Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра теоретических основ электротехники

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Конспект лекций
для студентов специальности 5В070300 – Информационные системы

Алматы 2016

СОСТАВИТЕЛИ: З.И. Жолдыбаева, Е.Х. Зуслина. Теория электрических цепей. Основы теории цепей. Конспект лекций для студентов специальности 5В070300 – Информационные системы.– Алматы: АУЭС, 2016. – 77с.

Конспект лекций содержит 18 лекций по разделам: линейные электрические цепи постоянного тока, электрические цепи однофазного синусоидального тока, резонансные явления в электрических цепях, четырехполюсники и фильтры. Конспект лекций предназначен для студентов специальности 5В070300 – Информационные системы.

Ил. 96, библиогр.- 6 назв.

Рецензент: канд.тех.наук., доцент Матаев У.А

Печатается по плану издания некомерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2016 г.

© НАО «Алматинский университет энергетики и связи», 2016 г.

Введение

Дисциплина «Теория электрических цепей» и «Основы теории цепей» являются дисциплинами по выбору для студентов специальности 5В070300 – Информационные системы. Назначение дисциплин заключается в изучении как с качественной, так и с количественной стороны электромагнитных процессов и явлений, происходящих в различного рода радиотехнических установках, устройствах вычислительной техники и связи.

Предлагаемый конспект лекций включает следующие разделы: линейные электрические цепи постоянного тока, электрические цепи однофазного синусоидального тока, резонансные явления в электрических цепях, цепи при периодических несинусоидальных воздействиях, индуктивно связанные цепи, нелинейные электрические цепи постоянного тока и четырехполюсники. Для дисциплины «Теория электрических цепей» - лекции №1-15; для дисциплины «Основы теории цепей» - лекции №1-12, 16-18.

Конспект лекций предназначен для студентов, обучающихся по специальностям 5В070300 – Информационные системы.

1 Лекция №1. Элементы электрических цепей и электрических схем

Цель лекции: ознакомить с основными понятиями электрических цепей.

1.1 Основные понятия

Электромагнитные процессы, протекающие в электрических цепях можно описать с помощью таких интегральных понятий, как: напряжение, ток, электродвижущая сила (ЭДС). Электротехнические устройства, производящие электрическую энергию, называются генераторами или источниками электрической энергии, а устройства, потребляющие ее – приемниками электрической энергии. Все элементы электрической цепи условно можно разделить на активные и пассивные. Активным называется элемент, содержащий в своей структуре источник электрической энергии. К пассивным относятся элементы, в которых рассеивается (резисторы) или накапливается (катушка индуктивности и конденсаторы) энергия. Если элементы описываются линейными дифференциальными или алгебраическими уравнениями, то они называются линейными, в противном случае - нелинейными. Если параметры элемента не являются функциями пространственных координат, определяющих его геометрические размеры, то он называется элементом с сосредоточенными параметрами. Цепи, содержащие только линейные элементы, называются линейными. Наличие в схеме хотя бы одного нелинейного элемента относит ее к классу нелинейных.

1.2 Резистивный элемент (резистор)

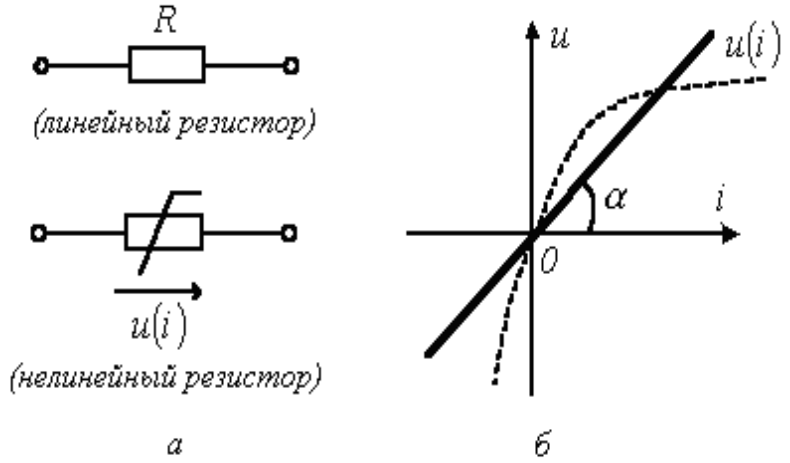


Рисунок 1.1

Резистор – это пассивный элемент, характеризующийся резистивным сопротивлением (рисунок 1.1,а). Основной характеристикой резистивного элемента является зависимость $u(i)$, называемая вольт-амперной

характеристикой (ВАХ). Если зависимость $u(i)$ представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат (рисунок 1.1,б), то резистор называется линейным и описывается соотношением:

$$u = R_i = m_R i tg\alpha_0$$

Нелинейным резистивным элементом называется элемент, ВАХ которого нелинейна (рисунок 1.1,б).

1.3 Индуктивный элемент

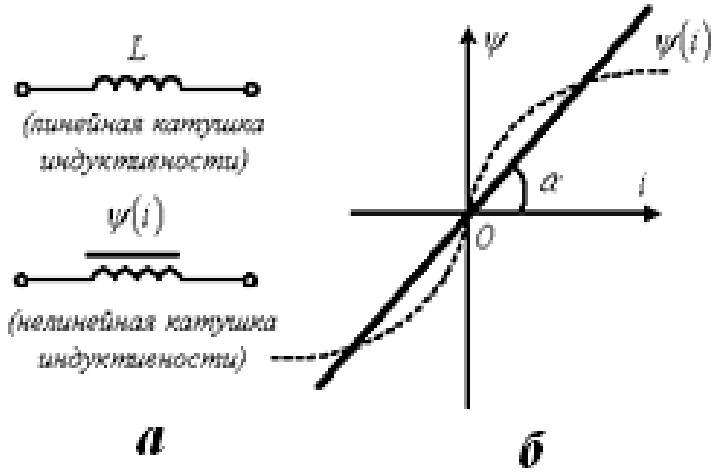


Рисунок 1.2

Индуктивность определяется отношением потокосцепления к току, протекающему по виткам катушки (рисунок 1.2,а), $L = \frac{\psi}{i}(\text{Гн})$.

Основной характеристикой катушки индуктивности является зависимость $\psi(i)$, называемая вебер-амперной характеристикой. Для линейных катушек индуктивности зависимость $\psi(i)$ представляет собой прямую линию (рисунок 1.2,б); при этом $L = m_L tg\alpha const$. Для нелинейных - зависимость $\psi(i)$ нелинейная (рисунок 1.2,б).

1.4 Емкостный элемент

Конденсатор – это пассивный элемент, характеризующийся емкостью (рисунок 1.3,а). Емкость определяется отношением $C = \frac{q}{u}(\hat{\text{О}})$.

Большинство диэлектриков, используемых на практике, линейны, т.е. у них относительная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = const$. В этом случае зависимость $q(u)$ представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат, (рисунок 1.3,б) и $C = m_C tg\alpha = const$.

У нелинейных диэлектриков (сегнетоэлектриков) диэлектрическая проницаемость является функцией напряженности поля, что обусловливает нелинейность зависимости $q(U)$ (рисунок 1.3,б).

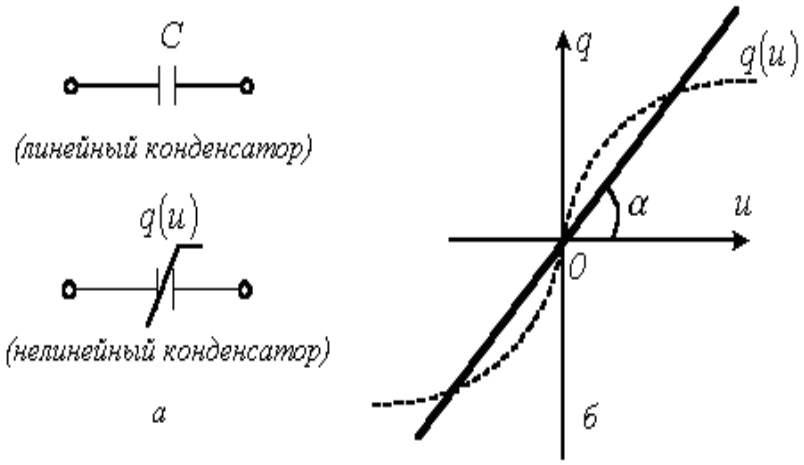


Рисунок 1.3

1.5 Источники электрической энергии

Источники электрической энергии, питающие электрические цепи могут быть независимыми и зависимыми.

Источники, ЭДС или ток которых зависят от напряжения или тока в другой ветви схемы, называются зависимыми. Различают четыре типа зависимых источников: источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН) (рисунок 1.4, а); источник напряжения, управляемым током (ИНУТ) (рисунок 1.4, б); источник тока, управляемый напряжением (ИТУН) (рисунок 1.4,в); источник тока, управляемый током (ИТУТ) (рисунок 1.4,г). Связи зависимых значений выражаются через коэффициенты k, r, g, β.

