt$,

$$V_i = \sqrt{y_i^2 + \hat{y}_i^2} \text{ и } \theta_i = \arctg\left(\frac{\hat{y}_i}{y_i}\right), \quad (15.2)$$

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[x \cos(\varphi + \theta)] d\varphi \quad \text{— модифицированная функция Бесселя}$$

нулевого порядка.

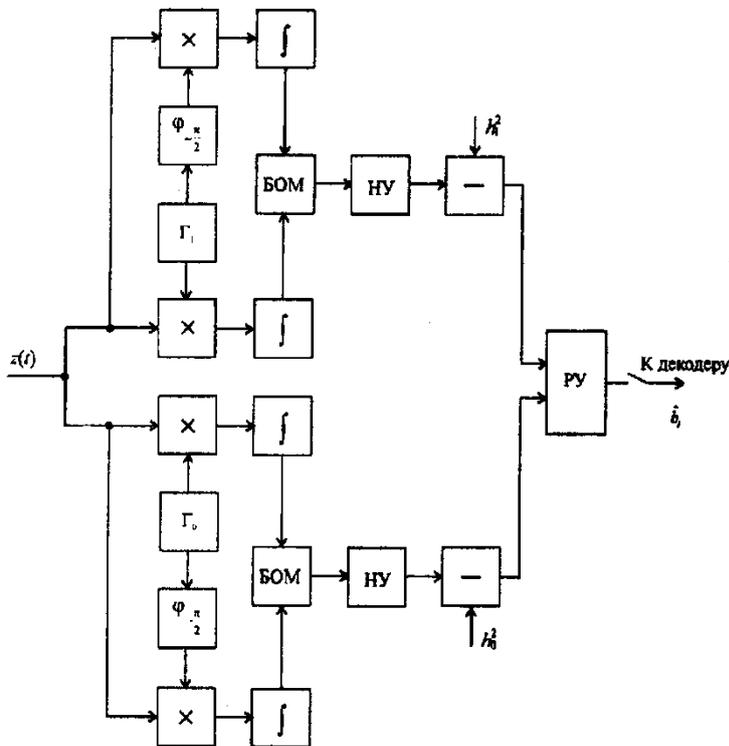


Рисунок 15.1 – Квадратурная схема реализации оптимального приема дискретных сообщений при

рисунком 15.1). Здесь Γ_0, Γ_1 – соответственно генераторы опорных сигналов $u_0(t), u_1(t)$; φ — фазовращатель всех сигнальных компонент на $-\pi/2$ (преобразователь Гильберта); БОМ – блок определения модуля вектора $V_i =$

Вместо того чтобы сравнивать отношения правдоподобия, можно сравнить их логарифмы, что приводит к следующему правилу (алгоритму) оптимального некогерентного приёма для двоичной системы сигналов:

$$\ln I_0\left(\frac{2V_1}{N_0}\right) - h_1^2 > \ln I_0\left(\frac{2V_0}{N_0}\right) - h_0^2. \quad (15.3)$$

При выполнении этого неравенства регистрируется 1, в противном случае – 0.

Величины y_i и \hat{y}_i можно получить в момент отсчёта T на выходе активного фильтра с опорными сигналами, равными соответственно $u_i(t)$

и $\hat{u}_i(t)$. С учётом сказанного, понятно построение на основе активных фильтров схемы, называемой квадратурной и реализующей алгоритм (15.3) (см.

$y_i + j\hat{y}_i$ по ортогональным компонентам; НУ – нелинейные безынерционные устройства с характеристикой $u_{\text{вых}} = \ln I_0 \left(\frac{2}{N_0} u_{\text{вх}} \right)$.

Подчеркнём, что величины V_i не зависят от начальной фазы сигналов $u_i(t)$ и, как видно из (15.2), пропорциональны огибающей (в моменты отсчёта, кратные T) на выходе фильтра, согласованного с сигналом $u_i(t)$. Таким образом, алгоритм (15.3) можно реализовать и на базе согласованных фильтров, как показано на рисунке 15.2.

Для двоичной системы с пассивной паузой, полагая, что символ 0 передаётся сигналом $u_0(t) = 0$, правило можно записать в виде:

$$V_1 > \lambda, \quad (15.4)$$

где пороговый уровень $\lambda = \frac{N_0}{2} f(h^2)$,

а функция $x = f(y)$ обратна функции $y = \ln I_0(x)$. При выполнении неравенства (15.4) (превышение V_1 над порогом) регистрируется символ 1, в противном случае — символ 0.

