Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі

«Ғұмарбек Даукеев атындағы Алматы Энергетика және
Байланыс Университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамы

М.Ж. Байсалова

ДИСКРЕТТІ МАТЕМАТИКА

Оқу құралы

Алматы
2022

ӘОЖ 519.6(075.8)
КБЖ 22.1 я 73
Б 20

Пікір берушілер:
физика-математика ғылымдарының докторы, әль-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің «Математика» кафедрасының профессоры
Дауылбаев М.К.,
физика-математика ғылымдарының кандидаты, әль-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің «Математика» кафедрасының доценті
Қойлышов Ү.Қ.,
Ғұмарбек Даукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университетінің «Телекоммуникациялар және инновациялық технологиялар» кафедрасының доценті, (PhD), қауым.проф.
Ермекбаев М.М.

Алматы энергетика және байланыс университетінің Ғылыми кеңесі баспаға ұсынады (20.12.2020 ж. №6 хаттама). АЭжБУ ведомостволық әдебиетті шығарудың 2022 ж. арналған қосымша жоспары бойынша басып шығарылады, реті 44.

«Дискретті математика» атты оқу құралына, автор: М.Ж.Байсалова РОӘК ОӘБ ЖБТ таңбасы берілген (14.05.2021 ж. №3 хаттама).

Байсалова М.Ж.
Б 20 Дискретті математика. Оқу құралы. – Алматы: Ғұмарбек Даукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университеті, 2022. – 121 б.: кесте – 18, ил. – 68, әдеб. көрсеткіші. – 18.

ISBN 978-601-7939-78-6

Оқу құралы «Дискретті математика» пәні оқытылатын барлық білім беру бағдарламасы бойынша оқитын студенттеріне арналған.

ӘОЖ 519.6(075.8)
КБЖ 22.1 я 73
Б 20

ISBN 978-601-7939-78-6

© АЭжБУ, 2022
М.Ж.Байсалова, 2022

Кіріспе

Дискретті математиканың қарқындап дамуы қазіргі кезеңде компьютерлік техниканың дамуымен, ақпаратты өңдеу және беру қажеттілігімен байланысты.

Ұсынылып отырған оқу құралы бес тараудан тұрады.

Бірінші тарауда жиын ұғымы қарастырылады, жиындарға қолданылатын амалдар мен олардың қасиеттері келтіріледі. Жиындағы қатынас ұғымы енгізіліп, қатынастың қасиеттері көрсетіледі.

«Математикалық логика элементтері» тарауында келесі тақырыптар қамтылған: алгебралар логикасының функциялары, қалыпты формалар, қалыпты формаларды минимизациялау, қосалқы функциялар, коммутациялық сұлбалар.

«Графтар теориясының элементтері» тарауының тақырыптары: графтар теориясының негізгі ұғымдары, қысқа маршрут, максималды ағындар, коммивояжер есебі, Эйлер және Гамильтон циклдері, графтарды бояу. Дейкстра алгоритмі, графтар изоморфизмі, минималды діңгекті ағаштар, Краскаль алгоритмі.

«Комбинаторика элементтері» тарауында келесі тақырыптар қарастырылған: тарауда орналастыру, орын алмастыру, теру, қайталанатын орналастыру, қайталанатын теру, қайталанатын орын алмастыру, Ньютон биномы, бөліктеу, туындаушы функция.

«Жасырымдылық теориясының элементтері» тарауында алфавиттік жасырымдылық, Макмиллан теңсіздігі, тиімді жасырымдылық, Хаффман алгоритмі тақырыптары туралы сөз қозғалады.

Осы оқулықты шығаруға атсалысқан Ғұмарбек Даукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университетінің Математика және математикалық үлгілеу кафедрасының доценті Людмила Николаевна Астраханцеваға зор алғысымды білдіремін.

1 Жиындар теориясының элементтері.

1.1 Жиындар

«Жиын», «қатынас», «функция» және басқа да ұғымдар дискретті математиканың негізгі ұғымдарына жатады, негізгі сөздік қорын құрайды. Жиын және жиынның элементі негізгі ұғым, яғни басқа ұғымдар арқылы анықтама берілмейді. Мысалы, нүкте және түзу. Жиын деп қандай да бір объекттердің (заттардың) жиынтығы қарастырылады. Олар жиынның элементтері делінеді. Жиынның элементтері әртүрлі және бір бірінен айрықшаланады.

Келесі белгілеулер енгізілген:

$A, B, X, \ldots$ – жиындар; $a, b, x, x_1, x_2, \ldots$ - жиынның элементтері;

$a \in A$ - a элементі A жиынына тиісті, $b \notin A$ – b элементі A жиынына тиісті емес;

Арнайы жиындардың белгіленуі:

N (немесе ϖ) –натурал сандар жиыны;

Z – бүтін сандар жиыны;

Q –рационал сандар жиыны;

I – иррационал сандар жиыны;

R –нақты сандар жиыны;

C –комплекс сандар жиыны;

$\emptyset$ – бос жиын (бір де бір элементі жоқ жиын).

Ақырлы жиын ақырлы санды элементтерден тұрады. Шексіз – шексіз элементтерден.

Жиындардың берілуінің түрлері:

а) элементтерін тізу арқылы, мысалы:

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $A = \{2, 4, 5, 6, 8, \ldots\}$;

ә) сипаттаушы қасиеттері көмегімен: $A = \{x \mid \mathrm{P}(x)\}$, мұндағы $P(x)$ – x элементіне тән P қасиеті, мысалы, $\mathrm{A} = \{x \mid x = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathrm{Z}\}$.

б) туындалатын процедурамен, яғни бар элементтерден элементтер алу әдісін сипаттайды, мысалы, $M = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$ жиынын былай беруге болады: 1) $1 \in M$; 2) $m \in M \rightarrow 2m \in M$.

Анықтамалар:

а) егер B жиынының әрбір элементі A жиынының элементі болса, онда B жиыны A жиынының ішкі жиыны деп аталады (белгіленуі $B \subseteq A$):
$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \Rightarrow x \in A)$, $\subseteq$ - ену таңбасы;

ә) егер A және B жиындары бірдей элементтерден тұрса, онда олар тең деп аталады: $A = B \Leftrightarrow B \subseteq A$ және $A \subseteq B$;

б) егер $B \subseteq A$ және $A \neq B$, онда B жиыны A жиынының меншікті ішкі жиыны делінеді: $B \subset A$ – қатаң ену.

Айта кетелік, меншікті не меншікті емес ішкі жиын сияқты ену қатынастарын белгілеу үшін қатаң не қатаң емес таңбалар қолданылады. Егер ішкі жиындарды ажырату керек болса, осы таңбалар арқылы ажыратады. Келесі $\in$ және $\subseteq$ таңбаларды шатастырмау керек:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \in \{1,2,3\} \\ \{a\} \in \{\{a\}\} \\ \{1\} \subset \{1,2,3\} \end{array}\right\} \text{- дұрыс,}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \subseteq \{1,2,3\} \\ 1 \notin \{1,2,3\} \\ \{a\} \in \{a, b\} \end{array}\right\} \text{- дұрыс емес.}$$

Жиындар басқа жиынның элементі болуы мүмкін. Элементтері жиын болатын жиынды «әулет» деп атап, латын алфавитінің бас әріптерімен белгілейді. A жиынының барлық ішкі жиындарының жиынтығын оның булеаны немесе жиын-дәрежесі деп атайды. Белгіленуі $\mathcal{P}(A)$ немесе 2^A. Сонымен, $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$. n элементтен тұратын жиынның булеаны 2^n элементтен тұрады.

Мысал 1.1.1 $A = \{1,2,3\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$. $\mathcal{P}(A)$ жиынтығы 8 элементтен тұрады, $8 = 2^3$.

Егер белгілі пайымдауларда барлық қарастырылып отырған жиындардың элементтері қандай да бір үлкен жиынға тиісті болса, онда ондай жиын универсалды немесе универсум деп аталатын жиыннан алынады, U деп белгіленеді. Жиынды көрнекі кескіндеу үшін Эйлер-Венн диаграммасы қолданылады. Онда жиындар тіктөртбұрыштың ішінде дөңгелектің нүктелерімен белгіленеді, ал нүктелер U - универсум жиыны.

Жиындарға қолданылатын қисаптар (операциялар).

$\forall A, B \in \mathcal{P}(U)$. Келесі қисаптар былай анықталады:

а) бірігу (қосынды) (белгіленуі $\cup, +$): $A \cup B = \{x \mid x \in A$ немесе $x \in B\}$;

ә) қиылысу (көбейтінді) ($\cap$, $\bullet$): $A \cap B = \{x \mid x \in A$ және $x \in B\}$;

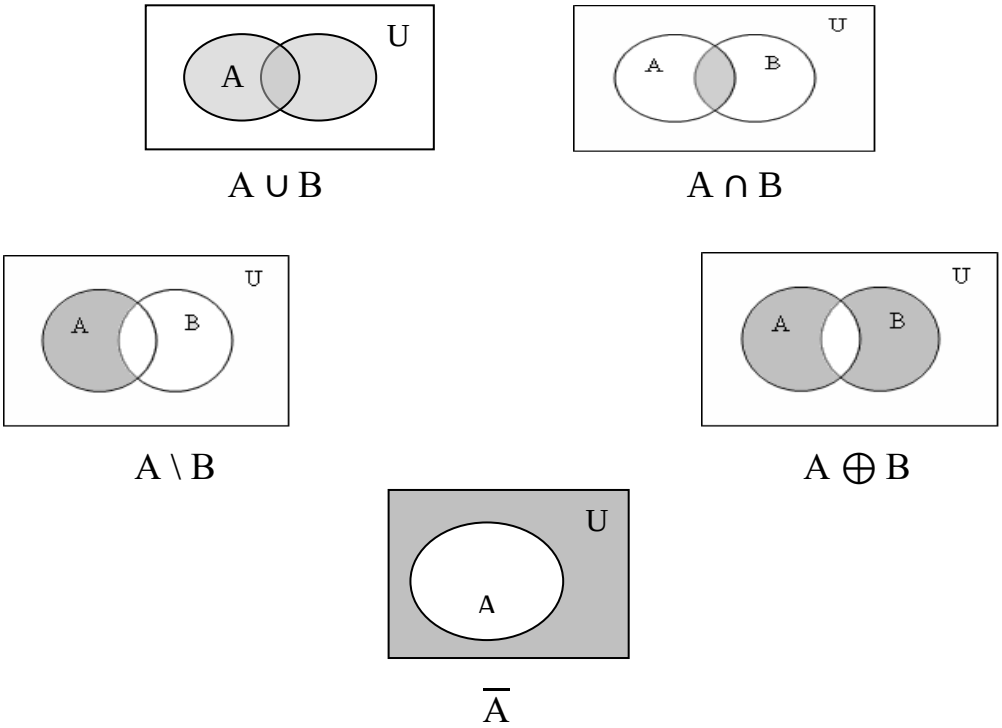
б) айырым ($A \setminus B$; $A - B$): $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ және $x \notin B\}$;

в) симметриялық айырым немесе сақиналы қосынды ($\oplus, \Delta, +$):

$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{x \mid (x \in A$ және $x \notin B)$ немесе $(x \in B$ және $x \notin A)\}$;

г) A жиынының толықтауышы ($\overline{A}$): $\overline{A} = \{x \mid x \in U$ және $x \notin A\} = U \setminus A$.

Жиындарға қолданылатын қисаптар Эйлер-Венн диаграммасы арқылы былай бейнеленеді:



1.1.1 сурет

Бірігу және қиылысу қисаптарын жалпылауға болады:

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $\qquad A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Жиындарға қолданылатын қисаптардың қасиеттері.

Өрнектерді түрлендіру, қысқарту үшін, теоремаларды дәлелдеу үшін жиындарға қолданылатын қисаптардың қасиеттерін білу керек. Олардың арасында маңыздыларын атап өтейік. U универсумы берілген болсын. Онда $\forall A, B, C \subset U$ келесі қасиеттер орынды:

Кесте 1.1.1

Идемпотенттік	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Коммутативтік	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Дистрибутивтік	$A \cup (B \cap C) =$ $= (A \cup B) \cap (B \cup C)$	$A \cap (B \cup C) =$ $= (A \cap B) \cup (B \cap C)$
Ассоциативтік	$A \cup (B \cup C) =$ $= (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) =$ $= (A \cap B) \cap C$
Сіңіру қасиеті	$A \cup (B \cap A) = \mathrm{A}$	$A \cap (B \cup A) = \mathrm{A}$
Нөл мен бірдің қасиеттері	$A \cup \emptyset = A$ $A \cup U = U$	$A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cap U = A$
де Морган заңы	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Екі рет терістеу заңы (инволютивтік)	$\overline{\overline{A}} = A$	
Толықтауыштың қасиеті	$A \cup \overline{A} = U$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$

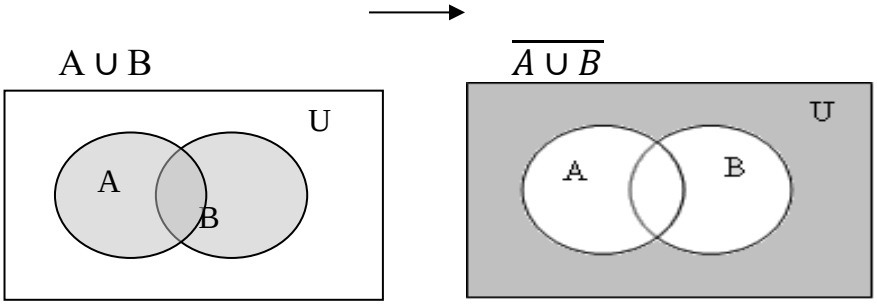
Бұл қасиеттерді Эйлер-Венн диаграммасы арқылы немесе қисаптың анықтамасына сүйеніп, пайымдау арқылы дәлелдеуге болады.

Мысалы, дәлелдеу керек:

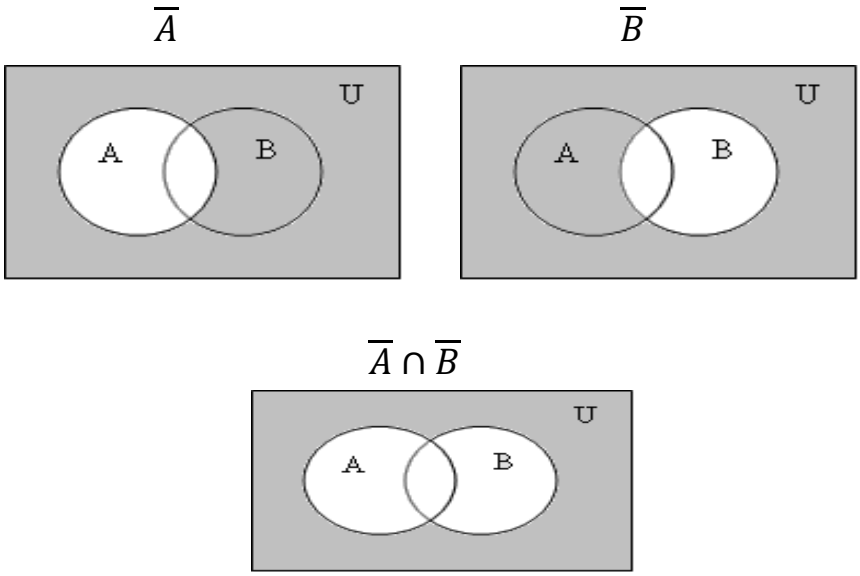
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

1 әдіс. Диаграмма көмегімен дәлелдейміз:

а)



ә)



1.1.2 сурет

а) және ә) пункттерінде соңғы суретте бірдей облыс кескінделген, бұл тепе теңдікті дәлелдейді.

2 әдіс. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ тепе теңдікті ресми негіздеу арқылы дәлелдейміз. Ресми негіздеуде $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ және $B \subseteq A$ анықтамасына сүйенеді. Соңғы енгізулер: $A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \rightarrow x \in B)$ және $B \subseteq A \Leftrightarrow (x \in B \rightarrow x \in A)$ білдіреді, сондықтан:

а) $x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ және $x \notin B \Rightarrow x \in \overline{A}$ және $x \in \overline{B}$ $\Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$;

ә) $x \in \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A}$ және $x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin A$ және $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow$ $x \in \overline{A \cup B}$.

Теорема. Кез келген A және B жиындары үшін келесі шарттар эквивалентті:

а) $A \subseteq B$;

ә) $A \cap B = A$;

б) $A \cup B = B$;

в) $A \setminus B = \emptyset$;

г) $\overline{A} \cup B = U$.

1.1.2 мысалында қисаптар қасиеті өрнекті ықшамдау үшін қолданылды.

М ы с а л 1.1.2 $\overline{A \cap \overline{B}} \cup B = \overline{A} \cup \overline{\overline{B}} \cup B = \overline{A} \cup B \cup B = \overline{A} \cup B$.

Жиынның бөліктеуі мен бүркеуі.

A жиыны берілген болсын. $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots A_n\}$ – A жиынының ішкі жиындарының жиыны (ішкі жиындар жиынтығы).

Анықтама. Егер

1. $\forall A_i \in \mathcal{A}\ (A_i \subset A\ , A_i \neq \emptyset)$;

2. $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$,

онда $\mathcal{A}$ – A жиынының *бүркеуі* деп аталады.

Анықтама. Егер

1. $\forall A_i \in \mathcal{A}\ (A_i \subset A\ , A_i \neq \emptyset)$;

2. $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$;

3.$\forall A_i, A_j \in \mathcal{A}\ \ [A_i \neq A_j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset]$,

онда $\mathcal{A}$ – A жиынының *бөліктеуі* деп аталады.

Бөліктеу элементтері, яғни A жиынының ішкі жиындары бөліктеудің блоктары деп аталады.

М ы с а л 1.1.3 $A = \{1, 2, 3\}$.

$\mathcal{A}_1 = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$ – бүркеу;

$\mathcal{A}_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{1\}\}$ – бөліктеу;

$\mathcal{A}_3 = \{\{1\}, \{2,3\}\}$ – бөліктеу;

$\mathcal{A}_4 = \{\{1\}, \{3\}\}$ – A жиынының ішкі жиындарының жиыны (булеан емес, бүркеу емес, бөліктеу емес).

М ы с а л 1.1.4. N –натурал сандар жиыны.

N_0, N_1 – жұп және тақ сандар жиыны. $\mathcal{N}\{N_0, N_1\}$ - N *бөліктеуі*.

Жиындардың тура көбейтіндісі.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ элементтерінің реттелген тізбегін $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ немесе $< x_1, x_2, \dots, x_n >$ деп белгілеп, n ұзындықты кортеж деп атаймыз (басқа атаулары n-ка (энка), n ұзындықты вектор). x_i – i-ші координата немесе i-ші компонента.

$n = 2$ - (x_1, x_2) – жұп, реттелген екілік;

$n = 3$ - (x_1, x_2, x_3) – үштік, реттелген үштік;

$n = 0$ - $< >$ – элементі жоқ кортеж.

Егер $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$, онда

$$\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow (x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, \ x_n = y_n).$$

Айта кетелік, (1,2) ≠ (2,1), {1,2} = {2,1}.

Анықтама. A және B жиындарының тура (декарттық) көбейтіндісі (белгіленуі $A \times B$) деп, $a \in A$ және $b \in B$ шарттарын қанағаттаратын (a, b) жұбы айтылады: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A$ және $b \in B\}$.

Тура көбейтіндінің жалпылануы:

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$

Егер $A = B$, онда

$A \times A = A^2$; $\underbrace{A \times A \ldots \times A}_{n} = A^n$; $A^1 = A$; $A^0 = \{\emptyset\}$

М ы с а л 1.1.5 $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$.

$A \times \mathrm{B} = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 2), (2; 3)\}$;

$\mathrm{B} \times A = \{(1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2), (3; 1), (3; 2)\}$;

$A \times B \neq B \times A$;

$A^2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$;

М ы с а л ы 1.1.6

$R \times R = R^2 = \{(a, b) \mid a, b \in R, (a, b)$ – жазықтықтың нүктесі.

1.2 Қатынастар

Әртүрлі жиындардың немесе бір жиынның элементтерінің арасындағы байланысты немесе қатынастарды қолданатын есептер жиі кездеседі. Мысалы, егер әлемдегі елдер жиынын қарастырсақ, онда елдер арасында мынадай қатынастар қарастыруға болады: «*x* елінің тұрғындары *y* еліне қарағанда көп» немесе «*x* және *y* елдерінің ортақ шекарасы бар»; егер ерлер, әйелдер, балалар жиынын қарастырсақ, онда «*x* және *y* - *z*-тің ата-анасы» қатынасын қарастыруға болады және т.с.с.

Анықтама. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ жиындарындағы n-орынды қатынас P (n-орынды предикат) деп $P \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ және

$$P = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n\} \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

тура көбейтіндінің кез келген ішкі жиыны айтылады.

Егер $x_1, x_2, \ldots, x_n$ элементтері P қатынасымен байланысқан болса, онда $(x_1, \ldots, x_n) \in P$ немесе $P(x_1, \ldots, x_n)$ деп жазады.

Егер $P \subseteq A^n$, онда P – A жиынындағы n- орынды қатынас:

$n = 1$, онда $P \subseteq A_1$- бір орынды қатынас немесе қасиет;

$n = 3$, онда $P \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3$– үш орынды немесе тернарлы қатынас.

Жиі кездесетін, терең зерттелгені - бинарлы қатынас:
$(n = 2)$ $P = \{(x, y) \mid x \in A_1,\ y \in A_2 \subseteq A_1 \times A_2\}$ немесе $P \subseteq A_1 \times A_2$, немесе $P = \{(x, y) \mid x \in A_1,\ y \in A_2\}$ қатынасттары. Жазылуы $P(x, y)$ немесе xPy .

Мысалы, $< (x; y)$ немесе $(x; y) \in <$ орнына $x < y$ деп жазуға болады. Әрі қарай бинарлы қатынасты қарастырамыз, оларды жай қатынас дейміз.

Анықтама. P қатынасының анықталу облысы деп (белгіленуі D_P) $D_P = \{x \mid (x, y) \in P$ қандай да бір y үшін$\}$ жиыны айтылады; мәндерінің жиыны деп (белгіленуі E_P) $E_P = \{y \mid (x, y) \in P$ қандай да бір x үшін$\}$ жиыны айтылады (яғни D_P - бұл P жұбының бірінші координаталар жиыны, E_P – екінші).

Қатынасты элементтерін тізу арқылы, сипаттаушы қасиеттері арқылы, сызба түрде, матрица көмегімен беруге болады.
Ақырлы жиындарда бинарлы қатынасты матрицамен, графиктік түрде береді.

Анықтама. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, және $P \subseteq A \times B$ болсын. Егер

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ егер } (a_i, b_j) \in P \\ 0, \text{ егер } (a_i, b_j) \notin P \end{cases}, \ i = 1,2,\ldots m;\ j = 1,2,\ldots n \text{ болса, онда}$$

$m \times n$ өлшемді $[P] = (p_{ij})$ матрицасы P қатынасының матрицасы деп аталады.

P қатынасын сызба түрде әртүрлі жолмен беруге болады:

а) координаталық жазықтығында координата өстері бойында A және B жиындарының элементтері белгіленеді, алынған (x, y) нүктелер P қатынасының элементтері болады. $P \subseteq A \times B$, $x \in A$, $y \in B$;

ә) жазықтықта екі шектелген жиын салынады, онда A және B жиындарының элементтерін нүктелермен белгілейді. Егер $(x, y) \in P \subseteq A \times B$ болса, онда x және y нүктелері бағытталған сызықпен жалғанады;

б) $P \subseteq A^2$ қатынасын бағытталған графпен беруге болады, яғни $x, y \in A$ элементтері бағытталған сызықпен жалғанған нүктелермен бейнеленген.

М ы с а л ы 1.2.1 $A = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$, $B = \{1,2,3,4\}$,

$P_1 = \{(a,1),(b,1),(b,3),(c,2)\} \subseteq A \times B,$

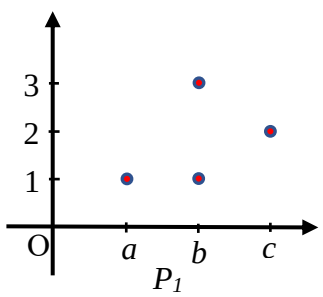
$P_2 = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,1),(4,3)\} \subseteq B^2.$

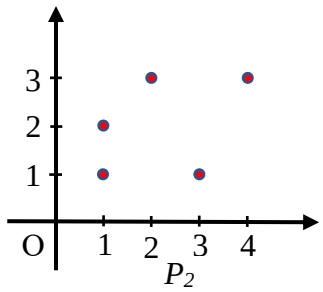
Қатынастың матрицамен берілуі:

$$[P_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad [P_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

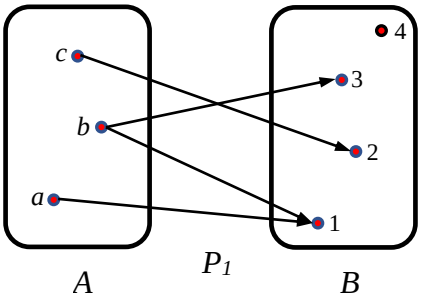
Қатынастың графиктік түрде берілуі:

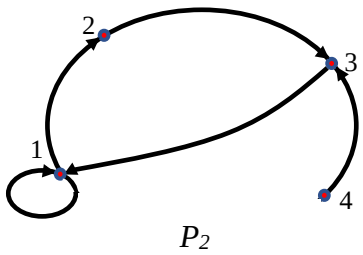
а)





ә) б)





1.2.1 сурет

Анықтама. $P \subseteq A \times B$, $P = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ болсын.

а) P^{-1} – P -ға кері $\Leftrightarrow$ $P^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in P\}$, $P^{-1} \subseteq B \times A$

ә) $\overline{P}$– P -ның толықтауышы $\Leftrightarrow$ $\overline{P} = \{(a,b) \mid (a,b) \notin P\}$, $\overline{P} \subseteq A \times B$;

б) I – A жиынындағы тепе-теңдік қатынас (белгіленуі id$A$).

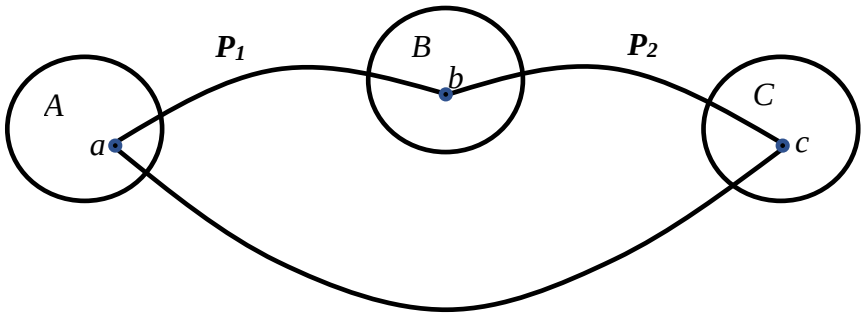
$I = \{(a,a) \mid a \in A\}, I \subseteq A^2$ (A^2 – тағы диагональ деп те атайды, себебі оның матрицасы бірлік матрица болады);

в) U – универсалды қатынас $\Leftrightarrow$ $U = \{(a,b) \mid a \in A$ және $b \in A\}$, яғни $U = A^2$.

Анықтама. $P_1 \subseteq A \times B$ және $P_2 \subseteq B \times C$ бинарлы қатынастардың композициясы (көбейтіндісі) (белгіленуі $P_1 \circ P_2$) деп

$P = P_1 \circ P_2 = \{(a, c) |\ a \in A, c \in C$ және $\exists b \in B$: $(a, b) \in P_1$ және $(b, c) \in P_2\}$

қатынасы айтылады.



$P_1 \circ P_2$

1.2.2 сурет

Мысал 1.2.2 $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{6, 7, 8\}$; $C = \{10, 11, 12\}$.

$P_1 = \{(1,7), (4,6), (2,8)\} \subseteq A \times B$,

$P_2 = \{(6,10), (6,11), (7,10), (8,12)\} \subseteq B \times C$ болсын, онда

$P_1^{-1} = \{(7,1), (6,4), (8,2)\}$;

$A \times B = \{(1,6), (1,7), (1,8), (2,6), (2,7), (2,8), (3,6), (3,7), (3,8), (4,6), (4,7), (4,8)\}$ болғандықтан,

$\overline{P}_1 = A \times B / P_1 = \{(1,6), (1,8), (2,6), (2,7), (3,6), (3,7), (3,8), (4,6), (4,7), (4,8)\}$;

$P_1 \circ P_2 = \{(1,10), (4,10), (4,11), (2,12)\}$.

Бұл композиция былай алынды: P_1 қатынасының (1,7) бірінші элементі үшін P_2 қатынасынан 7 саны бірінші орында тұратын элементін табамыз, бұл – (7,10). (1,7) және (7,10) элементтерінің композициясы – (1,10); екінші (4,6) элемент үшін P_2 қатынасынан 6 саны бірінші орында тұратын элемент – (6,10) және (6,11). Онда (4,10), (4,11) композицияға кіреді және т.с.с. $P_1 \circ P_2 = \emptyset$.

Теорема. P, Q, R бинарлы қатынастары үшін келесі қасиеттер орынды:

а) $(P^{-1})^{-1} = P$;

ә) $(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1}$;

б) $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$ (ассоциативтік);

в) $P \circ Q \neq Q \circ P$ (коммутативтік қасиет жалпы жағыдайда орындалмайды).

Бинарлы қатынастардың матрицаларының негізгі қасиеттері.

1. $P, Q \subseteq A \times B$, $[P] = (p_{ij}), [Q] = (q_{ij})$ болсын.

$[P \cup Q] = (p_{ij} + q_{ij}) = [P] + [Q]$, мұнда матрицалардың сәйкес элементтері қосылады:

$$0 + 0 = 0,\ 1 + 0 = 0 + 1 = 1 + 1 = 1;$$

$[P \cap Q] = (p_{ij} * q_{ij}) = [P] * [Q]$, мұнда матрицалардың сәйкес элементтері көбейтіледі: $0 * 0 = 1 * 0 = 0 * 1 = 0,\ 1 * 1 = 1$.

2. Егер $P \subseteq A \times B, Q \subseteq B \times C$, онда $[P \circ Q] = [P] \cdot [Q]$ - кәдімгі матрицаларды көбейту, бірақ $[P]$ және $[Q]$ матрицаларының элементтері 1 қасиеттегі ереже бойынша қосылып, көбейтіледі.

3. Егер P^{-1} – P -ға кері, онда $[P^{-1}] = [P]^T$.

4. $P \subseteq Q$ және $[P] = (p_{ij}), [Q] = (q_{ij})$, онда $p_{ij} \leq q_{ij}$.

5. I–тепе-теңдік қатынас, онда

$$[I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ - бірлік матрица.

6. $\overline{P}$- P - ның толықтауышы, онда $[\overline{P}]$ - P қатынасының матрицасына тең, тек нөлдер бірлермен, бірлер нөлдермен айырбасталған.

М ы с а л 1.2.3 P және Q қатынастарының матрицалары мына түрде болсын

$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ [Q] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

онда

$$[P \cup Q] = [P] + [Q] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$[P \cap Q] = [P] * [Q] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$[P \circ Q] = [P] \cdot [Q] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$[Q^{-1}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad [\overline{Q}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Қатынас қасиеттері.

Кесте 1.2.1 – $P \subseteq A^2$ қатынасының қасиеттері.

P	Анықтама		[P]
рефлексивті	$\forall a \in A;\ \ (a,a) \in P$	$I \subseteq P$	$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ * & 1 & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix}$
антирефлексивті	$\forall a \in A;\ \ (a,a) \notin P$	$P \cap I = \emptyset$	$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ * & 0 & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}$
симметриялы	$\forall a,b \in A; (a,b) \in P \Rightarrow (b,a) \in P$	$P = P^{-1}$	$[P] = [P]^T$
антисимметриялы	$\forall\ a,b\ \in A$ $[(a,b)\ \in P$ және $(a,b) \in P \Rightarrow$ $a = b]$	$P \cap P^{-1} \subseteq I$	$[P \cap P^{-1}] = [P] * [P^{-1}] =$ $= \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$
транзитивті	$\forall a,b,c \in A\ [\ (a,b) \in P$ және $(b,c) \in P \Rightarrow (a,c) \in P]$	$P \circ P \subseteq\ P$	Егер $[P \circ P] = (a_{ij})$, $[P] = (p_{ij})$, онда $a_{ij} \leq p_{ij}$

Қатынастың қасиеттерін оның матрицасы арқылы анықтауға болады.

М ы с а л 1.2.4 $P = \{(1,2),(2,3),(3,2)\} \subseteq A^2$ қатынасы берілген, мұндағы $A = \{1,2,3\}$. Қатыныстың қасиеттерін анықтайық. Ол үшін бұл қатыныстың матрицасын құрамыз

$$[P] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- P рефлексивті емес, себебі матрицаның бас диагоналында бірлер жоқ;
- P антирефлексивті, себебі матрицаның бас диагоналында тек нөлдер;
- P симметриялы емес, себебі $(1;2) \in P$ болғанмен, $(2;1) \notin P$ немесе

$$[P] \neq [P^T] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

- P антисимметриялы емес, себебі $(2;3) \in P$, $(3;2) \in P$, бірақ $2 \neq 3$, немесе

$$[P] * [P]^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

матрицада бас диагональдан өзге жерде тек нөлдер емес;

- P транзитивті емес, мысалы, $(1,2) \in P$, $(2,3) \in P$, бірақ $(1,3) \notin P$ немесе матрица бойынша:

$$[P] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (p_{ij}),$$

$$[P \circ P] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a_{ij}),$$

кез келген i, j үшін $a_{ij} \leq p_{ij}$ шарты орындалмайды, мысалы, $a_{13} = 1$, $p_{13} = 0$, яғни $a_{13} > p_{13}$.

Көп қатынастар жоғарыда көрсетілген қасиеттер жиынтығына ие. Осы жиынтық жиі кездескендіктен, оған арнайы тарау бөлініп, арнайы оқып үйрену талап етіледі.

Эквиваленттілік қатынасы.

Анықтама. Егер P қатынасы рефлексивті, симметриялы және транзитивті болса, онда ол эквивалентті деп аталынады (белгіленуі $\sim$, E, $\equiv$).

Мысалы:

а) кез келген жиындағы теңдік қатынасы:

1) $x = x$;

2) $x = y \to y = x$;

3) $x = y; y = z \to x = z$;

ә) жазықтықтағы түзулер жиынындағы параллельдік қатынасы.

Анықтама. E – A жиындағы эквиваленттілік қатынасы болсын және $x \in A$. x-ке эквивалентті A жиындағы элементтердің ішкі жиыны x элементінің эквиваленттілік классы делінеді. Белгіленуі: $[x]_E, E(x)$.

Сонымен,

$$E(x) = \{y \mid yEx\}.$$

Анықтама. Эквивалентті класстар жиыны E эквиваленттілігіне қатысты A жиынының фактор-жиыны деп аталынады.

Белгіленуі $A/E : A/E = \{E(x) \mid x \in A\}$. Фактор –жиын булеанның ішкі жиыны болады.

М ы с а л 1.2.5 A – университеттегі студенттер жиыны. E – бір топқа тиесілік қатынасы. $[x]_E$ – бір топтың студенттері. A/E – университеттегі студенттік топтар жиыны.

Анықтамадан

1) эквиваленттілік классының кез келген элементі эквиваленттілік классын туындайды, яғни $b \in [a] \to [a] = b$;

2) әрбір эквиваленттілік классы ең болмағанда бір элементтен тұрады, яғни $\forall a \in A,\ [a] \neq \emptyset$;

3) A жиынының ешқандай элементі әртүрлі екі классқа тиісті бола алмайды: $aEb \to [a] = [b]$.

Теорема. A/E фактор –жиыны A жиынының бөліктеуі болып табылады.

Керісінше, егер $\mathcal{A} = \{A_i\}$, A жиынының қандай да бір бөліктеуі болса, онда оған қандай да бір E эквиваленттілік қатынасы сәйкес келеді:

$$xEy \Leftrightarrow x, y \in A_i$$

қандай да бір i үшін немесе $E = \{(x; y) \mid x, y \in A_i$ қандай да бір i үшін$\}$.

Сонымен, A жиынының барлық бөлікшелер жиыны мен A жиынының барлық эквиваленттілік қатынасы жиыны арасында өзара бірмәнді сәйкестік табылады.

М ы с а л 1.2.6 $A = \{1,2,3,4\}$. $A = \{\{1\},\{2,3,4\}\} = \{A_1, A_2\}$ – A бөлікшесі. $E = \{(x; y) \mid x, y \in A_i, i = 1,2\} =$

$= \{(1,1); (2,2); (2,3); (2,4); (3,2); (3,3); (3,4); (4,2); (4,3); (4,4)\}$ - берілген бөлікшеге сәйкес эквиваленттілік қатынасы.