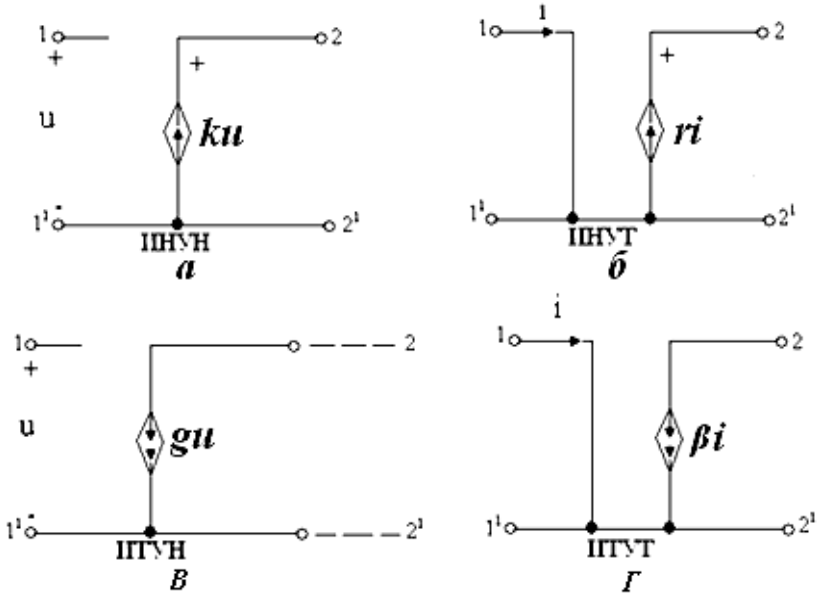


Рисунок 1.4

Источники, ЭДС или ток которых не зависят от напряжения или тока в другой ветви схемы, называются независимыми.

Свойства источника электрической энергии описываются ВАХ - $U(I)$, называемой внешней характеристикой источника**.** ВАХ источника может быть определена экспериментально (рисунок 1.5,а).

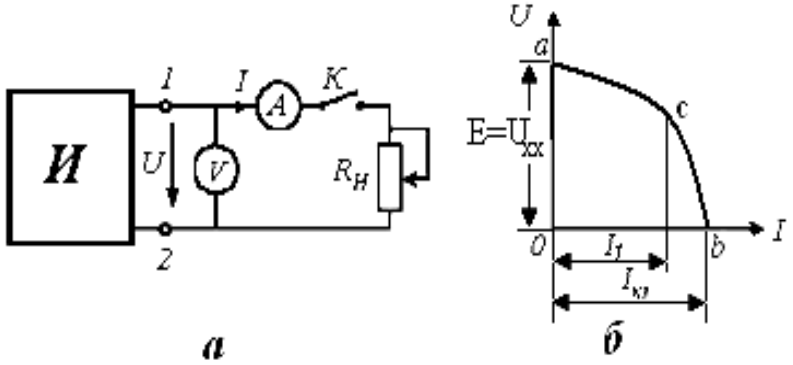


Рисунок 1.5

В общем случае ВАХ источника является нелинейной (рисунок 1.5,б). Она имеет две характерные точки, которые соответствуют: а – режиму холостого хода $(I = 0;\ \ U = U_{xx}^{'})$; b – режиму короткого замыкания $(U = 0; I = I_{КЗ})$.

Прямая ас на рисунке 1.5,б описывается линейным уравнением

$$U = U_{xx} - R_{вн} I \qquad (1.1)$$

где U_{xx} - напряжение на зажимах источника при отключенной нагрузке;

$R_{вн} = U_{xx} / I_{кз}$ - внутреннее сопротивление источника.

Уравнение (1.1) позволяет составить последовательную схему замещения источника энергии источником ЭДС (рисунок 1.6,а). На этой схеме символом Е обозначен элемент, называемый идеальным источником ЭДС, ему соответствует ВАХ на рисунке 1.6,б, у такого источника $R_{вн} = 0$.

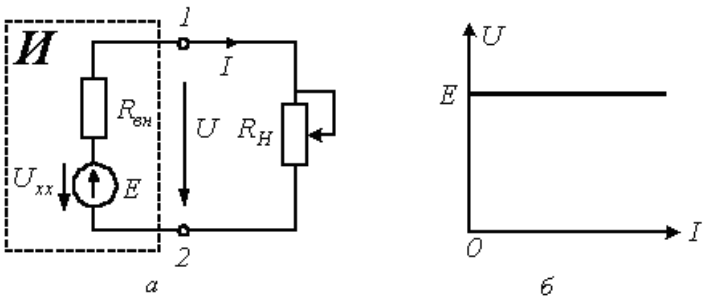


Рисунок 1.6

Существует также параллельная схема замещения источника . Для ее описания разделим левую и правую части соотношения (1.1) на $R_{вн}$. В результате получим:

$$I = \frac{U_{xx}}{R_{вн}} - \frac{U}{R_{вн}} = I_{кз} - \frac{U}{R_{вн}} \text{ или } I = J - g_{вн} U, \qquad (1.2)$$

где $J = I_{кз}$; $g_{вн} = R_{вн}^{-1}$- внутренняя проводимость источника.

Уравнению (1.2) соответствует схема замещения источника на рисунке 1.7,а.

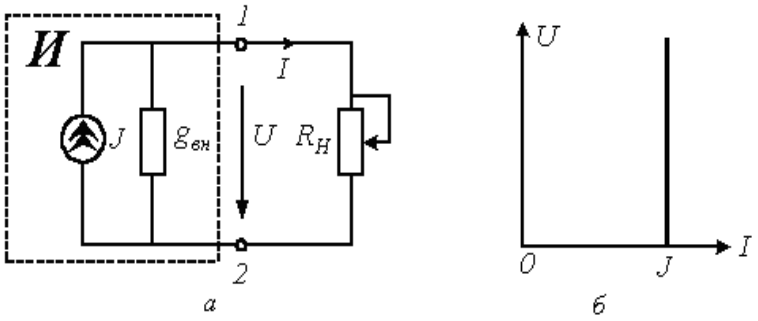


Рисунок 1.7

На этой схеме символом J обозначен элемент, называемый идеальным источником тока. Ток в ветви с этим элементом равен $J = I_{кз}$ и не зависит от напряжения на зажимах источника, следовательно, ему соответствует ВАХ на рисунке 1.7,б. На этом основании с учетом (1.2) у такого источника $g_{вн} = 0$, т.е. его внутреннее сопротивление $R_{вн} = \infty$. В расчетном плане при выполнении условия $E = JR_{вн}$ последовательная и параллельная схемы замещения источника являются эквивалентными.

2 Лекция №2. Расчет простейших электрических цепей постоянного тока

Цель лекции: ознакомить с методами преобразования электрических цепей, законом Ома, методом наложения и потенциальной диаграммой.

2.1 Методы преобразования

Во всех случаях преобразования замена одних схем другими, им эквивалентными, не должна привести к изменению токораспределения на участках цепи, не подвергшихся преобразованию.

Замена последовательных сопротивлений одним эквивалентным.

Сопротивления соединены последовательно, если по ним протекает один и тот же ток.

Эквивалентное сопротивление цепи, состоящей из «n» последовательно соединенных сопротивлений:

$$R_э = \sum_{K=1}^{n} R_K . \qquad (2.1)$$

Напряжение при последовательном соединении распределяется прямо пропорционально этим сопротивлениям. Например, для двух последовательно соединенных сопротивлений (рисунок 2.1):

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}; \quad U = U_1 + U_2;$$
$$U_1 = \frac{UR_1}{R_1 + R_2}; \quad U_2 = \frac{UR_2}{R_1 + R_2}. \qquad (2.2)$$

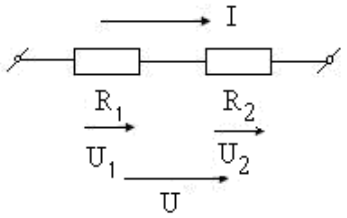


Рисунок 2.1

Замена параллельных сопротивлений одним эквивалентным.

Сопротивления соединены параллельно, если они присоединены к одной паре узлов и к ним приложено одно и тоже напряжение.

Эквивалентное сопротивление цепи, состоящей из «n» параллельно соединенных сопротивлений

$$\frac{1}{R_Э} = \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{R_K}. \qquad (2.3)$$

Токи в ветвях с параллельным соединением сопротивлений, на примере двух параллельно соединенных сопротивлений (рисунок 2.2) равны:

$$R_Э = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}, \quad I_1 : I_2 = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2},$$
$$I_1 = I\frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad I_2 = I\frac{R_1}{R_1 + R_2}. \qquad (2.3)$$

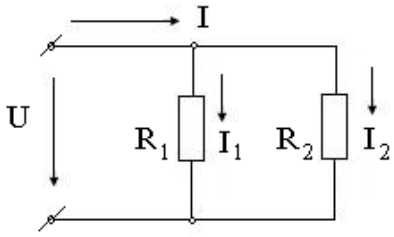


Рисунок 2.2

Замена смешанного соединения сопротивлений одним эквивалентным.

Смешанное соединение – это сочетание последовательного и паралелльного соединения сопротивлений (рисунок 2.3).

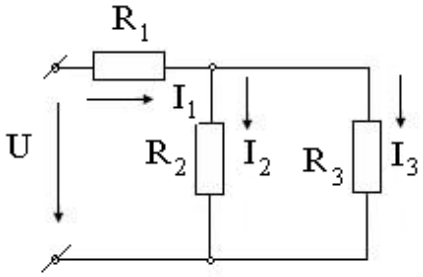
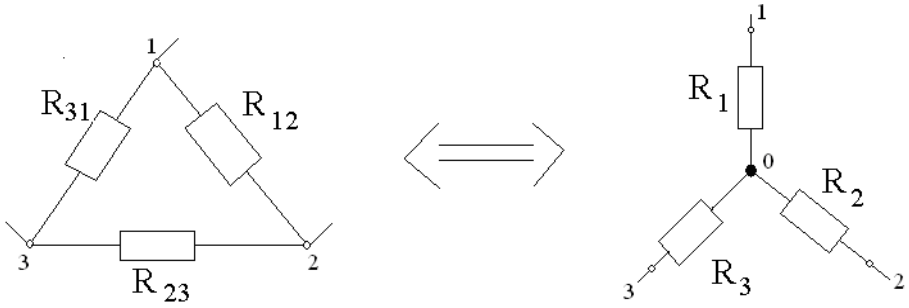


Рисунок 2.3

$$R_э = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_2 + R_3}. \qquad (2.4)$$

Формулы преобразования треугольника сопротивлений (рисунок 2.4, а) в эквивалентную звезду сопротивлений и наоборот (рисунок 2.4, в).