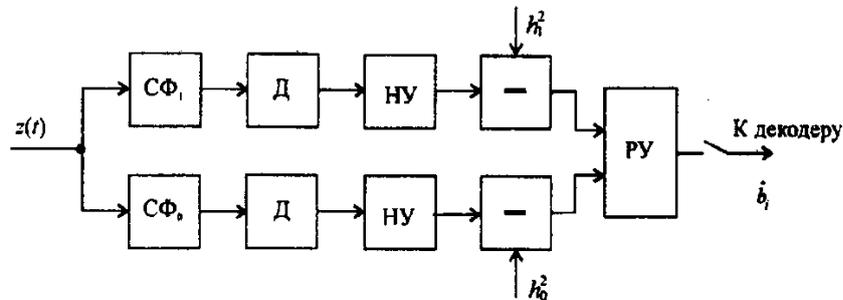


Рисунок 15.2 – Квадратурная схема реализации оптимального приема дискретных сообщений при неопределенной фазе сигнала

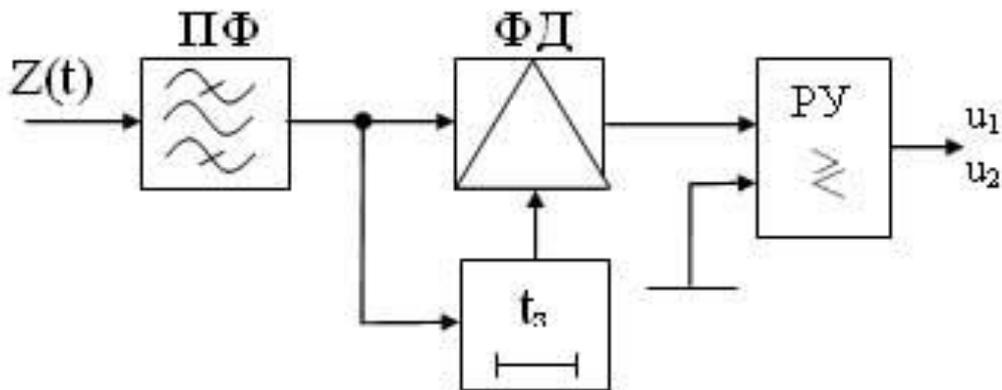


Рисунок 15.3 – Структурная схема приемника ОФМн сигналов по методу сравнения фаз

Метод сравнения фаз обеспечивает неоптимальный прием ДОФМ. Система ФАПЧ и генератор G , дающие эффект обратной работы, заменены на

линию задержки на время t_r (ЛЗ). В ФД производится сравнение фаз принятого сигнала $s_i(\tau)$ и опорного, в качестве которого используется предыдущий принятый сигнал $s_j(t-t_1)$. Выходные сигналы u_i после ФД формируются в зависимости от полярности напряжения на выходе ФНЧ.

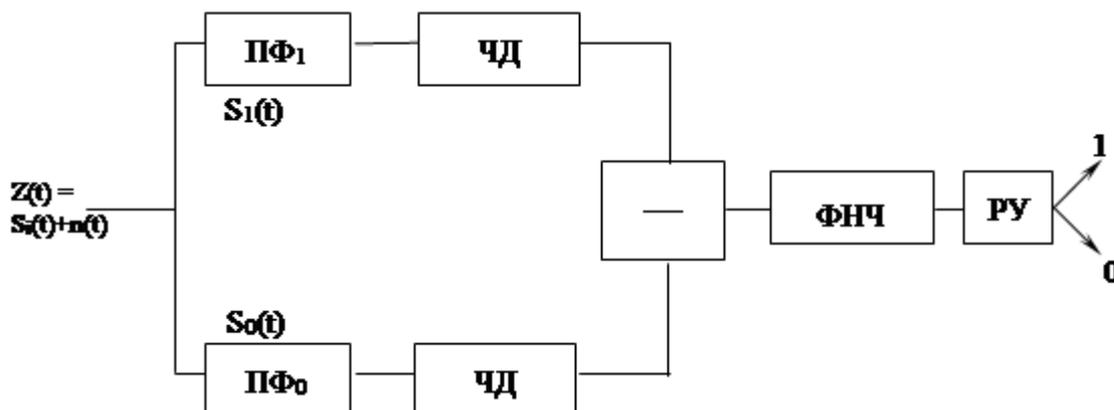


Рисунок 15.4 – Схема неоптимального некогерентного приемника ЧМ сигналов

Схема неоптимального некогерентного приемника ЧМ сигналов содержит:

ПФ – разделительные полосовые фильтры, пропускающие без существенных искажений соответственно сигналы $S_1(t)$, $S_0(t)$.

ЧД – частотный детектор. Разностный сигнал двух детекторов подвергается фильтрации в ФНЧ, а результат для выбора сравнивается с нулевым порогом.

Лекция 14. Случайные процессы и их основные характеристики

Содержание лекции:

- Понятие случайного процесса. Плотность вероятности и интегральная функция распределения (ИФР). Случайные стационарные процессы. Спектральная плотность мощности случайного процесса. Функция корреляции случайного процесса с ограниченным спектром. Свойство эргодичности.

Цель лекции:

- Изучить явления при передаче сообщений в условиях, когда детерминированное описание сигналов принципиально невозможно и на смену ему приходит вероятностное (статистическое) описание. Описать свойства случайных сигналов, изучая совокупности случайных многомерных величин. Описать сигналы, которые отображают развивающиеся во времени случайные явления, изучив *теорию случайных процессов*. Показать, что между корреляционными и спектральными свойствами случайных сигналов существует глубокая и тесная связь.