М ы с а л 1.2.7 $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $P \subseteq A^2$, $P = \{(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6); (1,2); (1,4); (2,1); (2,4); (3,5); (5,3); (4,1); (4,2)\}$.

Берілген қатынастың эквиваленттілік қатынас болатындығын көрсетеміз.

Оның матрицасы бойынша

$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

P рефлексивті, симметриялы, транзитивті екендігін көреміз, олай болса P – A жиынындағы эквиваленттілік қатынасы. Эквиваленттілік классын және фактор – жиынды құрамыз:

$[1]P = \{x \mid (x;1) \in P\} = \{1,2,4\}$; $[2]P = \{x \mid (x;2) \in P\} = \{1,2,4\}$;

$[3]P = \{x \mid (x;3) \in P\} = \{3,5\}$; $[4]P = \{x \mid (x;4) \in P\} = \{1,2,4\}$;

$[5]P = \{x \mid (x;5) \in P\} = \{3,5\}$; $[6]P = \{x \mid (x;6) \in P\} = \{6\}$.

Сонымен, тек үш әртүрлі эквиваленттік класс бар:

$[1] = [2] = [4] = \{1,2,4\}$, $[3] = [5] = \{3,5\}$, $[6] = \{6\}$.

$A/\mathrm{P} = \{[1],[3],[6]\} = \{\{1,2,4\},\{3,5\},\{6\}\}$ фактор – жиыны A жиынының бөліктеуі болып табылады. Ол бөліктеу берілген эквиваленттілік қатынасына сәйкес келеді.

Реттік қатынасы.

Анықтама. Егер P қатынасы A жиынында антисимметриялы және транзитивті болса, онда ол реттік қатынасы деп аталады. Жиі белгіленуі $<$.

Егер сонымен қатар ол

1) рефлексивті болса, онда ол дербес немесе қатаң емес реттік қатынас делінеді ($\leq$);

2) антирефлексивті болса, онда ол қатаң реттік қатынас делінеді ($<$).

Анықтама. A жиынында $<$ реттік қатынасы берілген болсын. Егер осы жиынның кез келген a және b элементтері үшін $a < b$ немесе $b < a$ орындалса, онда элементтер салыстырмалы деп аталынады, қарсы жағдайда – салыстырмалы емес.

Анықтама. Егер A жиынының кез келген екі элементі салыстырмалы болса, онда осы жиындағы дербес қатынас сызықты немесе шынжыр деп аталады.

Егер A жиынында дербес (сызықты) реттік қатынас анықталған болса, онда ол жиын дербес реттелген жиын деп аталады (д.р.ж) (сызықты реттелген жиын (с.р.ж)). Белгіленуі $(A, <)$.

М ы с а л 1.2.8 $A = \{a, b, c\}. P = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, c)\}$ – дербес реттік қатынас (яғни рефлексивті, антисимметриялы, транзитивті), оны қатынастың матрицасы арқылы тексеруге болады

$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

P сызықты қатынас болмайды, себебі a және c, b және c салыстырылмайды.

Сызықты реттелген жиын мысалдары ретнде N, Z, Q, R жиындарын қарастыруға болады.

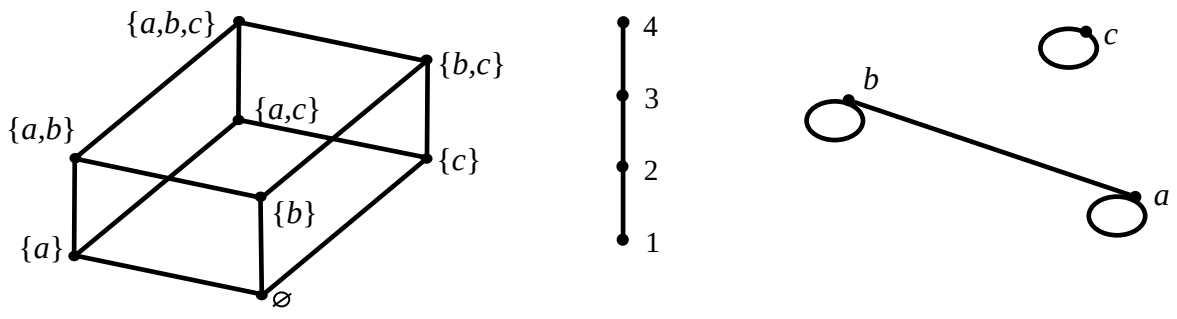
Анықтама. Егер реттелген A жиынының барлық $\forall x \in A$ үшін $x \leq a$, $(a \leq x)$ орындалса, онда a элементі ең үлкен (ең кіші) деп аталады. Егер сызықты реттелген жиынның бос емес ішкі жиынында ең кіші элемент бар болса, онда ол әбден реттелген жиын (ә.р.ж.) деп аталады.

М ы с а л 1.2.9 $(N; \leq)$ – ә.р.ж. $([0; 1], \leq)$ – ә.р.ж. болмайды, себебі $(0; 1] \subseteq [0; 1]$, бірақ $(0; 1]$-да ең кіші элемент жоқ.

Анықтама $(X; \leq)$ д.р.ж. қарастырайық. Егер $x \leq y$ және $x < z < y$ орындалатындай z элементі табылмаса, y элементі x элементін бүркейді дейді.

X жиыны ақырлы болған жағыдайда, д.р.ж. $(X; \leq)$ сұлба түрінде бейнелеуге болады. Сұлбада әрбір элемент жазықтықтың нүктесі болады. Егер y элементі x элементін бүркесе, x және у кесіндімен жалғанады. x – ке сәйкес нүкте у нүктесінен төмен орналасады. Егер реттік қатынас қатаң болмаса, онда барлық нүктеге тұзақ бейнеленеді. Реттік қатынас транзитивті болғандықтан, мысалы, $(a, b) \in P, (b, c) \in P$ және $(a, c) \in P$, онда a және c нүктелерін кесіндімен қосудың қажеті жоқ, себебі олар b нүктесі арқылы жалғанған. Мұндай сұлбалар Хассе диаграммасы деп аталады.

М ы с а л 1.2.10 $(\mathcal{P}$ (A), $\subseteq) = \{(A_i, A_j) | A_i \subseteq A_j\}$ д.р.ж. қарастырайық, мұндағы $A = \{a, b, c\}$, $\mathcal{P}(A)$ A –ның булеаны. $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ үшін Хассе диаграммасы 1.2.3 а) суретте; $(\{1,2,3,4\}, \leq)$ с.р.ж. үшін натурал сандар жиынындағы қарапайым реттік қатынас, төрттен аспайды, Хассе диаграммасы 1.2.3 ә) суретте; 1.2.8 мысалдағы қатынас үшін Хассе диаграммасы 1.2.3 б) суретте.



а) ә) б)

1.2.3 сурет

Лексикографиктік реттілік

Лексикографиктік реттілік әртүрлі сөздіктердегі сөздердің ретпен жазылуының негізін қалайды. Алфавит деп аталатын $X = \{x, y, \dots\}$ бос емес символдар жиынын қарастырайық. Сөздер деп X жиынының бірінен соң бірі жазылған элементтерінің ақырлы жиынтығын айтамыз. $x_1, x_2, \dots, x_n$ сөзінің x_i элементі i -ші координата, ал n оның ұзындығы делінеді.

Анықтама. $W(X)$ – X алфавитінің сөздерінің жиыны болсын, $\leq$ – X жиынындағы реттік қатынасы, яғни $(X, \leq)$ – реттелген жиын.

Егер келесі шарттардың біреуі орындалса:

а) $x_1 < y_1$;

ә) $x_i = y_i \ \forall i: 1 \leq i \leq m, m < n$;

б) $x_i = y_i \ \forall i: 1 \leq i \leq k, x_{k+1} < y_{k+1}$;

онда $W(X)$-дегі лексикографиктік реттік қатынас (белгіленуі $<$ немесе $\mathcal{L}$) келесі ережемен беріледі: $x_1, x_2, \dots, x_m \ \mathcal{L} \ y_1, y_2, \dots, y_n$.

Функционалдық қатынастар (функциялар).

Анықтама. Егер:

а) $(x, y_1) \in f, (x, y_2) \in f \rightarrow y_1 = y_2,$ немесе

$\forall x \in A, \ \exists! \, y \in B: (x, y) \in f;$

ә) $D_f = A, \ E_f \subseteq B$

шарттары орындалса, онда A жиынынан B жиынына $f \subseteq A \times B$ бинарлық қатынас функционалдық немесе функция деп аталынады. Бұл жағыдайда функцияны кейде барлық жерде анықталған деп аталады;

Егер $D_f \subseteq A$, онда f дербес функция немесе дербес анықталған делінеді. $D_f = A,\ \ E_f \subseteq B,$ бұл жағдайда функцияны кейде толық дейді мұндағы D_f – функцияның анықталу облысы, E_f – мәндерінің жиыны;

Әдетте математикада барлық жерде анықталған функциялар қарастырылып, олар жай функциялар делінеді.

М ы с а л 1.2.11 $\mathrm{A} = \{1,2,3\}$, $f = \{(1,2),(2,3),(3,2)\} \subseteq A^2$– функция, себебі $D_f = A,\ E_f \subseteq A;$

$P = \{(1,1);(1,2);(2,3)\} \subseteq A^2$ –функция емес, себебі (1,1) және (1,2) жұптары енеді, бұл жұптарда бірінші элементтері бірдей, екіншілері әртүрлі.

$P = \{(x; x^2 + x + 1) |\ x \in R\}$ қатынасы функция, себебі $x = y$ теңдігінен $x^2 + x + 1 = y^2 + y + 1$ шығады.

$P = \{(x^2; x)\ |\ x \in R\}$ – функция емес, себебі бірінші элементтері бірдей, екіншілері әртүрлі жұптар бар: $(1,-1) \in P$, $(1,1) \in P$.

$P = \{(x; \sqrt{x})\ |\ x \in R\}$ - дербес функция, себебі $D_P = [0; +\infty)$, $D_P \subseteq R$.

Егер $f = \{(x, y)\ |\ x \in A, y \in B\}$ функция берілсе, онда x - аргумент, y - функцияның мәні. Функцияны белгілеудің әртүрлі жолдары: $y = f(x)$, $f: A \to B, f: x \to y;\ A \xrightarrow{f} B;\ x \xrightarrow{f} y.$

Сонымен қатар, $f:\ x$ элементіне y элементін сәйкес қояды дейді.

$f = \{(x, y)\ |\ x \in A, y \in B\}$ – функция болсын. Ол функция:

а) Егер $(x_1, y) \in f$ және $(x_2, y) \in f \to x_1 = x_2$ (немесе $x_1 \neq x_2 \ \to f(x_1) \neq f(x_1)$), және де f^{-1} - дербес функция болса, онда инъективті (инъекцией, әртүрлі мәнді) деп аталады.

ә) Егер $\forall y \in B,\ \exists x \in A$: $(x, y) \in f,$ яғни $E_f \in B$ онда сюръективті (сюръекция, A -ның B -ға бейнесі).

б) Егер функция әрі инъективті, әрі сюръективті болса (барлық жерде анықталған функциялар үшін), ол биективті (биекцией, өзара-бірмәнді сәйкестік) деп аталады. Белгіленуі $A \leftrightarrow B$.

Айта кетелік, егер функция дербес болса, онда, ол инъективті және сюръективті болған жағдайда, функция әруақытта биективті болады. Мысалы, $P = \{(x; y) | y = ln\, x\,, x, y \in R\}$ $(P \subseteq R \times R)$ - дербес функция, себебі $D_P = (0, +\infty)$, $D_P \subseteq R$. Ол инъективті, себебі для кез келген анықталу облысынан $x_1 \neq x_2$

үшін $ln\, x_1 \neq ln\, x_2$; ол сюръективті, себебі $E_P = R$, бірақ биекция емес, себебі $x \in R$ табылады (мысалы, $x = -1$), бірақ оған бірде бір $y \in R$ сәйкес келмейді.

Егер биекция $f\colon A \leftrightarrow A$, онда ол A жиынының алмастыруы делінеді. Мысал ретінде I тепе-тең қатынасты айтуға болады.

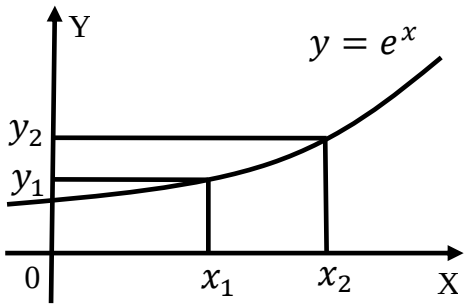
М ы с а л 1.2.12 Үш функция қарастырайық $f_i\colon R \to R (i = 1,2,3)$.

1.$f_1(x) = e^x$ - инъективті, себебі кез келген $x_1 \neq x_2$ үшін $e^{x_1} \neq e^{x_2}$, бірақ сюръекция емес, себебі:

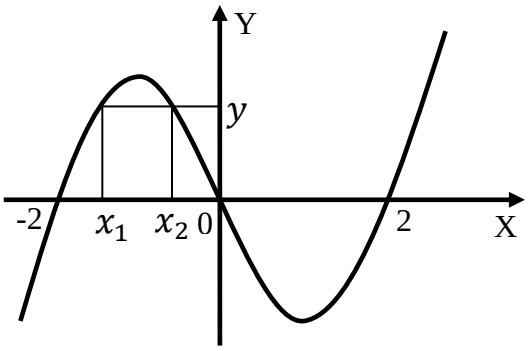
$$D_{f_1} = R, E_{f_1} \subseteq R\ (D_{f_1} = R,\ E_{f_1} = (0;\infty) \subseteq R)\ (1.2.4\ \text{сурет});$$

2. $f_2(x) = x^3 - 4x$ - сюръективті, себебі $E_{f_2} = R$, бірақ инъективті емес, себебі $x_1 \neq x_2$, бірақ $f_2(x_1) = f_2(x_2)$ ($\exists x_1 \neq x_2$, мысалы,$-2 \neq 0$, бірақ $f_2(-2) = f_2(0) = 0$, $E_f = R$) (1.2.5 сурет).

3. $f_3(x) = x + 3$ - биективті, әрбір $x \in R$ - ке бір $y = f_3(x) \in R$ сәйкес келеді және керісінше (графигі – түзу сызық).



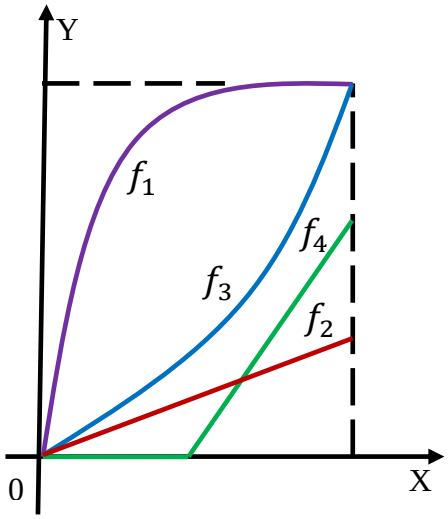
1.2.4 сурет



1.2.5 сурет

Айта кетелік, функциялардың қасиеттерін графиктері арқылы оңай көруге болады.

М ы с а л 1.2.13 Функциялар қарастырайық f_i: $[0,1] \to [0,1], (i = 1,2,3,4)$, графиктері 1.2.6 суретте кескінделген:



1.2.6 сурет

График бойынша

а) $f_1(x)$ - сюръекция (инъекция емес);

ә) $f_2(x)$ - инъекция;

б) $f_3(x)$ - биекция;

в) $f_4(x)$ - инъективті де, сюръективті де емес функция.

1.3 Жиынның қуаты туралы ұғым.

Жиындарды элементтерінің санына қарай салыстыру қажеттігі туындайды. Бұл жағдайда жиынның қуаты туралы ұғым пайда болады.

Анықтама. Егер f: $A \leftrightarrow B$ биекциясы бар болса (яғни олардың арасында өзара бірмәнді сәйкестік орнаса (ө.б.с.)), онда A және B жиындары эквивалентті делінеді (белгіленуі $A \sim B$).

Екі ақырлы жиынның элементтер саны бірдей болғанда, олардың эквивалентті болатындығы белгілі. Егер екі жиын шексіз және олардың арасында өзара бірмәнді сәйкестік орнаса, онда олардың ортақ қуаты болады делінеді. Сонымен, кез келген екі эквивалентті жиынның (ақырлы немесе шексіз) ортақ қуаты бар немесе бірдей қуатты болады.

Анықтама. A жиынының қуаты деп A жиынына эквивалентті барлық жиындар классы айтылады (белгіленуі $|A|$).

Үш мүмкін жағдай бар:

а) Егер A ақырлы жиын және n элементі бар, онда $|A| = n$;

ә) Егер A шексіз жиын және N натурал сандар жиынына эквивалентті болса, онда A санамалы жиын деп атап, былай жазады: $|A| = \omega$. Сонымен, санамалы жиынның барлық элементтерін нөмірлеуге болады;

б) N натурал сандар жиынымен ө.б.с. келтіруге болмайтын шексіз жиындар бар. Мысалы, [0,1] кесіндісіндегі барлық нақты сандар жиыны санамалы емес (Кантор теоремасы). Бұл жиынның қуатын континуум (белгіленуі c), ал мұндай қуатты жиындарды континуалды деп айту келісілген.

A континуалды жиын болса, онда $|A| = c = 2^{\omega}$, яғни континуумның қуаты санамалы жиынның барлық ішкі жиындар жиынының қуатына тең екендігі дәлелденген. Жалпы, кез келген A жиыны үшін:

$$|\mathcal{P}(\mathrm{A})| = 2^{|A|},$$

мұндағы $\mathcal{P}(A)$ – булеан.

Санамалы жиындар мысалы:

а) Z бүтін сандар жиыны, сонымен қатар Z^{+}, Z^{-};

ә) Q рационал сандардың жиыны;

б) N жиынының кез келген шексіз ішкі жиыны, мысалы, {2,4,6,8,…};

в) N^2 (жалпы $N^n \sim N$).

Континуалды жиындар мысалы:

а) R барлық нақты сандар жиыны немесе сан осіндегі нүктелер жиыны;

ә) жазықтықтың (кеңістіктің) $R \times R (R \times R \times R)$ барлық нүктелерінің жиыны;

б) санамалы жиынның барлық ішкі жиындар жиыны (яғни санамалы жиынның булеаны).

Жиындар теориясында көрсетілгендей, кез келген қуатты жиын үшін барлық ішкі жиындар жиыны қуаты жоғарырақ болады. Сондықтан максималды қуатты жиын болмайды. Жиынның қуатына кардиналды сан немесе кардинал деп аталатын жаңа объект сияқты қарауға болады. Кардиналдың мысалы:

а) кез келген натурал сан (ақырлы жиын қуаты ретінде);

ә) $\omega, 2^{\omega} = c, 2^{2^{\omega}}$ және т.б.

Айта кетелік, екі жиын арасындағы биекцияның бар болуы бір жиынның қасиеттері арқылы екіншісінікін зерттеуге мүмкіндік береді, мысалы, A ($|A| = n$) ақырлы жиынның кейбір қасиетін, $\{0,1,2,\dots,n-1\}$ жиыны бойынша зерттеуге болады.

2 Математикалық логика элементтері

2.1 Тұжырымдар және логикалық қисаптар (операциялар)

Логиканы жиі пайымдама әдістерінің талдауы ретінде қарастырады. Бұл әдістер пайымдамалардың ақиқаттығы немесе жалғандығын анықтауға мүмкіндік береді, логиканы осы болжамдағы пайымдаулардың мазмұны емес, формасы қызықтырады. Егер бұл жағдайда математикалық аппарат қолданып, математикалық пайымдамаларды зерттесек, онда логиканы математикалық логика деп атайды. Математикалық логика математика негіздерінде үлкен роль атқарады, ол – математика ғимараты тұрғызылған іргетасы. Логика информатикада компьютерлік бағдарламаларды құру үшін және олардың дұрыстығын дәлелдеу үшін қолданылады. Математикалық логиканың әдістері мен құралдары ұғымдары заманауи ақпараттық технологиялар негізінде жатады.

Анықтама. Тұжырым деп дәл осы уақытта ақиқаттығы немесе жалғандығы туралы айтуға болатын хабарлы сөйлем айтылады.

М ы с а л 2.1.1 «Бес плюс екі – төрт» тұжырымы - жалған; «Бір жылда 365 күн бар» - ақиқат.

Анықтама. Қарапайым (элементар) тұжырым бөлінбейтін бүтін ретінде қарастырылады. Белгіленуі $A, B, C, \dots, P, \dots$; күрделі (құрмалас) тұжырым деп қарапайым логикалық байланыстар (қисаптар) көмегімен құралған тұжырым айтылыды.

Негізгі логикалық қисаптар (операциялар):

1) конъюнкция («және», логикалық көбейту).

P және Q тұжырымдарының конъюнкциясы деп екеуі де ақиқат болғанда ақиқат, қалған жағдайда жалған болатын тұжырым айтылады (белгіленуі $P \wedge Q$, $P \cdot Q$, PQ, $P \,\&\, Q$, оқылуы «P және Q»);

2) дизъюнкция («немесе», логикалық қосынды). P және Q тұжырымдарының дизъюнкциясы деп екеуі де жалған болғанда жалған болатын, қалған жағдайда ақиқат болатын тұжырым айтылады (белгіленуі $P \vee Q, P + Q$, оқылуы «P немесе Q»);

3) теріске шығару (инверсия). P тұжырымының теріске шығаруы деп P ақиқат болғанда жалған, ал P жалған болғанда ақиқат болатын тұжырым айтылады (белгіленуі $\overline{P}, \neg P$, оқылуы «P емес»);

4) импликация (логикалық салдар). P және Q тұжырымдарының импликациясы деп P тұжырымы ақиқат, Q тұжырымы жалған болғанда жалған болатын, қалған жағдайда ақиқат болатын тұжырым айтылады (белгіленуі $P \to Q$, $P \supset Q$, оқылуы «Егер P, онда Q», «P -дан Q шығады»);

5) эквиваленция (эквиваленттілік). P және Q тұжырымдарының эквиваленциясы деп екеуі де ақиқат болғанда немесе екеуі де жалған болғанда ақиқат болатын тұжырым айтылады (белгіленуі $P \sim Q$, $P \leftrightarrow Q$, $P \equiv Q$, оқылуы «P Q *-ге* эквивалентті», «P тек сол жағдайда, егер Q»).

Алгебра логикасының формулалары.

Тұжырымдар логикасының құрылымын зерттейтін алгебра логикасының тілін қолданып, тұжырымдар логикасының мазмұнын қарастырамыз (яғни логикалық формулалар) және олардың ақиқаттығын алгебралық әдістер көмегімен көз жеткізу әдістерін айта кетеміз.

P тұжырымына x логикалық айнымалысын сәйкес қоямыз. Егер P ақиқат болса, онда ол 1 мәнін қабылдайды. Егер P жалған болса, онда ол 0 мәнін қабылдайды. Логикалық айнымалылардан логикалық қисаптар көмегімен әртүрлі конструкциялар құрамыз, олар алгебра логикасының формулалары болады.

Формуланың анықтамасы:

а) кез келген логикалық айнымалы формула болып табылады**;**

ә) егер φ және ψ формулалар болса, онда $\overline{\varphi}$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$, $\varphi \sim \psi$ өрнектері де формула болып табылады;

б) а) және ә) пункттерінде құрылған формулалардан өзге формула жоқ.

Егер φ формуласы $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ жиынына тиісті логикалық айнымалылардан құрылған болсын, онда $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ деп жазылады.

Логикалық қисаптардың амалдары ақиқаттық кестемен беріледі, әрбір жолда айнымалылардың әртүрлі мәндерінің жиынтығы мен оларға сәйкес формуланың мәні көрсетіледі.

Логикалық қисаптардың анықтамасына сай ақиқаттық кесте құрамыз:

Кесте 2.1.1

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$	$\overline{x}$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	

Ақиқаттық кестесін логикалық қисаптардың түсіндіруі деп те атайды, себебі ақиқаттық кесте берілген формула анықтамасындағы логикалық қисаптарды құру заңдарына қарағанда оларға мағына береді.

Логикалық қисаптардың ақиқаттық кестесінен кез келген формулаға ақиқаттық кесте құруға болады.

М ы с а л 2.1.2 $F(x, y, z) = z \to (\overline{x} \vee \overline{y})$ формуласының ақиқаттық кестесі.

Кесте 2.1.2

x	y	z	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} \vee \overline{y}$	$z \to (\overline{x} \vee \overline{y})$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0

Кез келген тұжырымды сипаттайтын өрнекке енетін логикалық қисаптардың саны аз болу сұрағы туындағанда, жаңа логикалық қисаптар енгізу қажеттігі туындады. Негізгі бес логикалық қисапқа тағы үшеуі қосылды:

6) Шеффер штрихы (антиконъюнкция). Белгіленуі $x \mid y$.

Анықтама бойынша $(x \mid y) = \neg\,(x \wedge y)$ немесе $(x|y) = (\overline{x \wedge y})$;

7) Пирс стрелкасы (антидизъюнкция). Белгіленуі $x \downarrow y$.

Анықтама бойынша $(x \downarrow y) = \neg\,(x \vee y)$ немесе $(x \downarrow y) = (\overline{x \vee y})$;

8) сақиналы қосынды (антиэквиваленция).

Белгіленуі $x \oplus y$. Былай анықталады: $x \oplus y = \neg(x \leftrightarrow y)$ немесе $x \oplus y = (\overline{x \sim y})$.

Осы қисаптардың ақиқаттық кестесін құрамыз.

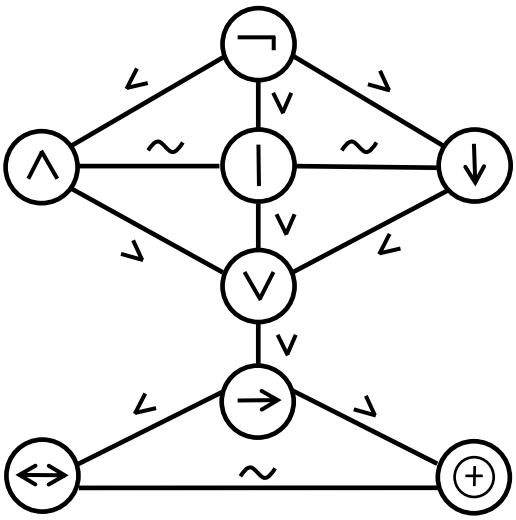
Кесте 2.1.3

x	y	$x\|y$	$x \downarrow y$	$x \oplus y$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0

Тепе-тең түрлендірулермен формулалар жасағанда қисаптардың орындалу ретін (қайсысы күштірек, қайсысы әлсіз) сақтаған жөн. Бұл жағдай үшін келесі келісімдер қабылданған:

а) $\{\neg, (\wedge, |, \downarrow), \vee, \rightarrow, (\leftrightarrow, \oplus)\}$ жиынында қисаптардың таңбалары ең мықтысынан бастап кему ретімен жазылған, ал жай жақшада күші бірдей қисаптар көрсетілген;

ә) $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, |, \downarrow, \oplus\}$ жиынында транзитивті енгізіледі « > » - күштірек болу және « ~ » қатынасы - күші бірдей болу. Жоғарыда көрсетілген ереже бойынша:



2.1.1 сурет

Тағы да келісімдер енгізілген:

а) сыртқы жақшаларды жазбауға болады, мысалы, $((x \wedge y) \rightarrow z)$ орнына $(x \wedge y) \rightarrow z$;

ә) формуладағы жетпей тұрған жақшаларды күштіден әлсізіне қарай біртіндеп қояды;

б) күші бірдей байланыстар үшін жақшалар солдан оңға қарай қойылады.

М ы с а л 2.1.3

а) $x \wedge y \vee z$ формуласындағы жақшалар былай қойылады $(x \wedge y) \vee z$;

ә) $x \vee y \leftrightarrow z \rightarrow u$ формуласындағы жақшалар былай қойылады: $(x \vee y) \leftrightarrow (z \rightarrow u)$;

б) $x \rightarrow (\overline{y} \rightarrow z)$ формуласында жақшаларды алып тастауға болмайды, себебі келісімдер бойынша $x \rightarrow \overline{y} \rightarrow z$ өрнегіне $(x \rightarrow \overline{y}) \rightarrow z$ формуласы сәйкес келеді.

2.2 Алгебралар логикасының функциялары.

Әрбір формула логикалық айнымалылы логикалық функцияны білдіреді, олар тек екі мән қабылдайды 0 және 1.

Анықтама. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - n айнымалылы алгебралар логикасының функциясы **(**логикалық функция**,** белгіленуі $f(x_1, \ldots, x_n)$) деп $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ бірлер мен нөлдердің кез келген жиынтығына $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in \{0,1\}$ мәнін сәйкес қоятын, яғни $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ кез келген функция айтылады.

Алгебралар логикасының функциялары буль, екілік немесе ауыстырып-қосқыш функциялары деп те аталады. Мұндай жиындар былай белгіленеді: $P_2, P_2(n), P_n$.

Логикалық функциялардың жиі кездесетін берілу әдістері:

а) ақиқаттық кестесімен беріледі, сол жағында $x_1, x_2, \ldots, x_n$ аргументтердің барлық мүмкін мәндерінің жиынтығы жазылған**,** ал оң жағында – осы жиынтыққа сәйкес f функциясының мәндерінің бағаны. Функцияның n айнымалыларының қабылдайтын 0 мен 1-лердің жиынтықтарының саны 2^n тең, яғни бір айнымалы функция үшін $2^1 = 2$, екі - $2^2 = 4$, үш - $2^3 = 8$ және т.б. Сонымен, бір айнымалы функция үшін ақиқаттық кестесімен 2 жолдан, екі – 4, үш – 8 және т.б. Аргументтер жиынын лексикографиктік ретпен жазу керек немесе екілік сан жүйесіндегі 0-ден 2^n-ге дейінгі сандар өсу ретімен жазылады:

Кесте 2.2.1

x_1		x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \ldots, x_n)$
0	…	0	0	$f(0, \ldots, 0,0)$
0	…	0	1	$f(0, \ldots, 0,1)$
0	…	1	0	$f(0, \ldots, 1,0)$
…	…	…	…	…
1	…	1	1	$f(1, \ldots, 1,1)$

ә) функцияның барлық жиынтықтарын тізіп жазу, ол үшін f-тің 0 мәнін қабылдайтын жиынтықтарын (нөлдік жиынтық) және 1-ді қабылдайтын жиынтықтарын (бірлік жиынтық);

б) функцияны формуламен беру;

в) функцияның мәндерінің векторы көмегімен беру. Функцияның мәндерінің векторы $f(x_1, \ldots, x_n)$ деп f-тың барлық реттелген жиынтықтары айтылады, онда $\{0,1\}^n$ аргумент жиыны бойынша барлық мәндер лексикографиктік ретпен жазылған.

Функциялардың берілу әдістерін да қарастырайық.

М ы с а л 2.1.1 Үш адам қандай да бір резолюция қабылдау үшін қондырғы орнатқан (үштік комитет). Комитеттің әрбір мүшесі резолюцияны құптағанда өз кнопкасын басады. Егер көпшілік құптаса, онда резолюция қабылданады да, қондырғыда жазылады. Сонымен, қондырғы $f(x, y, z)$ функциясын іске асырады, оның ақиқаттық кестесі:

Кесте 2.2.2

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Осы функцияны нөлдік және бірлік жиынтықтармен берейік:

- $f(0,0,0) = f(0,0,1) = f(0,1,0) = f(1,0,0) = 0$ – нөлдік жиынтық;
- $f(0,1,1) = f(1,0,1) = f(1,1,0) = f(1,1,1) = 1$ – бірлік жиынтық.

Егер осы функцияны вектор мәні бойынша берсек, онда мына түрде болады (00010111).

Кейде функцияның басқа берілу жолдары қолданылады (мысалы, [3], 124 бет).

Сонымен, n айнымалылы функция үшін 0 мен 1 -дің барлық жиынтық саны 2^n. n айнымалылы әртүрлі мүмкін функциялар саны 2^n жолы бар бағандардағы 0 мен 1 -дің орналастыру санына тең, яғни 2^{2^n}.

Егер $B^n = \{0,1\}^n$- жиын $f(x_1, \ldots, x_n)$ функцияның аргументтерінің барлық мәндерінің жиынын, ал $P_2(n)$ –$x_1, x_2, \ldots, x_n$-тен барлық функциялардың жиыны, онда бұл жиындардың қуаты $|B^n| = 2^n, |P_2(n)| = 2^{2^n}$. Сонымен, $|P_2(n)|$ өте тез өседі: $|P_2(1)| = 4$, $|P_2(2)| = 16$, $|P_2(3)| = 256$ және т.б.

Алгебра логикасында бір және екі айнымалы функциялар маңызды. Мысалы, барлық бір айнымалы функциялар жиыны $P_2(1)$ төрт функциядан тұрады. Олар кестеде көрсетілген:

Кесте 2.2.3

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1
белгіленуі	0	x	$\overline{x}$	1
аталуы	нөл	тепе тең	терістеу	бір

f_1 және f_4 функциялары 0 және 1 константалары, $f_2 = x$ функциясы x айнымалысын қайталайды, (яғни бұл функциялардың мәндері x айнымалысынан тәуелді емес, сондықтан x айнымалысы бұл функциялар үшін маңызды емес немесе жалған делінеді). Қызығушылық тудыратын функция $f_3 = \overline{x}$ – терістеудің унарлы қисабы. Осы сияқты барлық $2^{2^2} = 16$ екі айнымалылы функциялардың ақиқаттық кестесін салуға болады. Олардың арасында 7 логикалық қисаптар (конъюнкция, дизъюнкция және с.с.), қалғандары қызығушылық тудырмайды. Айта кетелік, егер функция мәндері осы функцияның анықталу облысында жатса, осы функцияны қисап түрінде беріле алады. Бұл жағыдайда математикалық логиканың барлық функциялары қисаптар түрінде беріле алады.

Үш және одан да көп логикалық функциялар ақиқаттық кестесімен, немесе айнымалылардың таңбаларынан және унарлы, бинарлы қисаптың таңбаларынан тұратын формулалармен беріледі. Жалпы жағдайда формула қарапайым функциялардың суперпозициясы ретінде логикалық функцияны сипаттайды.

Анықтама. Егер $f(x_1,\dots,x_n) = g(h_1(x_1,\dots x_n),\dots,h_m(x_1,\dots,x_n))$ болса, онда $f(x_1,\dots,x_n)$ функцисы $g(y_1,\dots,y_m)$ және $h_1(x_1,\dots,x_n),\dots,h_m(x_1,\dots,x_n)$ функцияларының суперпозицияы дейді.

М ы с а л 2.2.2 $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 \downarrow x_2x_3 \downarrow x_4x_1$ функциясы $g(y_1,y_2,y_3) = y_1 \downarrow y_2 \downarrow y_3$ және $y_1 = x_1x_2$, $y_2 = x_2x_3$, $y_3 = x_4x_1$ функциялардың суперпозицияы.

Формулалардың эквиваленттілігі. Алгебра логикасының негізгі эквивалентті қарым-қатынастары

Бір функция әртүрлі формулалармен беріле алады. Бұл жағдайда формулалардың эквиваленттігі ұғымы пайда болады.

Анықтама. Егер $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ және $\psi(x_1,\dots,x_n)$ формулалары бір ғана функцияны өрнектесе, онда олар эквивалентті делінеді (белгіленуі $\varphi \sim \psi$, $\varphi \equiv \psi$, $\varphi = \psi$).

М ы с а л 2.2.3 $\varphi = x \to y$ және $\psi = \overline{y} \to \overline{x}$ формулаларының ақиқаттық кестесін құрамыз.

Кесте 2.2.4

x	y	$\overline{y}$	$\overline{x}$	φ	ψ
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1

Бұл кестеден соңғы бағандардағы формулалардың мәндері бірдей болғандықтан, олар эквивалентті

$$(x \to y) \sim (\overline{y} \to \overline{x}).$$

Бұл мысалда формулаларының эквиваленттігін тексеру үшін ақиқаттық кестесін құрып, айнымалылар мәндерінің жиынтығын салыстыру әдісі қолданылды.

Формулаларының эквиваленттігін тексерудің басқа әдісі оларды эквивалентті түрлендірулер. Ол үшін эквивалентті қарым-қатынастар (заңдар) және алмастыру, айырбастау ережелері қолданылады.

Түрлендірулерді келесі екі ережеге сүйеніп қолдану керек:

а) алмастыру ережесі: егер берілген эквивалентті қарым-қатынаста x айнымалысының барлық енулерін бірмезгілде φ формуласымен алмастырсақ, жаңа эквивалентті қарым-қатынас аламыз;

ә) айырбастау ережесі: егер f функциясын сипаттайтын қандай да бір φ формуласы ψ ішкі формуласынан тұрса, онда ψ -ді ψ_1-мен айырбастағанда $(\psi = \psi_1)$ f функциясы өзгермейді.