а) в)

Рисунок 2.4

Сопротвления лучей звезды через сопротивления сторон треугольника:

$$\begin{cases} R_1 = \dfrac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_2 = \dfrac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_3 = \dfrac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \end{cases} \qquad (2.5)$$

Сопротвления сторон треугольника через сопротивления лучей звезды:

$$\begin{cases} R_{12} = R_1 + R_2 + \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_3}; \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \dfrac{R_2 \cdot R_3}{R_1}; \quad R_{31} = R_3 + R_1 + \dfrac{R_3 \cdot R_1}{R_2}. \end{cases} \qquad (2.6)$$

2.2 Закон Ома

Закон Ома применяется для ветви или для одноконтурной замкнутой цепи. При написании закона Ома следует прежде всего выбрать положительное направление тока.

Закон Ома для ветви:

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_в + \sum_a^в E}{\sum_a^в R}, \qquad (2.7)$$

где $U_{ав} = \varphi_a - \varphi_в$ - напряжение на ветви, отсчитываемое по выбранному положительному направлению тока;

$\sum_à^â Å$ - алгебраическая сумма ЭДС ветви, со знаком «+» - ЭДС совпадающие с током, со знаком «-» - противоположные току;

$\sum_a^в R$ - арифметическая сумма сопротивлений ветви.

Закон Ома для одноконтурной схемы:

$$I = \frac{\Sigma E}{\Sigma R}, \qquad (2.8)$$

где ΣE - алгебраическая сумма ЭДС, действующих в схеме;

ΣR - арифметическая сумма сопротивлений контура.

2.3 Потенциальная диаграмма

Потенциальная диаграмма – это график распределения потенциала вдоль участка цепи или замкнутого контура. По оси абсцисс откладываются сопротивления участков в той последовательности, в которой они включены в цепь, а по оси ординат потенциалы соответствующих точек.

Например, построим график изменения потенциала цепи, приведенной на рисуноке 2.6.

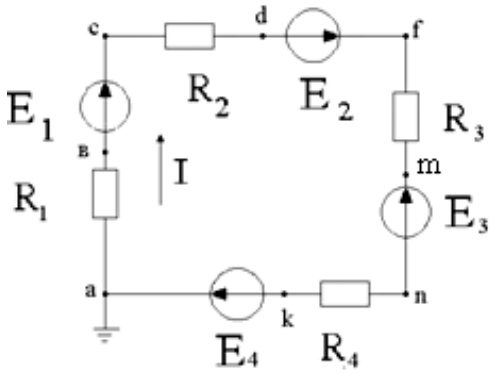


Рисунок 2.6

1. Задавшись положительным направлением тока, по закону Ома найдем:

$$I = \frac{E_1 + E_2 - E_3 + E_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

2. Вычислим потенциалы всех точек схемы, условно приняв потенциал одной любой точки за нуль:

$$\varphi_a = 0; \quad \varphi_{â} = \varphi_{à} - R_1 I; \quad \varphi_c = \varphi_{â} + E_1; \quad \varphi_d = \varphi_c - R_2 I; \quad \varphi_f = \varphi_d + E_2;$$
$$\varphi_m = \varphi_f - R_3 I; \quad \varphi_n = \varphi_{ä} - Å_3; \quad \varphi_{ê} = \varphi_n - R_4 I; \quad \varphi_a = \varphi_k + E_4.$$

3. Построим потенциальную диаграмму (рисунок 2.7). Наклон прямых, определяющих изменение потенциала вдоль всех пассивных участков неразветвленной цепи одинаков, так как тангенс угла наклона прямо пропорционален току.

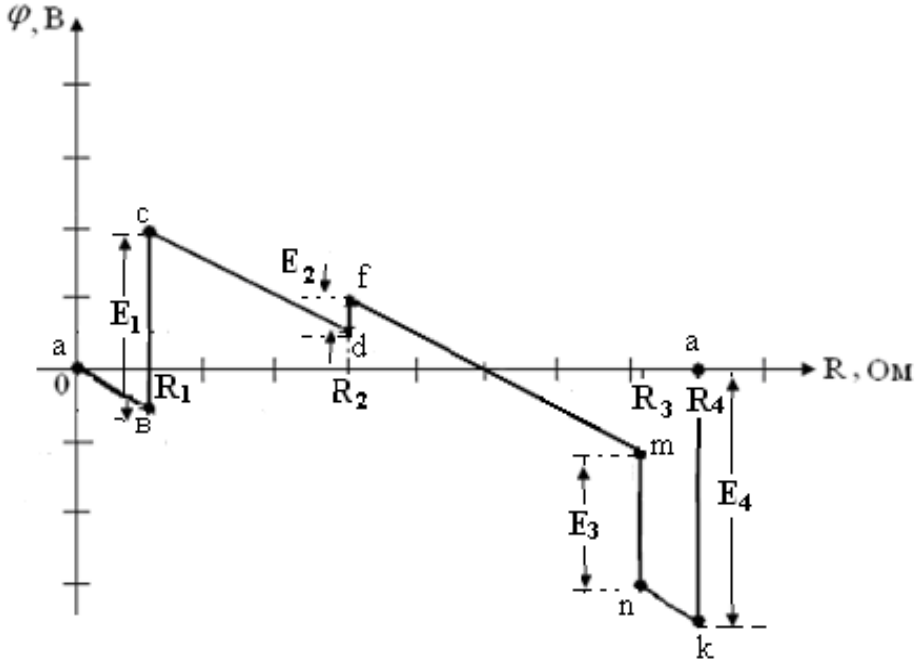


Рисунок 2.7 – Потенциальная диаграмма

2.4 Метод наложения

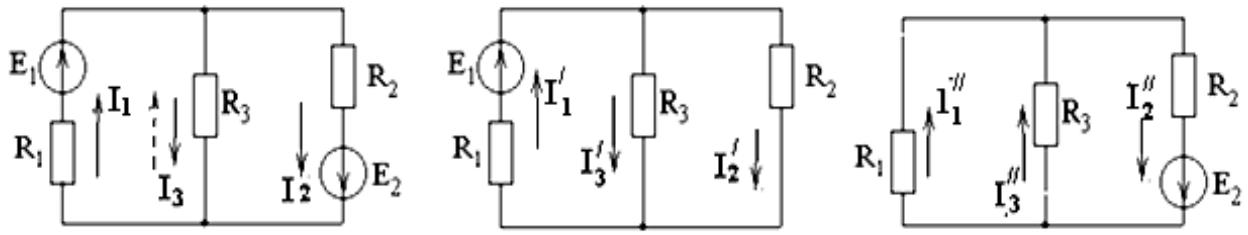
В некоторых случаях расчет линейных электрических цепей можно провести относительно просто, используя принцип наложения: ток в любой ветви схемы, содержащей несколько источников электрических энергии, можно рассчитать как алгебраическую сумму частичных токов от действия каждого источника в отдельности. Порядок расчета:

1) На основе исходной схемы составляют частные расчетные схемы, в каждой из которых действует только одна ЭДС или один источник тока. При этом остальные источники ЭДС заменяют короткозамкнутыми участками, а ветви с источниками тока размыкаются.

2) Любым методом определяются частичные токи в частных схемах.

3)Алгебраическим сложением (наложением) частичных токов определяют токи в исходной схеме.

Например, определить токи методом наложения для цепи на рисунке 2.8а.



а) в) с)

Рисунок 2.8

1. Определим частичные токи от действия E_1 (рисунок 2.8, в):

$$R_Э^I = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3};$$

$$I_1^I = \frac{E_1}{R_Э^I}; \quad I_2^I = I_1^I \frac{R_3}{R_2 + R_3}; \quad I_3^I = I_1^I \frac{R_2}{R_2 + R_3}.$$

2. Определим частичные токи от действия E_2 (рисунок 2.8, с):

$$R_Э^{//} = R_2 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3};$$

$$I_2^{//} = \frac{E_2}{R_Э^{//}}; \quad I_1^{//} = I_2^{//} \frac{R_3}{R_1 + R_3}; \quad I_3^{//} = I_2^{//} \frac{R_1}{R_1 + R_3}.$$

3. Токи в исходной схеме (рисунок 2.8, а) найдем по принципу наложения, учитывая направление токов в частных схемах (рисунки 2.8в и 2.8с):

$I_1 = I_1^{'} + I_1^{''}$;

$I_2 = I_2^{'} + I_2^{''}$;

$I_3 = I_3^{'} + I_3^{''}$, если $I_3^{'} > I_3^{''}$.

$I_3 = I_3^{''} - I_3^{'}$, если $I_3^{''} > I_3^{'}$, тогда направление тока указано на схеме 2.8,а пунктиром.

3 Лекция №3. Методы расчёта разветвленных электрических цепей постоянного тока

Цель лекции: изучение законов Кирхгофа, метода контурных токов, метода узловых потенциалов, баланса мощностей.

3.1 Законы Кирхгофа

Первый закон Кирхгофа - алгебраическая сумма всех токов, сходящихся в любом узле, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}_k = 0. \qquad (3.1)$$

Токи, направленные от узла, условно принимаются положительными, а направленные к нему – отрицательными (или наоборот).