Случайность процесса $X(t)$ проявляется в том, что вид наблюдаемой функции случайным образом меняется от одного наблюдения к другому. Однако получаемая в результате каждого отдельного опыта функция $x(t)$ не случайна, её называют *реализацией случайной функции*. Случайный процесс представляет собой бесконечную совокупность таких реализаций, образующих *статистический ансамбль*. На рисунке 12.1 показаны четыре реализации случайного процесса. Если на графике множества реализации случайной функции $X(t)$ (см. рисунок 14.1) выбрать момент (сечение) t_1 , то множество $\{x^{(i)}(t_1)\}$ значений реализации в этот момент образует случайную величину X . Значения этой случайной величины заранее неизвестны. Но можно установить некоторые закономерности, по которым можно судить о том, что в данном сечении случайная величина с вероятностью P будет принимать значение в определённых пределах $[x, x+\Delta x]$.

Для непрерывных процессов $X(t)$ распределение вероятностей в заданном сечении t_1 характеризуется *одномерной плотностью вероятностей* (ПВ):

$$w(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{|\Delta x|} \geq 0, \quad (14.1)$$

выражающей отношение вероятности того, что случайная величина $X(t)$ примет значения в интервале $x \leq X \leq x + \Delta x$ к величине интервала Δx . На рисунке 14.2, а изображён типовой график одномерной ПВ.

Вероятность того, что случайная величина X примет значение в интервале $(x_1; x_2)$, определяется выражением: $P(-\infty \leq X \leq \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1$.

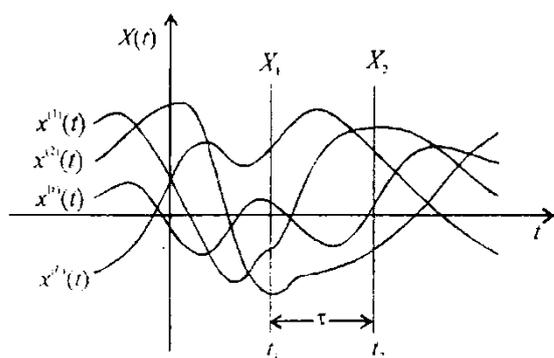


Рисунок 14.1 – Задание случайного процесса через совокупность его реализаций

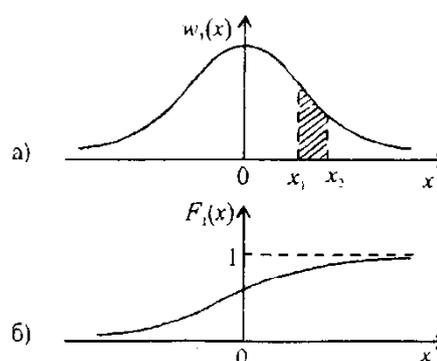


Рисунок 4.2 – Типовой график (а) одномерной ПВ и (б) одномерной ИФР

Другой важной характеристикой случайных величин X является *ИФР* $F(x)$, определяемая как вероятность того, что случайная величина X не превзойдёт некоторого значения x : $F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x w(x) dx$.

ИФР имеет следующие свойства:

а) $F(-\infty)=0$;

б) $F(\infty)=1$;

в) $F(x)$ — неубывающая функция, т.е. $F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2 > x_1$;

г) $P[x_1 \leq X \leq x_2] = F(x_2) - F(x_1)$

График ИФР $F(x)$ приведён на рисунке 14.2, б.

В прикладных задачах часто предполагают, что ИФР являются дифференцируемыми функциями, и определяют $w(x)$ как производную от ИФР:

$$w(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (14.2)$$

Для более полного описания случайного процесса нужно располагать его n -мерной плотностью вероятности $w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ или n -мерной ИФР $F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$, выражающих свойства случайного процесса в произвольных сечениях t_1, t_2, \dots, t_n . Для полного описания непрерывного во времени СП приходится $n \rightarrow \infty$.

Моменты, которые наблюдаются в сечениях процессов, зависят от временных аргументов, они получили название *моментных функций*. Для статистической радиотехники наибольшее значение имеют три моментные функции низших порядков, называемые математическим ожиданием, дисперсией и функцией корреляции.

Случайными стационарными процессами принято называть случайные процессы, статистические характеристики которых одинаковы во всех сечениях.

Если ограничить требования тем, чтобы математическое ожидание m и дисперсия σ^2 процесса не зависели от времени, а функция корреляции зависела лишь от разности $\tau = |t_2 - t_1|$, т.е. $R(t_1, t_2) = R(\tau)$, то подобный случайный процесс будет *стационарен в широком смысле*. Как следует из определения, функция корреляции случайного стационарного процесса является четной. $R(\tau) = R(-\tau)$.

Кроме того, абсолютные значения этой функции при любых τ не превышают ее значения при $\tau=0$:

$$|R(\tau)| \leq R(0) = \sigma^2. \quad (14.3)$$

Для описания случайных процессов наряду с корреляционными функциями $B(\tau)$ широко используются спектральные характеристики, в частности, *спектральная плотность мощности* $G(f)$. Между $B(\tau)$ и $G(f)$ существует пара преобразований Фурье. Для случайных стационарных процессов эти соотношения строго установлены А.Я. Хинчиным и Н. Винером.

Дисперсию (среднюю мощность) СП можно найти путём интегрирования

$$C(f) \text{ по частоте: } \sigma^2 = B(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)df = \int_0^{\infty} G_0(f)df ,$$

где $G_0(f)$ – СПМ, определённая на положительных частотах.