Негізгі эквивалентті қарым-қатынастарды атап өтейік. Олардың дұрыстығына ақиқаттық кестесі көмегімен көз жеткізуге болады

Кесте 2.2.5

1	Коммутативтік	$x \wedge y = y \wedge x$	$x \vee y = y \vee x$
2	Ассоциативтік	$(x \wedge y) \wedge z =$ $= x \wedge (y \wedge z)$	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
3	Дистрибутивтік	$x \wedge (y \vee z) =$ $= (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$x \vee (y \wedge z) =$ $= (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
4	Идемпотенттік	$x \wedge x = x$	$x \vee x = x$
5	Сіңіру заңы	$x \wedge (x \vee y) = x$	$x \vee (x \wedge y) = x$
6	де Моргана заңы	$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$	$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$
7	Екі рет терістеу заңы	$\overline{\overline{x}} = x$	
8	Константалар қасиеті	$x \wedge 1 = x, x \wedge 0 = 0$	$x \vee 1 = 1, x \vee 0 = x$
9	$x \wedge \overline{x} = 0$- қарама-қайшылық заңы	$x \vee \overline{x} = 1$- жойылған үшінші заңы	

Негізгі эквиваленттіліктермен қатар жиі қолданылатын эквиваленттіліктер. Оларды негізгі эквивалентті қарым-қатынастардан немесе ақиқаттық кестесі көмегімен қорытып шығаруға болады.

Кесте 2.2.6

10	Жапсыру заңы	$(x \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) = x$	$(x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) = x$
10 а	Тарқату заңы	$x = (x \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y})$	$x = (x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y})$
11	Жалпыланған жапсыру	$(x \wedge z) \vee (y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge y) = (x \wedge z) \vee (y \wedge \overline{z})$	
12	$x \vee (\overline{x} \wedge y) = x \vee y$	12а	$\overline{x} \vee (x \wedge y) = \overline{x} \vee y$
13	$x \wedge (\overline{x} \vee y) = x \wedge y$	13а	$\overline{x} \wedge (x \vee y) = \overline{x} \wedge y$
14	$x \leftrightarrow y = (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{y} \vee x)$		$x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x) = = (\overline{x} \vee y) \wedge (x \vee \overline{y})$
15	$(x \to y) = \overline{x} \vee y$	$x \mid y = \overline{x \wedge y}$	$x \downarrow y = \overline{x \vee y}$
16	$x \oplus y = \overline{x \leftrightarrow y} = \overline{(\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{y} \vee x)} = \overline{xy \vee \overline{xy}}$		

Анықтама. Егер $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ формуласының 1 (0) мәнін қабылдайтындай айнымалылардың мәндерінің жиынтығы бар болса, онда формула орындалатын (жоққа шығарылатын) делінеді.

М ы с а л 2.2.4 $\varphi = x \wedge y$ формуласы бірмезгілде орындалатын және жоққа шығарылатын болады, себебі $(1 \wedge 1 = 1)$ және $(0 \wedge 0 = 0)$.

Анықтама. Егер $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ формуласы барлық айнымалыларының жиынтығында 1 (сәйкес 0) мәнін қабылдаса (яғни функция 1 (0) константа болса), онда формула тепе-тең ақиқат, жалпымәнді немесе тавтология (тепе-тең жалған немесе қарама-қайшылық) делінеді.

М ы с а л 2.2.5 $x \vee \overline{x}$ формуласы тепе-тең ақиқат, себебі кез келген x үшін $x \vee \overline{x} = 1$; $x \wedge \overline{x}$ формуласы тепе-тең жалған, себебі кез келген x үшін $x \wedge \overline{x}=0$:

Кесте 2.2.7

x	$\overline{x}$	$x \vee \overline{x}$	$x \wedge \overline{x}$
0	1	1	0
1	0	1	0

Айта кетелік, формула қандай да бір логикалық тұжырым немесе пайымдауды білдіреді. Егер тұжырымды сипаттаушы формула тепе-тең ақиқат болса, онда бұл пайымдау логикалық дұрыс болады.

Қосалқылық.

Анықтама. Егер $f^*(x_1,\ldots,x_n) = \overline{f(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})}$ орындалса, онда $f^*(x_1,\ldots,x_n)$ функциясы $f(x_1,\ldots,x_n)$ функциясына қосалқы делінеді. Өзіне қосалқы функция, яғни $f^* = f$, өзіне-өзі қосалқы делінеді.

Егер $f^* = g$, онда $g^* = f$, яғни қосалқылық қатынасы симметриялы.

М ы с а л 2.2.6 - Дизъюнкция конъюнкцияға, конъюнкция – дизъюнкцияға, 1 константасы – 0 константасына, 0 константасы – 1 константасына қосалқы. Теріске шығару өзіне-өзі қосалқы. Расында, мысалы,

$f = x \wedge y$ үшін $f^* = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} = \overline{\overline{x}} \vee \overline{y} = x \vee y$;

$f = \overline{x} \Rightarrow f^* = \overline{\overline{x}} = \overline{x}$, яғни $f^* = f$.

Қосалқы функцияны ақиқат кестесі көмегімен алуға болады. Ол үшін f функцияның ақиқат кестесінде барлық мәндерді қарама-қарсыға айырбастау керек.

Қосалқылық принципі: функцияның суперпозициясына қосалқы функция бұл сәйкес қосалқы функциялардың суперпозициясы, яғни егер

$f(x_1,...,x_2) = g(h_1(x_1,...,x_n),...,h_m(x_1,...,x_n))$, онда

$f^*(x_1,...,x_2) = g^*(h_1^*(x_1,...,x_n),...,h_m^*(x_1,...,x_n))$.

Буль алгебрасында қосалқылық принципі нақтырақ түрде беріледі: Егер f функциясын сипаттайтын F формуласында, барлық конъюнкцияны дизъюнкцияға, дизъюнкциияны конъюнкцияға, 1-ді 0-ге, 0-ді 1-ге айырбастасақ, онда қосалқы f^* функциясын сипаттайтын F^* формуласын аламыз.

М ы с а л 2.2.7 - $f(x,y,z) = xy \vee \overline{xy} \vee \overline{x}y\overline{z}$ функциясы үшін қосалқы функцияны табу керек.

1 әдіс: анықтама бойынша

$$f^* = \overline{\overline{xy} \vee \overline{\overline{x}\overline{y}} \vee \overline{\overline{x}y\overline{z}}} = (x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z});$$

2 әдіс: f үшін ақиқаттық кестесін құрамыз (2.2.8 кесте), содан кейін ондағы мәндерді қарсы мәнге ауыстырамыз, f^* үшін ақиқаттық кестесін аламыз (2.2.9 кесте). f^* функциясының ақиқаттық кестесін кәдімгі жолмен алу керек болсын. Онда айнымалылар мәндері лексикографикалық ретпен жазылу керек. Ол үшін соңғы кестенің (2.2.9 кестенің) барлық бағандарын «айналдырып түсіру керек» (2.2.10 кесте).

Кесте 2.2.8

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Кесте 2.2.9

x	y	z	f^*
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Кесте 2.2.10

x	y	z	f^*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

3 әдіс: f формуласы буль түрінде жазылғандықтан, яғна тек конъюнкция, дизъюнкция және теріске шығару қисаптарымен өрнектелегендіктен, буль алгебрасындағы қосалқылық принципі бойынша қосалқы функцияны алу үшін берілген формуладағы барлық конъюнкцияны дизъюнкцияға, дизъюнкцияны конъюнкцияға алмастыру керек:

$$f(x,y,z) = xy \vee \overline{xy} \vee \overline{x}y\overline{z} \quad \rightarrow \quad f^* = (x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}).$$

Пост класстары. Логикалық функциялардың толық жүйелері.

$f(x_1,\ldots,x_n)$ буль функциясы берілген. Буль функцияларының классына немесе Пост классына анықтама енгіземіз:

а) егер $f(0,0,\ldots,0) = 0$ орындалса, онда f функциясы 0 константасын сақтайды дейді.

0 константасын сақтайтын барлық функциялар жиыны P_0 $(P_0 \subset P_2)$ классын құрайды;

ә) егер $f(1,1,\ldots,1) = 1$. орындалса, онда f функциясы 1 константасын сақтайды дейді.

1 константасын сақтайтын барлық функциялар жиыны P_1 $(P_1 \subset P_2)$ классын құрайды;

б) өзіне-өзі қосалқы функциялар жиынын немесе классын S арқылы белгілейміз;

в) егер f функциясы мына түрде жазылса,

$$f(x_1,\ldots,x_n) = c_0 \oplus c_1x_1 \oplus c_2x_2 \oplus\ldots\oplus c_nx_n,$$

онда ол сызықты деп аталынады, мұндағы $c_k \in \{0;1\}, (k = 1,2,\ldots,n)$. Сызықты функциялар классының белгіленуі L;

г) егер $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ және $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ нөлдер мен бірлердің кез келген жиынтықтары үшін $\alpha_1 \le \beta_1$,…, $\alpha_n \le \beta_n$ шарттарынан $f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \le f(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ орындалса, онда f функциясы монотонды делінеді. M арқылы монотонды функциялар классын белгілейді.

Посттың әрбір классы айнымалыны ауыстыру және суперпозицияға қатысты тұйықталған, яғни осы класстағы функцияларға осы қисаптарды қолданғанда осы класстағы функциялар алынады.

Кестеде Пост классына тиісті буль функциялар (тиісті – (+); тиісті емес – (-)) мысалдары көрсетілген.

Кесте 2.2.11

Функция	P_0	P_1	L	M	S
Теріске шығару	-	-	+	-	+
Конъюнкция	+	+	-	+	-
Дизъюнкция	+	+	-	+	-
Импликация	-	+	-	-	-

Бір логикалық функция әртүрлі логикалық қисаптар енген жиынтық арқылы берілуі мүмкін. Мысалы, $x_1|x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$. Кез келген логикалық функцияларды өрнектей алатын логикалық қисаптар (функциялар) жиынтығы бар.

Анықтама. Егер кез келген логикалық функция $\sum$-дағы функциялардың суперпозициясы болса, онда $\sum$ логикалық функциялар жүйесі толық жүйе немесе базис деп аталады.

Кез келген жүйенің толықтығын келесі теоремадан білуге болады.

Пост теоремасы. Буль функцияларының жүйесі толық болуы үшін осы жүйеде 0-ды сақтамайтын ең болмағанда бір функция, 1-ді сақтамайтын ең болмағанда бір функция, ең болмағанда өзіне-өзі қосалқы бір функция, ең болмағанда сызықты бір функция, ең болмағанда монотонды бір функция болуы қажетті және жеткілікті.

Буль функцияларының жүйесі толықтығын анықтау үшін осы функциялардың Пост классына тиістілік кестесін қолдануға болады. Мысалы, $\Sigma_1 = \{\wedge, \neg\}$ жүйесінде теріске шығару константаны сақтамайды және монотонды емес, ал конъюнкция сызықты емес және өзіне-өзі қосалқы емес (кесте 2.2.7), онда бұл жүйе толық. Мысалы, функционалды толық жүйелер:

$$\{\wedge,\vee,\neg\}, \{\wedge,\neg\}, \{\vee,\neg\}, \{\mid\}, \{\downarrow\}, \{\wedge,\oplus,1\}, \{\rightarrow,\neg\}, \{\vee,\leftrightarrow,\oplus\}, \{\wedge,\leftrightarrow,\oplus\}$$

және т.б. Айнымалылар, жақшалардан басқа конъюнкция, дизъюнкция және теріске шығару қисаптарынын тұратын формулалар буль формулалары делінеді.

Теорема. Кез келген буль функциясы буль формуласы түрінде жазыла алады (яғни конъюнкция, дизъюнкция және теріске шығарудың суперпозициясы түрінде).

Бұдан $\{\wedge, \vee, \neg\}$ жүйесінің функционалды толықтығы шығады. Қандай да бір қисаптар жиынтығының функционалды толықтығын дәлелдеу үшін қисапты конъюнкция, дизъюнкция және теріске шығару арқылы өрнектеуге болатындығын көрсету керек. Жүйенің толықтығын дәлелдейтін жалпы тұжырымдар да бар.

Теорема. Егер $\sum^*$ функционалды толық жүйенің барлық функциялары $\sum$-ның формулалары түрінде көрсете алса, онда, $\sum$ да функционалды толық жүйе.

М ы с а л 2.2.8 $\Sigma_1 = \{\wedge, \neg\}$ және $\Sigma_2 = \{\vee, \neg\}$ жүйелерін, $\Sigma_0 = \{\wedge,\vee,\neg\}$ базисін қарастырамыз. $\sum_1$, $\sum_2$ жүйелерінің базис болатындығын дәлелдеу керек.

Расында, $\sum_0$-да бар, бірақ әрбір жүйеде жетіспей тұрған қисаптарды қалған екеуі арқылы өрнектеуге болады:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_1\text{-де «}\vee\text{» жетпей тұр: } x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}} \\ \sum_2\text{-де «}\wedge\text{»жетпей тұр: } x_1 \wedge x_2 = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}} \end{array}\right\} \qquad (*).$$

$\sum_1$, $\sum_2$ жүйесіндегі $f = x_1x_2 \vee \overline{x_2}(x_3 \vee x_4)$ формуласы келесі түрде жазылады:

$$f = [\sum_1] = \overline{\overline{x_1 \cdot x_2} \cdot \overline{\overline{x_2} \cdot \overline{\overline{\overline{x_3} \cdot \overline{x_4}}}}}, \qquad f = [\sum_2] = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}} \vee \overline{x_2 \vee \overline{x_3 \vee x_4}}.$$

Сонымен, функционалды толық жүйелер мағынасында $\sum_0$ жүйесін шамадан тыс деп есептеуге болады, себебі одан дизъюнкция немесе конъюнкцияны алып тастасақ та, толықтықтың қасиетін сақтайды. Бірақ $\sum_1$, $\sum_2$ жүйелерінінің шамадан тыс болмауына шамадан тыс формулалармен есептесуге тура келеді, себебі $(*)$ формулаларындағы әрбір қисапты басқасына айырбастау формулаға шамадан тыс теріске шығаруды енгізуге әкеліп соқтырады.

2.3 Дизъюнктивті және конъюнктивті қалыпты формалар

$\sum_0 = \{\wedge, \vee, \neg\}$ базисі зерттелген және жиі қолданылады, басқа базистер осы базиске келтіріледі. Осы базиске келтірудің әртүрлі әдістерін қарастырайық.

Анықтама. Элементар конъюнкция (дизъюнкция) деп айнымалылардың конъюнкциясы (дизъюнкциясы) немесе олардың терістеуі айтылады.

М ы с а л 2.3.1

а) $x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$ және $x \vee y \vee \overline{x}$ –элементар дизъюнкциялар;

ә) $\overline{x_1}x_2x_3$ және $x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}$ –элементар конъюнкциялар;

б) $\overline{x}$ –бір мезгілде элементар дизъюнкция және элементар конъюнкция.

Анықтама. Дизъюнктивті қалыпты форма (ДҚФ) деп элементар конъюнкциялардың дизъюнкциясы айтылады. Конъюнктивті қалыпты форма (КҚФ) деп элементар дизъюнкциялардың конъюнкциясы айтылады.

М ы с а л 2.3.2

а) $x\overline{y} \vee yz$ –ДҚФ,

ә) $(x \vee \overline{y})\ (\overline{x} \vee z)\ (y \vee \overline{x} \vee \overline{z})$ – КҚФ.

Теорема. Кез келген формула ДҚФ (КҚФ)-ке келтіріледі (яғни кез келген формула қандай да бір ДҚФ (КҚФ) эквивалентті).

ДҚФ-ке келтіру ережелері:

а) формуладағы барлық логикалық қисаптарды эквиваленттілікті қолданып, $\{\wedge, \vee, \neg\}$ арқылы өрнектеу керек:

1) $(x \to y) = \overline{x} \vee y$;

2) $x \leftrightarrow y = (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{y} \vee x) = xy \vee \overline{xy}$;

3) $x|y = \overline{x \wedge y}$;

4) $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$;

5) $x \oplus y = \overline{x \leftrightarrow y} = \overline{(\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{y} \vee x)}$;

ә) теріске шығаруды да Морган заңы бойыша ашу керек:

$$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}, \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y};$$

б) дистрибутивтік заңын қолданып, формуладағы барлық конъюнкциялар дизъюнкциядан бұрын орындалатындай етіп түрлендіру керек:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

М ы с а л 2.3.3 $\varphi = (x \to y) \downarrow \overline{y \to z}$ формуласын ДҚФ-ке келтіру керек. Ол үшін $\to, \downarrow$ қисаптарын $\wedge$, $\vee, \neg$ қисаптарына айырбастаймыз, содан соң де Морган және екі рет терістеу заңдары бойынша:

$$\varphi = (\overline{x} \vee y) \downarrow (\overline{\overline{y} \vee z}) = (\overline{\overline{x} \vee y) \vee (\overline{\overline{y} \vee z})} = (\overline{\overline{x} \vee y}) \wedge (\overline{\overline{y} \vee z}) =$$

$$= (\overline{\overline{x}} \wedge \overline{y}) \wedge (\overline{y} \vee z) = (x \wedge \overline{y}) \wedge (\overline{y} \vee z) = (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z).$$

Айта кетелік, мысалдағы соңғы формула кейбір оқулықтарда ДҚФ болып есептелінеді, басқа оқулықта элементар конъюнкцияда және дизъюнкцияда әрбір айнымалы бір ақ рет кездесу керек. Артық айнымалылардан арылу үшін келесі эквиваленттілік қолданылады:

а) $x \vee x = x,\ x \wedge x = x$ (идемпотенттік заңы);

ә) $x \vee \overline{x} = 1$ (жойылған үшінші заңы),

$x \wedge \overline{x} = 0$ (қарама-қайшылық заңы);

б) $x \wedge 1 = x,\ x \vee 1 = 1,\ x \wedge 0 = 0,\ x \vee 0 = x$ (константалар қасиеті).

Идемпотенттік заңын қолданып, соңғы мысалдағы ДҚФ аламыз:

$$\varphi = (x \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z).$$

КҚФ-ке келтіру ережелері ДҚФ-ке келтіру сияқты, тек б) пункті орнына б$'$) қолданылады:

б$'$) дистрибутивтік заңын қолданып, формуладағы барлық дизъюнкциялар конъюнкциядан бұрын орындалатындай етіп түрлендіру керек:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Мысал 2.3.4 $\varphi = (x \to y) \wedge ((\overline{y} \to z) \to \overline{x})$ формуласын КҚФ-ке келтіру керек.

$\to$ қисабын $(x \to y) = \overline{x} \vee y$ формуласын қолданып түрлендіреміз:

$\varphi = (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{(\overline{y} \to z)} \vee \overline{x}) = (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{(\overline{\overline{y}} \vee z)} \vee \overline{x}) =$

[де Морган, екі рет терістеу заңдары]

$= (\overline{x} \vee y) \wedge ((\overline{y} \wedge \overline{z}) \vee \overline{x}) = (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{y} \vee \overline{x}) \wedge (\overline{z} \vee \overline{x})$ – КҚФ.

ДҚФ және КҚФ формаларын кемшілігі – оларға жалғыздық қасиеті орындалмайды, бір формуланың бірнеше ДҚФ және КҚФ бар. Бұндай кемшілік мүлтіксіз қалыпты формаларда жоқ.

Анықтама. Мүлтіксіз дизъюнктивті қалыпты форма (МДҚФ) деп мынадай ДҚФ айтылады: әрбір элементар конъюнкцияға әрбір айнымалы бір-ақ рет енеді және не тек өзі, не оның терісі ғана, элементар конъюнкция арасында бірдейлері болмау керек.

Анықтама. Мүлтіксіз конъюнктивті қалыпты форма (МКҚФ) деп мынадай КҚФ айтылады: әрбір элементар дизъюнкцияға әрбір айнымалы бір-ақ рет енеді және не тек өзі, не оның терісі ғана, элементар дизъюнкция арасында бірдейлері болмау керек.

Мысал 2.3.5

а) $x_1\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3$ – МДҚФ;

ә) $(x \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x} \vee y \vee z)$ – МКҚФ;

б) $x_1\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1\overline{x_2}x_3$ – МДҚФ емес, себебі екі бірдей элементар конъюнкция бар;

в) $x_1\overline{x_1}x_3 \vee x_1x_2x_3$ – МДҚФ емес, себебі бір элементар конъюнкцияда әрі айнымалы, әрі оның терісі бар: $x_1, \overline{x_1}$.

Теорема. (МДҚФ және МКҚФ бар болуы және жалғыздығы). Кез келген логикалық формула жалғыз жолмен (элементар конъюнкциялар (дизъюнкциялар) түрлену ретінің дәлдігіне дейін) МДҚФ (МКҚФ) түріне келтіруге болады.

МДҚФ-ке келтіру үшін екі әдістің біреуін қолдану керек.

I әдіс: формуланы ДҚФ-ке келтіреміз; Егер қандай да бір элементар конъюнкцияда қандай да бір y айнымалысы жоқ болса, онда тарқату заңы бойынша оны енгізуге болады: $x = (x \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y})$; идемпотенттік заңын қолданып бірдей элементар конъюнкцияларды алып тастаймыз: $x \vee x = x$.

II әдіс: берілген формуланың ақиқаттық кестесін құрамыз. Содан соң Шеннон теоремасына негізделген ережені қолданамыз: $f(x_1,\ldots,x_n)$ функциясының МДҚФ-дағы элементар конъюнкция саны f мәнінің бағанындағы бірлер санына тең; әрбір $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ нөлдер мен бірлердің бірлік жиынтығына барлық айнымалылардың элементар конъюнкциясы сәйкес келеді: егер $\sigma_i = 0$ болса, онда x_i терісімен жазылады, ал егер $\sigma_i = 1$ болса, онда x_i өзгеріссіз жазылады.

М ы с а л 2.3.6 ДҚФ түрінде жазылған $\varphi = x \vee yz \vee \overline{xy}z$, функцияны МДҚФ-ке келтіру керек

I әдіс: берілген формула ДҚФ түрінде жазылған, сондықтан элементар конъюнкцияларға тарқату заңы бойынша жетпей тұрған айнымалыларды қосамыз:

$\varphi = x \vee yz \vee \overline{xy}z = xy \vee x\overline{y} \vee xyz \vee \overline{x}yz \vee \overline{xy}z = \underline{xyz} \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee x\overline{yz} \vee$ $\vee\ \underline{xyz} \vee \overline{x}yz \vee \overline{xy}z =$ (идемпотенттік заңын қолданып, бірдей элементар конъюнкцияларды алып тастаймыз) $= xyz \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee x\overline{yz} \vee \overline{x}yz \vee \overline{xy}z$ – МДҚФ;

II әдіс: ақиқаттық кестесін құрамыз:

Кесте 2.3.1

x	y	z	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$y \wedge z$	$\overline{x} \wedge \overline{y}$	$\overline{xy}z$	$x \vee yz$	φ
0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1	1

Функцияның бірлік жиынтықтарын жазамыз:

1 = φ (0,0,1) = φ (0,1,1) = φ (1,0,0) = φ (1,0,1) = φ(1,1,0) = φ (1,1,1).

Жоғарыда келтірілген ереже бойынша

$$\varphi = \overline{xy}z \vee \overline{x}yz \vee x\overline{yz} \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee xyz \text{ – МДҚФ.}$$

Формуланы МКҚФ-ке келіру МДҚФ-ке келіру сияқты жүргізіледі. Екі әдіс арқылы МКҚФ-ке келтіруге болады:

а) элементар түрлендіру әдісі;

ә) ақиқат кестесінен функцияның нөлдік жиынтықтыры жазып алынады; $f(x_1, \ldots, x_n)$ функциясының МКҚФ-дағы элементар дизъюнкция саны f мәнінің бағанындағы нөлдер санына тең; әрбір $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ нөлдер мен бірлердің нөлдік жиынтығына барлық айнымалылардың элементар дизъюнкциясы сәйкес келеді: егер $\sigma_i = 1$ болса, онда x_i терісімен жазылады, ал егер $\sigma_i = 0$ болса, онда x_i өзгеріссіз жазылады.

М ы с а л 2.3.7 Алдыңғы мысалдағы функцияны қарастырайық:

$\varphi = x \vee yz \vee \overline{xy}z$. Оны МКҚФ-ке екі әдіспен келтіреміз:

а) $\varphi = \overline{\varphi} = \overline{x \vee yz \vee \overline{xy}z} = \overline{\overline{x} \wedge \overline{yz} \wedge \overline{\overline{xy}z}} = \overline{\overline{x} \wedge (\overline{y} \vee \overline{z}) \wedge (x \vee y \vee \overline{z})} =$

$$= \overline{(\overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x}y \vee \overline{xz})} = \overline{\overline{x}y\overline{y} \vee \overline{xz}y \vee \overline{zx}y \vee \overline{zx}} = \overline{\overline{xzy} \vee \overline{zx}y \vee \overline{zx}} =$$

$$= \overline{\overline{xzy} \vee \overline{zx}y \vee \overline{zx}(y \vee \overline{y})} = \overline{\overline{xzy} \vee \overline{zx}y \vee \overline{zx}y \vee \overline{zxy}} = \overline{\overline{xzy} \vee \overline{zx}y} = \overline{\overline{xzy}} \wedge \overline{\overline{zx}y} =$$

$= (x \vee z \vee y) \wedge (z \vee x \vee \overline{y})$ – МКҚФ.

б) ақиқат кестесінен нөлдік жиынтықты теріп жазамыз:

$0 = \varphi(0,0,0) = \varphi(0,1,0)$, яғни, жоғарыдағы әдіс бойынша

$$\varphi = (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z) \text{ – МКҚФ.}$$

Буль функцияларын ДҚФ классында минимизациялау. Карно картасы.

Қолданбалы есептерді шығарғанда логикалық формулаларды минимизациялау қажеттігі жиі туындайды. Мысалы, ең аз айнымалылы немесе ең аз қисабы бар формулаларды және т.б. табу есептері. Қазіргі уақытта айнымалы ең аз енетін дизъюнктивті формаларды табу терең зерттелген. Айнымалының енуі деп айнымалының формуладағы алатын орны түсініледі.

Анықтама. Минималды ДҚФ деп айнымаллары ең аз етін ДҚФ айтылады.

Минималды ДҚФ-ты табудың бірнеше әдісі бар (Квайн әдісі, белгісіздер коэффициенті, гиперкуб көмегімен және т.б.). Ең қарапайымына тоқтаймыз – Карно картасын (диаграммасын) қолдану арқылы.

Карно картасы – бұл әрбір тор (ұяшық) барлық айнымалылардың қандай да бір элементар конъюнкцияға сәйкес келетін кесте. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n айнымалылы функция үшін 2^n мәндерінің 0 және 1-ден тұратын мүмкін комбинациясы сәйкес келеді.

Яғни, n = 2 болса, $2^2 = 4$ элементар конъюнкциялар $xy, x\overline{y}, \overline{x}y, \overline{xy}$, оларға 0 және 1-лердің келесі жиынтықтары сәйкес келеді:

(1,1), (1,0), (0,1), (0,0);

n = 3 болса, $2^3 = 8$ – xyz, $xy\overline{z}, \ldots, \overline{xyz}$ - (1,1,1), (1,1,0),…, (0,0,0) және т.с.с. Карно картасы $2^{n-k} \times 2^k$ өлшемді кесте түрінде құрылады, оның бағанына $x_1, x_2, \ldots, x_k$ айнымалыларының мәндері, жолдары – $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ (немесе керісінше).

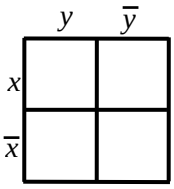
Жалпы, бір функцияның бірнеше картасы болуы мүмкін, тек ұяшықтарды біріктіру (тігінен, не көлденеңінен) бір айнымалының мәніне өзгешеленуі керек.

Көбіне бір, екі, үш және төрт айнымалылы функцияны қарастырамыз. Олар үшін Карно картасы келесі түрде болады:

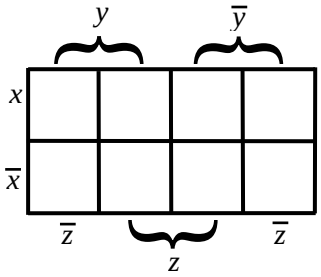
а) екі x, y айнымалылы функция үшін Карно картасы 2.3.1 суретте;

ә) үш x, y, z айнымалылы функция үшін – 2. 3.2 суретте;

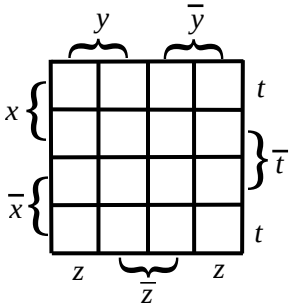
б) төрт x, y, z, t айнымалылы функция үшін – 2. 3.3 суретте.



2.3.1 сурет



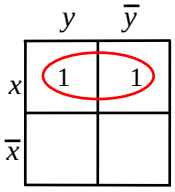
2.3.2 сурет



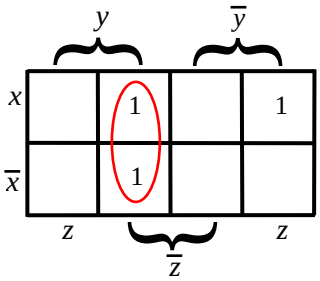
2.3.3 сурет

Буль функциясының минималды ДҚФ анықтау үшін алдымен оның МДҚФ табу керек. Содан соң МДҚФ-тағы әрбір элементар конъюнкцияны Карно картасында бірмен белгілеу керек.

М ы с а л 2.3.8 $\varphi_1 = xy \vee x\overline{y}$ және $\varphi_2 = xy\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee \overline{x}y\overline{z}$ функциялары МДҚФ формасында жазылған. φ_1 үшін Карно картасы 2. 3.4 суретте; φ_2 үшін 2. 3.5 суретте.



2.3.4 сурет



2.3.5 сурет

Айта кетелік, егер Карно картасында екі, төрт, сегіз көрші ұяшықтарда тігінен не көлденең 1 тұрса, онда бұл ұяшықтар блоктарға бірігеді (картада олар сопақ сызықпен белгіленеді) және осы блоктарға сәйкес элементар конъюнкциялардың дизъюнкциясын қысқартуға болады. 2.3.8 мысалдағы φ_1 функция үшін 2 ұяшықты блок аламыз (2.4.4 суретте сопақ сызықпен белгіленген). Бұл блокқа $xy \vee x\overline{y}$ дизъюнкциясы сәйкес келеді, оны қысқартсақ:

$$xy \vee x\overline{y} = x \vee (y \wedge \overline{y}) = x \wedge 1 = x.$$

Сонымен, 2 ұяшықты блок бір x айнымалысына тең болады, дәлірек айтқанда осы блокты толық «қамтитын» айнымалы. Формула қысқартылды:

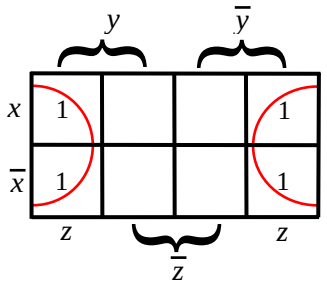
$$\varphi_1 = x.$$

φ_2 функциясы үшін де 2 ұяшықты блок аламыз (2.4.5 суретті қара), оған элементар конъюнкциялардың дизъюнкциясы сәйкес келеді $xy\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z}$. Оны қысқартсақ $y\overline{z}$, яғни үш айнымалылы 2 ұяшықты блокқа осы блокты «қамтитын» екі айнымалылы конъюнкция сәйкестенді. Формула қысқартылды:

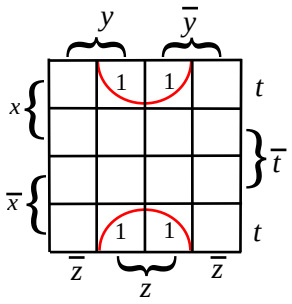
$$\varphi_2 = y\overline{z} \vee x\overline{y}z.$$

Тағы бірнеше мысал қарастырайық.

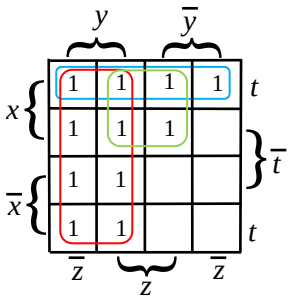
М ы с а л 2.3.9 $\varphi = xyz \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee \overline{xy}z$ – функцияның МДҚФ. Оның Карно картасы 2.3.6. суретте бейнеленген. z картаның екі шетінде де орналасқандықтан, картаны «бұрауға» болады және картаның бұрыштағы бірлері төрт ұяшықты блок құрайды деп есептейміз. Бұл ұяшықтарды z айнымалысы қамтиды. Сонымен функцияның МДҚФ-ы: $\varphi = z$.



2.3.6 сурет



2.3.7 сурет



2.3.8 сурет

М ы с а л 2.3.10 $\varphi = xyzt \vee x\bar{y}zt \vee \bar{x}yzt \vee \overline{xy}zt$ – функцияның МДҚФ. Оның Карно картасы 2.3.7. суретте бейнеленген. Картада z және t айнымалыларын қамтитын төрт ұяшықты блок бар, сондықтан функцияның МДҚФ-ы: $\varphi = zt$.

М ы с а л 2.3.11

$$\varphi = xyzt \vee xyt\bar{z} \vee xyz\bar{t} \vee xy\bar{z}\bar{t} \vee yz\bar{x}\bar{t} \vee y\bar{x}\bar{z}\bar{t} \vee yzt\bar{x} \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}\bar{z}t \vee xzt\bar{y} \vee$$
$$\vee xz\bar{y}\bar{t} \quad –$$

функцияның МДҚФ. Оның Карно картасы 2.4.8. суретте бейнеленген. Картада 8 ұяшықты блокты y айнымалысы қамтиды, төрт ұяшықты екі блокты сәйкес элементар конъюнкциялар xt және xz қамтиды. Сондықтан функцияның МДҚФ-ы: $\varphi = y \vee xt \vee xz$.

2.4 Буль алгебрасы және жиындар теориясы. Коммутациялық сұлбалар.

Жиындарға қолданылатын қисаптардың қасиеттері мен логикалық қисаптар арасындағы аналогты байқауға болады. Бұл кездейсоқ емес.

M жиыны осы жиында берілген $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ қисаптарымен қоса алгебра деп аталып, былай белгіленеді: $(M, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$.

Анықтама. 1) - 9) шарттарын қанағаттандыратын (буль алгебрасының негізгі эквивалентті қарым-қатынастары немесе жиындарға қолданылатын қисаптардың негізгі қасиеттерін қараңыз) екі бинарлы және бір унарлы қисабы бар кез келген алгебра буль алгебрасы деп аталады.

Сонымен, буль алгебрасы:

а) $(P_2, \wedge, \vee, \neg)$ – конъюнкция, дизъюнкция, теріске шығару қисаптарымен барлық буль алгебрасы;

ә) $(P_2(m),\ \wedge,\ \vee, \neg)$ – m айнымалылы логикалық функциялардың буль алгебрасы – бұл $(P_2,\ \wedge,\ \vee, \neg)$ алгебрасының ішкі алгебрасы, себебі $P_2(m) \subset P_2$;

б) $(\mathscr{P}\ (U),\ \cap,\ \cup,\ \neg)$ – U универсумдағы қиылысу, бірігу, толықтауыш қисаптарымен жиындардың буль алгебрасы;

в) $(B_n,\ \vee,\ \wedge,\ \neg)$ – n ұзындықты екілік векторлардың буль алгебрасы, мұнда $\forall\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ екілік векторларға логикалық қисаптар келесі жолмен анықталады

1) $\alpha \wedge \beta = (\alpha_1 \wedge \beta_1, \alpha_2 \wedge \beta_2, \ldots, \alpha_n \wedge \beta_n)$, мұндағы егер $\alpha_i = \beta_i = 1$, онда $\alpha_i \wedge \beta_i = 1$, кез келген қалған жағдайда $\alpha_i \wedge \beta_i = 0$;

2) $\alpha \vee \beta = (\alpha_1 \vee \beta_1, \alpha_2 \vee \beta_2, \ldots, \alpha_n \vee \beta_n)$, мұндағы егер $\alpha_i = 0, \beta_i = 0$ онда $\alpha_i \vee \beta_i = 0$, кез келген қалған жағдайда $\alpha_i \vee \beta_i = 1$;

3) $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha_i}, \ldots, \overline{\alpha_n})$, мұндағы $\overline{\alpha_i} = 0$, егер $\alpha_i = 1$ және $\overline{\alpha_i} = 1$, егер $\alpha_i = 0$.