Второй закон Кирхгофа - алгебраическая сумма падений напряжений на участках замкнутого контура равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в нём:

$$\sum_{k=1}^{n} R_k \mathrm{I}_k = \sum_{k=1}^{n} Å_k \ . \qquad (3.2)$$

Направление обхода контура выбирается произвольно. При записи левой части равенства со знаком плюс берутся падения напряжения в тех ветвях, в которых выбранное положительное направление тока совпадает с направлением обхода контура, а со знаком минус , если наоборот. При записи правой части равенства ЭДС, направления которых совпадают с выбранным направлением обхода, принимаются положительными, а если противоположно - отрицательными.

Порядок расчета для цепи, состоящей из $N_в$ ветвей, $N_у$ узлов и $N_т$ источников тока:

1) Для каждой ветви произвольно задаемся положительным направлением тока.

2) Произвольно задаемся направлением обхода контуров.

3) Составляем уравнения по законам Киргофа:

- общее число уравнений по законам Кирхгофа, равно числу неизвестных токов, $N_{ЗК} = (N_В — N_Т)$

- по первому закону Кирхгофа составляем $N_{1ЗК} = (N_у - 1)$ уравнений;

- по второму закону Кирхгофа составляем остальные уравнения $N_{2ЗК} =(N_в —N_т) — (N_у - 1)$. При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа выбирают независимые контуры так, чтобы охватить все ветви схемы, исключая ветви с источниками тока;

- решаем полученную систему относительно токов ветвей. Если какой-либо ток получился со знаком минус, то его действительное направление противоположно произвольно выбранному.

3.2 Метод контурных токов (МКТ)

При расчете по МКТ условно полагают, что в каждом независимом контуре электрической цепи течет свой контурный ток. Уравнения составляют относительно контурных токов, после чего токи ветвей определяют через контурные токи. Число уравнений в МКТ равно числу независимых контуров, то есть числу уравнений по второму закону Кирхгофа:

$$N_{МКТ} =(N_в —N_т) — (N_у - 1),$$

$N_{МКТ}$ независимых контуров выбирают так, чтобы они не содержали ветви с источниками тока.

$N_т$ контуров выбирают так, чтобы каждый из них содержал один источник тока. Контурные токи в этих контурах считаются известными, то есть равными соответствующему току источника тока и направленными как он. Для этих контуров уравнения не составляются, но их контурные токи учитываются при составлении остальных уравнений.

Уравнения по МКТ записываются в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}I_{33} + ... + R_{1K}I_{KK} + \sum_{1} J_n R_{1n} = E_{11};\\
&R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + R_{23}I_{33} + ... + R_{2K}I_{KK} + \sum_{2} J_n R_{2n} = E_{22};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&R_{K1}I_{11} + R_{K2}I_{22} + R_{K3}I_{33} + ... + R_{KK}I_{KK} + \sum_{K} J_n R_{Kn} = E_{KK},
\end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

где R_{mm} - собственное сопротивление контура m, равное сумме сопротивлений ветвей, входящих в этот контур;

R_{mp} - общее сопротивление контуров m и p, равное сопротивлению общей ветви контуров m и p (со знаком «+», если направления контурных токов, протекающих по этой ветви, одинаковы, со знаком «-», если направления контурных токов, протекающих по этой ветви,

противоположны; для цепи, содержащей только независимые источники $R_{mp} = R_{pm}$);

$J_n R_{pn}$ - напряжение на сопротивлении R_{pn} общей ветви контура p и n контура, содержащего источник тока J_n (со знаком «+», если направления токов I_{pp} и J_n, протекающих по этой ветви, одинаковы, со знаком «-», если направления токов I_{pp} и J_n, протекающих по этой ветви, противоположны);

E_{pp} - алгебраическая сумма ЭДС контура « p », со знаком «+» записываются ЭДС, направление которых совпадает с направлением контурного тока I_{pp}, в противном случае ЭДС записывается со знаком «-».

3.3 Метод узловых потенциалов (МУП)

Метод, в котором за неизвестные принимаются потенциалы узлов электрической цепи, называется методом узловых потенциалов. После определения потенциалов токи ветвей рассчитываются по закону Ома.

Число уравнений, составляемых по МУП равно $N_{муп} = N_у — N_и - 1$, где $N_и$ - число ветвей, содержащих только идеальные источники ЭДС:

- один узел схемы условно заземляется, то есть его потенциал принимается равным нулю;

- если в схеме есть ветвь с идеальным источником ЭДС Е, то при составлении уравнений по методу узловых потенциалов к нулю приравнивается потенциал одного из узлов, к которому присоединена данная ветвь. Тогда потенциал другого узла, присоединенного к этой же ветви, будет равен $\pm E$. Если в схеме нет идеальных источников ЭДС, то заземляется любой узел схемы;

- ток в ветви с идеальным источником ЭДС определяется последним с помощью первого закона Кирхгофа.

Уравнения по МУП записываются в виде:

$$\left.\begin{aligned} g_{11}\varphi_1 - g_{12}\varphi_2 - \ldots - g_{1y}\varphi_y &= \sum_1 Eg + \sum_1 J; \\ -g_{21}\varphi_1 + g_{22}\varphi_2 - \ldots - g_{2y}\varphi_y &= \sum_2 Eg + \sum_2 J; \\ -g_{y1}\varphi_1 - g_{y2}\varphi_2 - \ldots + g_{yy}\varphi_y &= \sum_y Eg + \sum_y J, \end{aligned}\right\} \qquad (3.4)$$

где g_{pp} – собственная узловая проводимость узла « p », равная сумме проводимостей ветвей, присоединенных к узлу p;

g_{mp} – общая узловая проводимость узлов p и m, равна сумме проводимостей ветвей соединяющей узлы p и m (для цепи, содержащей только независимые источники $g_{mp}=g_{pm}$);

$\sum_p Eg$ - алгебраическая сумма произведений ЭДС ветвей, присоединённых к узлу *p* на проводимости этих ветвей; со знаком « + » записываются ЭДС, направленные к узлу *p*, со знаком « - » ЭДС, направленные от узла *p*;

$\sum_p J$ - алгебраическая сумма токов источников тока, присоединённых к узлу *p*, со знаком « + » записываются токи, направленные к узлу *p*, со знаком « - » записываются токи, направленные от узла *p*.

3.4 Метод двух узлов

Для схем, имеющих два узла (например,узлы a и b), узловое напряжение U_{ab} определяется формулой:

$$U_{ab} = \frac{\sum_n E_n g_n + \sum_n J_n}{\sum_m g_m}, \qquad (3.5)$$

где $\sum E_n\ g_n$ - алгебраическая сумма произведений ЭДС ветвей на проводимости этих ветвей (ЭДС считаются положительными, если они направлены к узлу a, и отрицательными, если направлены от узла a к узлу b);

J_n – токи источников тока (положительны, если они направлены к узлу a, и отрицательны, если направлены от узла a к узлу b);

$\sum_m g_m$ - сумма проводимости всех ветвей, соединяющих узлы a и b.

3.5 Баланс мощностей

В любой замкнутой электрической цепи сумма мощностей всех источников энергии равна сумме мощностей, расходуемых в приёмниках:

$$\sum_{K=1}^{n} P_И = \sum_{K=1}^{n} P_П ,$$

где $\sum_{K=1}^{n} P_И = \sum_{K=1}^{n} (E_K I_K + U_K J_K)$ - алгебраическая сумма мощностей источников ЭДС и источников тока;

$-E_K I_K$ - мощность источника ЭДС E_K, $E_K I_K > 0$, если ЭДС E_K и ток I_K совпадают по направлению (рисунок 3.1,а); $E_K I_K < 0$, если - противоположны (рисунок 3.1,б);

$-U_K J_K$ - мощность источника тока; U_K - напряжение на зажимах источника тока, $U_K J_K > 0$, если U_K и J_K направлены так, как показано на рисунке 3.1, в;

$U_K J_K < 0$ - как показано на рисунке 3.1,г;

$\sum_{K=1}^{n} P_{П} = \sum_{K=1}^{n} I_K^2 R_K$ - арифметическая сумма мощностей, расходуемых в приёмниках.

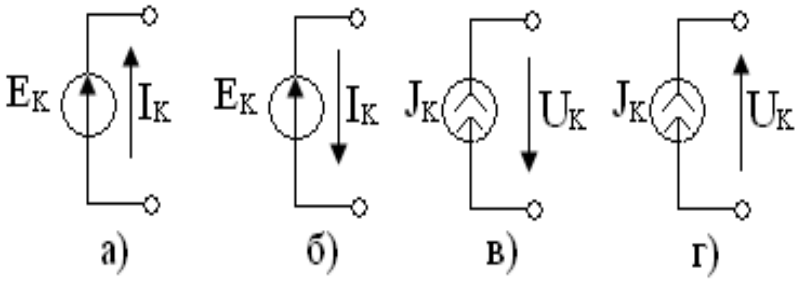


Рисунок 3.1

4 Лекция №4 Синусоидальный ток и основные характеризующие его величины

Цель лекции: усвоить основные понятия о синусоидальных токах и напряжениях; синусоидальный ток в активном сопротивлении, индуктивности и емкости

4.1 Синусоидальный ток и основные характеризующие его величины

Синусоидальным током называется ток, изменяющийся во времени по закону синуса:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

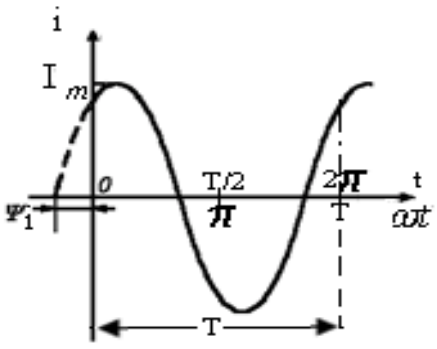


Рисунок 4.1

Где i - мгновенное значение тока $i(t)$;

u– мгновенное значение напряжения $i(t)$;

e - мгновенное значение ЭДС $i(t)$;

p - мгновенное значение мощности $p(t)$.