Интервал корреляции:

$$\tau_{кор} = \int_0^{\infty} |R(\tau)d\tau| . \quad (14.12)$$

Определение интервала корреляции согласно (12.12) называют методом равновеликого прямоугольника: интервал корреляции равен основанию прямоугольника с высотой, равной 1, площадь которого равна площади под кривой $|R(\tau)|$ при $\tau \geq 0$ (см. рисунок 14.3).

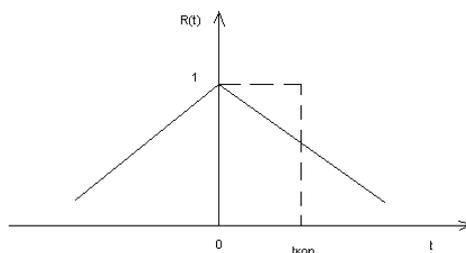


Рисунок 14.3 – Определение интервала корреляции методом равновеликого прямоугольника

Методом равновеликого прямоугольника (или по иному критерию) можно найти не только интервал корреляции СП ("ширину" $B(\tau)$), но и эффективную ширину его спектра $F_э$ ("ширину" $G_0(f)$). Произведение этих параметров удовлетворяет условию $\tau_{кор} F_э \sim K$, где K – константа, имеющая порядок единицы.

Случайный процесс, характеризуемый СПМ $G_0(f) = N_0$, равномерной на всех частотах (см. рисунок 14.4, а), называют белым шумом (по аналогии с белым светом в оптике). Если спектр $G_0(f)$ ограничен сверху частотой F_B (см. рисунок 14.4, б), то процесс называется квазibelым шумом. Его дисперсия $\sigma^2 = B(0) = N_0 F_B$. Найдём ФК квазibelого шума:

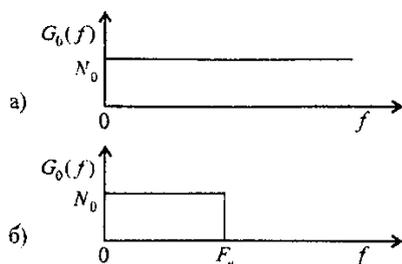


Рисунок 14.4 – Спектральные плотности средней мощности (а) белого и (б) квазibelого шума

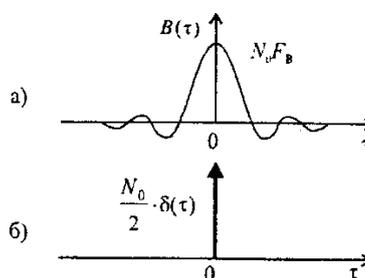


Рисунок 14.5 – Функции корреляции (а) квазibelого и (б) белого шума

$$B(\tau) = \int_0^F G_0(f) \cos \omega \tau df = N_0 \cdot F_B \frac{\sin \omega_B \tau}{\omega_B \tau}. \quad (14.4)$$

Полученная ФК отображена на рисунке 14.5, а. Обратим внимание на то, что при значениях, кратных $1/2F_B$, значения $B(\tau)$ проходят через нуль. Это означает, что сечения процесса, разделённые интервалом $k/2F_B$ (k — целое число), не коррелированы между собой. Если беспрестанно увеличивать граничную частоту F_B , то от квазibelого шума придём к абсолютно случайному процессу (белому шуму), у которого два несовпадающих сечения не коррелированы; КФ белого шума выражается δ -функцией (см. рисунок 14.5, б):

$$B(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau). \quad (14.5)$$

Результат (14.5) следует из (14.4), если воспользоваться определением δ -функции. Белый шум является математической идеализацией реального процесса, так как средняя мощность ($B(0)$), необходимая для создания такого процесса, оказывается бесконечно большой. Примером помехи типа белого шума является тепловой шум резисторов, имеющий практически равномерную спектральную плотность на частотах вплоть до $6 \cdot 10^{12}$ Гц. Если учесть, что $\sigma_i^2 = 2eI_0 f_e$, то удельная дисперсия флуктуационного тока ($A^2/Гц$), приходящаяся на полосу частот в 1 Гц:

$$N_0 = 2eI_0. \quad (14.6)$$

Это соотношение получило в радиотехнике название *формулы Шотки*. Согласно ей эквивалентная шумовая схема электронного прибора содержит в себе источник тока, создающий белый шум со спектральной плотностью N_0 .

Дробовой шум электронных приборов имеет постоянный спектр мощности вплоть до частот в несколько сотен мегагерц, а затем начинает уменьшаться с ростом частоты.

Тепловой шум на входе приёмника представляет собой случайный гауссовский процесс с нулевым средним и спектральной плотностью мощности — *Формула Найквиста*:

$$N_0 = 2W_0 = 4kTR \quad (14.7)$$

Случайный стационарный процесс называют *эргодическим*, если при нахождении его моментных функций усреднение по статистическому ансамблю можно заменить усреднением по времени. Операция усреднения выполняется над единственной реализацией $x(t)$, длительность T которой теоретически может быть сколь угодно велика. Обозначая усреднение по

времени угловыми скобками, запишем математическое ожидание случайного эргодического процесса:

$$m = \langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (14.8)$$

которое равно постоянной составляющей выбранной реализации.