Егер $\mathscr{P}\ (U), B_n$ және $P_2(m)$ жиындарының қуаттары тең болса, онда олардың арасында өзара бірмәнді сәйкестік орнатуға болады, ал сәйкес буль алгебралары изоморфты бола алады. Буль алгебраларының изоморфизмі компьютер есептеулерінде кеңінен қолданылады, мысалы, жиындарға немесе логикалық функцияларға қолданылатын қисаптардың орнына олардың изоморфты аналогтары – екілік векторларға разряд бойынша қисаптар орындалады.

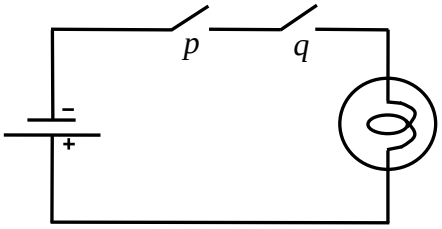
Коммутациялық сұлбалар.

Математикалық логиканың техникалық сұрақтарда қолданылатындығы XX ғасырдың 30-шы жылдары анықталды. Мысалы, электр шынжыры мен логикалық функциялар арасындағы байланыс байқалды. Бұл жаңалық ЭЕМ дамуына әсер етті. Осы байланыстың қысқартылған түрін қарастырайық.

Релейлі-байланыс құрылғыларының басты элементі электр-механикалық реле (ауыстырып-қосқыш) болып табылады. Реле шынжырды бекітеді және ажырата да алады. Шынжыр тұйық болғанда (тоқ өтеді), p -ға 1 мәнін береміз, ал шынжыр ажыратылғанда (тоқ өтпейеді), p -ға 0 мәнін береміз.

2.4.1. суреттегі электр шынжырын қарастырайық. p және q контакттерінің былай орналасуында лампы жанады (яғни сұлба 1 мәнін қабылдайды), егер p және q ауыстырып-қосқыштың екеуі де тұйықталған болса (яғни 1 мәнін қабылдайды). Сонымен, бұл сұлба $p \wedge q$ логикалық формуласына сәйкес келеді, ал ауыстырып-қосқыштың бұлай орналасуы «p және q» логикалық элементі

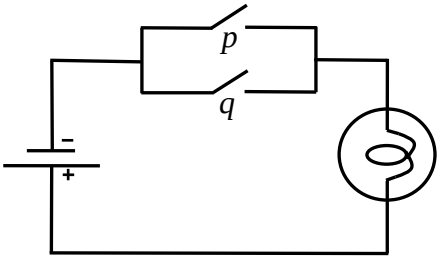
немесе логикалық көбейту сұлбасы деп аталады. Оны сұлбалы түрде 2.4.2 суреттегідей бейнелейді.



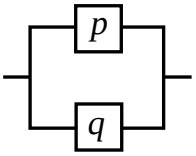
2.4.1 сурет

2.4.2 сурет

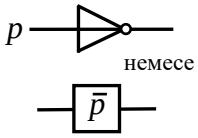
2.4.3 суреттегі сұлбаны қарастырамыз. Бұл шынжырда лампочка жанады және сұлба мәні 1-ге тең. Егер p немесе q екі контакттің ең болмағанда біреуі, немесе екеуі де тұйықталған болса, яғни немесе $p=1$, немесе $q=1$, немесе екеуі де $p=q=1$. Сонымен, бұл сұлба $p \vee q$ логикалық формуласына сәйкес келеді, ал ауыстырып-қосқыштың бұлай орналасуы «p немесе q» логикалық элементі немесе логикалық қосу сұлбасы деп аталады. Оны сұлбалы түрде 2.4.4 суреттегідей бейнелейді.



2.4.3 сурет



2.4.4 сурет

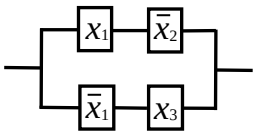


2.4.5 сурет

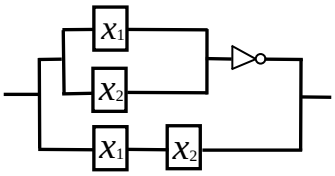
Егер бір ғана p ауыстырып-қосқышы бар сұлба қарастырсақ, онда ол келесі қасиетке ие болады: p тұйықталғанда ғана лампа жанады (яғни p = 0 болғанда, сұлба 1 мәнін қабылдайды, p = 1 болғанда, сұлба 0 мәнін қабылдайды), онда бұл сұлба $\overline{p}$ сәйкес келеді. Бұндай логикалық «p емес» немесе инвертор деп аталады, оны жиі 2.4.5 суреттегідей бейнелейді.

Қарапайым логикалық формулалар қолданылатын сұлба мысалдарды қарастырайық.

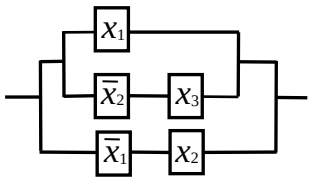
М ы с а л 2.4.1 2.4.6 суреттегі сұлба $(x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_3)$ формуласына (ауыстырып-қосқыш функциясына немесе өткізгіштік функциясына) сәйкес; $(\overline{x_1 \vee x_2}) \vee (x_1 \wedge x_2)$ формуласының сұлбасы 2.4.7 суретте бейнеленген; 2.4.8 суреттегі сұлба $(x_1 \vee (\overline{x_2} \wedge x_3)) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2)$ формуласына сәйкес.



2.4.6 сурет



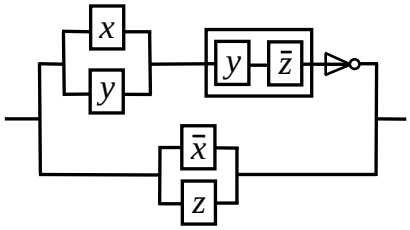
2.4.7 сурет



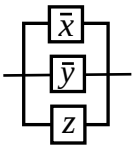
2.4.8 сурет

Кез келген логикалық формуланы ДҚФ немесе КҚФ-ке келтіруге болғандықтан, оған әрқашан контакт сұлбасын құруға болады. Өткізгіштіктің анықтаушы функциясының формуласы неғұрлым қарапайым болса, соғұрлым сұлба да қарапайым. Сондықтан сұлбаны қысқарту есебі сәйкес функцияны қысқартуға әкеледі. Жоғарыда бұндай есептерді шығардық.

М ы с а л 2.4.2 2.4.9 - суреттегі сұлбаны қысқарту керек



2.4.9 сурет



2.4.10 сурет

Шешуі: Ауыстырып-қосқыш функцияны құрамыз

$$f(x,y,z) = ((x \vee y) \wedge (\overline{y \wedge \bar{z}}) \vee (\bar{x} \vee z).$$

Эквивалентті түрлендірулерді қолданып, осы функцияны қысқартамыз.

$$f(x,y,z) = ((x \vee y) \wedge (\bar{y} \vee z)) \vee (\bar{x} \vee z) = (x \vee y \vee \bar{x} \vee z) \wedge (\bar{y} \vee z \vee \bar{x} \vee z) =$$

$$= (1 \vee y \vee z) \wedge (\bar{y} \vee \bar{x} \vee z) = 1 \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) = \bar{x} \vee \bar{y} \vee z.$$

Соңғы формулаға 2.4.10. суреттегі қысқартылған сұлба сәйкес келеді.

3 Графтар теориясының элементтері

3.1 Негізгі ұғымдар мен анықтамалар

Графтар – бұл әртүрлі объектілер арасындағы байланысты көрнекі бейнелейтін әдістердің бірі. Графтар теориясының тілінде жүйелі жоспарлау және басқару есептерінің көбі тұжырымдалады және шешіледі – темір жол торабы, телефон және компьютер жүйелері, суару жүйелері; бұл теория экономика, өндіріс есептерін тұжырымдауға, талдауға және шешуге, компьютерлердің функционалдық блоктарына, бағдарлама кешендеріне және т.с.с. талдау және синтез жасауға мүмкіндік береді

Графтар обьектілер арасындағы байланысты сипаттайды, ал байланыс «бағытталған» (мысалы, отбасылық ағаш) немесе «бағытталмаған» (мысалы, екі жақты қозғалысты жол торабы). Сондықтан графтар теориясында графтың негізгі екі түрін қарастырады: бағытталған (орграф) және бағытталмаған (н-граф). Кейде аралас типті графтар қарастырылады.

Анықтама. G графы деп екі жиынның жиынтығы айтылады: V – төбелер және E – қабырғалар (н-граф үшін) немесе доғалар (орграф үшін). Белгіленуі $G = G(V, E)$ немесе $G = (V, E)$.

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ - төбелер жиыны болсын.

Онда *н*-граф үшін $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, мұндағы қабырғалар $e_k = \{v_i, v_j\}$ - V жиынның екі элементті ішкі жиыны; орграф үшін $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, мұндағы доғалар $e_k = (v_i, v_j)$ - реттелген жұптар, яғни

$$E \subseteq V \times V.$$

Егер $e = (u, v)$ қабырға (доға) болса, онда u және v төбелері қабырғаның *шеткі нүктелері* (ұштары) деп аталады. u және v төбелері e қабырғасына (доғасына) *инцидентті*, керісінше, e қабырғасы (доғасы) u және v төбелеріне *инцидентті* деп аталады; u және v нүктелері қабырғаның (доғаның) шеткі нүктелері болса, онда u және v төбелері *сыбайлас* деп аталады.

Шеткі нүктелері беттесетін қабырға (доға) *тұзақ* деп аталады.

Тек қана екі төбеге инцидентті болатын қабырғалар (доғалар) *параллель* немесе *еселі* деп аталады.

Ал еселі қабырғалары бар граф *мультиграф* деп аталады.

Егер элементтері (V, E төбелері мен қабырғалар жиыны) шектеулі болса, онда *граф шектеулі* деп аталады.

Егер төбелер жиыны бос (олай болса қабырғалар жиыны да бос) болса, онда *граф бос* деп аталады.

Кейбір төбелер E жиынының жұп тізіміне енбеуі мүмкін, олар оқшауланған деп аталады. Барлық төбелері оқшауланған граф нөл-граф делінеді; нөл-графтың қарсы жағыдайы толық граф болады: оның қабырғалары мен төбелерінің барлық мүмкін жұптар болады (оның тұзағы және еселі қабырғалары жоқ).

Айта кетелік, графтар теориясының көптеген теоремалары мен анықтамалары н-графқа да, орграфқа да қатысты болуы мүмкін. Графтың типі анық болғанда, қабырғалар кейде жай жақшамен жазылуы мүмкін, яғни $e = \{u, v\}$- ні $e = (u, v)$ деп те жазады. Әрбір н-графқа орграф сәйкес келеді: сол төбелер жиыны, әрбір қабырға бір біріне қарсы бағытталған екі доғамен алмастырылады, доғалар сол төбелерге инцидентті.

Анықтама. v төбесінің дәрежесі (кейде валенттілігі) деп оған инцидентті қабырғалар санын айталады ($\rho(v)$ деп белгіленеді).

Егер m - G *н*-графының қабырғалар саны болса, онда

$$\sum_{v \in G} \rho(v) = 2m,$$

яғни барлық төбелердің дәрежелерінің қосындысы екі еселенген қабырғалар санына тең. Бұл жерде тұзақтың төбе дәрежелеріне қосатын үлесі 2.

Анықтама. v төбесінің шығу дәрежесі v төбесінде басы болатын доғалар санын айтамыз ($\rho^{+}(v)$, $\rho_1(v)$ деп белгіленеді); *кіру дәрежесі* деп v төбесі соңы болатын доғалар санын айтамыз ($\rho^{-}(v)$, $\rho_2(v)$ деп белгіленеді).

$\rho(v) = \rho^{-}(v) + \rho^{+}(v) -$ v төбесінің дәрежесі.

$\rho(v) = \rho_1(v) + \rho_2(v)$.

Егер m – G орграфының доғалар саны болса, онда

$$\sum_{V \in G} \rho_1(V) = \sum_{V \in G} \rho_2(V) = m\ .$$

Екі дәрежеге де тұзақтың қосар үлесі 1.

Графтардың берілу тәсілдері

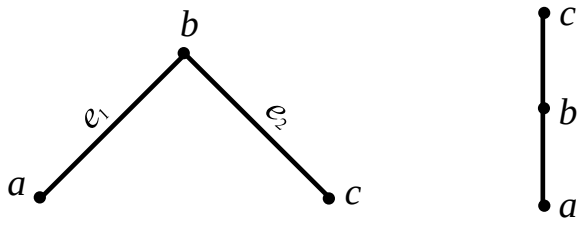
1. Графты V және E (төбелері мен қабырғалар) жиындарының жұбы түрінде беруге болады, ондағы әрбір қабырға (доға) $e \in E$ оған инцидентті төбелер жұбымен анықталған.

М ы с а л 3.1.1 $G = G(V, E)$ – графы, мұндағы $V = \{a, b, c\}$;

а) $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ - *н*-граф үшін берілу жолы;

ә) $E = \{(a, b), (b, c)\}$ - орграф үшін берілу жолы.

2. Графты суретте бейнелеу арқылы беруге болады, төбелері нүктелер арқылы, қабырғалары – нүктелерді қосатын сызықтармен; доғалар – стрелкалармен белгіленеді. Бір граф бірнеше суретпен берілуі мүмкін. Мысалы 3.1.1 мысалындағы $G = G(V, E)$ графы, мұндағы $V = \{a, b, c\}$;, $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ қабырғалар жиыны болатын суреттегідей беруге болады.



3.1.1 сурет

3. Графтың инциденттік матрица арқылы берілуі. G графының барлық төбелері мен қабырғалары (доғалары) нөмірленген болсын:

$V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\}$ - төбелерінің жиыны,

$E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ – қабырғаларының жиыны.

G графының *инциденттік матрицасы* деп өлшемі $m \times n$ болатын $A = (a_{ij})$ матрицасын айтамыз, n – төбелер саны, m – қабырғалары (доғалары) саны, оның элементтері келесі жолмен анықталады:

а) G *н*-графы үшін

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \ v_i \text{ -ші төбе } e_j \text{ – ші қабырғамен инцидентті болса,} \\ 0, \text{ қарсы жағдайда;} \end{cases}$$

ә) G ографы үшін:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ егер } v_i \text{ төбесінен } e_j \text{ доғасы } \textit{шықса}, \\ -1, \text{ егер } v_i \text{ төбесіне } e_j \text{ доғасы } \textit{кірсе}, \\ 2, \text{ егер } v_i \text{ төбесіне } e_j \textit{ тұзақ} \text{ болса;} \\ 0, \text{ қарсы жағдайда.} \end{cases}$$

М ы с а л 3.1.2 V = $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ төбелер жиыны, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ қабырғалар жиыны берілген.

Бұл граф үшін инциденттік матрицасы

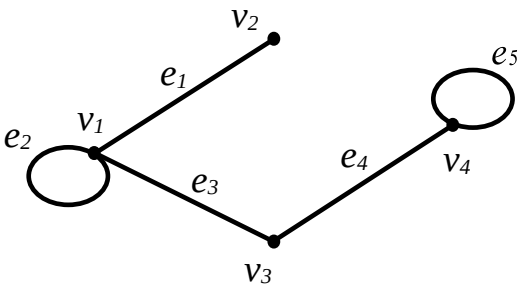
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Граф 3.1.2 суретінде бейнеленген.

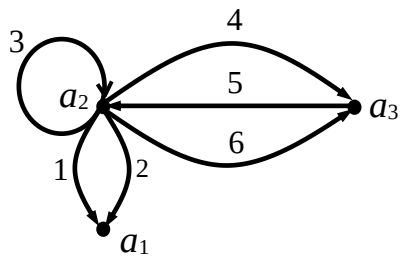
$V = \{a_1, a_2, a_3\}$– төбелер жиыны, $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – доғалар жиыны,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- графтың инциденттік матрицасы, граф 3.1.3. суретінде бейнеленген.



3.1.2 сурет



3.1.3 сурет

4. Графты сыбайлас матрица арқылы беру.

$G = (V, E)$ графының $B = (b_{ij})$ сыбайлас матрицасы деп, өлшемі $n \times n$ болатын шаршы матрица айтылады (n – төбелерінің саны). Сыбайлас матрицаның элементтері келесі жолмен анықталады:

а) G *н*-графы үшін

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ } i\text{-ші төбе } j\text{-ші төбемен сыбайлас болса,} \\ 0, \text{ қарсы жағдайда;} \end{cases}$$

ә) G орграф үшін:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \ i\text{-ші төбеден } j\text{-ші төбеге доға жүргізілсе,} \\ 0, \text{ қарсы жағдайда;} \end{cases}$$

б) G мультиграфы үшін:

$$b_{ij} = \begin{cases} k, \ н\text{-граф үшін } i\text{-ші және } j\text{-ші төбелерді қосатын} \\ \text{қабырғалар саны, немесе орграф үшін басы } i\text{-ші төбеде соңы} \\ j\text{-ші төбеде болатын доғалар саны;} \\ 0, \text{ қарсы жағдайда.} \end{cases}$$

М ы с а л 3.1.3 –

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

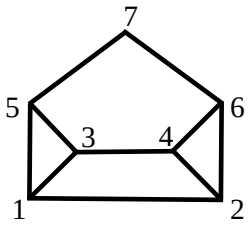
- 3.1.4 суреттегі н-графтың сыбайластық матрицасы;

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

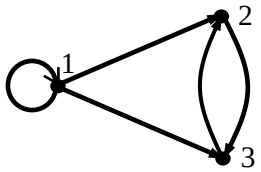
- 3.1.5 суреттегі орграфтың сыбайластық матрицасы;

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

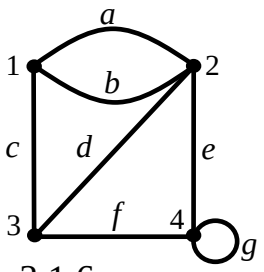
- 3.1.6 суреттегі мультиграфтың сыбайластық матрицасы.



3.1.4 сурет



3.1.5 сурет



3.1.6 сурет

Айта кетелік, *н*-графтың сыбайлас матрицасы симметриялы болып табылады, яғни $B = B^T$. Егер бұл графта тұзақ болмаса, онда бас диагональда нөлдер тұрады. Орграф үшін *i*-ші жолдағы бірдің саны *i*-ші төбенің $\rho_1(v_i)$ шығу дәрежесіне тең; *j*-ші бағандағы бірдің саны *j*-ші төбенің $\rho_2(v_j)$ кіру дәрежесіне тең.

5. Графты қабырғалар (доғалар) тізімімен беру.

Инциденттік қатынасты инциденттік матрицасынан басқа қабырға (доға) тізімі арқылы беруге болады. Бұл тізімді екі бағанға тізіп жазу арқылы береді: бірінші бағанға барлық қабырғалар (доғалар), ал екінші бағанға осы қабырғаларға инцидентті төбелерді енгізеді.

Орграфта доғалар саны төбелер санына қарағанда неғұрлым аз болса, доғалар тізімін басқаша – екі жиынтықпен беруге болады $g = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$ және $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$, мұндағы (g_i, h_i) - *i*-ші доға.

н-граф үшін төбелер реті (жолда) қалауынша жазылады; ал орграф үшін алдымен доға басының нөмірі жазылады.

М ы с а л 3.1.4 3.1.6 суреттегі граф үшін қабырғалар тізімі 3.1.1 кестесімен берілген.

Кесте 3.1.1

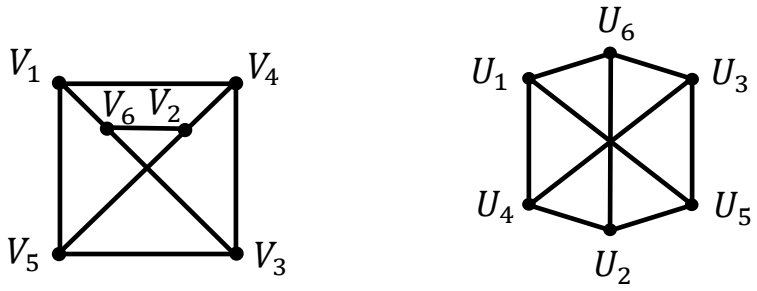
Қабырғалар	Төбелер
a	1 2
b	1 2
c	1 3
d	2 3
e	2 4
f	3 4
g	4 4

3.1.5 суреттегі орграфтың доғалар тізімі $g = (1,1,1,2,3)$ және $h = (1,2,3,3,2)$ жиынтығымен беріле алады.

Графтың берілуінің басқаша жолдары да бар (мысалы, [3], 244 бет).

Графтар изоморфизмі

Графты әртүрлі жолдармен беруге болатынын көрдік. 3.1.7 суретте бір граф берілген.



3.1.7 сурет

Графтың матрицасының және қабырға тізімінің түрі оның төбелері мен қабырғаларының нөмірленуіне байланысты. Тек қана төбелерінің және қабырғаларының нөмірленуінде ғана айырмашылығы бар графтар *изоморфты графтар* деп аталады. Нақты анықтамасын берейік.

Анықтама. Егер $e_1 = (u, v) \in E_1 \Leftrightarrow e_2 = (\varphi(u), \varphi(v)) \in E_2$ сыбайластықты сақтайтын биекция $\varphi: V_1 \to V_2$ бар болса, онда $G_1 = (V_1, E_1)$ және $G_2 = (V_2, E_2)$ графтары *изоморфты* деп аталып, $G_1 \sim G_2$ деп белгіленеді.

Бұл анықтаманы басқаша да беруге болады. Егер V_1, V_2 төбелер жиындарының арасында сыбайластықты сақтайтын өзара бірмәнді сәйкестік (биекция) орнатуға болса, $G_1(V_1, E_1)$, $G_2(V_2, E_2)$ графтары изоморфты деп аталады.

G графының v_1, v_2 төбелері тек сол жағдайда сыбайлас, егер G' графындағы оларға сәйкес $v_1{}'$, $v_2{}'$ төбелері сыбайлас болса.

Теорема. Графтың изоморфизмі эквиваленттілік қатынас болып табылады.

Расында изоморфизм эквиваленттілік қатынастың барлық қасиетіне сай келеді:

а) рефлексивті ($G \sim G$);

ә) симметриялы ($G_1 \sim \mathrm{G}_2 \Rightarrow G_2 \sim G_1$);

б) транзитивті ($G_1 \sim G_2, G_2 \sim G_3 \Rightarrow G_1 \sim G_3$).

Графтарды изоморфизм дәлдігіне дейін қарастыруға болады. G_1 графы G_2 графына изоморфты болу үшін графтар төбелерінің және олардың қабырғаларының арасында өзара бірмәнді сәйкестік болуы қажетті және жеткілікті. Кейде қарапайым жағыдайда графтардың изоморфтылығына олардың графиктік кескіні арқылы көз жеткізуге болады.

Графтардың изоморфтылығына көз жеткізудің жалпы ережелері:

а) графтардың төбелер санын есептейміз (егер олар әртүрлі болса, онда олар изоморфты емес);

ә) графтардың төбелері мен олардың дәрежелерін жазып аламыз (н-граф үшін) немесе кірі, шығу жұбын жазамыз (орграф үшін);

б) бірінші графтың әрбір төбесі үшін екінші графтан дәрежесі не дәреже жұбы беттесетіндей төбе іздейміз, яғни төбелерінің арасында өзара бірмәнді сәйкестік аламыз (егер сәйкестік болмаса, графтар изоморфты емес);

в) сәйкес төбелердің сыбайластығы сақталатындығын тексереміз.

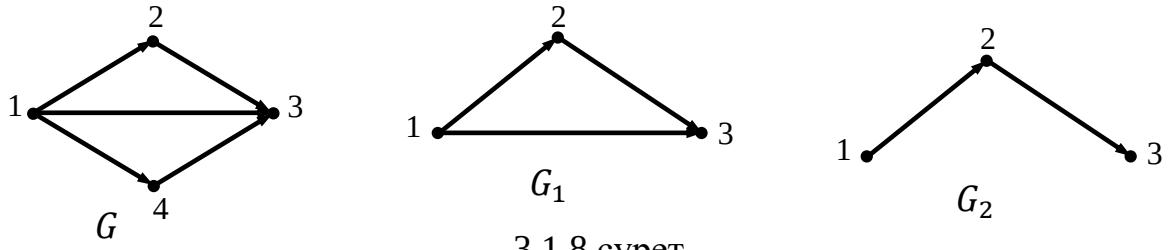
Бір графтың төбелерін екінші графтың төбелеріне орналастырап, сәйкес төбелерді сызықпен қосқан қолайлы.

Ішкі графтар және граф бөліктері. Графтарға қолданылатын қисаптар

Анықтама. Егер $V_1 \subseteq V$ және $E_1 \subseteq E$ орындалса, онда $\mathrm{G}_1 = (V_1, E_1)$ графы $G = (V, E)$ графының *бөлігі* деп аталады.

Анықтама. Ұштары V_1 жиынында болатын қабырғалар (доғалар) $G_1 = (V_1, E_1)$ жатса, онда $G_1 = (V_1, E_1)$ бөлігі $G = (V, E)$ графының *ішкі графы* деп айталады.

3.1.8 суретінде G графы, оның G_1 ішкі графы мен G_2 бөлігі бейнеленген.



3.1.8 сурет

1. $G(V, E)$ графы берілген.

а) $G(V, E)$ графының *толықтауышы* деп, мынандай $\overline{G}(V, E)$ графы айтылады: кез-келген $u, v \in V$, $\{u, v\}$ қабырғасы $\overline{G}$ графында жатып, ал G -да жатпайды;

ә) G графына v төбесін немесе $\{u, v\}$ қабырғасын қосу қисабын

$$G^{'}(V \cup \{v\}, E) \text{ немесе } G^{''}(V \cup \{u, v\}, E \cup \{\{u, v\}\})$$

графтарының пайда болуын түсінеміз;

б) G графына v төбесін алып тастау қисабы деп графтан v -ға инцидентті қабырғалар мен v төбені алап тастауды түсінеміз, яғни

$$G^{'}(V \backslash \{v\}, E \setminus \{\{v_1, v_2\} \mid v_1 \text{ немесе } v_2 = v\})$$

графының пайда болуын түсінеміз;

в) $\{u, v\}$ қабырғасын алып тастау қисабынан кейін $G^{'}(V, E \setminus \{\{u, v\}\})$ графы пайда болады;

г) u және v төбелерін теңестіру қисабы деп графтан осы төбелерді алып тастап, жаңа $v^{'}$ төбесін қосуды түсінеміз және де шеттері алып тасталынған төбелер болған қабырғалар, осы шеттері жаңа төбелер болған қабырғалармен ауыстырылады. u және v қабырғамен қосылса, u және v төбелерін теңестіру қисабын $\{u, v\}$ қабырғасын созу деп атайды.

2. $G_1(V_1, E_1)$ және $G_2(V_2, E_2)$ графтары берілген:

а) G_1 және G_2 графтарының *бірігуі* деп (белгіленуі $G_1 \cup G_2$)

$G_1 = G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ графын айтамыз;

ә) G_1 және G_2 графтарының *қиылысуы* деп ($G_1 \cap G_2$).

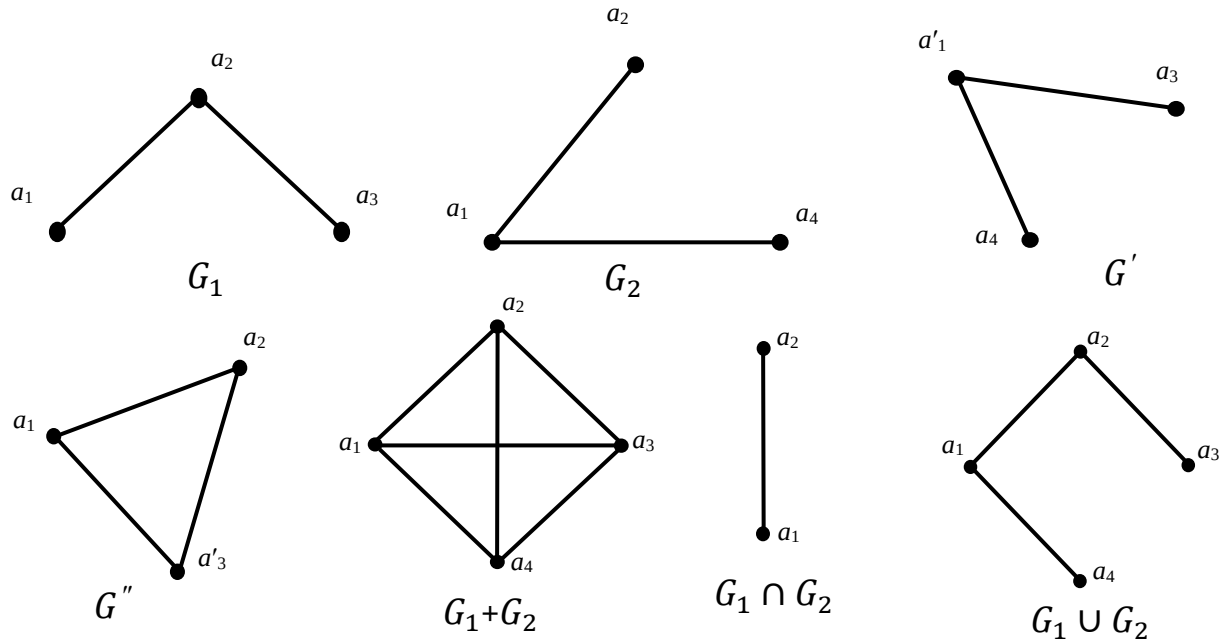
$G_1 = G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ графын айтамыз;

б) G_1 және G_2 графтарының *қосылуы* (жалғауы) ($G_1 + G_2$) деп

$G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{\{u, v\} \,/\, u \in V_1, v \in V_2, u \neq v\})$ графын айтамыз.

Графтар үшін бұл қисаптардан басқа қисаптарды анықтауға болады: сақиналы қосынды, тура көбейтінді және т.с.с.

М ы с а л 3.1.5 3.1.9 суретте G_1 , G_2 графтарына қолданылған қисаптардың нәтижесі және $G_1 \cup G_2$ бейнеленген. $G^{'}$ және $G^{''}$графтары $G_1 \cup G_2$ графынан сәйкес $\{a_1, a_2\}$ қабырғасын созудан және a_3, a_4 төбелерін теңестіруден алынған.



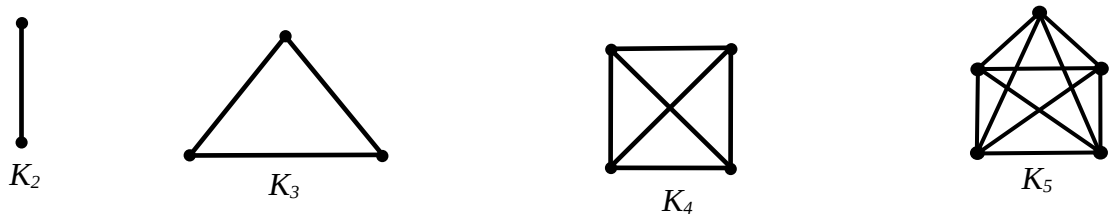
3.1.9 сурет

Кез-келген төбелері сыбайлас болатын тұзақсыз *н*-граф *толық* деп аталады (яғни қабырғалармен қосылған). n төбелі толық граф K_n деп белгіленеді.

Суретте толық графқа мысал келтірілген.

Графтардың тағы да маңызды түрлерін қарастырайық:

а) n төбелі толық граф K_n (тұзақсыз және еселі қабырғаларсыз н-граф толық делінеді. Кез-келген екі төбелері қабырғалармен қосылған). 3.1.10 суретте толық графқа мысал келтірілген.



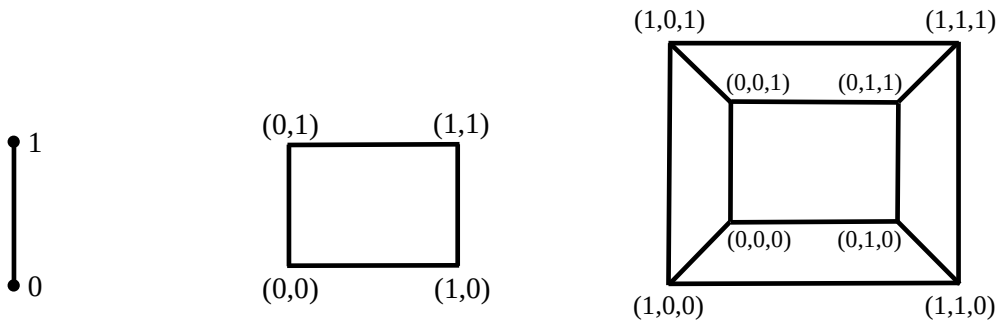
3.1.10 сурет

Графтың қабырғалар саны келесі формуламен есептелінеді:

$$m(K_n) = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

ә) n-графтың басты класстарының бірі n *өлшемді кубтар* (немесе *n*-кубтар) деп аталатын класс болып табылады, Q_n деп белгіленеді.

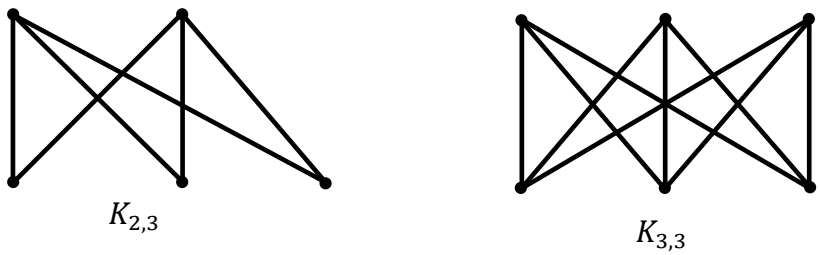
Q_n - *n* өлшемді кубтың төбелері әртүрлі 0 мен 1-ді қабылдайтын «*n*-ка»-лардан (жиынтықтардан) тұрады, ал қабырғалары келесі ережелерге сүйеніп беріледі: сәйкес «*n*-ка»-лар бір-бірінен бір координатаға айырмашылығы болғанда ғана, тек сол жағдайда ғана төбелері сыбайлас болады.
3.1.11 суретте $Q_1 = K_2$, Q_2 және Q_3 кубтары бейнеленген.



3.1.11сурет

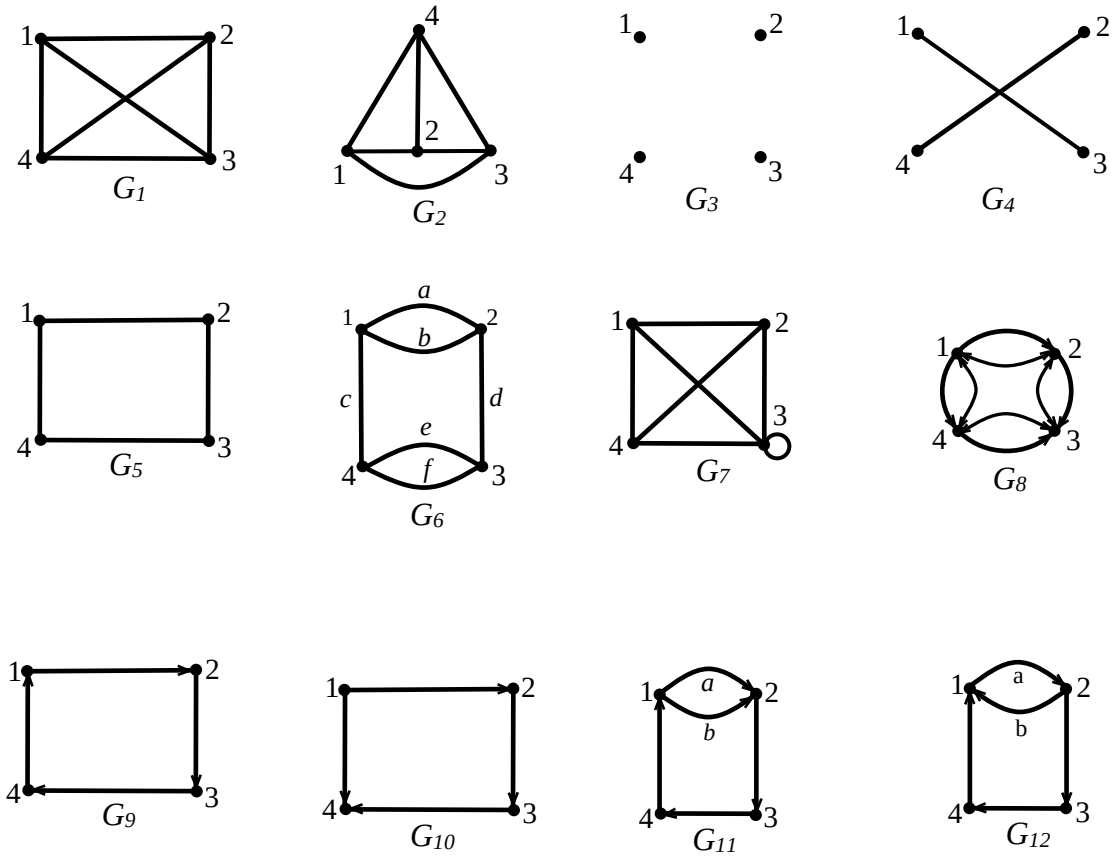
б) Егер V төбелер жиынын әрбір қабырғаның шеттері әртүрлі жиынға тиісті болатындай екі V_1 және V_2 (бөліктері) ішкі жиындарға бөлетін бөліктеу

табылса, $G(V,E)$ графы екі бөлікті деп аталынады. Толық екі бөлікті граф $K_{m,n}$ деп белгіленеді, мұндағы m – V_1–дегі төбелер саны, ал n– V_2 –дегі төбелер саны және әрбір $v \in V_1$, $u \in V_2$ үшін $\{v,u\} \in E$. 3.1.12 суретте екі бөлікті графтар бейнеленген $K_{2,3}$ және $K_{3,3}$.