Наибольшее мгновенное значение переменной величины за период называется амплитудой (ее обозначают заглавной буквой с индексом *m*):

I_m - амплитуда тока;

U_m - амплитуда напряжения;

E_m - амплитуда ЭДС;

T – период;

f = 1/T – частота (Гц);

$\omega = 2\pi f$ – угловая частота (рад/с);

$(\omega t+\psi)$ – фаза;

ψ – начальная фаза (рад или град).

Если у двух синусоидальных величин $i_1=I_{m2}\sin(\omega t+\psi_1)$ и $i_2=I_{m2}\sin(\omega t+\psi_2)$, $\psi_1 \neq \psi_2$, то говорят, что они сдвинуты относительно друг друга по фазе, $\varphi = \psi_1 - \psi_2$ - сдвиг по фазе;

если $\psi_1 > \psi_2$, то синусоидальная функция опережает по фазе вторую;

если $\psi_1 = \psi_2$, то синусоидальные функции совпадают по фазе.

4.2 Действующее значение переменного тока

При расчете цепей и экспериментальном исследовании цепей синусоидального тока чаще всего пользуются понятием действующих значений синусоидальных величин (обозначаются – I,U,E).

Значение периодического тока, равное такому значению постоянного тока, который за время одного периода произведет тот же самый тепловой или электродинамический эффект, что и периодический ток, называют действующим значением периодического тока:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}\,. \qquad (4.1)$$

Аналогично определяются действующие значения ЭДС и напряжения. В соответствии с выражением (4.1) действующее значение синусоидального тока:

$$I = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \qquad (4.2)$$

Аналогичный результат можно получить для синусоидальных ЭДС и напряжений. Таким образом, действующие значения синусоидальных токов, ЭДС и напряжения меньше своих амплитудных значений в $\sqrt{2}$ раз.

4.3 Представление синусоидальных функций векторами и комплексными числами

Синусоидальная функция $A_m \sin(\omega t + \psi)$ может рассматриваться как проекция вектора, вращающегося в положительном направлении (против

часовой стрелки) с угловой скоростью ω, на ось ординат. Поэтому любая синусоидальная функция(ток, напряжение, ЭДС) может быть изображена вектором. Например, $I_m \sin(\omega t + \psi)$ на рисунке 4.2.

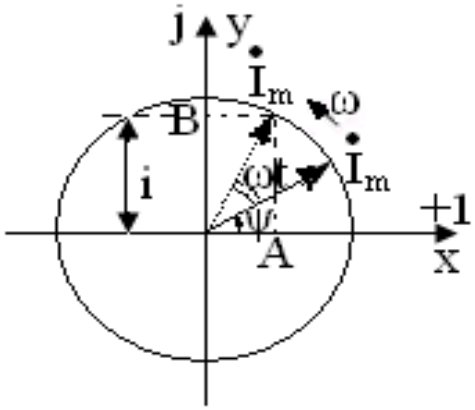


Рисунок 4.2

То, что каждому вектору в комплексной плоскости соответствует комплексное число дает основание от графического (векторного) изображения синусоидальной величины перейти к её аналитическому выражению комплексным числом, а операции с векторами заменить алгебраическими действиями. Комплексное значение $\dot{I}_m$ при t=0 можно записать в показательной, алгебраической и тригонометрической формах:

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi} = A + jB = I_m \cos\psi + jI_m \sin\psi, \qquad (4.3)$$

где $\dot{I}_m$ - комплексная амплитуда;

I_m – амплитудное значение;

ψ - начальная фаза;

$j = \sqrt{-1}$;

A – действительная часть;

B– мнимая часть.

Синусоидальная функция $I_m \sin(\omega t + \psi)$ может рассматриваться как мнимая часть комплексной функции. Условно это записывается так $I_m \sin(\omega t + \psi) = \mathrm{Im}(I_m e^{j(\omega t + \psi)})$.

Совокупность двух и более векторов , изображающих синусоидальные величины в начальный момент времени с соблюдением их взаимной ориентации по фазе называется векторной диаграммой. Обычно при расчетах и построениях пользуются действующими значениями комплексных синусоидальных функций при t=0.

4.4 Синусоидальный ток в активном сопротивлении

Если синусоидальное напряжение $u_R = U_{Rm} \sin(\omega t + \psi_u)$ приложено к сопротивлению r (рисунок 4.3,а), то через сопротивление пройдет

синусоидальный ток $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$.

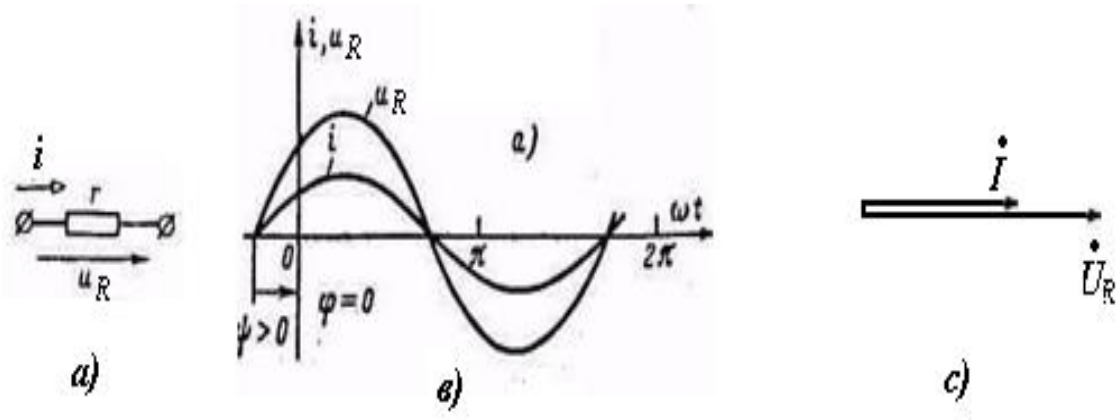


Рисунок 4.3

Напряжение на зажимах сопротивления $u_R = Ri = RI_m \sin(\omega t + \psi_i) = U_{Rm} \sin(\omega t + \psi_u)$ и ток, проходящий через это сопротивление, имеют одинаковую начальную фазу или, как говорят, совпадают по фазе. (рисунок 4.3,в).

В данном случае сдвиг по фазе равен нулю:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0,\ \cos\varphi = 1. \tag{4.4}$$

Векторная диаграмма представлена на рисунке 4.3,с.

При прохождении синусоидального тока через сопротивление *r* не только мгновенные значения напряжения на сопротивлении и тока в нем, но и амплитуды и соответственно действующие значения напряжения и тока связаны законом Ома:

$$u_R = ri;\ U_{Rm} = rI_m;\ U_R = rI.$$

4.5 Синусоидальный ток в индуктивности (идеальный случай)

Пусть через индуктивность *L* (рисунок 4.4,а) проходит ток $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$.

Электродвижущая сила самоиндукции определяется по формуле:

$$e_L = -L\frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cos(\omega t + \psi_i) = -E_{Lm} \sin(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}). \tag{4.5}$$

Значит напряжение на индуктивности

$$u_L = -e_L = U_{Lm} \sin(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}) = U_{Lm} \sin(\omega t + \psi_u),\ \text{ãäå}\ U_{Lm} = -Å_{Lm}. \tag{4.6}$$

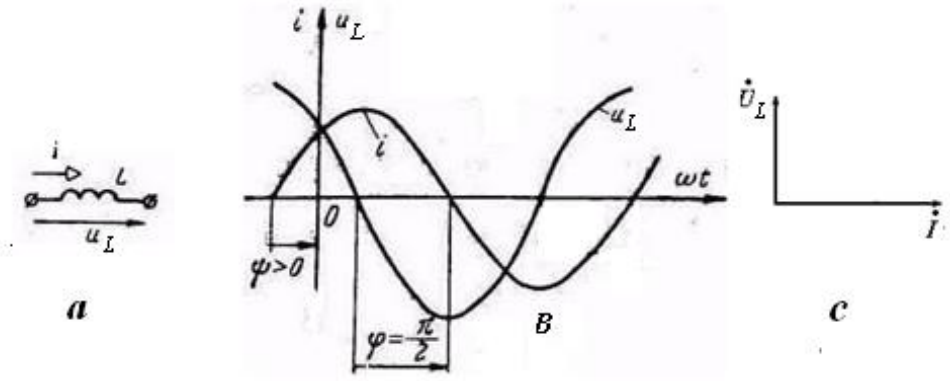


Рисунок 4.4

Полученное выражение показывает, что напряжение на индуктивности пережает ток на угол $\pi/2$ (рисунок 4.4,в).

Фазовый сдвиг равен:

$$\varphi=\psi_u-\psi_i=\frac{\pi}{2}. \tag{4.7}$$

Векторная диаграмма представлена на рисунке 4.4,с.

Амплитуда так же, как и действующие значения напряжения и тока, связаны законом Ома:

$$U_{Lm}=\omega L I_m=x_L I_m,\ U_L=x_L I. \tag{4.8}$$

Величина $x_L=\omega L$, имеющая размерность сопротивления, называется индуктивным сопротивлением; обратная ей величина $b_L=1/\omega L$ называется индуктивной проводимостью:

$$I_m=b_L U_{Lm},\ I=b_L U_L. \tag{4.9}$$

4.6 Синусоидальный ток в емкости (идеальный случай)

Пусть напряжение на емкости C (рисунок 4.5,а) синусоидально: $u_C=U_{Cm}\sin(\omega t+\psi_u)$.