Дисперсия подобного процесса:

$$\sigma^2 = \langle [x(t) - m]^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m]^2 dt = \langle x^2(t) \rangle - m^2. \quad (14.9)$$

Поскольку величина $\langle x^2 \rangle$ представляет собой среднюю мощность реализации, а величина m^2 — мощность постоянной составляющей, дисперсия имеет наглядный смысл *мощности флуктуационной составляющей эргодического процесса*. Аналогично находят функцию корреляции:

$$R(\tau) = \langle [x(t) - m][x(t + \tau) - m] \rangle = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle - m^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt - m^2. \quad (14.10)$$

Случайный процесс эргодичен, если выполнено условие Слущкого:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T R(\tau) d\tau = 0. \quad (14.11)$$

Лекция 15. Общие сведения о каналах связи. Преобразование сигналов в линейных каналах связи и нелинейных каналах связи

Содержание лекции:

- Общие сведения о каналах связи. Воздействие детерминированных сигналов на линейные стационарные системы. Системные операторы. Стационарные и нестационарные системы. Линейные и нелинейные системы. Импульсные характеристики линейных стационарных систем. Интеграл Дюамеля. Переходные и частотные характеристики линейных стационарных систем. Условие физической реализуемости. Спектральный метод. Преобразование случайных сигналов в детерминированных линейных каналах. Воздействие стационарных случайных сигналов на безынерционные нелинейные цепи. Прохождение случайных сигналов с широким спектром через узкополосные цепи.

Цель лекции:

- Провести классификацию каналов связи. Систематическое решение задач о прохождении разнообразных сигналов через линейные системы. Показать применение спектрального подхода как к задаче нахождения реакции системы, так и к проблеме числовой оценки выходного сигнала. Исследовать ту связь между статистическими характеристиками процессов

$X(t)$ и $Y(t)$, которая может быть найдена на основе математической модели системы.

Классификация каналов связи возможна с использованием различных признаков. В зависимости от назначения систем каналы связи делят на телеграфные, фототелеграфные, телефонные, звукового вещания, передачи данных, телевизионные, телеметрические, смешанные и т.п.

В зависимости от распространения сигналов между пунктами связи в свободном пространстве или по направляющим линиям выделяют каналы радио (в частности, космические каналы) и проводной связи (воздушные, кабельные, волоконно-оптические линии связи, волноводные СВЧ тракты и т.п.)

В зависимости от характера связи между сигналами на входе и выходе канала различают каналы (звенья, цепи) линейные и нелинейные.

Различают каналы чисто временные (с сосредоточенными параметрами), в которых сигналы на входе и выходе описываются функциями одного скалярного параметра (времени t), и пространственно-временные каналы (с распределёнными параметрами), в которых сигналы на входе и (или) выходе описываются пространственными координатами (x, y, z). Такие сигналы называют полями.

Более существенна классификация каналов электрической связи по диапазону используемых ими частот. В настоящее время в радиосвязи применяют частоты примерно от $3 \cdot 10^3$ до $3 \cdot 10^{12}$ Гц. Благодаря созданию и широкому внедрению квантовых генераторов (лазеров) освоен и диапазон световых волн (оптический диапазон). Практически в оптико-волоконных линиях связи используются частоты порядка 10^{14} Гц (длины волн 1,55; 1,35; 0,85 мкм). Для современного этапа развития техники связи характерна тенденция к переходу на всё более высокие частоты.

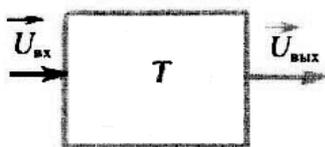


Рисунок 15.1 - Система как «черный ящик»

Радиотехническое устройство независимо от своего назначения и уровня сложности представляет собой систему, т.е. совокупность физических объектов, между которыми существуют определенные взаимодействия. В структуре системы можно выделить вход, на который подается исходный сигнал, и выход, откуда снимается преобразованный сигнал. Если интересуются лишь связью между сигналами на входе и выходе и не описывают внутренние процессы в системе, то говорят, что система представляет собой «черный ящик». Как входной сигнал $u_{вх}(t)$, так и выходной сигнал $u_{вых}(t)$, называемый также откликом, или выходной реакцией системы, описываются одиночными функциями времени или в виде m -мерного вектора $\vec{U}_{вх}(t) = \{u_{вх1}(t), u_{вх2}(t), \dots, u_{вхm}(t)\}$, а выходной сигнал — в виде n -мерного вектора $\vec{U}_{вых}(t) = \{u_{вых1}(t), u_{вых2}(t), \dots, u_{выхn}(t)\}$.

Классификацию систем проводят на основании существенных свойств их математических моделей. Принято говорить, что система *стационарна*, если ее выходная реакция не зависит от того, в какой момент времени поступает входной сигнал. Если T — оператор стационарной системы, то:

$$\bar{U}_{\text{вых}}(t \pm t_0) = T\bar{U}_{\text{вх}}(t \pm t_0) \quad (15.1)$$

при любом значении t_0 . Стационарные системы называют также системами с постоянными во времени параметрами.

Если же свойства системы не инвариантны относительно выбора начала отсчета времени, то такую систему называют *нестационарной* (системой с переменными во времени параметрами или параметрической системой).