3.1.12 сурет

М ы с а л 3.1.6 - 3.1.13 суретте келтірілген графтарды қарастырайық:



3.1.13 сурет

1. G_1 – G_7 – *н*-графтар,
   G_8 – G_{12} – орграфтар.
2. G_1 және G_2 – толық графтар, сонымен қатар $G_1 = G_2$.
3. G_7 толық емес, себебі төбелерінің жұбы қабырғамен қосылғанымен 1 тұзақ (3 төбеде) бар.

4. G_3 нөл-граф, барлық төбелері бөлек-бөлек орналасқан (графтың қабырғалар жиыны бос).

5. G_4 және G_5 графтары бір-біріне толықтауыш болады, яғни $G_4 = \overline{G_5}$ және $G_5 = \overline{G_4}$.

6. G_6 – мультиграф, себебі, a және b, e және f еселі қабырғалары бар.

7. G_8 – орграф, G_5 – *н*-графына сәйкес келеді.

8. G_9 және G_{10} тең емес, себебі өзгеше доғалар бар: G_9 – да (4,1), G_{10} – да (1,4);

9. G_{11} – бағытталған мультиграф, себебі a және b доғалары еселі.

10. G_{12} – мультиграф болмайды, себебі a және b доғалары әртүрлі бағытталған.

М ы с а л 3.1.7 3.1.14 суретіндегі G_1 – G_2 графтарының төбелерінің дәрежесін есептеу керек.

3.1.14 сурет

Шешуі. Екі графтың да төрт төбесі бар, яғни $V = \{1,2,3,4\}$ – G_1 және G_2 графтарының төбелерінің жиыны.

а) алдымен G_1 графының төбелерінің дәрежесін табайық.

$$\rho(1) = 3, \qquad \rho(2) = 4, \qquad \rho(3) = 3, \qquad \rho(4) = 4$$

(*н*-графта тұзақтың үлесі 2-ге тең).

Сонымен, $\sum_{V \in G} \rho(V) = 14 = 2m,\ m = 7$ – графтағы қабырғалар саны;

ә) G_2 графының төбелерінің дәрежесін табамыз:

1) шығу дәрежесі:

$$\rho_1(1) = 2, \qquad \rho_1(2) = 3, \qquad \rho_1(3) = 1, \qquad \rho_1(4) = 1$$

(орграфта тұзақтың үлесі 1-ге тең);

2) кіру дәрежесі:

$$\rho_2(1) = 1,\ \rho_2(2) = 1,\ \rho_2(3) = 2,\ \rho_2(4) = 3;$$

3) $\sum_{V \in G_2} \rho_2(V) = \sum_{V \in G_2} \rho_2(V) = 7 = m.$

3.2 Маршруттар, қолжетерлік, байланыстылық

н-граф пен орграф үшін тағы да жаңа ұғымдар енгіземіз. $G(V,E)$ графы берілсін. $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_n, v_{n+1}$ тізбегі v_1 және v_{n+1} төбелерін қосатын *маршрут* деп аталады, мұндағы $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1} \in V$, $e_1, e_2, \ldots, e_n \in E$.

Маршрутты $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ төбелерінің тізімімен, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ қабырғалар (доғалар) тізімімен беруге болады: v_1 – маршруттың басы, v_{n+1} – маршруттың соңы.

Шынжыр (жол) – барлық қабырғалары (доғалары) әртүрлі маршрут.

Цикл (контур) – тұйықталған шынжыр (жол), яғни басы мен соңы тең ($v_1 = v_{n+1}$).

Қарапайым, жай шынжыр (жол), жай цикл (контур) – бірінші және соңғы төбесінен басқа төбелері қайталанбайтын, яғни өз ішінде қиылыспайтын шынжыр (жол), цикл (контур).

Егер графта цикл (контур) болмаса, онда ол *ациклдік* (контурсыз) деп аталады.

Маршруттың қабырғаларының (доғаларының) саны оның *ұзындығы* деп аталады.

Егер u және v төбелерін қосатын ұзындығы n болатын шынжыр (жол) бар болса, $u \xrightarrow{n} v$ деп жазамыз.

Егер басы u және v соңы болатын шынжыр (жол) бар болса, онда v төбесі u төбесінен *қолжетерлік* деп аталады.

Анықтама. Егер кез-келген екі беттеспейтін төбелері маршрутпен қосылса, онда G *н-графы байланысқан* деп аталады.

Егер G орграфына сәйкес н-граф байланысқан болса, онда G *орграфы да байланысқан* деп аталады.

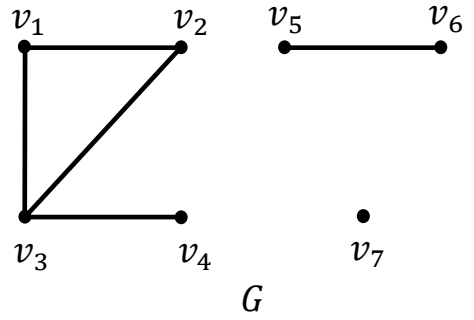
Егер кез-келген u және v екі төбесі өзара қолжетерлік болса, яғни, u төбесі v төбесінен, ал v төбесі u төбесінен жетерлік болса, онда орграф *мықты байланысқан* деп аталады.

Анықтама. Келесі шарттар орындалсын:

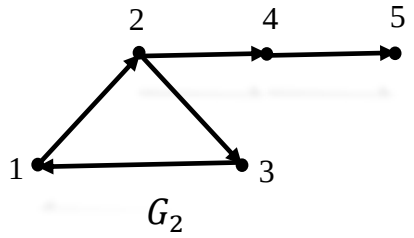
а) G_1 – бос емес байланысқан (мықты байланысқан) граф;

ә) егер G_2 – G графының байланысқан (мықты байланысқан) ішкі графы және $G_1 \subseteq G_2$ болса, онда $G_1 = G_2$, яғни G_1 – G графының максималды байланысқан (мықты байланысқан) ішкі графы болады.

Егер осы екі шарт орындалса, онда G графының G_1 ішкі графы $G(V,E)$ графының *байланыстық компонентасы* (байланыстықтың *мықты компонентасы*) деп аталады.



3.2.1 сурет



3.2.2 сурет

М ы с а л 3.2.1 - 3.2.1 суретте берілген *н*–граф үшін келесі ұғымдарды анықтауға болады:

а) (v_1, v_3, v_4) – жай шынжыр;

ә) $(v_1, v_3, v_2, v_1, v_3, v_4)$ – маршрут (шынжыр, бірақ қарапайым емес);

б) (v_3, v_1, v_2, v_4) маршрут емес ($\{v_2, v_4\}$ жоқ);

в) (v_1, v_2, v_3, v_4) – жай цикл;

г) v_1, v_2, v_3, v_4 төбелеріне қос-қостан жетуге болады (жетерлік),

v_5, v_6 – ұзындығы бірге тең шынжыр;

v_7 – ұзындығы 0-ге тең шынжыр, алшақ орналасқан төбе;

д) бұл G графы байланысқан емес, себебі ол $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}, \{v_7\}$ төбелер жиынынан құралған үш байланыс компонентасынан тұрады.

М ы с а л 3.2.2. G_2 орграфы берілген (3.2.2 сурет).

а) 1, 2, 4, 5 немесе 1, 2, 3 – жай жол;

ә) 1, 2, 3, 1 – жай контур;

б) 5 төбесі кез-келген төбеден жетерлік,

5 төбесінен ешқандай төбеге жетуге болмайды;

в) 4 төбесі 1, 2, 3 төбесінен жетерлік және 5 төбесінен жетпейді.

Бұл граф байланысқан, бірақ мықты байланысқан емес, оның {1,2,3}, {4}, {5} төбелер жиыны түрінде берілген үш мықты компонентасы бар.

Теорема. Кез-келген графты қиылыспайтын байланысқан компоненталардың (ал орграф үшін мықты байланысқан) бірігуі түрінде көрсетуге болады. Граф байланысқан (орграф үшін мықты байланысқан) компоненталарға бір ғана жолмен жіктеледі.

Сонымен, *н*-графтың байланысқан (немесе орграфтың мықты байланысқан) компоненталарының төбелерінің жиыны графтың төбелерінің жиынында бөліктеу құрайды.

G графының байланысқан (орграф үшін мықты байланысқан) компоненталарының саны ($K(G)$ немесе $C(G)$ деп белгіленеді) бірмәнді анықталады.

Егер $K(G) = 1$ болса, онда G – байланысқан граф.

Егер $K(G) > 1$ болса, онда G - байланыспаған граф.

3.2.2 мысалда G_2 орграфы үшін мықты байланысқан компоненталар саны $K(G_2) = 3$, ал $\{1,2,3,4,5\}$ төбелер жиынының $\{\{1,2,3\},\{4\},\{5\}\}$ бөліктеуі бар.

Байланыстық компоненталарын және байланыстық компонента – лардың мықтысын анықтау

Графты сипаттайтын тағы бір матрица қарастырайық.

*Анықтама***.** Егер

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{егер } j \text{ төбесі } i - \text{ші төбеден қолжетерлік болса,} \\ 0, & \text{қарсы жағдайда.} \end{cases}$$

c_{ij} элементтерінен тұратын n өлшемді (n - төбе саны) шаршы $C = (c_{ij})$ матрицасы *қолжетерлік матрица* деп аталады (*н*-граф үшін – сыбайластық матрицасы).

Қолжетерлік матрицасын келесі жолмен алуға болады: A – сыбайластық матрицасы болсын, $B = (b_{ij}) = E + A + A^2 + \ldots + A^m$ құрайық, сонда

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ егер } b_{ij} \neq 0 \\ 0, \text{ егер } b_{ij} = 0 \end{cases}$$

Айта кетелік, қолжетерлік матрицаны табудың басқа да әдістері бар. Қарапайым жағдайда C матрицасын графтың графиктік кескінінен табуға болады. Мысалы G_2 графы (алдыңғы 3.2.2 мысалдағы) үшін қолжетерлік матрица

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Егер *н*-графтың байланыстық матрицасының барлық элементтері $c_{ij} = 1$ болса, онда граф байланысқан. Жалпы, *н*-графтың байланысқан C матрицасы графтың төбелер жиынын компоненттерге бөліктенуіне сәйкес келетін эквиваленттік қатынасының матрицасы болып табылады.

3.2.1 -мысалдағы G графының қолжетерлік матрицасы.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Бірлерден тұратын блоктар үш төбелер жиынынан тұратын байланыстық компоненталарына $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}, \{v_7\}$, яғни графтың төбелер жиынының осы компоненталарға бөліктеуіне сәйкес келеді.

Орграф үшін қолжетерлік матрица көмегімен графтың мықты компоненталарын табуға болады.

$C = (c_{ij})$ матрицасынан басқа $Q = C^T = (q_{ij})$ матрицасын қарастырайық:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{егер } i \text{ төбесі } j - \text{ші төбеден қолжетерлік болса,} \\ 0, & \text{қарсы жағдайда.} \end{cases}$$

Q - ды кейде қолжетерлікке қарама-қарсы матрица деп те атайды.

$S = (s_{ij}) = Q * C$ матрицасын қарастырамыз, мұндағы $*$ қисабы C және Q матрицаларының элементін элементке көбейтуді білдіреді, яғни $s_{ij} = c_{ij} \cdot q_{ij}$.

Егер v_i және v_j төбелері өзара қолжетерлік болса, онда олар графтың бір мықты байланысқан компонентасында орналасқандығын білдіреді және S матрицасының сәйкес элементі 1-ге тең, яғни $s_{ij} = 1$. Сонымен, v_i төбесінен тұратын мықты байланысқан компонента $s_{ij} = 1$ болатын v_j төбелерін де қамтиды.

М ы с а л 3.2.3 3.2.2. – мысалдағы оргафты қарастырайық. Оның C қолжетерлік және Q қолжетерлікке қарама-қарсы матрицаларын құрып, олардың S көбейтіндісін қарастырамыз.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S = C * Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

S матрицасының бірінші жолы бойынша бір төбесін қамтитын мықты компонента $\{1,2,3\}$ төбелерінен тұрады. S матрицасынан 1, 2, 3 төбелеріне сәйкес келетін жолдар мен бағандарды сызып тастаймыз. Мына матрицаны аламыз

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

S_1 матрицасының бірінші жолында жалғыз 1 бар, ол 4 төбесіне сәйкес келеді, келесі мықты байланысқан компонента бір төбеден тұрады, ол $\{4\}$. S_1 – ден 4 төбесінен тұратын жол мен бағанды сызып тастаймыз. Қалған матрица $S_2 = (1)$. Берілген графтың мықты байланыстықтың үшінші компонентасы екіншісі сияқты бір төбеден тұрады: $\{5\}$. Сонымен, графтың мықты байланыстылығының 3 компонентасы бар: $\{1,2,3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$.

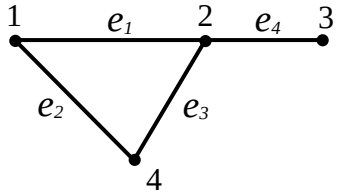
Графтардың маршруттарын зерттеу

Сыбайлас матрицаның негізгі қолданылуы – ол арқылы k ұзындықты маршрутты және оның санын анықтау болып табылады.

Теорема. $G = (V, E)$ графы берілсін, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ төбелер жиыны. A – G графының сыбайлас матрицасы болсын. $A^k = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A = (a_{ij})$ матрицасын қарастырайық.

Егер $a_{ij} = m$ болса, онда v_i төбесінен v_j төбесіне k ұзындықты m маршрут бар болады.

М ы с а л 3.2.4 3.2.3 суреттегі н-графты қарастырайық.



3.2.3 сурет

Бұл графтың сыбайлас матрицасы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A матрицасы бойынша ұзындығы 1 –ге тең маршруттарды анықтаймыз, мысалы, $a_{13} = 0$ болғандықтан, 1 төбесінен 3 төбесіне ұзындығы 1 –ге тең маршрут жоқ (жазылуы: маршрут $(1 \xrightarrow{1} 3)$ жоқ).

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$a_{13}^2 = 1$ болғандықтан, бір маршрут бар $(1 \xrightarrow{2} 3)$,

$a_{22}^2 = 3$ болғандықтан, үш маршрут бар $(2 \xrightarrow{2} 2)$,

$a_{34}^2 = 1$ болғандықтан, бір маршрут бар $(3 \xrightarrow{2} 4)$ және с.с.

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$a_{13}^3 = 1$ болғандықтан, бір маршрут бар $(1 \xrightarrow{3} 3)$,

$a_{21}^3 = 4$ болғандықтан, төрт маршрут бар ($2 \xrightarrow{3} 1$) және т.с.с.

A, A^2, A^3 матрицаларының элементтерін зерттеп, маршруттың төбелерінің тізбегін аламыз. Қарапайым граф болса, сурет бойынша анықтауға болады. Ең көрнекі әдіс – жаңаланған сыбайластық матрицаны қолдану болады. Ол матрицада бірлердің орнына сәйкес қабырға (доға) аты жазылады. 3.2.4 мысалда жаңаланған сыбайластық матрицаның түрі:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & 0 & e_2 \\ e_1 & 0 & e_4 & e_3 \\ 0 & e_4 & 0 & 0 \\ e_2 & e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{A}_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & 0 & e_2 \\ e_1 & 0 & e_4 & e_3 \\ 0 & e_4 & 0 & 0 \\ e_2 & e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & e_1 & 0 & e_2 \\ e_1 & 0 & e_4 & e_3 \\ 0 & e_4 & 0 & 0 \\ e_2 & e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e_1e_1 + e_2e_2 & e_2e_3 & e_1e_4 & e_1e_3 \\ e_3e_2 & e_1e_1 + e_4e_4 + e_3e_3 & 0 & e_1e_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Соңғы матрицадан қорытынды жасаймыз.

$a_{12}^2 = e_2e_3$ элементі 1 төбесінен 2 төбесіне ұзындығы 2 болатын бір маршрут бар екенін көрсетеді: $(1, e_2, 4, e_3, 2)$;

$a_{22}^2 = e_1e_1 + e_4e_4 + e_3e_3$ – 2 төбесінен 2 төбесіне ұзындығы 2 болатын үш маршрут бар: $(2, e_1, 1, e_1, 2)$, $(2, e_4, 3, e_4, 2)$, $(2, e_3, 4, e_3, 2)$.

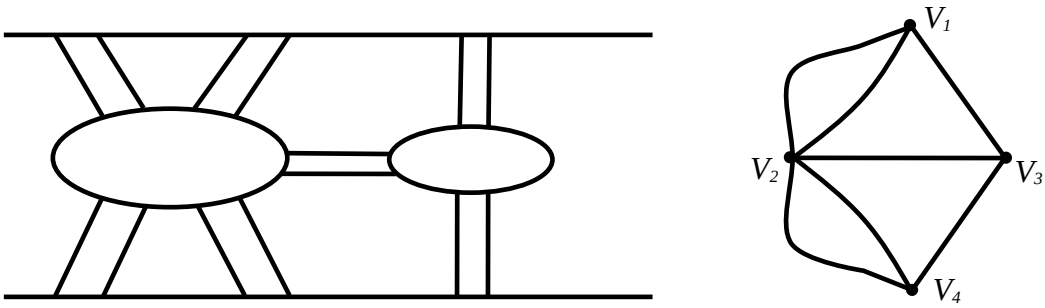
A_1^3 бойынша ұзындығы 3 болатын маршруттарды және олардың санын анықтауға болады.

3.3 Эйлер және гамильтон графтары

Белгілі бір қасиеттер бойынша графтың төбелерін немесе қабырғаларын айналып өту есептері кездеседі. Осындай екі есеп қарастырайық, олар «эйлер циклі», «гамильтон циклі» атауларының шығуын түсіндіреді.

1. 1736 жылы Эйлер кёнигсбер көпірлері есебін шығарды. Ол графтар теориясына өзіндік ғылым ретінде қарауға бастама берді. 3.3.1 а) суретінде

Кёнигсберг қаласының орталығында Перголи өзені арқылы өтетін жеті көпірдің жоспары салынған.



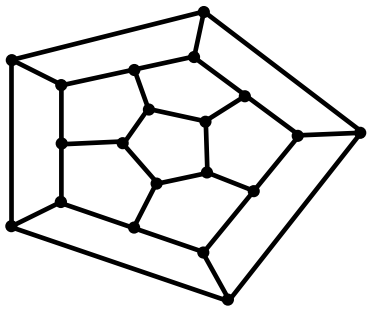
а) б)

3.3.1 сурет

Есептің шарты бойынша әрбір көпірді бір рет қана өтіп шыққан нүктеге қайтып келу керек. Графтар теориясының тілінде бұл есепті былай айтуға болады: G графы берілген (сурет 3.3.1 б)), оның төбелері– қаланың бөліктері (өзеннің жағалары және аралдар), қабырғалары – көпірлер. Сұрақ: G графында барлық қабырғалар енетін цикл бар ма? Мұндай циклді кейінірек Эйлер циклі деп атайтын боламыз.

2. «Гамильтон циклі» атауы 1857 жылы математик У.Гамильтон ойлап тапқан есептен (ойыннан) шыққан. Ол есептің мазмұны: граф берілген, ол жазықтыққа жатқызылған додекаэдрді білдіреді (сурет 3.3.2).

Әрбір төбе – қала. Әрбір қалаға бір-ақ рет кіріп, алғаш шыққан қалаға қайта келетіндей етіп қалаларды аралап шығу керек. Яғни графта әрбір төбені бір рет өтетіндей циклді табу керек. Мұндай циклдерді Гамильтон циклдері деп атаған. Гамильтон циклін табу есебі коммивояжер есебімен (n қала бар. Коммивояжер әрқайсысына бір реттен кіріп қайта оралу керек. Ең қысқа маршрутты табу керек) және т.б. маңызды есептермен байланысты.



3.3.2 сурет

Графта эйлер циклі деп келесі цикл (жәй, қарапайым болуы міндетті емес) айтылады: оған графтың барлық қабырғалары енеді және әрбір қабырға тек бір рет кездеседі. Эйлер циклі бар граф Эйлер графы деп аталады. Егер графта

шынжыр болса (жәй, қарапайым болуы міндетті емес), әрбір қабырға тек бір рет кездесетін, онда мұндай шынжыр эйлер шынжыры делінеді. Эйлер графын қағаздан қаламды алмастан бір қабырғаны екі рет өтпей сызуға болады. Байланысқан граф Эйлер графы бола алады, оған барлық қабырғалар (бір реттен) ғана емес, барлық төбелер де (бірнеше болуы мүмкін) енеді.

Келесі теорема графта эйлер циклі бар болуын тексерудің қарапайым әдісін келтіреді.

*Теорема***.** Егер байланысқан графтың барлық төбелерінің дәрежелері жұп болса, онда ол Эйлер графы болады (айта кетелік, бұл жағдайда қабырғалар жиынын қарапайым циклдерге бөлуге болады).

Сонымен, Кенигсберг көпірлерінің графындағы барлық төрт төбенің де дәрежелері тақ болғандықтан, есептің теріс жауабы болады: әрбір көпірді бір рет қана өтіп, шыққан нүктеге қайтып келу мүмкін емес

Эйлер графтары үшін Флери алгоритмі деп аталатын белгілі эйлер циклдерін тез құруға мүмкіндік беретін алгоритмі бар. Бұл алгоритмді келесі ережелермен беруге болады:

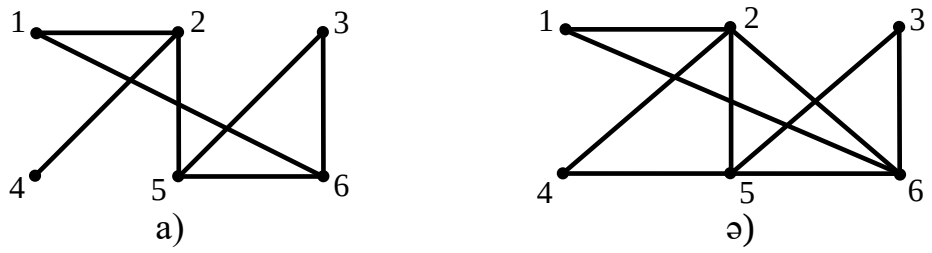
а) кез келген v_1 төбесі мен v_1-ге инцидентті e_1 қабырғасын таңдап аламыз. $e_1 = \{v_1, v_2\}$ қабырғасы бойынша v_2 төбесіне көшеміз. e_1 қабырғасына 1 нөмірін береміз, оны өтілген төбе деп, сызып тастаймыз;

ә) Егер басқа таңдау бар болса, v_i төбесінде тұрып v_i -ді v_1-мен жалғайтын қабырғаны таңдаудың қажеті жоқ;

б) v_i төбесінде тұрып көпір (өткел) болатын қабырғаны таңдаудың қажеті жоқ, яғни осы қабырғаны алып тастасақ, сызылмаған қабырғалардан құралған граф байланыстылықтың екі компонентасына бөлінеді, олардың әрқайсысында ең болмағанда бір қабырғадан тұрады;

в) графтағы барлық қабырғалар нөмірленгеннен кейін эйлер циклі құрылады, сонымен қатар қай төбеден бастадық, сол төбеге қайтып келеміз. Нөмірлену реті қабырғаларды айналу тізбегіне сәйкес келеді.

М ы с а л 3.3.1 3.3.3 а) және ә) суретіндегі графтардағы эйлер циклін табу керек.



3.3.3 сурет

3.3.3 а) суретіндегі графта эйлер циклдері жоқ, себебі мұнда тақ дәрежелі төбелер бар:

$$\rho(2) = \rho(5) = \rho(6) = 3, \rho(4) = 1.$$

3.3.3 ә) суретіндегі граф Эйлер графы болады, себебі:

$$\rho(1) = \rho(3) = \rho(4) = 2,\ \rho(2) = \rho(5) = \rho(6) = 4.$$

Осы графта Эйлер циклін құрамыз:

а) 1 төбесін және $e_1 = \{1,2\}$ қабырғасын таңдап аламыз, оған 1 нөмірін беріп, 2 төбесіне көшеміз;

ә) 2 төбесінде тұрып, өткен e_1 қабырғасын таңдамаймыз, осы төбеге қалған инцидентті қабырғалардың ішінде көпір жоқ, сондықтан кез келгенін таңдаймыз, мысалыға, $e_2 = \{2,4\}$, оған 2 нөмірін беріп, 4 төбесіне көшеміз;

б) дәл осылай ойды жалғастырып, қалған қабырғаларды келесі ретпен айналып өтеміз: $e_3 = \{4,5\}$,$e_4 = \{5,3\}$, $e_5 = \{3,6\}$, $e_6 = \{6,2\}$, $e_7 = \{2,5\}$, $e_8 =$ $= \{5,6\}$, $e_9 = \{6,1\}$. Сонымен, эйлер циклі алынды

$$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9.$$

Егер графта осы графтың барлық төбелерін қамтитын жай цикл бар болса, онда граф гамильтондық делінеді, ал цикл де гамильтондық деп аталынады. Гамильтондық деп графтың барлық төбелерін қамтитын қарапайым шынжыр да айтылады. Гамильтондық циклде графтың барлық қабырғалары болуы міндетті емес. Алайда, тек байланысқан граф қана гамильтондық бола алады. Гамильтондық циклдерді табу есебі Эйлер циклдерін табудан күрделірек. Графта гамильтондық циклдің бар болуының қарапайым критерийі де белгісіз, тек бар болуының кейбір жеткілікті шарттары ғана белгілі. Қажетті шарттар графтардың арнайы түрлеріне ғана белгілі. Қолдануға жеңіл екі жеткілікті шарттарды келтірейік. Тұзақсыз байланысқан, $n \geq 3$ төбелі G *н*-графы берілген болсын.

*Теорема***.** Егер G графының кез келген екі u және v сыбайлас емес төбелері үшін $\rho(u) + \rho(v) \geq n$ шарты орындалса, онда G графында гамильтон циклі бар болады.

*Салдар***.** Егер G графының кез келген v төбесі үшін $\rho(v) \geq n/2$ шарты орындалса, онда G графында гамильтон циклі бар болады.

М ы с а л 3.3.2 K_5 толық графы (сурет 3.1.10) Эйлер де, Гамильтон да графы болады, себебі эйлерліктің қажетті және жеткілікті шарттары және гамильтондықтың жеткілікті шарты орындалады: төбелер саны $n = 5$, төбелерді қалауымызша a, b, c, d, e арқылы белгілесек,

$$\rho(a) = \rho(b) = \rho(c) = \rho(d) = \rho(e) = 4$$

және кез келген екі сыбайлас емес төбелері үшін $\rho(u) + +\rho(v) = 8 > 5$ орындалады, мұндағы $u, v \in \{a, b, c, d, e\}$.

М ы с а л 3.3.3 3.3.3 ә) суретіндегі граф үшін төбелер саны $n = 6$, гамильтон циклінің жеткілікті шарты орындалмайды: мысалыға,
$\rho(1) + \rho(3) = 4 < 6$, бірақ, графта мұндай цикл бар, мысалыға: 1, 2, 4, 5, 3, 6, 1 циклі. Сонымен, бұл граф Эйлер де, Гамильтон да графы болады.

3.4 Графтағы ара қашықтық, өлшенген графтар.

$G = (V, E)$ байланысқан *н*-граф, ал v_i, v_j – G графының әртүрлі төбелері болсын.

Анықтама. v_i және v_j төбелерінің арасындағы *ара қашықтық* деп ұштары v_i және v_j болатын қарапайым шынжырдың ең кіші ұзындығын айтамыз. $d(v_i, v_j)$ деп белгіленеді. Бұл жолмен анықталған ара қашықтық метриканың барлық аксиомаларын қанағаттандырады:

1) $d(v_i, v_j) \geq 0$, сонымен қатар $d(v_i, v_j) = 0 \Leftrightarrow v_i = v_j$;

2) $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$;

3) $d(v_i, v_j) \leq d(v_i, v_k) + d(v_k, v_j)$ бұл үшбұрыштар теңсіздігі.

$V = v_1, v_2, \dots, v_n$ графтың төбелер жиыны болсын. $D = (d_{ij})$ матрицасын қарастырайық, мұндағы $d_{ij} = d(v_i, v_j)$. D матрицасы *ара қашықтық матрицасы* деп аталады. Айта кетелік, $D = D^T$, яғни D – симметриялы матрица.

Келесі анықтамаларды енгізейік.

1. v төбесінің *эксцентриситеті* деп

$$\max\{d(u, v): u \in V\}$$

шамасын айтамыз ($e(v)$ деп белгіленеді), сонымен эксцентриситет дегеніміз берілген төбеден ең алыс орналасқан төбеге дейінгі арақашықтық. D ара қашықтық матрицасында v_i төбесінің *эксцентриситеті* деп *i*-ші жолдағы ең үлкен сан айтылады.

2. G графының *диаметрі* деп ($d(G)$ деп белгіленеді) төбелерінің эксцентриситетінің ең үлкені айтылады. $d(G) = \max\{e(v): v \in V\}$.

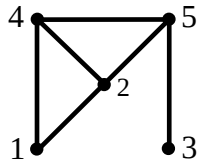
3. Егер $e(v) = d(G)$ болса, онда v *алшақ орналасқан төбе* деп аталады.

4. G графның *радиусы* деп эксцентриситеттің ең кішісі айтылады ($r(G)$ деп белгіленеді). $r(G) = \min\{e(v): v \in V\}$.

5. Егер $e(v) = r(G)$ болса, онда v *орталық төбе* деп аталады.

6. Орталық төбелердің жиыны графтың *центрі* деп аталады.

М ы с а л 3.4.1 3.4.1 Суреттегі G графын қарастырайық. Оның ара қашықтық матрицасы - D.



3.4.1 сурет

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицаның әр жолынан ең үлкен санды таңдаймыз – ол сәйкес жолдың эксцентриситеті, бірінші жолда ең үлкен сан 3, сондықтан $e(1) = 3$. Сол сияқты $e(2) = 2,\ e(3) = 3,\ e(4) = 2,\ e(5) = 2.$ Бұл табылған эксцентриситеттер арасынан ең үлкенін таңдаймыз, ол - 3, олай болса диаметр $d(G) = 3$, ал ең кішісі радиусты береді – $r(G) = 2$. Бұдан 1, 3 – алшақ орналасқан төбелер, 2,4,5 – орталық төбелер, {2,4,5} – графтың центрі.

Графтың орталық төбелерін табу есептері практикада жиі кездеседі. Мысалы, графтың төбелеріне – қалалардың аудандары, ал қабырғасына – олардың арасындағы жолдар сәйкес келеді деп есептейік. Емхана, дүкен және т.б. мекемелерді қолайлы орналастыру талап етіледі, яғни осы мекемеге дейінгі ең алшақ орналасқан аудандардың ара қашықтығын минимализациялау есебі туындап отыр. Олай болса, бұл мекемелерді орналастыру орындары графтың орталық төбелері болу керек. Мұнда қойылған есептердің шарты өмірдегіге сай келе бермейді, себебі аудандардың арақашықтығы, жол уақыты т.б.

жағдайларға көңіл бөлуге тура келеді. Әртүрлі жағдайларды ескеру үшін өлшенген графтар қолданылады.

$G = (V, E)$ графы берілген. G графының *таңбасы* (немесе таңбаларды орналастыру) деп

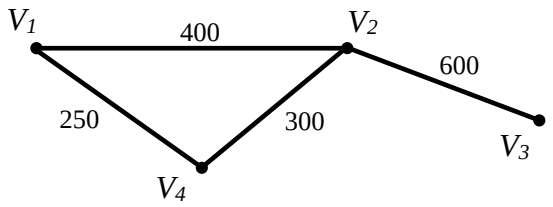
$f: V \to S_V$ (f функциясы төбелерінің таңбаларын орналастыру),

$g: E \to S_E$ (қабырғаларының (доғаларының) таңбаларын орналастыру) жұбын айтамыз. Олай болса, (V, E, f, g) төрттігін *өлшенген* немесе *таңбаланған* граф деп атаймыз.

Егер $v \in V$, онда $f(v)$ – v төбесінің салмағы, ал $e \in E$ болса, онда $g(e)$ - e қабырғасының (доғасының) салмағы.

Графтың тек қана төбелері таңбаланған (онда $g = const$) немесе доғалары ғана таңбаланған (онда $f = const$) жағдайлары жиі кездеседі.

М ы с а л 3.4.2. Суретте ұзындықтары белгіленген автокөлік жолдарының сұлбасы (V, E, f, g) таңбаланған графымен берілген.



3.4.2 сурет

V_1 – Астана, V_2 – Екібастұз, V_3 – Семей, V_4 – Қарағанды.

$$V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\},$$

$$\mathrm{E} = \{\{V_1, V_2\}, \{V_2, \mathrm{V}_3\}, \{V_1, V_4\}, \{V_2, V_4\}\},$$

$f: V \to S_V$: S_V – қалалар жиыны,

$f(V_1) =$ Астана, $f(V_2) =$ Екібастұз, $f(V_3) =$ Семей, $f(V_4) =$ Қарағанды.

$g: V \to S_E$: S_E – арақашықтық жиыны,

$g(\{V_1, V_2\}) = 400$, $g(\{V_2, V_3\}) = 600$, $g(\{V_1, V_4\}) = 250$, $g(\{V_2, V_4\}) = 300$.

Өлшенген графтағы қабырғалардың (доғалардың) салмағы туралы ақпаратты $W = (w_{ij})$ салмақ матрицасы түрінде беруге болады. Ол келесі түрде анықталады: егер (a_i, a_j) доғасы бар болса, w_{ij} – (a_i, a_j) доғасының салмағы, ал салмақ жоқ жерлердің орнына қосымша мәліметке сай 0 немесе ∞ таңбаларын қояды (∞ - егер төбелер сыбайлас болмаса).

Жоғарыдағы мысалдағы граф үшін салмақ матрицасы:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 400 & \infty & 250 \\ 400 & 0 & 600 & 300 \\ \infty & 600 & 0 & \infty \\ 250 & 300 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Өлшенген графтар үшін арақашықтық, эксцентриситет, радиус, т.б. ұғымдар енгізілді.

$G = (V, E)$ өлшенген граф болсын, мұндағы әрбір (v_1, v_2) доғасының салмағы $\mu(v_1, v_2)$ саны болсын. Келесі анықтамаларды енгізейік:

а) $(v_1 \leftrightarrow v_{n+1})$ *маршрутының салмағы* деп $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(v_i, v_{i+1})$ саны айтылады;

ә) v_1 және v_{n+1} төбелерінің арасындағы $d_w(v_1, v_{n+1})$ (w – арақашықтық) *өлшенген арақашықтық* деп $v_1 \leftrightarrow v_{n+1}$ маршрутының ең азы айтылады.

б) v_1 және v_{n+1} төбелерінің арасындағы *ең қысқа маршрут* деп, салмағы $d_w(v_1, v_{n+1})$ - ге тең болатын маршрут айтылады;

в) v төбесінің *өлшенген эксцентриситеті* деп ($e_w(v)$ деп белгіленеді) $e_w(v) = max\{d_w(v, u): u \in V\}$ саны айтылады;

г) $e_w(v) = min\{e_w(u): u \in V\}$ орындалатын v төбесі G графының *өлшенген орталық төбесі* деп айтады;

д) G графының *өлшенген радиусы* ($r_w(G)$ деп белгіленеді) деп орталық төбемен өлшенген эксцентриситетті айтады.

Қысқа маршрутты (жолды) табу

Қысқа маршруттарды анықтаудың бірнеше тәсілдері (алгоритмдері) бар. Ол таңдау есеп шартына (мысалы қабырға өлшемі теріс немесе жоқ болуы мүмкін), шешу жолына (компьютерде, қолмен) байланысты.

Барлық қабырғаларының салмағы теріс емес өлшенген графтарға ғана қолданылатын *Дейкстра алгоритмін* қарастырайық.

Дейкстра алгоритмінің әртүрлі нұсқаларын кездестіруге болады, мысалы компьютерде қолдану үшін салмақ матрицасын қолданбай және осы матрицаны қолдану арқылы.