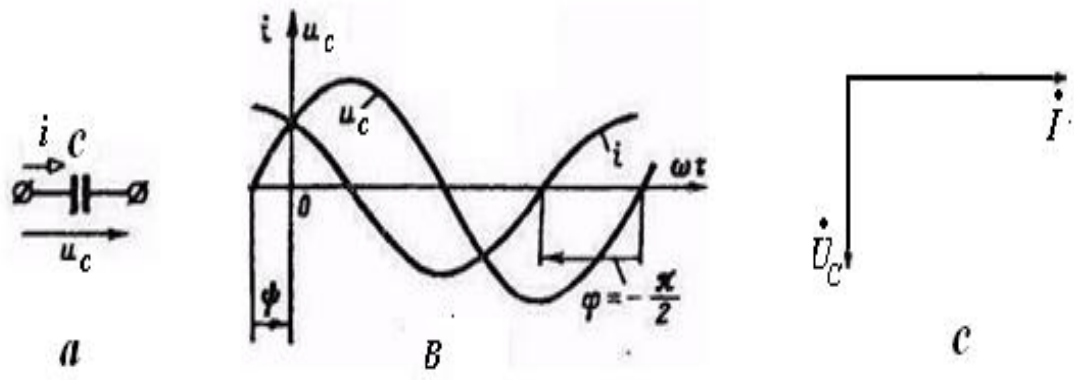


Рисунок 4.5

Ток в емкости

$$i = C\frac{du_{\tilde{N}}}{dt} = \omega C U_{\tilde{N}m}\cos(\omega t + \psi_u) = I_m \sin(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}) = I_m \sin(\omega t + \psi_i). \qquad (4.10)$$

Выражение (4.10) показывает, что ток i опережает приложенное напряжение и на угол $\frac{\pi}{2}$ (рисунок 4.5,в).

Сдвиг по фазе $\varphi = \psi_u - \psi_i = -\frac{\pi}{2}$. Векторная диаграмма представлена на рисунке 4.5,с.

Амплитуды и соответственно действующие значения напряжения и тока связаны законом Ома:

$$U_{Cm} = \frac{1}{\omega C} I_m = x_C I_m,\ U_C = x_C I. \qquad (4.11)$$

Величина $x_C = 1/\omega C$, имеющая размерность сопротивления, называется емкостным сопротивлением. Обратная ей величина $b_C = \omega C$ называется емкостной проводимостью. Следовательно,

$$I_m = b_C U_{Cm},\ I = b_C U_C. \qquad (4.12)$$

4.7 Синусоидальный ток в цепи с последовательным соединением R,L,C

Пусть в цепи (рисунок 4.6,а) проходит ток $i = I_m \sin\omega t$.

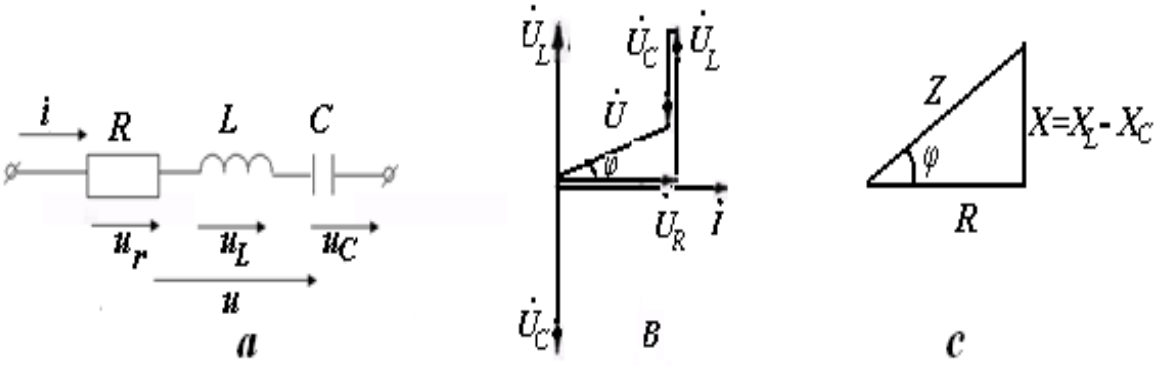


Рисунок 4.6

Напряжения на элементах цепи, учитывая сдвиг по фазе:

$$u_R = U_{Rm}\sin\omega t;$$

$$u_L = U_{Lm}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2});$$

$$u_{\tilde{N}} = U_{Cm}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}).$$

Векторная диаграмма для случая, когда $X_L > X_C$, представлена на рисунке 4.6в, где $U_P = U_L - U_C$ - реактивная составляющая напряжения, угол

$\varphi=\psi_U-\psi_I$ - сдвиг по фазе между током и напряжением.

Из диаграммы:

$$U=\sqrt{U_R^2+U_P^2}=\sqrt{U_R^2+(U_L-U_C)^2}=\sqrt{I^2R^2+(I\,X_L-I\,X_C)^2}=I\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}=$$

$$=I\sqrt{R^2+X^2}=I\,Z,$$

где $X=X_L-X_C$ - реактивное сопротивление; $Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}$ - полное сопротивление, треугольник сопротивлений приведен на рисунке 4.6,с.

5 Лекция №5. Символический метод расчета цепей синусоидального тока

Цель лекции: ознакомить с применением метода комплексных амплитуд для расчета цепей синусоидального тока.

5.1 Основы символического метода расчета цепей синусоидального тока

Метод расчета цепей синусоидального тока, основанный на изображении гармонических функций времени комплексными числами, называется символическим методом.

Токи и напряжения заменяют их комплексными изображениями, то есть символами. Для этого вводится умножение вектора $\dot{A}=Ae^{j\psi_A}$ на оператор поворота $j=\mathring{a}^{j90^0}$ и $-j=\mathring{a}^{-j90^0}$, что соответствует его повороту на $\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$, соответственно $j\dot{A}=Ae^{j(\psi_A+90^0)}$ u $-j\dot{A}=Ae^{j(\psi_A-90^0)}$. Например, для тока i, напряжения на резистивном сопротивлении u_R, напряжения на индуктивности u_L и емкости u_C, соответствующие комплексные значения запишутся так:

$$i=I_m\sin(\omega t+\psi) \quad \rightarrow \quad \dot{I}=Ie^{j\psi};$$

$$u_R=ri=U_{Rm}\sin(\omega t+\psi) \quad \rightarrow \quad \dot{U}_R=r\dot{I};$$

$$u_L=L\frac{di}{dt}=U_{Lm}\sin(\omega t+\psi+\frac{\pi}{2}) \quad \rightarrow \quad \dot{U}_L=j\omega L\dot{I};$$

$$u_C=\frac{1}{c}\int idt=U_{Cm}\sin(\omega t-\frac{\pi}{2}) \quad \rightarrow \quad \dot{U}_C=-j\frac{1}{\omega C}\dot{I},$$

где $jx_L=j\omega L$ – комплексное сопротивление индуктивности;

$-jx_C=-j\frac{1}{\omega\tilde{N}}$ - комплексное сопротивление емкости.

Таким образом, при синусоидальном токе можно перейти от дифференциальных уравнений, составленных для мгновенных значений, к алгебраическим уравнениям, составленным относительно комплексных значений. Это значит, что все методы расчета и вытекающие из них соотношения для цепей постоянного тока, применимы и для цепей синусоидального тока, если все входящие в уравнения величины выражены в комплексной форме.

5.2 Закон Ома в комплексной форме

Для схемы (рисунок 5.1) запишем уравнение по второму закону Кирхгофа относительно мгновенных значений:

$$u_R + u_L + u_C = e \quad \text{или} \quad iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = e. \tag{5.1}$$

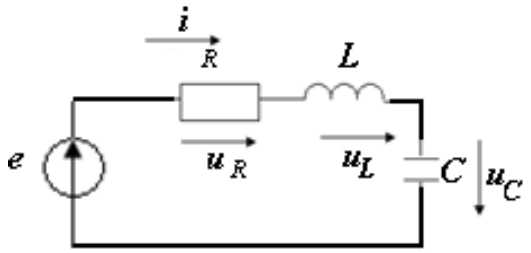


Рисунок 5.1

Комплексное уравнение, соответствующее уравнению (5.1)

$$R\dot{I} + j\omega L\dot{I} - j\frac{1}{\omega C}\dot{I} = \dot{E}. \tag{5.2}$$

Откуда,

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R + jX_L - jX_C} = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}} = \dot{U}Y, \tag{5.3}$$

где $\underline{Z} = R + jX_L - jX_C = R + jX$ - комплексное сопротивление рассматриваемой электрической цепи.

Выражение (5.3) – закон Ома в комплексной форме для контура (рисунок 5.1).

Комплексное сопротивление $\underline{Z}$ в тригонометрической и показательной формах имеет вид $\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = Z\cos\varphi + jZ\sin\varphi$. Здесь Z - модуль комплексного сопротивления $\underline{Z}$, φ – сдвиг по фазе между током и напряжением $\varphi=\psi_u-\psi_i$, который может быть со знаком «+», если характер индуктивный и со знаком «-» - емкостной.

Величина, обратная комплексной проводимости, называется комплексным сопротивлением:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Ze^{j\varphi}} = ye^{-j\varphi}. \tag{5.4}$$

Комплексная проводимость Y в тригонометрической и показательной формах имеет вид $\underline{Y} = y\cos\varphi - jy\sin\varphi = g - jb$.