Важнейший принцип классификаций, систем основан на том, что различные системы по-разному ведут себя при подаче на вход суммы нескольких сигналов. Если оператор системы таков, что справедливы равенства:

$$\begin{aligned} T(\bar{U}_{\text{вх}1} + \bar{U}_{\text{вх}2}) &= T\bar{U}_{\text{вх}1} + T\bar{U}_{\text{вх}2}, \\ T(\alpha\bar{U}_{\text{вх}1}) &= \alpha T\bar{U}_{\text{вх}1}, \end{aligned} \quad (15.2)$$

где α — произвольное число, то данная система называется *линейной*. Условия (15.2) выражают фундаментальный *принцип суперпозиции*. Если эти условия не выполняются, то говорят, что система является *нелинейной*.

Путь *анализа прохождения детерминированных сигналов через линейные цепи* основан на временном или частотном представлении свойств сигналов и систем.

Пусть некоторая линейная стационарная система описывается оператором T . Для простоты будем полагать, что входной и выходной сигналы одномерны. По определению, *импульсной характеристикой* системы называется функция $h(t)$, являющаяся откликом системы на входной сигнал $\delta(t)$. Это означает, что функция $h(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$h(t) = T\delta(t). \quad (15.3)$$

Следует ясно представить себе, что импульсная характеристика так же, как и порождающая ее дельта-функция, есть результат разумной идеализации. С физической точки зрения импульсная характеристика приближенно отображает реакцию системы на входной импульсный сигнал произвольной формы с единичной площадью при условии, что длительность этого сигнала пренебрежимо мала по сравнению с характерным временным масштабом системы, например, периодом ее собственных колебаний.

Зная импульсную характеристику линейной стационарной системы, можно формально решить любую задачу о прохождении детерминированного сигнала через такую систему:

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau)h(t-\tau)d\tau. \quad (15.4)$$

Эта формула, имеющая фундаментальное значение в теории линейных систем, называется *интегралом Дюамеля*.

Каков бы ни был конкретный вид импульсной характеристики физически осуществимой системы, всегда должен выполняться важнейший принцип: выходной сигнал, отвечающий импульсному входному воздействию, *не может возникнуть до момента появления импульса на входе*. Отсюда вытекает ограничение на вид допустимых импульсных характеристик:

$$h(t)=0 \text{ при } t<0. \quad (15.5)$$

Физически реализуемая система должна быть, кроме того, *устойчивой*. Это означает, что ее импульсная характеристика должна удовлетворять условию абсолютной интегрируемости:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty. \quad (15.6)$$

Пусть на входе линейной стационарной системы действует сигнал, изображаемый функцией Хевисайда $\sigma(t)$. Выходную реакцию:

$$g(t) = T\sigma(t) \quad (15.7)$$

принято называть *переходной характеристикой* системы.

Поскольку система стационарна, переходная характеристика инвариантна относительно временного сдвига $g(t-t_0) = T\sigma(t-t_0)$.

Переходная характеристика физически реализуемой системы отлична от нуля лишь при $t \geq 0$, в то время как $g(t) = 0$ при $t < 0$.

Между импульсной и переходной характеристиками имеется тесная связь. Действительно, так как $\delta(t)=d\sigma/dt$, то на основании (15.6):

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(\xi)d\xi. \quad (15.8)$$

Покажем, что комплексный сигнал $u_{\text{вх}}(t) = \exp(j\omega t)$ при любом значении частоты ω есть собственная функция стационарного оператора. Для этого воспользуемся интегралом Дюамеля вида (15.4) и вычислим:

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)}h(\tau)d\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \right] \exp(j\omega t). \quad (15.9)$$

Отсюда видно, что собственным значением системного оператора является комплексное число:

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (15.10)$$

называемое *частотным коэффициентом передачи* системы.

Формула (15.10) устанавливает принципиально важный факт — *частотный коэффициент передачи и импульсная характеристика линейной стационарной системы связаны между собой преобразованием Фурье*. Поэтому всегда, зная функцию $K(j\omega)$, можно определить импульсную характеристику:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (15.11)$$

Важнейшее положение теории линейных стационарных систем – любую такую систему можно рассматривать либо во временной области с помощью ее импульсной или переходной характеристик, либо в частотной области, задавая частотный коэффициент передачи. Оба подхода равноценны, и выбор одного из них диктуется удобствами получения исходных данных о системе и простотой вычислений.

Часто пользуются представлением частотного коэффициента передачи в показательной форме:

$$K(j\omega) = |K(j\omega)| \exp[j\varphi_K(\omega)]. \quad (15.12)$$

Обе входящие сюда вещественные функции носят специальные названия: $|K(j\omega)|$ — *амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)*, $\varphi_K(\omega)$ — *фазочастотная характеристика (ФЧХ)* системы.

Далеко не каждая функция $K(j\omega)$ может являться частотным коэффициентом передачи физически реализуемой системы. Простейшее *ограничение* связано с тем, что импульсная характеристика $h(t)$ такой системы обязана быть вещественной:

$$K(j\omega) = K^*(-j\omega). \quad (15.13)$$

В соответствии с формулой (15.12) модуль частотного коэффициента передачи (АЧХ) есть четная, а фазовый угол (ФЧХ) — нечетная функция частоты.