Біз Дейкстра алгоритмінің екі нұсқасын қарастырайық (салмақ матрицасын қолданып және қолданбай).

Дейкстра алгоритмі 1.

$G = (V, E)$ – n төбелі өлшенген граф берілсін. $W = (w_{ij})$ – оның салмақ матрицасы ($w_{ij} > 0$).

Белгіленген бір v_i төбесінен (оны бастамасы деп атаймыз) қандай-да бір басқа төбеге дейінгі өлшенген арақашықтықты табу керек. (Дейкстра 1 алгоритмі бойынша бастамадан қалған төбелерге дейінгі ара қашықтықты бірден табады).

T_1 арқылы $V \setminus \{v_i\}$ төбелер жиынын белгілейік, яғни T_1 – бастамасыз V барлық төбелер жиыны, $D^{(1)} = (d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)})$ белгілеуін енгізейік, мұндағы $d_1^{(1)} = 0$, $d_j^{(1)} = w_{ij}$, $(i \neq j)$, яғни $D^{(1)}$ – салмақ матрицасындағы i -ші жол.

S қадам жасадық. S - қадамында T_S төбелер жиыны мен

$D^{(S)} = (d_1^{(S)}, d_2^{(S)}, \ldots, d_n^{(S)})$ жолдар анықталған болсын.

Біздің мақсатымыз T_S -тен T_{S+1} -ке көшу және $D^{(S)}$-тен $D^{(S+1)}$-ге көшу. Енді $d_j^{(s)} = min\{d_k^{(s)} / v_k \in T_S\}$ орындалатындай T_S-тен v_i төбесін таңдап аламыз.

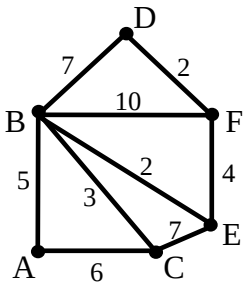
$T_{S+1} = T_S \setminus \{v_j\}$, $D^{(S+1)} = (d_1^{(S+1)}, d_2^{(S+1)}, \ldots, d_n^{(S+1)})$ болсын, мұндағы

$$\begin{cases} d_k{}^{(S+1)} = d_k{}^{(S)}, \text{ егер } v_k \notin T_{S+1}, \\ d_k{}^{(S+1)} = min\{ d_k{}^{(S)}, d_j{}^{(S)} + w_{jk}\}, \text{ егер } v_k \in T_{S+1}. \end{cases}$$

$S = n - 1$ қадамда $D^{(n-1)} = (d_1^{(n-1)}, d_2^{(n-1)}, \ldots, d_n^{(n-1)})$ жолын аламыз, мұндағы $d_1^{(n-1)}$ – v_i төбесінен v_j төбесіне дейінгі өлшенген арақашықтыққа тең $d_j^{(n-1)} = d_w(v_i, v_j)$.

М ы с а л 3.4.3. Суреттегі графты қарастырайық. A төбесінен қалған төбелерге дейінгі қысқа өлшенген ара қашықтықты табу керек.

Шешуі. $V = \{A, B, C, D, E, F\}$ – төбелер жиыны.



3.4.3 сурет

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & \infty & \infty & \infty \\ 5 & 0 & 3 & 7 & 2 & 10 \\ 6 & 3 & 0 & \infty & 7 & \infty \\ \infty & 7 & \infty & 0 & \infty & 2 \\ \infty & 2 & 7 & \infty & 0 & 4 \\ \infty & 10 & \infty & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$ – салмақ матрицасы

$min(a, \infty) = a,\ min(\infty, \infty) = \infty,\ a + \infty = \infty, \infty + \infty = \infty$ деп келісейік

1 қадам. A – бастама. $T_1 = V \setminus \{A\} = \{B, C, D, E, F\}$ бастама нүктесін төбелер жиынынан алып тастаймыз.

$D^{(1)} = \left(0, \underline{\hat{5}}, \hat{6}, \widehat{\infty}, \widehat{\infty}, \widehat{\infty}\right)$ – салмақ матрицасындағы бірінші жол;

2 қадам. $D^{(1)}$ –ден ^ белгісі бар (яғни бастама нүктесінен өзге) элементтер арасынан ең кішісін таңдаймыз да, оның астын сызамыз. T_1 –ден асты сызылған санға сәйкес келетін төбені алып тастаймыз (бұл B).

$T_2 = T_1 - \{B\} = \{C, D, E, F\}$. $D^{(2)}$–ні анықтау үшін қосымша деректер жазамыз: W матрицасынан B төбесіне сәйкес келетін жолды жазамыз. Оның барлық (бірінші мен екіншісінен басқа) элементтеріне белгіленген 5–ті қосамыз.

$D^{(1)}$ мен $D^{(2)}$– дегі сәйкес сандарды салыстырып, орнына ең азын жазамыз:

$$\begin{array}{rrrrrr} {}_{+}\ 5 & 0 & 3 & 7 & 2 & 10 \\ & & \underline{5} & \underline{5} & \underline{5} & \underline{5} \\ & & 8 & 12 & 7 & 15, \end{array} \qquad D^{(2)} = \left(0,5, \underline{\hat{6}}, \widehat{12}, \hat{7}, \widehat{15}\right).$$

3 қадам. $T_3 = T_2 - \{C\} = \{D, E, F\}$,

$$\begin{array}{rrrrrr} {}_{+}\ 6 & 3 & 0 & \infty & 7 & \infty \\ & & & \underline{6} & \underline{6} & \underline{6} \\ \hline & & & \infty & 13 & \infty \end{array}, \quad D^{(3)} = \left(0,5,6, \widehat{12}, \underline{\hat{7}}, \widehat{15}\right).$$

4 қадам. $T_4 = T_3 - \{E\} = \{D, F\}$,

$$\begin{array}{rrrrrr} {}_{+}\ \infty & 2 & 7 & \infty & 0 & 4 \\ & & & \underline{7} & \underline{7} & \underline{7} \\ \hline & & & \infty & 7 & 11, \end{array} \qquad D^{(4)} = \left(0,5,6, \widehat{12}, 7, \underline{\widehat{11}}\right).$$

5 қадам. $T_5 = T_4 - \{F\} = \{D\}$,

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
+ & \infty & 10 & \infty & 2 & 4 & 0 \\
 & & & & 11 & & 11 \\
\hline
 & & & & 13 & & 11,
\end{array}
\qquad D^{(5)} = (0,5,6,12,7,11).
$$

$n = 6,\ n - 1 = 5$, олай болса бұл соңғы қадам. $D^{(5)}$ -ге қарап қорытынды жасаймыз. A төбесінен қалған төбелерге дейінгі қысқа өлшенген ара қашықтықтар:

$d_w(A, A) = 0,\quad d_w(A, B) = 5,\quad d_w(A, C) = 6,$

$d_w(A, D) = 12,\quad d_w(A, E) = 7,\quad d_w(A, F) = 11.$

Дейкстра алгоритмі 2

Бұл алгоритм ең қысқа жолдың салмағын тауып қоймай, сонымен қатар жолдың өзін табады. Кейде оны таңбаларды қою алогоритмі деп те атайды. v_1 төбесінен v_n төбесіне дейінгі ең қысқа өлшенген жолды табу керек болсын. Әрбір төбеге сәйкес жұп (таңба) $(\infty, 0)$ қоямыз. Егер v_i төбесінде (w, v_k) таңба болса, онда бірінші координата v_1-ден v_i-ге берілген ара қашықтықты, екіншісі – алдыңғы v_1- ден v_i- ге жолдың төбесін білдіреді. Таңбалар төбелер сияқты екі күйде болады – уақытша және тұрақты.

Алгоритмнің өзін қарастырайық:

1) v_1– бастау. Бұл төбеге (0,0) таңбасын береміз де, тұрақты қыламыз. Ерекше белгілеу енгіземіз, мысалы, жұлдызша немесе астын сызамыз: $v_1{}^*(0,0)$. Қалған төбелер уақытша және таңбасы $(\infty, 0)$.

2) $v_i(w, v_k)$ төбесі тұрақты болды делік. v_i- ге сыбайлас барлық төбелерді v_j қарастырамыз. v_i-ден v_j-ге дейінгі ара қашықтығына (салмағына) w шамасын қосамыз. Егер бұл қосынды v_j төбесіне берілген (яғни оның алдыңғы бірінші координатасы) уақытша ара қашықтықтан кіші болса, онда осы қосындымен бірінші координатаны v_j-ге, ал екінші координатаны v_i-ге айырбастаймыз.

3) v_i-ге сыбайлас v_j уақытша төбелеріне берілген ара қашықтықтардың ең кішісін іздейміз. Ең аз салмағы бар төбені тұрақты етеміз.

4) Егер v_n төбесі тұрақты емес болса, онда 2 пунктке қайта барамыз. Егер v_n төбесі тұрақты болса, онда v_n-ге берілген ара қашықтық – v_1-ден v_n -ге дейінгі ең қысқа ара қашықтық болады. Алгоритм аяқталды.

v_1-ден v_n-ге дейін жолды табу үшін v_n төбесінен бастау керек, екінші координата бойынша алдыңғы төбені табамыз. Ал мына төбе үшін де жолдың v_1 бірінші төбесіне жеткенше сол сияқты алдыңғы төбені табамыз және т.с.с. Төбелерді кері ретпен жазып, v_1-ден v_n-ге дейінгі ізделінді жолды аламыз.

Осы әдісті сол мысалда көрсетейік. 3.4.3 суреттегі граф үшін A төбесінен F төбесіне дейінгі ең қысқа ара қашықтық пен жолды табу керек.

Айта кетелік, бұл алгоритмді әрбір қадамда төбелері таңбаланған граф түрінде (мысалы, [4], 611 бет) бейнелеуге болады. Біз суретсіз шығарамыз.

1 қадам. A бастауын $(0,0)$ таңбасымен белгілейміз, оны тұрақты деп қабылдап, $A^*(0,0)$ деп белгілейміз. Қалған төбелердің таңбалары $(\infty, 0)$: $B(\infty, 0)$, $C(\infty, 0)$,…, $F(\infty, 0)$.

1-ші итерация.

2 қадам. A төбесімен сыбайлас төбелер – B және C:

- $A^*(0,0)$–ден $B(\infty, 0)$–ге дейінгі ара қашықтық 5, 5+0 < ∞, сондықтан B таңбасын өзгертеді: $B(5, A)$;

- $A^*(0,0)$–ден $C(\infty, 0)$–ге дейінгі ара қашықтық 6, 6+0 < ∞, сондықтан C таңбасын өзгертеді: $C(6, A)$;

3 қадам. $min(5, 6) = 5$, сондықтан B тұрақтыға айналады, оны белгілейміз: $B^*(5, A)$. $B \neq F$, екінші қадамға қайта ораламыз.

2-ші итерация.

2 қадам. В төбесімен сыбайлас төбелер – C, D, E, F:

- $B^*(5, A)$–ден $C(6, A)$–ге дейінгі ара қашықтық 3, 5 + 3 = 8 > 6, сондықтан C таңбасын өзгертпейді: $C(6, A)$;

- $B^*(5, A)$–ден $D(\infty, 0)$–ге дейінгі ара қашықтық 7, 5 + 7 = 12 < ∞, сондықтан D таңбасын өзгертеді: $D(12, B)$;

- $B^*(5, A)$–ден $E(\infty, 0)$–ге дейінгі ара қашықтық 2, 5 + 2 = 7 < ∞, сондықтан E таңбасын өзгертеді: $E(7, B)$;

- $B^*(5, A)$–ден $F(\infty, 0)$–ге дейінгі ара қашықтық 10, 5 + 10 = 15 < ∞, сондықтан F таңбасын өзгертеді: $F(15, B)$;

3 қадам. $min\ (6,12,7,15) = 6$, сондықтан C тұрақты болады: $C^*(6, A)$. $C \neq F$, екінші қадамға қайта ораламыз.

3-ші итерация.

2 қадам. C төбесімен сыбайлас төбе – E (тек уақытша төбелер қарастырылады):

- $C^*(6,A)$ –ден $E(7,B)$–ге дейінгі ара қашықтық 7, 6 + 7 = 13 > 7, сондықтан E таңбасын өзгертпейді: $E(7,B)$;

3 қадам. $E^*(7,B)$ - тұрақты, $E \neq F$, екінші қадамға қайта ораламыз.

4-ші итерация.

2 қадам. Е төбесімен сыбайлас төбе – F:

- $E^*(7,B)$ –ден $F(15,B)$–ге дейінгі ара қашықтық 4, 7 + 4 = 11 < 15, сондықтан F таңбасын өзгертеді: $F(11,E)$;

3 қадам. $F^*(11,E)$ - тұрақты.

Осы тұжырымдарды келесі сұлбамен көрсетуге болады:

$$A \text{ - бастау} \rightarrow A^*(0,0) - \text{тұрақты төбе,} \left[\begin{array}{l} B(\infty,0) \\ C(\infty,0) \\ D(\infty,0) \\ E(\infty,0) \\ F(\infty,0) \end{array}\right. \text{ - уақытша төбелер;}$$

$$1)\ A^*(0,0) - \left[\begin{array}{l} \xrightarrow{5} B(\infty,0) - 0 + 5 = 5 < \infty \rightarrow B(5,A) \\ \xrightarrow{6} C(\infty,0) - 0 + 6 = 6 < \infty \rightarrow C(6,A) \end{array}\right. -$$

$min(5,6) = 5 \rightarrow B^*(5,A)) -$ тұрақты;

$$2)\ B^*(5,A) - \left[\begin{array}{l} \xrightarrow{3} C(6,A) - 5 + 3 = 8 > 6 \rightarrow C(6,A) \\ \xrightarrow{7} D(\infty,0) - 5 + 7 = 12 < \infty \rightarrow D(12,B) \\ \xrightarrow{2} E(\infty,0) - 5 + 2 = 7 < \infty \rightarrow E(7,B) \\ \xrightarrow{10} F(\infty,0) - 5 + 10 = 15 < \infty \rightarrow F(15,B) \end{array}\right. -$$

$min(6,12,7,15) = 6 \rightarrow C^*(6,A) -$ тұрақты;

$$3)\ C^*(6,A) - \left[\xrightarrow{7} E(7,B) - 6 + 7 = 13 > 7 \rightarrow E^*(7,B)\right] \rightarrow E^*(7,B) \quad -$$

тұрақты;

$$4)\ E^*(7,B) - \left[\xrightarrow{4} F(15,B) - 7 + 4 = 11 < 15 \rightarrow F^*(11,E)\right] \rightarrow F^*(11,E)$$

- тұрақты.

Сонымен, F төбесіне дейінгі ең қысқа ара қашықтықты табу керек болатынбыз. Ол төбе тұрақтыға айналды, сондықтан процесс аяқталды. 11 – A-дан F-ке дейінгі ең қысқа ара қашықтық. Егер тұрақты төбеге сыбайлас төбелер жиынтығы F төбесіне жетпей таусылып қалса, онда есептің шешімі болмас еді. A-дан F-ке жол болмас еді.

Ең қысқа жолды табу үшін F-тен A-ға қарай көрсетілген екінші координаталар бойынша тізбектей жүреміз: $F(11, E)$, $E(7, B)$, $B(5, A)$, A. Төбелерді кері ретпен жазып, ізделінді жолды аламыз: (A, B, E, F).

Желідегі ағындар

Қаныққан графтың мысалы ретінде желіні бейнелейтін графты алуға болады. Желі – бұл қандай да бір өнімді бір нүктеден екінші нүктеге тасымалдауға арналған жүйе. Мысалы мұнай тасымалдау жүйесі, транспорттық жүйелер, су тасымалы, компьютерлік жүйе және т.б. Желінің каналдарының өткізу мүмкіндігі шектелген болғандықтан, машықтану сабақтарында желі өткізе алатын максималды ағындарды анықтауды сұрайды. Бұл есеп графтар теориясында шешімін табуда.

Желі деп тұзақсыз байланысқан бағытталған $G(V, E)$ графы айтылады. Желіде екі төбе таңдап алынады s - бастамасы (исток) және t - кіру (сток). Әрбір $e = (u, v)$ доғаға $c(e)$ саны сәйкес келеді, ол – e доғасының өткізу мүмкіндігін білдіреді.

Графты өрнектейтін сыбайлас матрицасы немесе салмақ матрицасы сияқты, желінінің өткізу мүмкінді матрицасын жазуға болады $C = (c_{ij})$, мұндағы $c_{ij} = \begin{cases} c(v_i, v_j), \text{егер } (v_i, v_j) \text{ бар болса} \\ 0, \text{егер } (v_i, v_j) \text{ бар болмаса} \end{cases}$.

Желідегі ағындар деп E $(f: E \to N \cup \{0\})$ доғалар жиынында анықталған

1) $\forall e \in E: 0 \leq f(e) \leq c(e)$;

2) $\forall v \in V$: $v \neq s$ және $v \neq t$: $\sum_{(u,v)\in E} f(u, v) = \sum_{(v,u)\in E} f(v, u)$

шарттарын қанағаттандыратын f функциясы айтылады.

Ағынның бірінші шарты айқын: доғадағы ағынның шамасы оның өткізу мүмкіндігінен аспайды. Екінші шарт ағынның сақталу шарты деп аталады: ағынның ара қашықтықтағы төбелері пайда болмайды және жоғалып кетпейді.

$\Delta(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$ шамасын (u,v) доғасының қалдық өткізу мүмкіндігі дейді. Егер $f(u,v) = c(u,v)$, онда (u,v) доғасын қаныққан дейді.

Максималды ағынды анықтауда қиынды ұғымы маңызды орын алады. V төбелер жиыны бос емес өзара қиылыспайтын S және T ішкі жиындарға бөлінген: $V = S \cup T, S \cap T = \emptyset$. Басы S -те, ал соңы T -де жатқан доғалар жиыны бағытталған қиынды деп аталып, $P = (S,T)$ деп белгіленеді.

Сонымен, $P = (S,T) = \{(u,v)|u \in S, v \in T\}$. Қиындының өткізу мүмкіндігі деп оған енетін доғалардың өткізу мүмкіндіктерінің қосындысы айтылады. Егер желідегі ағын шамасы кез келген ағынның шамасынан кем болмаса, онда ол максималды деп аталады; егер қиындының өткізу мүмкіндігі желідегі кез келген қиындының өткізу мүмкіндігінен үлкен болмаса, онда қиынды минималды делінеді.

Теорема (Форд-Фалкерсон). Желідегі максималды ағын минималды қиындының өткізу мүмкіндігіне тең.

Форд-Фалкерсон максималды ағынды табу алгоритмі келесіге сүйенеді:

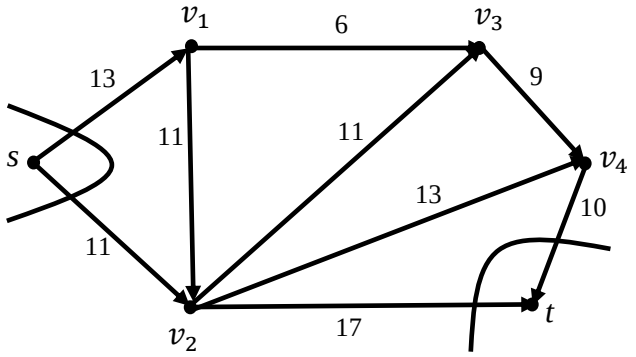
а) желіде s-тен t-ге қанықпаған доғалардан тұратын жол бар болсын. Сонда желідегі ағынды Δ шамасына үлкейтуге болады, Δ - осы жолдағы қалған доғалардың өткізу мүмкіндіктерінің минималдысы. Осындай s-тен t-ге жолдардың әрқайсысын қарастырамыз, әр жолда ағынды үлкейтеміз. Нәтижесінде толық ағын аламыз, ол ағында әрбір s -тен t -ге жолда ең кемінде бір қаныққан доға болады;

ә) s-тен t-ге қарай кез келген маршрут қарастырамыз, олар түзулерден де (s-тен t-ге бағытталған), кері доғалардан да (t-ден s-ке бағытталган) тұрады. Бұл маршрутта тура доғалар қанықпаған болсын, ал кері доғадағы ағындар оң болсын. Белгілеу енгізейік: Δ_1- тура доғалардың қалғандарының өткізу мүмкіндіктерінің минималдысы, Δ_2- кері доғадағы ағындардың шамаларының минималдысы. Сонда желідегі ағынды $\Delta = min\{\Delta_1, \Delta_2\}$ шамасына үлкейтуге болады, ол үшін тура доғадағы ағындарға Δ-ны қосамыз, ал керідегіден азайтамыз. Қарастырылып отырған маршрутқа енетін төбелерге ағынның сақталу шарты сақталып қалады. Атап өтелік, қаныққан болған доғалар әрі қарай маршрутта қарастырылмау керек. Оларды сызбадан сызып тастаған қолайлы. Және де, егер бастамадан шыққан немесе кіруге (стокқа) енген

маршруттың барлық доғалары қаныққан болып шықса, алгоритм аяқталды және максималды ағын табылды.

Мысал 3.4.4 $C = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 13 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

өткізу мүмкіндік матрицасымен берілген $G = (V, E)$, $V = \{s, v_1, v_2, v_3, v_4, t\}$ желідегі s-тен t-ге максималды ағын табу керек және минималды қиындыны көрсету керек.



3.4.4 Сурет

C матрицасы бойынша граф құрамыз (сурет 3.4.4). s-тен t-ге қарай барлық жолдарды қарастырамыз, стрелканың үстіне ағынды және өткізу мүмкіндігін (жақшада) жазамыз, стрелканың астына дәл соны Δ-ға үлкейтілген шамасын жазамыз. Алдымен барлық доғалар арқылы ағын нөлге тең деп есептейміз:

1. $s \xrightarrow[11(11)]{0(11)} v_2 \xrightarrow[11(17)]{0(17)} t$, $\Delta = min$ (11,17) = 11;

2. $s \xrightarrow[10(13)]{0(13)} v_1 \xrightarrow[10(11)]{0(11)} v_2 \xrightarrow[10(13)]{0(13)} v_4 \xrightarrow[10(10)]{0(10)} t$, $\Delta = min$ (13,11,13,10) = 10;

3. $s \xrightarrow[11(13)]{10(13)} v_1 \xrightarrow[11(11)]{10(11)} v_2 \xrightarrow[12(17)]{11(17)} t$, $\Delta = min$ (13-10,11-10,17-11) = 1.

s-тен t-ге қарай қаныққан доғасыз басқа тура жол жоқ. s-тен t-ге қарай маршруттар қарастырамыз, оларға тура да, кері де доғалар ене алады:

1) $s \xrightarrow[13(13)]{11(13)} v_1 \xrightarrow[2(6)]{0(6)} v_3 \xleftarrow[-2(11)]{0(11)} v_2 \xrightarrow[14(17)]{12(17)} t$,

$\Delta = min(13-11,6,11,17-12) = 2.$

Бастамадан шыққан екі доға да қаныққан боп шықты. Алгоритм аяқталды. Максималды ағын $f_{max} = f(s,v_1) + f(s,v_2) = 13 + 11 = 24$ немесе $f_{max} = f(s,v_4) + f(s,v_2) = 10 + 14 = 24.$ Минималды қиынды $P = (S,T)$, мұндағы $S = \{s\}$, $T = \{v_1, v_2, v_3, v_4, t\}$ немесе $S = \{s, v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $T = \{t\}$.

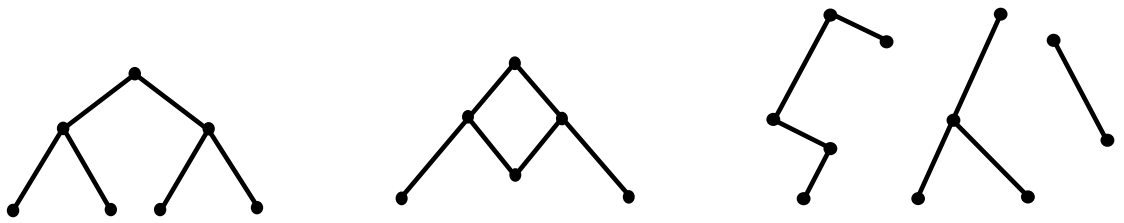
3.5 Ағаштар, орман, минималды діңгекті ағаштар

Ағаштар ұғымы математика мен информатика саласында кеңінен қолданылады. Бұл ең жиі кездесетін және графтың қарапайым классының бірі. Ағаштарды есептеулерде, ақпаратты сақтау әдісі ретінде, берілімдерді сұрыптау және іздеу құралы ретінде пайдаланады.

Ағаш деп циклі жоқ байланысқан *н*-граф, яғни тұзағы және еселі қабырғалары жоқ *н*-граф айтылады.

Орман деп циклі жоқ байланыспаған *н*-граф айтылады.
Сонымен, кез-келген орманның байланыстылық компонентасы ағаш болады.

М ы с а л 3.5.1 3.5.1 суретінде а) ағаш; б) бұл граф ағаш емес, циклі бар; в) үш ағаштан құралған орман.



а) ә) б)

3.5.1 сурет

Теорема(*). G – тұзақсыз n қабырғалы *н*-граф болсын. Келесі шарттар эквивалентті:

а) G – ағаш;

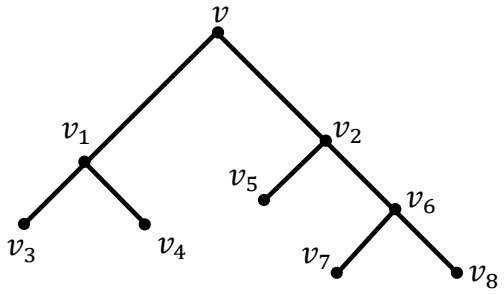
ә) G – $n-1$ қабырғасы бар байланысқан граф;

б) G – $n-1$ қабырғалы ациклдік граф;

в) G графының беттеспейтін екі төбесін жалғыз қарапайым шынжыр қосады;

г) G – ациклді граф, егер қандай–да бір сыбайлас емес төбелерін кез-келген ағашты оның қандай–да бір v төбесіне «іліп» қоюға болады, яғни v төбесін жоғарғы қабатқа, онымен сыбайлас төбелерді бір қабат төмен, т.с.с. орналастыру арқылы.

Бұл жағдайда v төбесі ағаштың *тамыры* деп аталады. Егер v төбесінің дәрежесі 1 болса ($\rho(v)$=1), онда ол жапырақ (соңғы, ілінген) деп аталады. 3.5.2 суретте v төбесі ағаштың тамыра; v_3, v_4, v_5,v_7 және v_8 төбелері - жапырақтар.



3.5.2 сурет

Әрбір тамыры бар бағытталмаған ағашқа сәйкес тамыры бар бағытталған ағаш анықтауға болады: мұндай ағаштың барлық қабырғалары тамырдан бағытталады және бұл бағыт жалғыз. Басқа төбе-тамырды таңдасақ, басқа орграф-ағаш шығады.

Егер тамыр таңдалынса, онда төбенің деңгейі деп тамырдан осы төбеге дейінгі жалғыз жол айтылады. Ағаштың биіктігі деп тамырдан жапыраққа дейінгі ең ұзақ жолдың ұзындығы айтылады. Жалпы келісім бойынша, тамыр жоғарыда орналасқан және барлық доғалар жоғарыдан төмен қарай бағытталған, сондықтан доғаның стрелкасын бейнелеудің қажеті жоқ. Сонымен, тамыр деңгейлі 0, ал қалған бірдей деңгейі төбелерді бір қабатта (яруста) бейнелеу қолайлы. Бағытталған ағаштар иерархиялық қатынастардың абстракциясы болғандықтан, келесі терминология жиі кездеседі:

1) u төбесінен қолжетерлік төбелер, осы төбенің ұрпақтары, ал u төбесі осы төбелердің бабасы деп аталады;

2) Егер ағашта (u, v) доғасы бар болса, онда u төбесі v төбенің ата – анасы (әкесі), ал v төбесі u төбенің ұлы деп аталады;

3) Егер u төбесі v_1 және v_2 төбелерінің ата –анасы болса, онда v_1 және v_2 ағайындылар;

4) Егер ағаштың төбелерінің шығу дәрежесінің ең үлкені m болса, онда ағаш m-арлы; $m = 2$ болғанда ағаш бинарлы делінеді;

5) Егер бинарлы ағашта ата –анасында екі ұл болса, онда біреуі сол, екіншісі оң ұлы болады; егер ұл біреу болса, онда ол не сол, не оң болады.

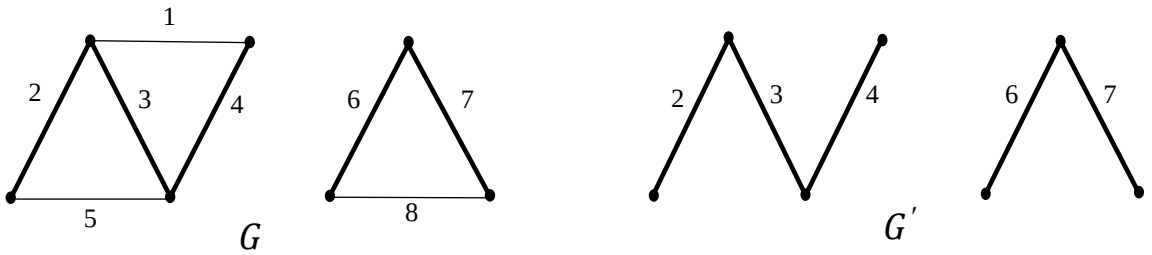
М ы с а л 3.5.2 3.5.2 суреттегі графты қарастырайық. Бұл бинарлы ағаш. v_6 төбесінің деңгейі 2–ке тең, v_8 төбесінің деңгейі 3–ке тең. Ағаш биіктігі 3 –ке тең. v_1 төбесі – v_3 және v_4 төбелерінің ата –анасы, v_3 – v_1 төбесінің сол ұлы, v_4 – оң ұлы, сонымен қатар v_3 және v_4 – ағайындылар. v_2 – v_5, v_6, v_7 және v_8 төбелерінің бабасы, ал v_5, v_6, v_7 және v_8 – v_2 – нің ұрпақтары.

Анықтама. $G = (V, E)$ *н*-графын қарастырайық, егер $V = V'$ және G'– G графының кез-келген байланыс компонентасында ағаш құрайтын орман болса, онда G графының $G' = (V', E')$ ішкі графы G графы үшін *діңгек* немесе *каркас* деп аталады.

Егер G байланысқан граф болса, онда G' діңгегі G графының *діңгекті ағашы* деп аталатын ішкі графы болып табылады. Әрбір графта діңгек болатыны анық: әрбір байланысқан компонентада циклді бұзсақ, яғни артық қабырғаларды алып тастасақ, діңгекті аламыз.

М ы с а л 3.5.3 Екі байланысқан компонентасы бар G графын қарастырайық. Қабырғалары цифрлармен берілген. G графының діңгегі ретінде 2, 3, 4, 6, 7 қабырғалы орманды алуға болады (цикл тудыратын 1, 5, 8 қабырғаларды алып тастадық).

Бұл мысалдан діңгек бірмәнді анықталмайтыны көрінеді. Мысалы, 3, 5, 6, қабырғаларды алып тастасақ, 2, 1, 4 және 7, 8 қабырғалы екі діңгек ағаштан тұратын орман болады.



3.5.3 сурет

Теорема. Кез-келген G н-графының діңгегін алу үшін алып тастау керек қабырғалар саны $m - n + c$ санына тең және ол қабырғаларды алып тастау ретіне тәуелсіз, мұндағы m – қабырғалар саны, n – төбелер саны, c – графтың байланыстық компоненталар саны.

Дәлелдеуі. C_i – G графының i-ші байланыстық компоненталар саны болсын ($i = \overline{1,k}$). C_i - дің n_i төбесі болсын. Онда теорема(*) бойынша оның K_i діңгек ағашының $(n_i - 1)$ қабырғасы болады.

Егер $m_i - C_i$ қабырғалар саны, $n_i - 1$ – K_i қабырғалар саны болса, онда C_i-ден K_i -ді алу үшін $m_i - (n_i - 1) = m_i - n_i + 1$ қабырға алып тастау керек. Барлығы k байланыстық компонентасы болғандықтан, G графының барлық байланыстық компоненталарынан алып тасталынған қабырғаларды қоссақ,

$$\sum_i^k (m_i - (n_i - 1)) = \sum_{i=1}^k m_i - \sum_{i=1}^k n_i + \sum_{i=1}^k 1 = m - n + к.$$

Анықтама. $v(G) = m - n + c$ саны G графының *цикломатикалық саны* (*цикломатикалық* рангі) деп аталады. $v^*(G) = n - k$ саны коциклдік ранг немесе коранг делінеді. Сонымен, $v^*(G)$– G графының кез келген діңгегіне енетін қабырғалар саны.

Салдар:

а) $v(G) = 0$ болғанда ғана G н-графы ағаш (орман) болады;

ә) $v(G) = 1$ болғанда ғана G н-графында бір ғана цикл болады.

Графтағы діңгек ағаш санын Кирхгоф матрицасы көмегімен табуға болады. Оны былай анықтауға болады: $K = (k_{ij})$, мұндағы

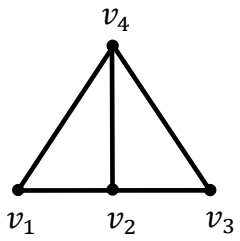
$$k_{ij} = \begin{cases} -1, \text{егер } v_i, v_j \text{ сыбайлас болса,} \\ 0, \text{егер } v_i, v_j \text{ сыбайлас емес болса,} \\ \rho(v_i), \qquad i = j. \end{cases}$$

$\rho(v_i)$ – v_i төбесінің дәрежесі.

Кирхгоф теоремасы. n $(n \geq 2)$ төбелі байланысқан графтағы діңгек ағаш саны Кирхгоф матрицасындағы кез келген элементтің алгебралық толықтауышына тең.

М ы с а л 3.5.4 - 3.5.4 суреттегі граф үшін төбелерінің дәрежелері $\rho(v_1) = \rho(v_3) = 2, \quad \rho(v_2) = \rho(v_4) = 3.$

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$ – Кирхгоф матрицасы.



3.5.4 сурет

Мысалы k_{11} элементтің алгебралық толықтауышы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8.$$

Сонымен, графта 8 діңгек ағаш бар.

Ең аз салмақты діңгекті ағашты табу

Өлшенген G графының діңгек ағашының *салмағы* діңгек ағаштың қабырғасына жазылған салмақтардың қосындысына тең.

G графының басқа кез-келген діңгегінің салмағынан кем немесе тең болатын салмақты G графының діңгегін *ең аз салмақты ағаш* деп аталады.

Ең аз салмақты діңгекті табу есебі қолданыстарға ие. Мысалы, электр байланыс жүйелерін, жолдарды, телеграф жүйелерін, авиа жүйелерін және т.б. жоспарлағанда туындайды. Берілген орталықтарды (төбелерді) қандай да бір байланыс жүйесімен (қабырғамен) былай жалғануы керек: екі орталық не тура (бір қабырғамен), не басқа орталықтар арқылы (шынжырмен) және байланыс каналының жалпы ұзындығы арқылы (немесе құны, немесе салмағы).

Ең аз салмақты діңгекті табудың екі әдісін қарастырайық.

Краскаль (Крускал) а*лгоритмі.*

$G = (V, E)$ графы берілген. $T = (V, E_{n-k})$ ағашын құрғанда цикл туындамайтындай етіп ең аз қабырғалар таңдап алынады:

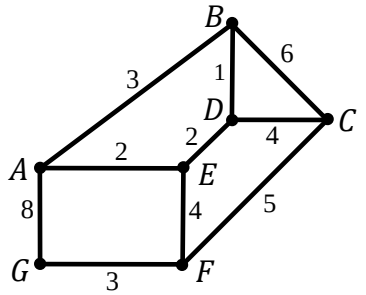
1. V төбелер жиынынан және ең аз салмақты e_1 төбесінен тұратын T_1 графын құрамыз (яғни $T_1 = (V, E_1)$, мұндағы $E_1 = \{e_1\}$).

2. Егер T_i графы құрылған болса және $i < \nu^* = n - k$, онда T_{i+1} графын құрамыз. Ол үшін T_i қабырғалар жиынына T_i-де жатпайтын, T_i-дегі

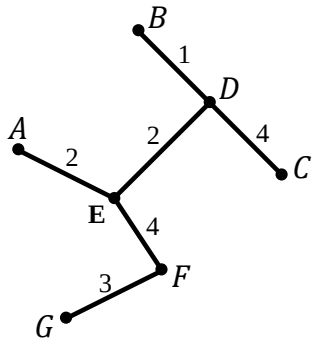
қабырғаларымен цикл құрмайтын ең аз салмақты e_{i+1} төбесін қосамыз (яғни $T_{i+1} = (V, E_{i+1})$, мұндағы $E_{i+1} = E_i \cup \{e_{i+1}\}$).

3. $i = v^* = n - k$ болғанда алгоритм аяқталады және $T_{n-k} = (V, E_{n-k})$ – ең аз салмақты діңгек, оның салмағы барлық қабырғаларының қосындысына тең.