Величина $b = b_L - b_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C$ называется реактивной проводимостью цепи, которая в зависимости от знака может иметь индуктивный ($b>0$) или емкостный *(b<0)* характер. Величина $g = 1/r$ называется активной проводимостью. Величина $y = \frac{1}{Z}$ - модуль полной проводимости.

$$y = \sqrt{g^2 + b^2}; \varphi = arctg\frac{b}{g}$$

5.3 Законы Кирхгофа в комплексной форме

Первый закон Кирхгофа в комплексной форме: алгебраическая сумма комплексов токов в узле равна нулю:

$$\sum_{\hat{E}=1}^{n} \dot{I}_{\hat{E}} = 0. \qquad (5.5)$$

Второй закон Кирхгофа в комплексной форме: алгебраическая сумма комплексов падений напряжений на участках замкнутого контура равна алгебраической сумме комплексов ЭДС, действующих в этом контуре.

$$\sum_{K=1}^{n} \underline{Z}_K \dot{I}_K = \sum_{K=1}^{n} \dot{E}_K . \qquad (5.6)$$

5.4 Параллельное соединение сопротивления, индуктивности и емкости

Если к зажимам электрической цепи, состоящей из параллельно соединенных элементов *R, L* и *C* (рисунок 5.2), приложено синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$, то синусоидальный ток, проходящий через эту цепь, равен $i = i_R + i_L + i_C$.

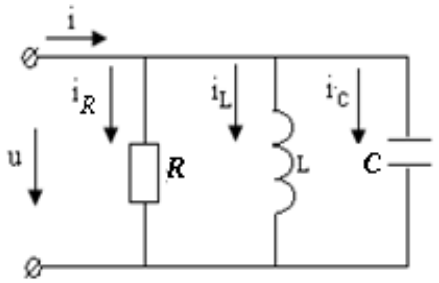


Рисунок 5.2

Токи параллельных ветвей можно записать по закону Ома:

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}}{R} = \frac{U}{R} e^{j\psi_u} = I_R e^{j\psi_u};$$

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}}{jX_L} = \frac{U}{X_L} e^{(j\psi_u - 90^0)} = I_L e^{(j\psi_u - 90^0)};$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{-jX_C} = \frac{U}{X_C} e^{(j\psi_u + 90^0)} = I_C e^{(j\psi_u + 90^0)};$$

Ток i_R в сопротивлении R совпадает по фазе с напряжением *u,* ток i_L в индуктивности *L* отстает, а ток i_C в емкости опережает напряжение на 90^0. Ток в неразветвленной части цепи равен $\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C$.

На рисунке 5.3 приведена векторная диаграмма рассматриваемой цепи, для случая, когда реактивная проводимость цепи имеет индуктивный характер (*b>0*) и соответственно ток отстает по фазе от напряжения $(\varphi > 0)$.

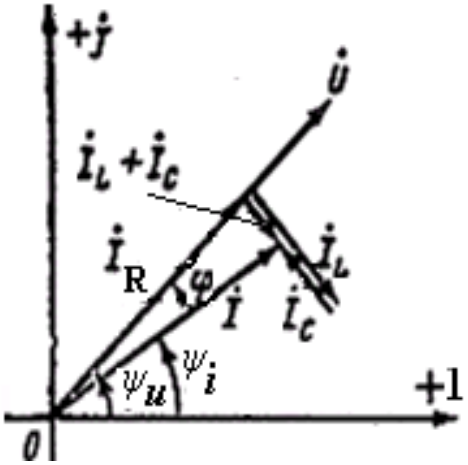


Рисунок 5.3

6 Лекция №6. Топографические диаграммы

Цель лекции: научиться строить векторные и топографические диаграммы.

6.1 Векторные и топографические диаграммы

Совокупность векторов, изображающих синусоидально изменяющиеся ЭДС, напряжения и токи, называется векторной диаграммой**.** Векторные диаграммы наглядно иллюстрируют ход решения задачи. При точном построении векторов можно непосредственно из диаграммы определить амплитуды и фазы искомых величин. Приближенное (качественное) построение диаграмм при аналитическом решении служит надежным

контролем корректности хода решения. При построении векторных диаграмм для цепей с последовательным соединением элементов за базовый вектор следует принимать вектор тока. Для цепей с параллельным соединением элементов за базовый вектор следует принять вектор напряжения, ориентируя относительно него векторы токов в параллельных ветвях.

Для наглядного определения величины и фазы напряжения между различными точками электрической цепи удобно использовать топографические диаграммы.

На топографической диаграмме, представляющей собой в принципе векторную диаграмму, порядок расположения векторов напряжений строго соответствует порядку расположения элементов в схеме, а вектор падения напряжения на каждом последующем элементе примыкает к концу вектора напряжения на каждом предыдущем элементе. Потенциал одной точки, по отношению к которой строится топографическая диаграмма, принимается равным нулю.

1. В качестве примера построим топографическую диаграмму потенциалов для неразветвленной схемы (рисунок 6.1).

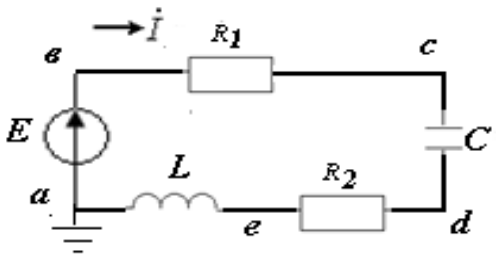


Рисунок 6.1

При построении диаграммы зададимся масштабами токов и напряжений. Векторную диаграмму можно строить, имея запись комплекса в показательной форме, т.е. по значениям модуля и фазы. Однако на практике удобнее проводить построения, используя алгебраическую форму записи, поскольку при этом вещественная и мнимая составляющие комплексной величины непосредственно откладываются на соответствующих осях комплексной плоскости, определяя положение точки на ней.

Для построения топографической диаграммы предварительно осуществим расчет комплексного тока и комплексных потенциалов.

Ток в цепи $\dot{I} = \dfrac{\dot{E}}{R_1 + R_2 + j(X_L - X_C)}$.

Обозначив на схеме (рисунок 5.5) разнопотенциальные точки и приняв потенциал точки «а» за нуль, определим потенциалы остальных точек схемы:

$$\dot{\varphi}_{à} = 0; \quad \dot{\varphi}_{e} = \dot{\varphi}_{a} + jX_{L}\dot{I}; \quad \dot{\varphi}_{d} = \dot{\varphi}_{e} + R_{2}\dot{I}; \quad \dot{\varphi}_{C} = \dot{\varphi}_{d} - jX_{C}\dot{I};$$

$$\dot{\varphi}_{â} = \dot{\varphi}_{Ñ} + R_{1}\dot{I}; \quad \dot{\varphi}_{à} = \dot{\varphi}_{â} - \dot{A} = 0.$$

Построим топографическую диаграмму (рисунок 6.2).

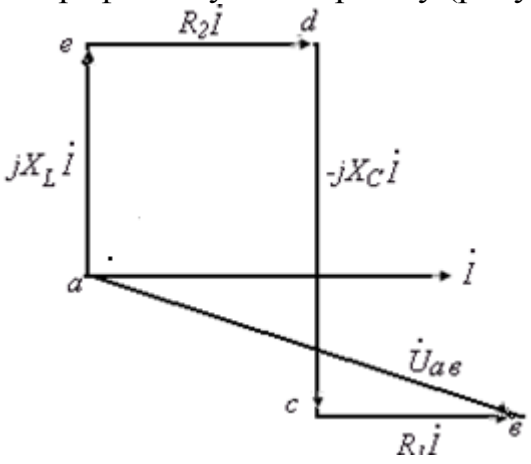


Рисунок 6.2

Необходимо отметить, что вектора напряжений на топографической диаграмме направлены противоположно направлениям напряжений относительно соответствующих точек схемы. Вектор ЭДС направлен относительно точек топографической диаграммы одинаково с положительным направлением ЭДС на схеме.

2.. Построим топографическую диаграмму потенциалов для разветвленной схемы (рисунок 6.3).

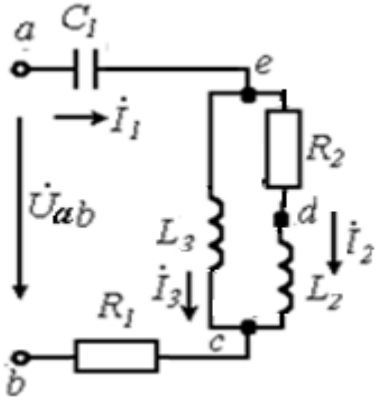


Рисунок 6.3

Для построения топографической диаграммы предварительно осуществим расчет комплексов токов и комплексных потенциалов для разветвленной схемы.

Токи ветвей

$$\dot{I}_{1} = \frac{\dot{U}_{ab}}{R_{1} - jX_{C} + \dfrac{(-jX_{C})(R_{2} + jX_{L})}{R_{2} + jX_{L} - jX_{C}}};$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{-jX_C}{R_2 + jX_L - jX_C};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 \frac{R_2 + jX_L}{R_2 + jX_L - jX_C}.$$

Обозначим на схеме (рисунок 6.3) разнопотенциальные точки и приняв потенциал точки «с» за нуль, определим потенциалы остальных точек схемы:

$\dot{\varphi}_C = 0;\quad \dot{\varphi}_d = \dot{\varphi}_c + jX_{L2}\dot{I}_2;\quad \dot{\varphi}_e = \dot{\varphi}_d + R_2\dot{I}_2;\quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3;\quad \dot{\varphi}_a = \dot{\varphi}_e - jX_{C1}\dot{I}_1;$

$\dot{\varphi}_b = \dot{\varphi}_{\tilde{N}} - R_1\dot{I}_1;\quad \dot{U}_{àb} = \dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_b.$

Построим топографическую диаграмму (рисунок 6.4) – последовательность построения векторов указан на схеме номерами.