Каким должен быть частотный коэффициент передачи для того, чтобы выполнялись условия физической реализуемости (15.6) и (15.13)? Приведем без доказательства окончательный результат, известный под названием *критерия Пэли — Винера*: частотный коэффициент передачи физически реализуемой системы должен быть таким, чтобы существовал интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln|K(j\omega)||}{1+\omega^2} d\omega < \infty. \quad (15.14)$$

Спектральный метод анализа прохождения радиотехнических сигналов через линейные стационарные системы – целый комплекс математических приемов, в основе которых лежит использование свойств частотного коэффициента передачи системы:

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) U_{\text{вх}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (15.15)$$

Это *основная формула* спектрального метода, свидетельствующая о том, что частотный коэффициент передачи системы служит множителем пропорциональности между спектральными плотностями сигналов на входе и выходе:

$$U_{\text{вых}}(\omega) = K(j\omega) U_{\text{вх}}(\omega). \quad (15.16)$$

Связь между случайной плотностью мощности на выходе и входе детерминированного линейного стационарного канала выражается:

$$G_y(f) = G_x(f) |K(f)|^2.$$

Исследование *преобразований случайных процессов при их прохождении через линейные динамические системы* (как с регулярными, так и со случайно меняющимися параметрами) связано с решением задач двух типов: определение корреляционной функции (спектральной плотности мощности) отклика $Y(t)$ на выходе системы, заданной своими характеристиками, по данной корреляционной функции (или спектральной плотности мощности) входного воздействия $X(t)$, определение многомерного распределения вероятностей отклика $Y(t)$ на выходе системы по многомерному распределению входного воздействия $X(t)$.

В стационарной детерминированной линейной системе с финитной, т.е. ограниченной во времени пределами $0 \dots \tau_{II}$ ИХ $g(t)$ отклик:

$$Y(t) = \int_0^{\tau_{II}} g(\tau) X(t - \tau) d\tau = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N g(k\Delta\tau) X(t - k\Delta\tau) \Delta\tau. \quad (15.17)$$

Шаг дискретизации $\Delta\tau$ можно выбрать равным интервалу корреляции входного процесса $1/F_x$. Допустим, что входной процесс центрирован $\bar{X}(t) = 0$, тогда центрирован и выходной процесс. Узкая полоса пропускания ΔF означает, что длительность импульсной характеристики τ велика по сравнению с $\Delta\tau$. Сечение выходного процесса $Y(t)$ в любой момент времени t определяется согласно (15.17) N слагаемыми суммы. В эту сумму входит много некоррелированных между собой сечений процесса $X(t)$. Распределение вероятностей такой суммы согласно центральной предельной теореме теории вероятности близко к гауссовскому (тем ближе, чем больше N , определяемое отношением $F_x/\Delta F$). В

предельном случае, если на вход канала воздействует белый шум, у которого ширина спектра бесконечна (не совпадающие во времени отсчёты не коррелированы), а канал имеет ограниченную полосу пропускания, то $N \rightarrow \infty$ и выходной процесс будет строго гауссовским. Отмеченное свойство линейного канала сохраняется и при изменении параметров канала. Случайная импульсная характеристика является функцией двух аргументов:

$$\text{ФК выходного стационарного процесса } Y(t): B_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) K^2(f) e^{j\omega\tau} df.$$

Предположим, что на входе *безынерционной нелинейной системы присутствует случайный сигнал* $x(t)$, являющийся одной из реализаций стационарного случайного процесса $X(t)$. Выходной сигнал $y(t)$ связан с входным воздействием зависимостью вида $y\{t\}=f[x\{t\}]$; ансамбль реализаций $y\{t\}$ задает стационарный случайный процесс $Y(t)$. Ставится задача найти связь между статистическими характеристиками процессов $X(t)$ и $Y(t)$. При этом возможны два частных подхода:

1) По известной n -мерной плотности вероятности входного случайного процесса $p_{\text{вх}}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ ищут аналогичную функцию $p_{\text{вых}}(y_1, y_2, \dots, y_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$, определяющую выходной сигнал.

2) Исследование проводят в рамках корреляционной теории — ищут математическое ожидание m_y и функцию корреляции $R_y(\tau)$ выходного случайного процесса. Наряду с функцией корреляции интерес может представлять спектральная плотность мощности $W_y(\omega)$ выходного сигнала.

Если x_1, x_2, \dots, x_n — случайные значения, наблюдаемые на входе в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n соответственно, то, учитывая безынерционный характер преобразования, имеем на выходе в те же моменты времени $y_1=f(x_1), y_2=f(x_2), \dots, y_n=f(x_n)$. Применив обратную функцию $x=g(y)$, получим $x_1=g(y_1), x_2=g(y_2), \dots, x_n=g(y_n)$.

Тогда *многомерная плотность вероятности на выходе*:

$$p_{\text{вых}}(y_1, y_2, \dots, y_n) = p_{\text{вх}}[g(y_1), g(y_2), \dots, g(y_n)] |D|, \quad (15.18)$$

где D — якобиан преобразования функции (15.18).

Формула (15.18) решает поставленную задачу в самом общем виде.

Простейшая статистическая характеристика стационарного случайного процесса — его среднее значение, получающееся путем усреднения по ансамблю реализаций. Чтобы вычислить *среднее значение сигнала после нелинейного безынерционного преобразования*, нужно располагать одномерной плотностью вероятности $p_{\text{вых}}(y)$.