М ы с а л 3.5.5 3.5.5 суретте G графы берілген. Ең аз салмақты діңгек ағашты және оның салмағын табу керек.



3.5.5 сурет



3.5.6 сурет

Шешуі:

а) $T_1 = (V, E_1)$, мұндағы $V = \{A, B, C, D, E, F, G\}$, $E_1 = \{\{B, D\}\}$;

ә) $T_2 = (V, E_2)$, $E_2 = \{\{B, D\}, \{E, D\}\}$;

б) $T_3 = (V, E_3)$, $E_3 = \{\{B, D\}, \{E, D\}, \{A, E\}\}$;

в) $T_4 = (V, E_4)$, $E_4 = \{\{B, D\}, \{E, D\}, \{A, E\}, \{G, F\}\}$;

г) $T_5 = (V, E_5)$, $E_5 = \{\{B, D\}, \{E, D\}, \{A, E\}, \{G, F\}, \{E, F\}\}$;

ғ) $T_6 = (V, E_6)$, $E_6 = \{\{B, D\}, \{E, D\}, \{A, E\}, \{G, F\}, \{E, F\}, \{C, D\}\}$.

Графтың төбелер саны $n = 7$, компоненталар саны k=1, қабырғалар саны $m = 10$, коранг $v^* = n - k = 7 - 1 = 6$. Сонымен діңгекте 6 қабырға болу керек, $v = m - n + k = 10 - 7 + 1 = 4$ қабырға алынып тасталынды. Алгоритм аяқталды, ең аз салмақты діңгек ағаш құрылды (3.5.6 сурет). Оның салмағы 1 + 2 + 2 + 4 + 3 + 4 = 16.

Айта кетелік, егер T жиынында бірден артық ағаш болса, онда екі ағашты қосатын бір қабырға табылады және цикл туындамайды. Қосылған қабырға – ең қысқа мүмкіндік (3.5.5 мысалында $\{E, F\}$ қабырғасы екі ағашты қосты).

Прим алгоритмі (немесе ең жақын көрші алгоритмі).

Бұл алгоритмнің Краскаль алгоритмінен өзгешелігі діңгек ағаш бастапқы ішкі ағашты кеңейту арқылы құрылады. Прим алгоритмі бойынша ең

аз салмақты діңгекті де, ең көп салмақты діңгекті табуға болады. Ол төмендегі формулаға минимум немесе максимумды табуымызға байланысты. Прим алгоритмі екі қадамнан тұрады. Ол n төбелі граф үшін $n-1$ рет қолданылады.

Өлшенген $G(V,E)$ графы берілсін, $w(v_i,v_j)$ - (v_i,v_j) қабырғасының салмағы. $\{V',V''\}$ - V төбелер жиынын екі қиылыспайтын ішкі жиындарға бөліктеуі болсын. V' және V'' арасындағы қадам бойынша ара қашықтықты келесі жолмен анықтайық:

$$d(V',V'') = min\{w(v_i,v_j)|v_i \in V', v_j \in V''\}.$$

1 қадам. Кез келген төбеден бастасақ болады, мысалы, v_1.

$$V' = \{v_1\},\ V'' = V \backslash V',\ E' = \varphi$$

болсын.

2 қадам. $v_i \in V', v_j \in V''$ және

$$w(v_i,v_j) = d(V',V'') = min\{w(v_i,v_j)|v_i \in V', v_j \in V''\}$$

болатындай (v_i,v_j) қабырғасын табамыз.

$$V' = V' \cup \{v_j\},\ V'' = V \backslash V',\ \ E' = E' \cup \{(v_i,v_j)\}$$

деп алайық.

3 қадам. Егер $V' = V$, онда $G'(V',E')$ – іздеген діңгек. Егер орындалмаса, онда екінші қадамға көшеміз.

Сол 3.5.5 мысалын қарастырайық. Бірақ Прим алгоритмін қолданып шешеміз: $V = \{A,B,C,D,E,F,G\}$. A төбесінен бастайық.

1 қадам. $V' = \{A\},\ V'' = \{B,C,D,E,F,G\},\ E' = \varphi$.

1-ші итерация.

2 қадам. $d(V',V'') = w(A,E) = 2,\ V' = \{A,E\},\ \ V'' = \{B,C,D,F,G\}, E' = \{(A,E)\}$.

3 қадам. $V' \neq V \rightarrow 2$ қадам.

2-ші итерация.

2 қадам. $d(V',V'') = w(E,D) = 2,\ \ V' = \{A,E,D\},\ \ V'' = \{B,C,F,G\}$, $E' = \{(A,E),(E,D)\}$.

3 қадам. $V' \neq V \rightarrow 2$ қадам.

3-ші итерация.

2 қадам. $d(V',V'') = w(D,B) = 1$, $V' = \{A,E,D,B\}$, $V'' = \{C,F,G\}$, $E' = \{(A,E),(E,D),(D,B)\}$.

3 қадам. $V' \neq V \to$ 2 қадам.

4-ші итерация.

2 қадам. $d(V',V'') = w(D,C) = 4$, $V' = \{A,E,D,B,C\}$, $V'' = \{F,G\}$, $E' = \{(A,E),(E,D),(D,B),(D,C)\}$

3 қадам. $V' \neq V \to$ 2 қадам.

5-ші итерация.

2 қадам. $d(V',V'') = w(E,F) = 4$, $V' = \{A,E,D,B,C,F\}$, $V'' = \{G\}$, $E' = \{(A,E),(E,D),(D,B),(D,C),(E,F)\}$.

3 қадам. $V' \neq V \to$ 2 қадам.

6-ші итерация.

2 қадам. $d(V',V'') = w(F,G) = 3$, $V' = \{A,E,D,B,C,F,G\}$, $V'' = \varphi$, $E' = \{(A,E),(E,D),(D,B),(D,C),(E,F),(F,G)\}$.

3 қадам. $V' = V \to G'(V',E')$ – ең аз салмақты діңгек, оның салмағы

$$w(G') = 2 + 2 + 1 + 4 + 4 + 3 = 16.$$

Алгоритм аяқталды. Әр қадамда сәйкес қабырға қосып, діңгек ағашты салуды бірден бастау жөн (3.5.9 сурет).

3.6 Графтарды бояу. Планарлық

$G(V,E)$ тұзақсыз *н*-граф болсын. Графтарды бояу деп оның төбелеріне сыбайлас екі төбе әртүсті болатындай етіп қандай да бір түсті (немесе натурал санды) береміз, (яғни егер (u,v) қабырға болса, онда u және v төбелері әртүсті). G графының $\chi(G)$ хроматикалық саны деп G графын бояуға кететін түстердің минималды саны айтылады.

Көптеген машықтану сабақтары графтарды бояуға келтіріледі: сабақ кестесін құру есептері, қондырғыларды орналастыру, географиялық картаны бояу және т.с.с.

Кейбір белгілі графтар үшін хроматикалық санды табу оңай, мысалы, $\chi(K_n) = n$, $\chi(\overline{K}_n) = 1$, $\chi(K_{m,n}) = 2$, $\chi(T) = 2$, мұндағы K_n– n төбелі толық

граф, $\overline{K}_n$– оның толықтауышы, $K_{m,n}$ – екі бөлікті граф, T– ағаш. Жалпы хроматикалық санды есептейтін формула жоқ. Бұл санның кейбір бағалары бар. Ең қарапайым бағаның түрі: $\chi(G) \leq deg(G) + 1$, мұндағы $deg(G)$ – G графының төбелерінің максималды дәрежесі.

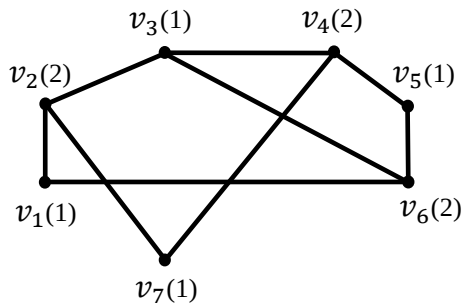
Хроматикалық санды есептейтін формула жоқ болғандықтан, минималды бояу табу есебін шығару қиын. Графты бояудың қарапайым алгоритмін келтірейік, жалпы жағдайда ол минималды бояуды қамтамасыз етпейді, бірақ соған жуықтайды.

Біртіндеп бояу алгоритмі.

1. G графтың кез келген v төбесін 1 түсімен бояйық.

2. Егер $v_1, v_2, \ldots, v_i$ төбелері k түстерімен боялған 1,2,…,k ($k \leq i$), онда алынған жаңа v_{i+1} төбесіне минималды түс беріледі, бұл түс қоршауындағы бояудан өзге болу керек, яғни $d(v_{i+1}, v_j) = 1, (j < i))$ болатын v_j төбелерінің жиыны. $S(v_{i+1})$ арқылы v_{i+1} төбесінің айналасын белгілейміз.

Мысал 3.6.1 3.6.1. суреттегі графтың хроматикалық санын бағалап, табу керек. Оны біртіндеп бояу алгоритмі бойынша бояу керек.



3.6.1 сурет

$deg(G) = 3$ графының төбелерінің максималды дәрежесі, сондықтан $\chi(G) \leq 3 + 1 = 4$.

Біртіндеп бояу алгоритмі:

а) v_7 төбесін таңдап алып, оны 1 түсімен бояймыз. Суретте төбенің жанына түсін көрсетеміз. v_7 айналасында: $S(v_7) = \{v_2, v_4\}$.
v_2 және v_4 төбелерін 2 түсіне бояймыз;

ә) v_3 төбесін таңдап аламыз: $S(v_3) = \{v_2, v_4, v_6\}$. v_2 және v_4 төбелері 2 түсіне боялған, v_6 боялмаған. v_3 төбесінің айналасына қолданылмаған минималды түс 1 болады, сондықтан v_3-ті 1 түсіне бояймыз;

б) $S(v_5) = \{v_4, v_6\}$. v_4 төбесі 2 түсіне боялған, v_6 боялмаған, сондықтан v_5 үшін 1 түсін таңдаймыз;

в) $S(v_6) = \{v_1, v_3, v_5\}$, v_3 және v_5 төбелері 1 түсіне боялған, v_1 боялмаған, сондықтан v_6-ті 2 түсіне бояймыз;

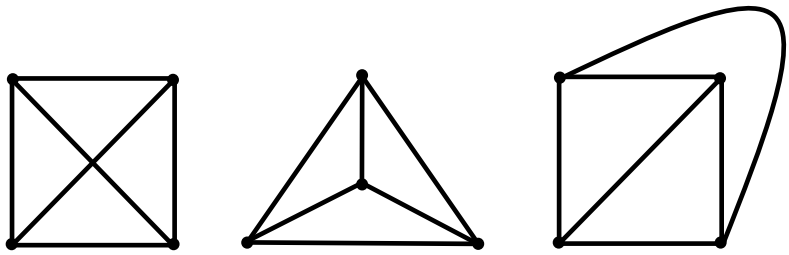
г) $S(v_1) = \{v_2, v_6\}$, v_2 және v_6 төбелері 2 түсіне боялған, сондықтан v_1-ге 1 түсіне бояймыз.

Сонымен, графты екі түске боядық. Бұл бояу минималды, сондықтан $\chi(G) = 2$.

Планарлық және жазық графтар

Егер графтың төбелері – жазықтықта жатқан нүктелер, ал қабырғалары – жазық сызықтар, ешбір қабырғалардың өздеріне инцидентті төбелерден басқа ортақ нүктелері жоқ болса, онда н-граф жазық деп аталады. Жазық графқа изоморфты граф планарлы деп аталады. Бұл жағдайда планарлы граф жазықтыққа жатқызылды дейді.

М ы с а л 3.6.2 Граф K_4 (3.6.2 а) сурет) планарлы болады, себебі оны жазықтыққа жатқызуға болады. 3.6.2 суретінде б) және ә) жазық графтар кескінделген, олар K_4-ның жазық жатқызылған түрін көрсетеді.



а) ә) б)

3.6.2 сурет

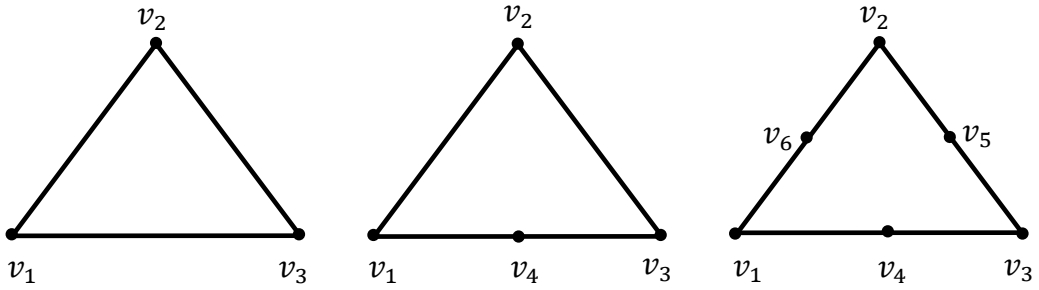
Графты жазықтыққа орналастыру мүмкіндігі туралы мәселесі әртүрлі есептерде кездеседі. Мысалы, пластинаға енгізілген өте кішкентай микросхемалардың қабатынан тұратын интегралдық микросхемаларды дайындауда қолданылады. Және де өткізгіштердің қиылысуға болмайтындығын ескеру керек. Тағы бір мысал темір жол немесе басқа тораптарды жобалау, мұнда да олардың қиылысуға болмайтындығы ескеріледі.

н-графтардың барлығы планарлы бола бермейді. Планарлықтың критериін енгізу үшін гомеоморфты графтар ұғымын енгізейік.

$G(V, E)$ графында $\{v_1, v_2\}$ қабырғасы болсын, ал $G'(V', E')$ графында G графына жаңа v төбесін V жиынына қосып, $\{v_1, v_2\}$ қабырғасын $\{v_1, v\}$ және

$\{v, v_2\}$ қабырғаларымен ауыстырғанда алынған болсын. Бұл қисап G графындағы қабырғаны бөлікшелеу, ал G' графын G графының кеңейтілу қисабы деп атайды. Егер графтарды бір G графынан біртіндеп қабырғаларын бөлікшелеу арқылы алуға болса, онда G' және G'' графтары *гомеоморфты* делінеді.

Мысал 3.6.3 3.6.3 суретінде G' және G'' графтары G графының кеңейтілуі болып табылады, сондықтан бұл графтар гомеоморфты.



3.6.3 сурет

Графтардың планарлығының критерийі келесі теоремада келтірілген.

Теорема (Понтрягин-Куратовский). Егер графтың K_5 және $K_{3,3}$-терге гомеоморфты ішкі графтары болмаса ғана ол планарлы болады.

Графтардың планарлығының басқа эквивалентті критерийі: K_5 немесе $K_{3,3}$ графына созылатын (яғни қабырғалармен қосылған төбелерді тізбектей теңестірумен алынған) ішкі графтар жоқ граф планарлы бола алады.

Кей жағдайларда келесі сұрақтарға жауап беру керек:

а) граф планарлы бола ма?

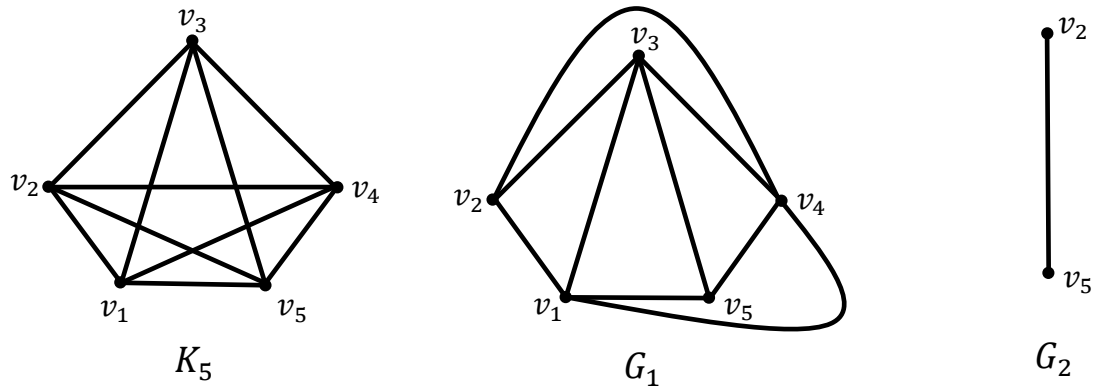
ә) егер болса, онда оны жазықтыққа қалай жатқызуға болады?

Бірінші сұраққа Понтрягин-Куратовский теоремасы жауап береді, практикада оны қолдану оңай емес. Екінші сұраққа жауапты әртүрлі кітаптардан табуға болады, мысалы, графты жазық жатқызудың бір әдісі С.Д.Шапоревтің кітабында [6], 160 бетте келтірілген.

Егер граф планарлы болмаса, онда оның кейбір қабырғаларын алып тастап (яғни оларды басқа жазықтыққа көшіру арқылы), планарлы граф алуға болады. Графтан жазық кескінін алу үшін алып тастау керек қабырғалардың минималды санын G графының планарлы саны деп атайды (белгіленуі $sk(G)$). Егер осы қабырғаларды басқа жазықтыққа көшіргенде граф планарлы емес болса, онда алшақ орналасқан қабырғаларды келесі жазықтыққа көшіреді және

т.с.с. G графы $G_1, G_2, \ldots, G_m$ жазық бөліктеріне бөліну үшін жазықтықтардың m минималды саны графтың қалыңдығы деп атайды (белгіленуі $t(G)$).

М ы с а л 3.6.4 Кез келген планарлы графтың қалыңдығы 1-ге тең; K_5 графтың планарлығының саны $sk(K_5) = 1$. Оның қалыңдығы $t(K_5) = 2$. Расында K_5 графынан планарлы граф алу үшін 1 қабырғасын алып тастау керек. 3.6.4 суретінде G_1 және G_2 графтары - K_5 графының жазық бөліктері.



3.6.4 сурет

Жазық графтарды бояу графтар теориясындағы белгілі мәселелердің бірі боп есептелінеді. Ол географиялық картаны бояудан туындады: кез келген екі көрші ел әртүрлі түске боялу керек. Картаны бояу үшін бес бояу жеткілікті, ал үш – жоқ. Осыдан төрт бояу гипотезасы шықты: кез келген планарлы граф 4-боялынады. Көп жылдар бойы төрт бояу проблемасы шешілмеді. 1890 жылы Р.Д. Хивуд кез келген жазық бес түсті қолданып бояуға болатынын дәлелдеді., яғни келесі теорема дәлелденді: кез келген планарлы графты бес бояумен бояуға болады.

4 Комбинаторика элементтері

4.1 Қосу және көбейту ережелері

Комбинаторика – жиындардың, көбіне ақырлы жиындардың ішкі жиындарын құру есептерін шешетін математика бөлімі. Бұл ішкі жиындар (не таңдау, не комбинация, не комбинаторлық конфигурациялар) белгілі ережелер бойынша құрылады. Комбинаториканың мақсаты комбинаторлық конфигурациялардың бар болу шарттарын зерттеу, оларды құру алгоритмдерін зерттеу, осындай алгоритмдерді оңтайландыру болып табылады.

Комбинаторлық әдіспен шешілетін кейбір заманауи есептер:

а) комбинаторлық конфигурациялар саны туралы сұраққа тізімдеу есептері;

ә) маршруттар туралы есеп – қолайлы жоспарды табу, мысалы, ең қысқа жол;

б) графтар теориясының комбинаторлық есептері – жүйелік жоспарлау есептері, графтарды бояу есептері және т.с.с.

Комбинаторлық конфигурациялардың қарапайым мысалдары: орын ауыстыру, орналастыру, теру және бөліктеу. Оларды есептеуде келесі ережелер қолданылады.

1. *Қосу ережесі*

Егер қандай да бір ақырлы жиынның A ішкі жиынын (ол бір ғана элементтен тұруы мүмкін) n тәсілмен, ал B ішкі жиынын (A≠B) басқа m тәсілмен таңдауға болса, онда A немесе B таңдауын $n+m$ әдіспен жасауға болады.

Бұл ережені жиындар теориясының терминдерімен де айтуға болады: Егер жиындар қуаты (яғни ақырлы жиынның элементтер саны) сәйкес $|A|=n$, $|B|=m$ болса, онда $|A\cup B|=n+m-|A\cap B|$; ал $A\cap B=\emptyset$ жағдайында $|A\cup B|=n+m$.

2. *Көбейту ережесі*

Егер қандай да бір ақырлы жиынның A ішкі жиынын (ол бір ғана элементтен тұруы мүмкін) n тәсілмен таңдап алса және осындай таңдаудан кейін B ішкі жиынын m тәсілмен таңдауға болса, онда A және B тізбектелген таңдауды $n\cdot m$ әдіспен жасауға болады.

Жиындар теориясының терминдерімен: егер $|A|=n$, $|B|=m$, онда $|A\times B|=n\cdot m$, мұндағы $A\times B-A$ және B жиындарының тура көбейтіндісі.

М ы с а л 4.1.1. Сыныпта 14 қыз бала және 10 ер бала бар. Қанша әдіспен бір жынысты екі оқушыны таңдап алуға болады?

Шешуі: көбейту ережесі бойынша екі қыз баланы $14 \cdot 13 = 182$ тәсілмен, ал екі ер баланы $10 \cdot 9 = 90$ тәсілмен таңдауға болады. Бір жынысты екі оқушыны таңдау керек болғандықтан, яғни не екі қыз бала, не екі ер бала, онда қосу ережесі бойынша мұндай тәсілдер саны $182 + 90 = 272$.

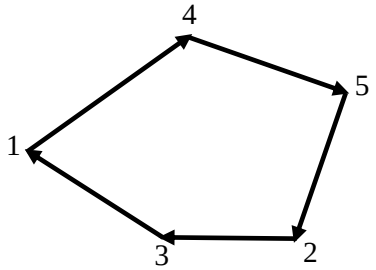
4.2 Орын ауыстыру, орналастыру және теру

Ақырлы жиынның элементтерінен әртүрлі комбинаторлы конфигурацияларды құру тәсілдерінің санын есептеуге байланысты есептерін қарастырамыз.

Анықтама. A жиыны n элементтен тұрсын ($|A| = n$). A жиынның элементтерінің орын ауыстыру деп осы n элементінен тұратын кез келген кортеж (яғни реттелген жиын) айтылады.

Сонымен, орын ауыстыру бір бірінен тек енетін элементтер ретімен ерекшеленеді.

Кейбір оқулықтарда ([3], 87 бет) орын ауыстыруды өзара бірмәнді функция ретінде анықтайды $f: A \to A$. Егер $|A| = n$, онда $A = \{1,2,\ldots,n\}$ деп есептеуге болады және орын ауыстыруды кестемен берген ыңғайлы. Мысалы, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $(n = 5)$. Бұл кесте алмастыру (қойылым) делінеді. Мәні бойынша, алмастыру және орын ауыстыру бірдей. Әрбір осындай алмастыруға сәйкес граф қоюға болады. Жоғарыда келтірілген f алмастыруына 4.2.1 суретіндегі граф сәйкес келеді.



4.2.1 сурет

n элементтен орын алмастырулар санын былай белгілейді: P_n.

$P_n = n!$ (n факториал, $n! = 1 \cdot 2 \ldots (n-1) \cdot n$, анықтама бойынша $0! = 1$, $1! = 1$).

Расында, кортеждегі бірінші орынға n элементің кез келгенін қоя аламыз, екіншіге – қалған $(n-1)$ - ден, үшіншіге – қалған $(n-2)$ - ден кез келгенін және т.с.с. Соңғы орынға бір элемент қана қалады.
Сондықтан

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 2 \cdot 1 = n! \,.$$

М ы с а л 4.2.1 $A = \{a, b, c\}$ жиынының элементтерінен әртүрлі орын ауыстыру құру керек; олардың санын есептеу керек.

Шешуі:

$|A| = n = 3$. Жоғарыда келтірген формуладан: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Расында, келесі орын ауыстыру орынды: $(a, b, c), (c, a, b), (b, c, a)$, $(b, a, c), (c, b, a), (a, c, b)$.

Анықтама. A жиыны n элементтен тұрсын $(|A| = n)$ және $m \leq n$.
n элементтен m бойынша орналастыру деп A жиынының m қос-қостан әртүрлі элементтерінен тұратын кез келген кортежі айтылады.

Сонымен, орналастыру бір бірінен элементтерімен, не олардың орналасу ретімен ерекшеленеді.

n элементтен m бойынша орналастыру саны былай белгіленеді: A_n^m. Дәлелденген:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2) \ldots (n-m+1).$$

Расында, әрбір орналастыруды құру үшін n элементтен m элемент таңдап алып, оларды реттеу керек. Бірінші орынға n элементтің кез келгенін қоюға болады (яғни бірінші орынды n тәсілмен жабуға болады), екінші орынға – кез келген қалған $(n-1)$ элементтерді және т.с.с. Бірінші орыннан $(m-1)$ – ге дейін орынды толтырғаннан кейін $n-(m-1) = n-m+1$ элемент қалады, олардың арасынан соңғы орынға элемент таңдалынады. Сонымен, көбейту ережесі бойынша $n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$, n элементтен m элемент таңдап алудың тәсілі бар екен, яғни

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).$$

М ы с а л 4.2.2 $A = \{a, b, c\}$ жиынының элементтерінен екіден әртүрлі орналастыру құру керек; олардың санын есептеу керек.

Шешуі:

$|A| = n = 3, \quad m = 2. \quad A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 3 \cdot 2 = 6.$ Расында, мұндай орналастырулар алтау: $(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)$.

Анықтама. A жиыны n элементтен тұрсын ($|A| = n$) және $m \leq n$. n элементтен m бойынша теру деп A жиынының m элементтен тұратын кез келген ішкі жиыны айтылады.

Сонымен, теру бір бірінен ең болмағанда бір элементімен ерекшеленеді.

n элементтен m бойынша теру саны былай белгіленеді: C_n^m. Оңай дәлелденетін өрнек

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \ldots m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Расында, n элементтен m бойынша орналастыру санын (A_n^m) былай да табуға болады: A жиынының n элементінен m элементін таңдауды C_n^m тәсілмен (анықтама бойынша теру) табуға болады; содан соң табылған m элементтен тұратын теруде барлық мүмкін орын ауыстырулар жасау керек. Мұны P_m тәсілмен табуға болады. Көбейту ережесі бойынша $A_n^m = C_n^m \cdot P_m$, бұдан $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$.

C_n^m сандарының кейбір қасиеттерін білген жөн:

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$;

2) $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$;

3) $C_0^0 = C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = n$;

4) C_n^m сандарын биномдық коэффициенттер деп атайды. Расында, Ньютон биномы формуласы мынадай түрде болады

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^n a^0 b^n.$$

Бұл формуладан тағы бір қасиетін алуға болады C_n^m: егер $a = b = 1$ болса, Ньютон биномы формуласы теңдікке айналады $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

М ы с а л 4.2.3 $A = \{a, b, c\}$ жиынының элементтерінен екіден әртүрлі теру құру керек; олардың санын есептеу керек.

Шешуі:

$|A| = n = 3, m = 2.$

$C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3.$

Расында, мұндай терулер үшеу: $(a, b), (a, c), (b, c)$.

4.3 Қайталанатын орналастыру, теру және орын ауыстыру

n элементтен m элемент таңдағанда орналастыру мен теру құрғанда элементтер берілген жиынға қайтарылмауы да мүмкін (жоғарыда көрсетілгендей), қайтарылуы да мүмкін. Соңғы жағдайда қайталанатын орналастыру және қайталанатын теру туралы сөз болады.

Анықтама. A жиыны n элементтен тұрсын ($|A| = n$) және $m \leq n$. A жиынының n элементтен m бойынша қайталанатын орналастыру деп A жиынының m элементінен тұратын кортеж айтылады.

Сонымен, қайталанатын орналастыру бір бірінен не элементімен, не олардың орналасу ретімен, не элементтерінің қайталану санымен айрықшалануы мүмкін.

n элементтен m бойынша қайталанатын орналастыру саны былай белгіленеді: $\overline{A}_n^m$. Дәлелденген: $\overline{A}_n^m = n^m$. Расында, A жиыны n элементтен тұрсын және $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ оның кортеждерінің бірі болсын (қайталанатын орналастыру). Бұл орналастырудың әрбір элементі екі басқа орналастырларда қайталанады, яғни кортеждің әрбір орнына A жиынның n элементінің әрқайсысы үміткер. Сондықтан n элементтен m бойынша қайталанатын орналастыру саны

$$\overline{A}_n^m = \underbrace{n \cdot n \ldots n}_{m} = n^m.$$

М ы с а л 4.3.1 $A = \{a, b, c\}$ жиынының элементтерінен екіден қайталанатын орналастыру құру керек; олардың санын есептеу керек.

Шешуі:

$|A| = n = 3, m = 2$. $\overline{A}_3^2 = 3^2 = 9.$

Расында, бұл келесі орналастыру:

$$(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, a), (b, c), (c, c), (c, a), (c, b).$$

Анықтама. A жиынының n элементтен m бойынша қайталанатын теру деп A жиынының m элементінен кез келген ішкі жиыны айтылады және де бір элемент қайталануы мүмкін.

Сонымен, қайталанатын теру бір бірінен ең болмағанда бір элементімен ерекшеленеді, бірақ олардың әрбірінде кез келген элемент қайталануы мүмкін.

n элементтен m бойынша қайталанатын теру саны былай белгіленеді: $\overline{C}_n^m$. Дәлелденген:

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m.$$

М ы с а л 4.3.2 $A = \{a, b, c\}$ жиынының элементтерінен екіден қайталанатын теру құру керек; олардың санын есептеу керек.

Шешуі:

$$|A| = n = 3, \qquad m = 2. \qquad \overline{C}_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6.$$

Бұл келесі теру:

$$(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c).$$

Анықтама. n элементті жиында m әртүрлі элементтер бар болсын. Және де бірінші элемент n_1 рет, екінші - n_2 рет және т.с.с, m-ші элемент n_m рет қайталанылады: $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$. Берілген n элементті жиынның орын ауыстыруын n элементтен қайталанатын орын ауыстыру деп атайды.

n элементтен m бойынша қайталанатын орын ауыстыру саны былай белгіленеді: $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_m)$. Дәлелденген:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_m!}\ .$$

М ы с а л 4.3.3 1, 1, 2, 4 цифрларынан қанша әртүрлі төрт таңбалы сандар құруға болады.

Шешуі:

Берілген жиын төрт цифрдан тұрады ($n = 4$), олардың арасында 1 екі рет қайталанады: $n_1 = 2$; 2 – бір рет: $n_2 = 1$, 4 - бір рет: $n_3 = 1$. Жоғарыда көрсетілген формула бойынша 1,1,2,4 цифрларынан төрт таңбалы сандар саны

$$P_4(2,1,1) = \frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2} = 12\ .$$

4.4 Бөліктеу. Туындаушы функция ұғымы

A жиыны n элементтен тұрсын, $|A| = n$. $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ – A жиынының k ішкі жиынға бөліктеуі болсын (бөліктеу анықтамасы 6 бетте), $|A_i| = m_i$, $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$. $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ кортежін A жиынының k ішкі жиынға реттелген бөліктеу дейміз. $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ реттелген бөліктеу санын былай белгілейміз: $C(n; m_1, m_2, \ldots, m_k)$, мұндағы $|A_i| = m_i$, $i = 1,2, \ldots, k$. Дәлелденген:

$$C(n; m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \ldots m_k!}$$

М ы с а л 4.4.1 Жатақханада 3 бөлме бос қалды: 6, 4 және 2 адамдық. 12 студентті осы бөлмелерге қанша әдіспен орналастыруға болады?

Шешуі:

$n = 6 + 4 + 2 = 12, \quad m_1 = 6; \quad m_2 = 4, \quad m_3 = 2.$

Жоғарыда келтірілген формула бойынша орналастыру әдісінің саны:

$$C(12; 6,4,2) = \frac{12!}{6! \cdot 4! \cdot 2!} = 13860\,.$$

Туындаушы функция ұғымы

Комбинаторика есептерін шешуде теориялық және машықтану тұрғысынан дамыған әдістердің бірі туындаушы функция әдісі болып табылады. Ол әдіс математикалық талдаудың кейбір бөлімдерін, нақтырақ айтқанда, функционалдық қатарлар теориясын қолдануды талап етеді.

Бұл әдістің идеясы: қандай да бір $\{a_i\} = a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ сандық тізбек және $\{\varphi_i(x)\} = \varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ функциялар тізбегі берілген болсын.

$$F(x) = \sum_i a_i \varphi_i(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots$$

қатарын құрамыз. $F(x)$ функциясы $\{\varphi_i(x)\}$ берілген тізбекке қатысты $\{a_i\}$ тізбегі үшін туындаушы функция деп аталады. Белгіленуі $\varphi_i(x) = x^i$ немесе $\varphi_i(x) = x^i/i!$.

Көп жағдайларда туындаушы функцияларды қолдану қолайлы және ықшам. Олар басқа әдістерге қарағанда $\{a_i\}$ тізбектерінің қасиеттерін анықтауға мүмкіндік береді. Туындаушы функциялар, жалпы комбинаторика

әдістері ықтималдықтар теориясында кең қолданысқа ие, мұнда нәтижелер саны ақырлы кездейсоқ оқиғалар қарастырылады. Туындаушы функциялардың ықтималдықтар теориясында қолданылуын мысалмен көрсетейік.

М ы с а л 4.4.2 Ньютон биномы формуласы бойынша

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i.$$

Сондықтан биномдық тізбектің коэффициенттері $\{C_n^i\} = C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ үшін туындаушы функция – $F(x) = (1+x)^n$.

М ы с а л 4.4.3 $\{a_i\} = \{a^i\}$, $\{\varphi_i(x)\} = \{x^i\}$, $i = 0,1,2,\ldots$ болсын. Сонда

$$\sum_i a_i \varphi_i(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a^i x^i = 1 + ax + a^2x^2 + \ldots + a^n x^n + \ldots$$

– бұл шексіз геометриялық прогрессия мүшелерінің қосындысы, айырымы $q = ax$. Егер $|q| = |ax| < 1$, онда соңғы қатар жинақты және оның қосындысы

$$S = \frac{1}{1-ax}.$$

Сонымен

$$\frac{1}{1-ax} = 1 + ax + a^2x^2 + \ldots + a^n x^n + \ldots,$$

сондықтан функция

$$F(x) = \frac{1}{1-ax}; \ \{a^i\} = 1, a, a^2, \ldots$$

тізбегі үшін туындаушы функция болады.

М ы с а л 4.4.4 – Ықтималдықтар теориясынан мысал: n тәуелсіз сынақтар жүргізілсін. Әрбір сынақта A оқиғасының пайда болуы әртүрлі: біріншіде - p_1, екіншіде - p_2, …, n-шіде - p_n; сәйкес $q_1, q_2, \ldots, q_n$ - A оқиғасының пайда болмау ықтималдықтары; $P_n(k)$ - n сынақта A оқиғасының k рет пайда болуы ықтималдығы. Айта кетелік, егер әрбір сынақта A оқиғасының пайда болуы бірдей болса, $P_n(k)$ ықтималдығы Бернулли формуласы бойынша есептелінеді. Біздің жағдайда бұл ықтималдық туындаушы функция көмегімен анықталады. $P_n(k)$ ықтималдықтарының туындаушы функциясы деп

$$\varphi_n(z) = (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2)\ldots(p_n z + q_n)$$

функциясын айтады. $P_n(k)$ ықтималдығы туындаушы функцияның z дәрежесі бойынша жіктеуіндегі z^k–нің коэффициентіне тең. Мысалы, $n = 2$ болғанда

$$\varphi_2(z) = (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2) = p_1 p_2 z^2 + (p_1 q_2 + p_2 q_1)z + q_1 q_2.$$

z^2–нің коэффициенті оқиғасы екі сынақта екі рет кездесу ықтималдығына тең: $P_2(2) = p_1 p_2$;

z^1 –нің коэффициенті A оқиғасы екі сынақта бір рет кездесу ықтималдығына тең: $P_2(1) = p_1 q_2 + p_2 q_1$;

z^0–нің коэффициенті (яғни бос мүше) A оқиғасы екі сынақта бір рет те кездеспеу ықтималдығына тең: $P_2(0) = q_1 q_2$.

Егер әртүрлі сынақтарда әртүрлі оқиғалар пайда болғанда бұл функцияны қолдануға болады: бірінші сынақта A_1 оқиғасы, екіншіде – A_2, т.с.с. Онда z-ң әртүрлі дәрежесіндегі коэффициенттерінің түсініктемесі ғана өзгереді. Сонымен, жоғарыда келтірілген жіктеудегі z^2-ң коэффициенті – $p_1 p_2$. Ол A_1 және A_2 екі оқиғасының бірмезгілде пайда болу ықтималдығын білдіреді.

Ықтималдықтар теориясында туындаушы функцияны басқаша анықтауға болады. Мысалы, дискретті кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамаларының теріс емес мәндерін анықтау мақсатында туындаушы функция былай таңдалынады:

$$\varphi(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n + \ldots,$$

мұндағы $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ – X кездейсоқ шамалардың 0,1,2,3,… мүмкін мәндерінің сәйкес ықтималдықтары. Математикалық үміт:

$$M(X) = \varphi'(1);$$

Математикалық дисперсия:

$$D(X) = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2$$

екендігін оңай көрсетіге болады.

5 Жасырымдылық теориясының элементтері

5.1 Жасырымдылық теориясының пәні. Мысалдар.

Жасырымдылық – бұл ақпаратты беру жүйесі. Мысалы:

1) Тікбұрышты декарттық координаталар жүйесі – бұл геометриялық объектілерді сандармен беру (жасырымдылық), яғни нүктеге сандар жұбы– оның координаталары сәйкес келеді, сызықтар – оның теңдеуі және т.с.с.;

2) Ондық санама жүйесі – бұл сандарды беру (жасырымдылық) әдісі, мысалы әрбір натурал санға $n \in N$ мынадай

$$a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0$$

тізбегі сәйкес қойылады:

$$n = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 ,$$

$a_i \in \{0,1,,2,\dots,9\}$, $i = \overline{0,1,\dots,m}$; сандарды жасырымдылықтың басқа тәсілі – рим цифрлары;

3) әскери мақсатта құпия ақпаратты да кодтайды, оны шифрлайды және дешифрлайды. Бұл жағдайда өз кодтарын қорғау және өзгенікін бұзу мәселесі туындайды. Бұл мәселелермен жасырымдылық теориясының бөлімі – крипондалогия айналысады.

Сонымен, жасырымдылық адамзат қызметінде кеңінен бұрыннан қолданылуда. Егер ол ертеректе қосалқы роль атқарса, компьютерлердің пайда болуымен бағдарламалаудың барлық машықтану есептерін шешуде орталық сұраққа айналды. Мысалы:

1) компьютер жадына ерікті сипаттағы деректерді ұсыну;
2) ақпаратты бөгде адамдардан қорғау;
3) берілімдер базасында ақпаратты қысу және т.с.с.

Жасырымдылықтың математикалық берілуі, негізгі ұғымдары және қасиеттері

Қандай да бір символдардың алфавиттер деп аталатын екі ақырлы жиындары берілген болсын $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ және $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$. Олардың элементтері әріптер деп аталады. Алфавиттегі әріптер тізбегі сөздің ұзындығы деп аталып, $|\alpha| = k$ немесе $k = l(\alpha)$ деп белгіленеді. Егер $k = 0$, онда сөз бос делінеді, белгіленуі: $\wedge$ немесе ε. A алфавитіндегі бос емес сөздер жиынын былай белгілейміз A^*, B алфавитіндегіні - B^*.

$f: A^* \to B^*$ функциясы немесе бейнелеуі берілсін, анықталу облысы $f: D(f) = S,\ S \subset A^*$. S –тен сөздер хабарлама, ал $\beta = f(\alpha)$ сөзі α хабарламасының коды делінеді, мұндағы $\alpha \in S,\ \beta \in B^*$, α сөзінен β сөзіне көшу процессі, яғни f жасырымдылық деп аталады. $\beta \in B^*$ сөзін $\alpha \in A^*$ сөзіне кері түрлендіру процессі, яғни f^{-1} кері функциясы (егер ол бар болса) декодтау делінеді. Егер B жиын қуаты m – ге тең болса, ($|B| = m$), онда f функциясы m –ретті жасырымдылық делінеді. Кең таралған жағдай $B = \{0,1\}$, яғни екілік жасырымдылық.

Жасырымдылық есептерінің берілгені: A және B алфавиттерінің, S жиынының берілімдері бойынша белгілі бір қасиеттерге ие f жасырымдылығын табу керек.

Жасырымдылықтан талап етілетін негізгі қасиеттері:

1) декодтаудың бар болуы, яғни α хабарламасының β коды бойынша α–ны қалпына келтіру мүмкіндігі. Басқаша айтқанда, жасырымдылықтың бірмәнділігі, егер $\alpha_1 \neq \alpha_2$, онда $f(\alpha_1) \neq f(\alpha_2)$;

2) кедергіге төзімді немесе қателерді түзету, яғни ақпараттарды жеткізу барысында қателерді түзететін немесе табатын кодтарды қолдану;

3) жасырымдылықтың және декодтаудың берілуінің күрделілігі немесе қарапайымдылығы. Мысалы, криптография шифрларды жасау мен ашумен айналысады. Егер шифрды ашу, оны құруға қарағанда қиын болса, шифр сенімді деп есептелінеді.

Жоғарыда келтірілген есеп үшін S хабарлама жиынының сипатының үлкен мәні бар. Бірдей алфавитті A, B және f жасырымдылығы үшін S–ті сипаттаудың әртүрлі әдістері қолданылады: мысалы, $S = \{\alpha | \alpha \in A^* \wedge |\alpha| = n\}$, яғни теориялық-жиындық сипаттау; ықтималдылық сипаттау, мысалы, $S = A^*$ және хабарламада a_i әріптерінің пайда болу ықтималдығы p_i берілген болсын, мұнда $\sum_i^n p_i = 1$ және т.с.с.

Кодтардың әртүрлі түрлері бар (алфавиттік жасырымдылық, қолайлы, кедергіге төзімді, Хемминг коды, сызықты кодтар, блокты жасырымдылық және т.с.с.). Кодты таңдау әдісі берілген есепте жасырымдылыққа қойылған талаптарға байланысты.

Ең қарапайымы - алфавиттік жасырымдылықты қарастырайық, оны бос емес алфавиттерде енгізуге болады.

5.2 Алфавиттік жасырымдылық

f жасырымдылығын әртүрлі жолмен іске асыруға болады: S ақпараттар жиынын бір бүтін деп қарастыруға және оған қандай да бір код сәйкес қоюға болады. Немесе S–ті бөліктерге бөліп, әрбір бөлікті жасыруға болады. Ең қарапайым жағдай – бұл хабарламаның элементар бөлігі A алфавитінің бір әріпі болатын жағдай. Мұндай жасырымдылық алфавиттік (немесе әріп бойынша) деп аталынады.

Алфавиттік жасырымдылық сұлбамен (немесе кестемен) беріледі, ол Σ немесе σ деп белгіленіп, былай жазылады:

$$\Sigma = \langle a_1 \to \beta_1, \dots, a_n \to \beta_n \rangle = \langle a_i \to \beta_i \rangle_{i=1}^{n},$$

мұндағы $a_i \in A,\ \beta_i \in B^*,\ i = 1,2,\dots,n$ немесе

$\Sigma =$

a_1	a_2	$\dots$	a_n
β_1	β_2	$\dots$	β_n

A алфавитінің $V = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ кодтар жиыны элементар кодтар жиыны, ал $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ сөздері элементар кодтар немесе код сөздері деп аталады.

Сонымен, кез келген сөз келесі жолмен кодталады:

$f\colon\ A^* \to B^*,\ \alpha = a_{i1}a_{i2}\dots a_{ik} \in A^*,$

$f(\alpha) = f(a_{i1})f(a_{i2})\dots f(a_{ik}) = \beta_{i1}\beta_{i2}\dots\beta_{ik} = \beta \in B^*.$

Жасырымдылықтағы ең негізгі сұрақ өзара бірмәнділік болып табылады, яғни α хабарламасының β коды бойынша бірмәнді α-ны қалпына келтіру. Бірнеше анықтама енгізейік:

1. Егер $\beta = \beta'\beta_{i1}\beta_{i2}\dots\beta_{ik}\beta''$, онда β' - β сөзінің бастамасы немесе префиксі, ал β'' соңы немесе постфиксі делінеді; екі сөзді қосуға болады, ол үшін екінші сөздің префиксі бірінші сөздің постфиксі соңында жүру керек және егер екі сөздің бірі бос емес болса, жаңа сөзде олар статустарын жоғалтады.

2. Σ алфавиттік жасырымдылық сұлбасы префикс қасиетіне ие (немесе префиксті) делінеді, егер ешбір элементар код екінші элементар кодтың префиксі болмаса, мысалы:

а)

$\Sigma =$

a_1	a_2	a_3
01	011	10

сұлбасы префиксті болмайды, себебі $\beta_1 = 01$ элементар коды $\beta_2 = 011$ элементар кодының префиксі болады;

ә)

$\Sigma =$

a_1	a_2	a_3
01	1101	10

сұлбасы префикс қасиетіне ие, себебі ешбір элементар код басқа элементар кодтың префиксі болмайды.

3. Σ алфавиттік жасырымдылық сұлбасы бөлінетін деп аталады, егер элементар кодтардан құралған кез келген сөз элементар кодтарға тек бір ғана жолмен жіктелсе, яғни егер $\beta_{i1}\beta_{i2}\ldots\beta_{ik} = \beta_{j1}\beta_{j2}\ldots\beta_{jl}$, онда $k = l$ және $\forall t \in \overline{1\ldots k}$ $(i_t = j_t)$.

Дәлелденген:

1) префикс сұлбасы бөлінеді және де, префикстік шарты жеткілікті болады, бірақ сұлбаның бөлінуіне қажетті емес;

2) бөлінетін сұлбалы алфавиттік жасырымдылықта қарсы жасырымдылық (декодирование) болуы мүмкін;

3) префиксті және бөлінетін сұлбалы алфавиттік жасырымдылықта өзара бірмәнді жасырымдылық болуы мүмкін (бұл қасиет жеткілікті, қажетті емес).

5.3 Макмиллан теңсіздігі (жасырымдылық сұлбасының бөліну шарттары)

Теорема 1. Егер $\Sigma = \langle a_i \to \beta_i \rangle_{i=1}^{n}$ сұлбасы бөлінетін болса, онда

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{l_i}} \leq 1 \qquad (*),$$

мұндағы $l_i = |\beta_i| -$ β_i сөзінің ұзындығы; (*) теңсіздігі Макмиллан теңсіздігі деп аталады.

Теорема 2. Егер $l_1, l_2, \ldots, l_n$ сандары $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{l_i}} \leq 1$ теңсіздігін қанағаттандырса, онда $\forall i(|\beta_i| = l_i)$ орындалатындай бөлінетін (тіпті префиксті) $\Sigma = \langle a_i \to \beta_i \rangle_{i=1}^{n}$ алфавиттік жасырымдылық сұлбасы бар болады.

Сонымен, Макмиллан теңсіздігі сұлбаның бөлінетіндігінің қажетті шарты (кейбір мағынада жеткілікті) болады.

М ы с а л 5.3.1. $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B = \{0,1\}$ болсын.

а)

$\Sigma_1 =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001

Σ_1 - префиксті сұлба емес, мысалы, 2 ($\beta_3 = 10$) элементар коды 4, 5, 8, 9 элементарный кодтардың префиксі болады;

Σ_1 - бөлінбейтін сұлба, Макмиллан теңсіздігі орындалмайды:

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{4}{8} + \frac{2}{16} > 1,$$

мұндағы

$l_1 = |\beta_1| = 1, \quad l_2 = |\beta_2| = 1, \; l_3 = |\beta_3| = 2, \ldots, l_{10} = |\beta_{10}| = 4;$

ә)

$\Sigma_2 =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001

Σ_2 - префиксті сұлба, себебі ешқандай элементар код басқа элементар кодтың префиксі болмайды;

Σ_2 - бөлінетін сұлба, себебі Макмиллан теңсіздігі орындалады:

$$\frac{1}{2^4} \cdot 10 = \frac{10}{16} < 1.$$

1 және 2 теоремаларының салдары.

Егер алфавиттік жасырымдылық сұлбасы $\Sigma = \langle a_i \to \beta_i \rangle_{i=1}^{n}$ бөлінетін болса, онда онда префиксті сұлба бар болады $\Sigma' = \left\langle a_i \to \beta_i' \right\rangle_{i=1}^{n}$, және де $\forall i(|\beta_i| = |\beta_i'|)$.

М ы с а л 5.3.2.

$\Sigma_3 =$

a_1	a_2
0	01

Σ_3- префиксті сұлба емес, себебі $\beta_1 = 0$ элементар коды $\beta_2 = 01$ элементар кодының префиксі;

Σ_3- бөлінетін сұлба, себебі Макмиллан теңсіздігі орындалады:

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} < 1.$$

Келесі сұлба құрайық

$\Sigma_3' =$

a_1	a_2
0	10

Σ_3'- префиксті және бөлінетін сұлба.

Келесі тұжырымдар дәлелденген:

1) префиксті сұлба бөлінетін сұлба, және де, префикстік шарты жеткілікті болады, бірақ бөлінетін сұлба үшін қажетті емес (мысалы 3);

2) бөлінетін сұлбалы алфавиттік жасырымдылық декодтау жүргізе алады;

3) префиксті және бөлінетін сұлбалы алфавиттік жасырымдылық өзара бірмәнді кодтай алады (бұл қасиет жеткілікті, бірақ қажетті емес).

Мысалдар:

1) Σ_1 сұлбасы префиксті емес және бөлінетін емес, олай болса, бірмәнді жасырымдылық мүмкін емес, расында, мысалы, екі $\alpha_1 = 77$ және $\alpha_2 = 333$ әртүрлі сөздері үшін $\beta_1 = \beta_2 = 111111$ бір ғана коды бар;

2) Σ_2 сұлбасы префиксті және бөлінетін, олай болса, кез келген сөз коды бірмәнді декодталынады, мысалы: $\alpha_1 = 77 \leftrightarrow \beta_1 = 01110111$; $\alpha_2 = 333 \leftrightarrow \beta_2 = 001100110011$;

3) Сұлбасын қарастырайық

М ы с а л 5.3.3.

$\Sigma_4 =$

a_1	a_2	a_3
00	100	001

Бұл сұлба префиксті емес ($\beta_1 = 00 - \beta_3 = 001$ –тің префиксі) және бөлінетің сұлба ($\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2} < 1$). Бұл жағдайда кейбір сөздердің кодтары бірмәнді емес декодталады.

Мысалы,

$$\alpha = a_1 a_2 a_2 \to \beta = \beta_1 \beta_2 \beta_2 = (00)(100)(100) = 00100100.$$

β сөзін басқаша декодтауға болады, себебі оны басқа ретте элементар кодтардың бірігуі ретінде қарастыруға болады:

$$\beta = 00100100 = (001)(001)(00) = \beta_3 \beta_3 \beta_1 .$$

Немесе

$$\beta = 00100100 = (001)(00)(100) = \beta_3 \beta_1 \beta_2.$$

5.4 Тиімді жасырымдылық (немесе минималды артықшылықпен жасырымдылық)

Практикада хабарламаның кодтары мүмкіндігінше ең кіші ұзындықты болғаны қолайлы. Мысалы, компьютерде барлық әріптер мен символдар 0 және 1 тұратын жолдар түрінде сақталады, сондықтан әруақытта сақтау үшін аз орын қолданған жөн. Сонда егер қысқа жолдарда жиі қолданатын символдарды сақтаса, сирек қолданылатындарын одан да қысқа жолдарда сақтау мүмкін болар еді.

$\Sigma = \langle a_i \to \beta_i \rangle_{i=1}^{n}$ алфавиттік жасырымдылықтың бөлінетін сұлбасы берілген болсын.

Жалпы жағыдайда β_i элементар кодтарының ұзындықтары әртүрлі, сондықтан $\alpha \to \beta = \beta_{i1}\beta_{i2}\ldots\beta_{ik}$ байланысындағы β кодының ұзындығы α байланысының құрамындағы әріптерге байланысты және ондағы қай әріпке қай элементар кодтар бекітілгеніне тәуелді.

$s \in S$ хабарламасындағы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ әріптерінің сәйкес $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ену саны болсын (яғни жиілік), ал $l_1, l_2, \ldots, l_n - \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ элементар кодтарының ұзындығы болсын. Егер $k_i \le k_j$ және $l_i \ge l_j$, онда:

$$k_i l_i + k_j l_j \le k_i l_j + k_j l_i \qquad (*).$$

Расында, $k_i = k$, $k_j = k + a$ болсын (яғни $k_i \le k_j$), $l_i = l + b$, $l_j = l$ (яғни $l_i \ge l_j$), $a \ge 0, b \ge 0$. Онда

$$\left(k_i l_j + k_j l_i\right) - \left(k_i l_i + k_j l_j\right) = [kl + (k + a)(l + +b)] -$$

$$-[k(l + b) + (k + a)l] = \ldots = a \cdot b \ge 0,$$

бұдан (*) теңсіздігі шығады.

Бұл тұжырымнан хабарлама алфавитіндегі әріптерге элементар кодтарды тіркеп жазуға болатындығы шығады. Бұл жағдайда белгілі хабарлама код ұзындығы минималды болады: кездесетін әріптер жиілігіне қысқа код сәйкес келу керек.

$$\Sigma = \langle a_i \to \beta_i \rangle_{i=1}^{n}$$

бөлінетін сұлбадан

$$\Sigma' = \left\langle a_i \to \beta_i' \right\rangle_{i=1}^{n}$$

бөлінетін сұлбаны әруақытта алуға болатындығы белгілі, мұндағы $\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_n'$ – $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ (1 және 2 теоремаларының салдары).

Осы жағдайдағы орын ауытыруы келесі жайтты ескеру керек: егер s әріптерін оның жиіліктерінің кему ретімен, ал элементар кодтарды олардың ұзындықтарының өсу ретімен ауыстырып отырса және әріптерге осы ретпен кодтар тіркеп жазса, $s \in S$ хабарламасының кодының ұзындығы минималды болады.

Жасырымдылықтың бағасы (ұзындығы)

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ алфавиті мен $P = \langle p_1, p_2, \ldots, p_n \rangle$ хабарламасындағы әріптердің пайда болу ықтималдығы берілген (p_i - a_i, $i = \overline{1 \ldots n}$ әріпінің пайда болу ықтималдығы). Әріптердің пайда болу ықтималдығының кему ретімен әріптер реттелген деп есептейік, яғни $p_1 \ge p_2 \ge \ldots \ge p_n > 0$ және нөлдік ықтималдығы бар әріптер алынып тасталынады, яғни $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Бұл жерде хабарлама кодтарды минимизациялауда басқа әдіс қолданылатынын айта кетейік: A алфавитінің әріптерінің жиіліктерінің орнына олардың пайда болу ықтималдығы қарастырылады.

Анықтама. $\Sigma = \langle a_i \to \beta_i \rangle_{i=1}^{n}$ алфавиттік жасырымдылықтың бөлінетін сұлбасының орта бағасы (немесе ұзындығы) деп кодталған хабарламаның математикалық үміті айтылады (белгіленуі l_Σ): $l_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} p_i l_i$, мұндағы $l_i = |\beta_i|$.

М ы с а л 5.3.4. $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{0,1\}$ алфавиттері және бөлінетін сұлба

$\Sigma =$

a_1	a_2
0	01

берілген.

$l_1 = |\beta_1| = 1$, $l_2 = |\beta_2| = 2$. $P_1 = \langle 0{,}5; 0{,}5 \rangle$ ықтималдықтарын үлестіргенде $l_\Sigma = 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 2 = 1{,}5$; $P_2 = \langle 0{,}9; 0{,}1 \rangle$ ықтималдықтарын үлестіргенде жасырымдылықтың бағасы $l_\Sigma = 0{,}9 \cdot 1 + 0{,}1 \cdot 2 = 1{,}1$. Сонымен, егер ұзын кодтарға осы әріптердің пайда болуының үлкен ықтималдықтары сәйкес келсе, онда жасырымдылықтың бағасы кем болады.

Егер A алфавитінің әріптерінің пайда болу ықтималдықтарының орнына олардың жиіліктерін қарастырсақ, онда жасырымдылықтың бағасы ұғымына аналог – жасырымдылықтың салмағы ұғымын анықтауға болады.

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ алфавитінің әріптері $k_1, k_2, \ldots, k_n$ жиіліктерімен пайда болсын. Алфавиттік жасырымдылықтың $\Sigma = \langle a_i \to \beta_i \rangle_{i=1}^{n}$ сұлбасын қарастырайық, және де $l_i = |\beta_i|$, мұндағы $\omega = \sum_{i=1}^{n} k_i l_i$ шамасы Σ жасырымдылықтың салмағы делінеді.

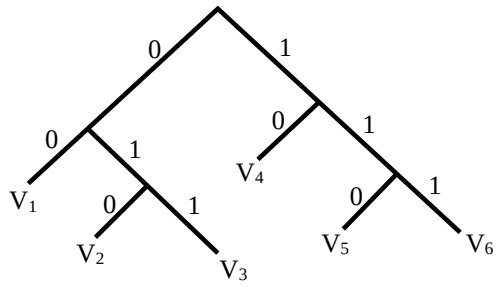
Анықтама. Егер жасырымдылықтың орта бағасы (салмағы) мүмкіндердің арасында ең кіші болса, алфавиттік жасырымдылық тиімді (немесе минималды артықшылықпен) деп аталады.

5.5 Хаффман алгоритмі

Хаффман алгоритмі A алфавитінің әріптерінің пайда болу жиіліктерін немесе берілген ықтималдықтарының үлестірімі үшін алфавиттік жасырымдылықтың тиімді префиксті сұлбасын салады.

Бұл алгоритмді берілген жиілік үлестіріммен құрамыз. Бұл жағдайда алгоритмді графтар теориясындағы ілініп тұрған ағаш ұғымын, белгілі қасиеттерін қолданып, қолмен салған жеңіл. Ықтималдықтарының үлестірімі берілген жағдай А.В. Чашкин [7] немесе Ф.А. Новиков [3] кітаптарында көрсетілген, мұнда Хаффман алгоритмі бағдарламасы құрылған.

Көрнекілік үшін Хаффман алгоритмін мысалдарда көрсетейік. $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6$ жапырақтарымен G бинарлық ағашын қарастырамыз. Бұл ағаш тамырынан бағытталған, ыңғайлы болу үшін суретте стрелка сызбаймыз, доғаларды қырлары деп атаймыз.



G

5.5.1 сурет

Егер тамырдан кез келген жапыраққа дейінгі жолды қарастырсақ, онда осы жолдың әрбір қабырғасы алдыңғы төбенің оң немесе сол ұлына апару керек. Егер қабырға сол, онда оны 0 арқылы, егер оң ұлға апарса 1 арқылы белгілейміз. Суретте 0 мен 1 сәйкес қабырға жанына жазылады. Мысалы, осы жолда төбенің сол ұлдарынан V_1 жапыраққа дейінгі жол екі қабырғадан тұрады, онда V_1 00 деп белгілейміз. Сол сияқты V_2, V_3, V_4, V_5, V_6 –ге дейінгі жолды сәйкес 010, 011, 10, 110, 111 деп белгілейміз. Берілген жапыраққа сәйкес 0 және 1 тұратын жолдық код дейміз. V_i қабырғасының жолдық кодында 0 мен 1 сандарын оның ұзындығы дейміз, l_i деп белгілейміз. Айта кетелік, әрбір жапыраққа бір ғана жол жетелейтін болғандықтан, әрбір жапырақтың жолдық коды жалғыз, ал осы ағаштың жапырақтарына сәйкес келетін жолдық кодтар осы кодтардың префиксті жиынын құрайды.

Теорема. Кез келген бинарлы ағашта ағаш жапырақтарының жолдық кодтары осы кодтардың префиксті жиынын құрайды.

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ және $B = \{0,1\}$ алфавиттерімен алфавиттік жасырымдылықты келесі түрде келтіруге болады: A алфавитінің әрбір a_i әріпіне бинарлы ағаштағы V_i жапырағы сәйкес қойылады және оның жолдық коды 0 мен 1 тұрады. Сонымен, Σ алфавиттік жасырымдылықтың сұлбасы алынды. Жоғарыда қарастырған G ағашы үшін бұл сұлба былай болады:

$\Sigma =$

$a_1(V_1)$	$a_2(V_2)$	$a_3(V_3)$	$a_4(V_4)$	$a_5(V_5)$	$a_6(V_6)$
00	010	011	10	110	111

Жоғарыда көрсеткендей ол префиксті және бөлінетін болады. Сонымен, жолдық кодтар – бұл a_i әріпінің жоғарыда көрсеткендей терминология бойынша элементар кодтары (яғни $\beta_1 = 00$, $\beta_2 = 010$ және т.с.с.).

A алфавитінің әрбір a_i әріпі k_i жиілімен пайда болсын, ал l_i - V_i жапырағының (a_i әріпінің) жолдық кодтың ұзындығы немесе осы әріптің элементар кодының ұзындығы. Жасырымдылықтың салмағы $\omega = \sum_{i=1}^{n} k_i l_i$ жоғарыда анықталған, бұл шама сәйкес бинарлы ағаштың салмағы делінеді. Бұл ұғымды граф тарауындағы салмақ графымен шатыстырмаған жөн. Онда салмақ графтың қабарғасына (доғасына) жазылады.

Біздің мақсатымыз тиімді жасырымдылықты алу, яғни ең аз салмақты жасырымдылық (немесе яғни ең аз салмақты бинарнлы ағаш) алу. Осындай ағашты құру процесі Хаффман алгоритмі делінеді, ал құрылған код (сұлба) – Хаффман коды (сұлбасы), құрылған бинарлы ағаш – Хаффман ағашы деп аталады.

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ алфавитінің $k_1, k_2, \ldots, k_n$ әріптерінің сәйкес жиіліктерімен *Хаффман алгоритмі:*

1. Жиіліктерді өсу ретімен орналастыру керек;

2. егер k_i және k_j екі ең кіші жиілік болса, онда ұлдары ретінде a_i және a_j болатын бинарлы ағаш құру керек, мұндағы a_i сол ұл, a_j – оң ұл ($k_i < k_j$), ал k_i+k_j – ата–ана жиілігі; 0–ді сол ұлының, 1–ді оң ұлының қабырғасына орналастыру керек; k_i және k_j–ні жиіліктер жиынынан алып тастап, оған k_i+k_j–ні қосу керек;

3. тағы да жиіліктерді өсу ретімен жазамыз; жиіліктер жиынынан екі ең кіші жиіліктерді алып тастап, ағаш құру керек, мұндағы ұлдары ретінде осы жиіліктерге сәйкес келетін әріптер немесе ағаштар, аз жиілікті әріп немесе ағаш – сол ұл, ал олардың жиіліктерінің қосындысы – ата ана жиілігі; егер қандай да бір ұлдардың бірі ағаш болса, онда құрылған ағаштағы жиіліктегі таңбаны алып тастаймыз; екі ең кіші жиілікті олардың қосындысымен айырбастаймыз;

4. жиіліктер жиынында бір элемент қалғанша 3) қадамын қайталау керек;

5. соңғы ағаштың тамырынан жиілікті алып тастау керек, бұл ағаш Хаффман ағашы болады, яғни минималды салмақты ағаш; Хаффман ағашы бойынша Σ жасырымдылықтың сұлбасын жазамыз. Ол префиксті, бөлінетін және тиімді болады.

Хаффман алгоритмі бойынша құрылған ағаш минималды салмақты (немесе жасырымдылықтың тиімді сұлбасы) болатындығы туралы келесі теоремада айтылған.

Теорема. Әріптерінің сәйкес жиіліктерімен берілген алфавит үшін Хаффман ағашы минималды салмақты ағаш болады.

Бұл теореманың дәлелдеуі Д. Андерсон кітабында [4], 644 бет.

Мысал 5.5.1 $A = \{a, b, c, d, e, f, m\}$ алфавиті үшін тиімді жасырымдылықтың сұлбасын құрамыз, оның әріптерінің сәйкес жиіліктері 7, 10, 3, 5, 8, 2, 1.

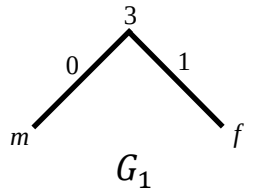
Шешуі: Хаффман алгоритмін құрамыз:

1) жиіліктерді өсу ретімен жазамыз, қолайлылық үшін нәтижелерді кестеге енгіземіз

m	f	c	d	a	e	b
1	2	3	5	7	8	10

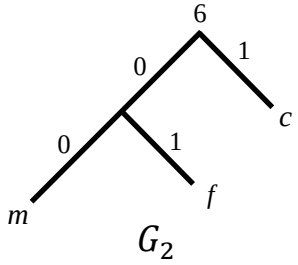
2) бинарлы ағаш құрамыз, мұндағы m және f жапырақтар, m – сол ұл, f - оң ұл, $1 + 2 = 3$ ата аналар жиілігі; сол ұлға 0, оң ұлға – 1 тіркейміз; осы ағашты G_1 деп белгілейміз; жиіліктер тізімінде екі ең кіші жиілік мәнін олардың қосындысына айырбастаймыз, сосын жиіліктерді өсу ретімен жазамыз; жаңа кестені толтырамыз

G_1	c	D	a	e	b
3	3	5	7	8	10



5.5.2 сурет

3) ағаш құрастырамыз, мұндағы ұлдар ретінде жоғарыда құрылған G_1 ағашы және c әріпі (себебі соңғы кестеде онда ең кіші жиілік болды); олардың жиіліктерінің қосындысы $3 + 3 = 6$; жаңа ағаш G_2,

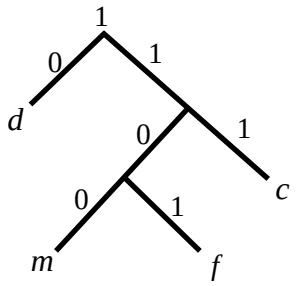


5.5.3 сурет

жаңа кесте

d	G_2	a	e	b
5	6	7	8	10

4) ағаш құрастырамыз, мұндағы ұлдар d және G_2 болады, d – сол ұл, G_2 - оң ұл; олардың жиіліктерінің қосындысы $5 + 6 = 11$; жаңа ағаш G_3,



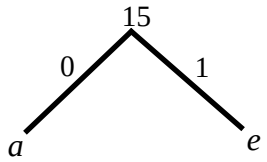
G_3

5.5.4 сурет

жаңа кесте

a	e	b	G_3
7	8	10	11

4) соңғы кесте бойынша G_4 ағашын құрамыз (оның салмағы $7 + 8 = 15$);



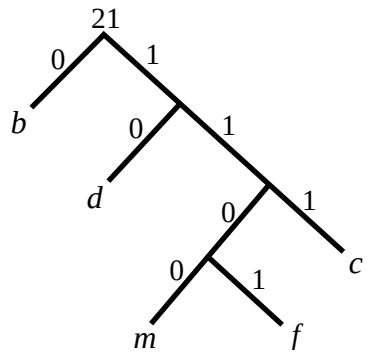
G_4

5.5.5 сурет

жаңа кесте

b	G_3	G_4
10	11	15

5) соңғы кесте бойынша G_5 ағашын құрамыз (оның салмағы 10+11=21);



G_5

5.5.6 сурет

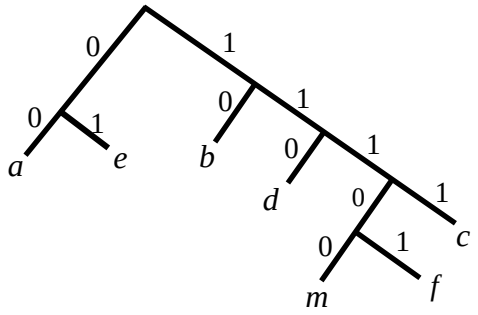
жаңа кесте

G_4	G_5
15	21

7) соңғы кесте бойынша G соңғы ағашын құрамыз (оның салмағы 15+21=36) – Хаффман ағашы; Хаффман ағашы бойынша тиімді жасырымдылықтың ізделінді сұлбасын жазамыз

$\Sigma =$

a	b	c	d	e	f	m
00	10	1111	110	01	11101	11100



G_6

5.5.7 сурет

Σ - префиксті, бөлінетін және жасырымдылықтың тиімді сұлбасы, оның ең аз салмағы $\omega = 36$.

Кестеде ең кіші екі жиілік бірдей екенін ескерейік (осы мысалдағыдай екінші қадамда), онда сол ұлды таңдау басқаша болуы мүмкін. Онда жасырымдылықтың басқа сұлбасы болады. Дегенмен, ол да сондай ең кіші салмақты болады.

Әдебиет тізімі

1. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Дискретная математика: учебник.- 5-е изд.- Новосибирск: изд-во НГТУ, 2016.- 280 с.
2. Москинова Г.И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях: Учебное пособие. – М.: Логос, 2004. – 240 с.
3. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. Учебник для вузов. 3-е изд. – СПб.: Питер, 2009. – 384 с.
4. Андерсон, Д. Дискретная математика и комбинаторика.: Пер. с англ. – М.: Издатель- ский дом «Вильямс», 2004. – 960 с.: ил. – Парал. тит. англ.
5. Спирина М.С., Спирин П.А. Дискретная математика: учебник. – 9-е изд. - М.: Издат. центр «Академия», 2013 - 368с.
6. Шапорев С.Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006.- 396 с.
7. Чашкин А.В. Дискретная математика. - М., 2012 -288с
8. Асеев Г.Г., Абрамов О.М., Ситников Д.Э. Дискретная математика: Учеб. пособие.- Ростов н/Д: «Феникс» Харьков: «Торсинг», 2003 - 144 с.
9. Сағынтаева С.С., Тұрысбаева Ү. Дискретті математика элементтері. Оқу құралы.- Астана: ҚазЭСХСУ БПО. - 2014. -164 б.
10. Оре О. Графы и их применение: пер. с англ./ Под ред. и с предисл. И.М.Яглома. Изд. 3-е, стереотипное. –М.: КомКнига, 2006. – 168 с.
11. Досанбай П.Т. Математикалық логика. Оқулық. Алматы, 2011
12. Жетпісов Қ. Математикалық логика және дискретті математика. Алматы, 2011
13. Палий И.А.Дискретная математика. Курс лекций.-М.:Эксмо,2008.–352с.
14. Галушкина Ю.И., Марьямов А.Н. Конспект лекций по дискретной математике.- М.: Айрис-пресс, 2007. – 176 с.
15. Шевелев Ю.П. Дискретная математика: Учебное пособие - СПб.: Издательство «Лань», 2016.-592с.
16. Шевелев Ю.П., Писаренко Л.А., Шевелев М.Ю. Сборник задач по дискретной математике (для практических занятий в группах) - СПб.: Издательство «Лань», 2013.-528с.
17. Байсалова М.Ж Дискрет математика: оқу құралы – Алматы, АЭжБИ. 2007. - 76 бет.
18. Жаңбырбаев Б.С. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика элементтері. Алматы. 2006 – 184 бет.

Мазмұны

Кіріспе	3
1 Жиындар теориясының элементтері	4
1.1 Жиындар	4
1.2 Қатынастар	10
1.3 Жиынның қуаты туралы ұғым	23
2 Математикалық логика элементтері	25
2.1 Тұжырымдар және логикалық қисаптар	25
2.2 Алгебралар логикасының функциялары.	29
2.3 Дизъюнктивті және конъюнктивті қалыпты формалар	39
2.4 Буль алгебрасы және жиындар теориясы. Коммутациялық сұлбалар.	46
3 Графтар теориясының элементтері	50
3.1 Негізгі ұғымдар мен анықтамалар	50
3.2 Маршруттар, қолжетерлік, байланыстылық	62
3.3 Эйлер және гамильтон графтары	68
3.4 Графтағы ара қашықтықты зерттеу. Ең қысқа жол туралы есеп	72
3.5 Ағаштар, орман, минималды діңгекті ағаштар	84
3.6 Графтарды бояу. Планарлық	91
4 Комбинаторика элементтері	96
4.1 Қосу және көбейту ережелері	96
4.2 Орын ауыстыру, орналастыру және теру	97
4.3 Қайталанатын орналастыру, теру және орын ауыстыру	100
4.4 Бөліктеу. Туындаушы функция ұғымы	102
5 Жасырымдылық теориясының элементтері	105
5.1 Жасырымдылық теориясының пәні.	105
5.2 Алфавиттік жасырымдылық	107
5.3 Макмиллан теңсіздігі	108
5.4 Тиімді жасырымдылық	111
5.5 Хаффман алгоритмі	113
Әдебиет тізімі	119

Байсалова Мәншүк Жұмамұратқызы

ДИСКРЕТТІ МАТЕМАТИКА

Оқу құралы

Редактор Изтелеуова Ж.Н.

Басылымға қол қойылды _____ 2022
Таралымы 100 дана. Пішімі 60х84 1/16

Баспаханалық қағаз №1
Оқу-бас.ә. 8,0 Тапсырыс №___
Бағасы 4000 теңге.

«Ғұмарбек Дәукеев атындағы АЭжБУ» КЕАҚ
Алматы к., Байтұрсынұлы к., 126/1

«Ғұмарбек Дәукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірме-көбейту бюросы
Алматы қ., Байтұрсынұлы к., 126/1