Спектр колебаний на выходе нелинейного преобразователя разбивается на бесконечную сумму составляющих, каждая из которых отображает индивидуальный узкополосный случайный процесс. Максимумы спектральных плотностей мощности этих составляющих наблюдаются на частотах $n\omega_0$. Помимо этого в спектре выходного сигнала возникает низкочастотная

составляющая в окрестности нулевой частоты, которую можно рассматривать как результат амплитудного детектирования входного сигнала. При различных видах характеристики нелинейного элемента можно ожидать появления тех или иных гармоник центральной частоты входного случайного колебания.

Часто приходится рассматривать *воздействие на линейные частотно-избирательные цепи широкополосных случайных сигналов*, образованных, например, хаотической последовательностью коротких импульсов. В этом случае, если эффективная ширина спектра входного случайного процесса значительно превышает ширину полосы пропускания системы, то реальный случайный процесс можно заменить эквивалентным ему белым шумом с односторонним спектром мощности $N_0 = N_x(f_0)$, где f_0 – некоторая точка в пределах полосы пропускания.

Список литературы

Основная:

Оптимальный прием сигналов на фоне помех и шумов. Под ред. Савватеева Ю.И. – М.: «Радиотехника», 2011.

Балашов В.А. Системы передачи ортогональными гармоническими сигналами. – М. «Эко-трендз», 2012.

1. Т.А. Павлова, Б.Р. Накисбекова. Теория электрической связи.

Конспект лекций для студентов специальности 5В071900 – Радиотехника, электроника и телекоммуникации. – Алматы: АИЭС, 2012.

https://libr.aues.kz/facultet/frts/kaf_rt/10/umm/rt_3.htm

2. Братко А.И. Автоматизированные системы управления и связь: основы электросвязи : Учеб.пособие / А.И. Братко. – М.: ИНФРА-М, 2021. – 332 с.

3. Хизирова, У. Шугайып. «Теория электрической связи» для специальностей РЭТ. – Учебное пособие. НАО М.А. АУЭС. – Алматы, 2017. – 90 с.

4. Дополнительная:

5. Скляр Б. Цифровая связь. – М., С-П, К., 2003.

6. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 2003.

7. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач. – М.: Высшая школа, 2002.

15. Теория электрической связи. Под редакцией профессора Д.Д. Кловского. – М.: «Радио и связь», 1999.

16. Панфилов И.П., Дырда В.Е. Теория электрической связи – М.: «Радио и связь», 1991.

17. Кловский Д.Д., Шилкин В.А. Теория электрической связи. Сборник задач и упражнений. – М.: «Радио и связь», 1990.

18. Румянцев К.Е. Прием и обработка сигналов. – М.: «Радио и связь», 2006.

19. Умняшкин С.В. Теоретические основы цифровой обработки и представления сигналов. – М.: Высшая школа, 2006.

20. Борисов В.И., Зинчук В.М. Помехозащищенность систем радиосвязи. – М.: Высшая школа, 2008.

21. Биккенин Р.Р. Теория электрической связи. – М.: «Академия», 2010.

22. Улахович Д.А. Основы теории линейных электрических цепей. – СПб., 2010.

23. Ушаков П.А. Цепи и сигналы электросвязи. – М.: «Академия», 2010.

24. Акуличев Ю.П. Теория электрической связи. – СПб., 2010.

Содержание

Введение	3
Лекция 1. Общие сведения о системах электросвязи	4
Лекция 2. Помехи и искажения. Преобразование сигналов в каналах связи	8
Лекция 3. Математические модели сообщений и сигналов. Спектральные представления сигналов	13
Лекция 4. Кодирование и модуляция	17
Лекция 5. Дискретизация сигналов во времени	25
Лекция 6. Аналоговые модуляторы	29
Лекция 7. Детектирование АМ и ЧМ-колебаний в нелинейных цепях	32
Лекция 8. Потенциальные возможности дискретных каналов связи	37
Лекция 9. Принципы помехоустойчивого кодирования. Классификация помехоустойчивых кодов	40
Лекция 10. Циклические коды	44
Лекция 11. Спектральный анализ непериодических сигналов. Преобразование Фурье. Спектральные плотности неинтегрируемых сигналов. Энергетические спектры сигналов. Принципы корреляционного анализа.	48
Лекция 12. Случайные процессы и их основные характеристики	54
Лекция 13. Общие сведения о каналах связи. Преобразование сигналов в линейных каналах связи	61
Лекция 14. Модель дискретно-непрерывного канала. Критерии качества и правила приема дискретных сообщений. Теория помехоустойчивости систем передачи дискретных сообщений. Оптимальный приемник с согласованным фильтром. Помехоустойчивость оптимального когерентного приема	64
Лекция 15. Прием сигналов с неопределенной фазой (некогерентный прием).	69
Список литературы	77

Павлова Татьяна Александровна

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СВЯЗИ

Конспект лекций

(для студентов всех форм обучения специальности
5В071900 – «Радиотехника, электроника и
телекоммуникации»)

Редактор
Специалист по стандартизации

Е.Б. Жанабаева
Ж.А. Ануарбек

Подписано в печать
Тираж 100 экз.
Объем 5,0уч.-изд. л.

Формат 60×84 1/16.
Бумага типографская №1.
Заказ № Цена 2500 тг.

Копировально-множительное бюро
Некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013, Алматы, Байтурсынова, 126/1