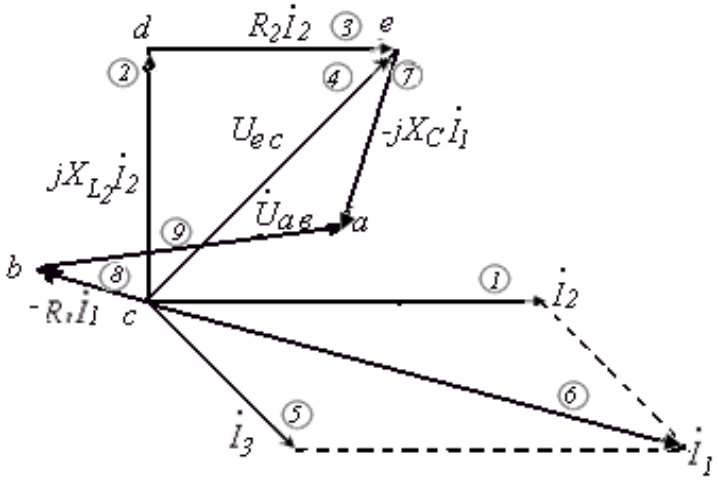


Рисунок 6.4

7 Лекция №7. Мощность в цепях синусоидального тока

Цель лекции: познакомиться с понятиями о мгновенной, активной, реактивной, полной и комплексной мощностей синусоидального тока.

7.1 Мгновенная, активная, реактивная и полная мощности в цепях синусоидального тока

Интенсивность передачи или преобразования энергии называется мгновенной мощностью р.

$$p = \frac{dw}{dt}. \qquad (7.1)$$

Выражение для мгновенного значения мощности в электрических цепях имеет вид:

$$p = ui. \tag{7.2}$$

Приняв начальную фазу напряжения за нуль, а сдвиг фаз между напряжением и током за $-\varphi$, получим:

$$p = ui = U_m \sin\omega t \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi) = U_m I_m \sin\omega t \sin(\omega t - \varphi) =$$
$$\frac{U_m I_m}{2}[\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] = UI\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi). \tag{7.3}$$

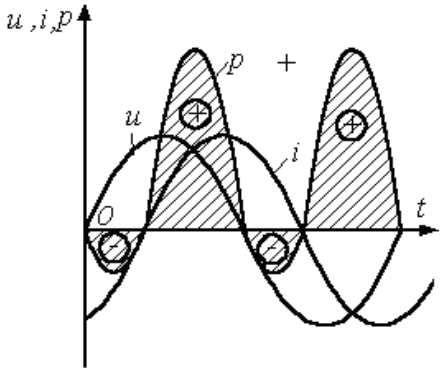


Рисунок 7.1

Когда мгновенная мощность отрицательна (рисунок 7.1), т.е. когда направления напряжения и тока в двухполюснике противоположны, энергия возвращается из двухполюсника к источнику питания. Среднее за период значение мгновенной мощности называется активной мощностью.

$$p = \frac{1}{T}\int_0^T pdt = UI\cos\varphi(Bm). \tag{7.4}$$

Активная мощность, потребляемая пассивным двухполюсником, не может быть отрицательной (иначе двухполюсник будет генерировать энергию), поэтому $\cos\varphi \geq 0$, т.е. на входе пассивного двухполюсника $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Случай P=0, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ теоретически возможен для двухполюсника, не имеющего активных сопротивлений, а содержащего только идеальные индуктивные и емкостные элементы.

Резистор (идеальное активное сопротивление).

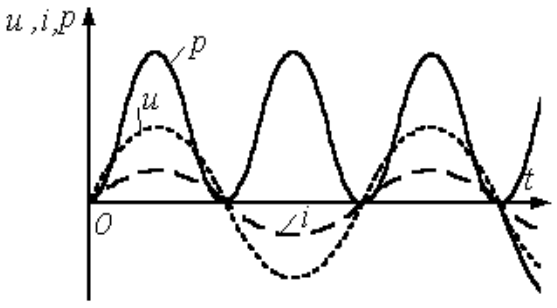


Рисунок 7.2

Здесь напряжение и ток (рисунок 7.2) совпадают по фазе ($\varphi = 0$), поэтому мощность $p=ui$ всегда положительна, т.е. резистор потребляет активную мощность

$$P = UI\cos\varphi = \left|\cos 0 = 1\right| = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}. \qquad (7.5)$$

Катушка индуктивности (идеальная индуктивность).

При идеальной индуктивности ток отстает от напряжения по фазе на $\varphi = \frac{\pi}{2}$, поэтому в соответствии с (7.3) можно записать

$$p = U_L I_L \cos\frac{\pi}{2} - U_L I_L \cos(2\omega t - \frac{\pi}{2}) = -U_L I_L \sin 2\omega t. \qquad (7.6)$$

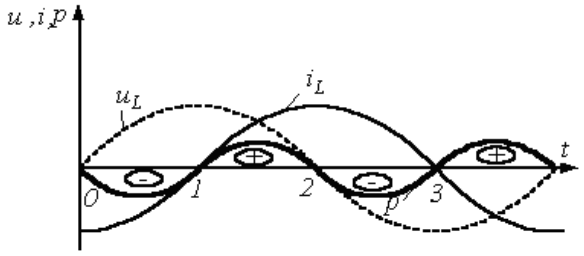


Рисунок 7.3

Таким образом, в катушке индуктивности активная мощность не потребляется (P=0). В цепи происходит обмен энергией: «+» - энергия источника преобразуется в энергию магнитного поля катушки $\frac{Li^2}{2}$; «-» - энергия, запасенная в магнитном поле, возвращается источнику (рисунок 7.3).

Конденсатор (идеальная емкость).

Аналогичный характер имеют процессы и для идеальной емкости. Здесь $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, поэтому из (7.3) вытекает, что

$$p = U_C I_C \sin 2\omega t. \qquad (7.7)$$

Таким образом, в конденсаторе активная мощность не потребляется (P=0). Происходит только циркуляция энергии: электрическая энергия запасается в электрическом поле конденсатора на протяжении четверти периода (заряд конденсатора), а на протяжении следующей четверти периода вновь возвращается в сеть (разряд конденсатора). В силу этого катушку индуктивности и конденсатор называют реактивными элементами, а их сопротивления X_L и X_C, в отличие от активного сопротивления R резистора, – реактивными. Интенсивность обмена энергии принято характеризовать реактивной мощностью:

$$Q = UI\sin\varphi \text{ (ВАр).} \tag{7.8}$$

Она положительна при отстающем токе (индуктивная нагрузка- $\varphi > 0$) и отрицательна при опережающем токе (емкостная нагрузка- $\varphi < 0$).

Помимо понятий активной и реактивной мощностей в электротехнике широко используется понятие полной мощности:

$$S = UI(BA). \tag{7.9}$$

Активная, реактивная и полная мощности связаны следующим соотношением:

$$S = \sqrt{p^2 + Q^2}. \tag{7.10}$$

Отношение активной мощности к полной называют коэффициентом мощности. Из приведенных выше соотношений видно, что коэффициент мощности равен косинусу угла сдвига между током и напряжением. Итак:

$$\cos\varphi = \frac{P}{S}. \tag{7.10}$$

Из выражений (7.9) и (710) видно, что активная, реактивная и полная мощности можно представить в виде треугольника мощностей (рисунок 7.4).

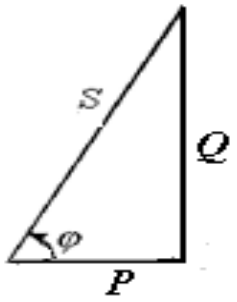


Рисунок 7.4

7.3 Комплексная мощность

Активную, реактивную и полную мощности можно определить, пользуясь комплексными изображениями напряжения и тока. Пусть $\dot{U} = Ue^{j\psi_i}$, а $\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$.

Тогда комплекс полной мощности:

$$S = \dot{U}\overset{\times}{I}, \tag{7.11}$$

где $\overset{\times}{I}$ - комплекс, сопряженный с комплексом $\dot{I}$.

Комплекс полной мощности может быть записан в показательной, тригонометрической и алгебраической формах:

$$\begin{aligned} S &= \dot{U}\overset{\times}{I} = Ue^{j\psi_u} \cdot Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = UIe^{\pm j\varphi} = Se^{\pm j\varphi} = \\ &= UI\cos\varphi \pm jUI\sin\varphi = P \pm jQ. \end{aligned} \tag{7.12}$$

В выражении (7.12) реактивная мощность со знаком «+» будет при индуктивном характере нагрузки, а со знаком «-» - при емкостном.

7.4 Баланс мощностей для цепей синусоидального тока

Для любой замкнутой электрической цепи алгебраическая сумма комплексов мощностей, вырабатываемых источниками электрической энергии, равна арифметической сумме комплексов мощностей потребляемых в нагрузке:

$$\sum_{K=1}^{n}(\dot{U}_K \overset{*}{J}_K + \dot{E}_K \overset{*}{I}_K) = \sum_{K=1}^{n} I_K^2 \underline{Z}_K \ , \qquad (7.13)$$

где $\sum_{K=1}^{n}(\dot{U}_K \overset{*}{J}_K + \dot{E}_K \overset{*}{I}_K)$ - алгебраическая сумма мощностей источников ЭДС и источников тока:

- $\dot{E}_K \overset{*}{I}_K$ - мощность источника ЭДС E_K, $\dot{E}_K \overset{*}{I}_K > 0$, если ЭДС E_K и ток I_K направлены одинаково (рисунок 7.5,а), $\dot{E}_K \overset{*}{I}_K < 0$, если - противоположно (рисунок 7.5,б);

$-\dot{U}_K \overset{*}{J}_K$ - мощность источника тока; U_K - напряжение на зажимах источника тока, $\dot{U}_K \overset{*}{J}_K > 0$, если U_K и J_K направлены так, как показано на рисунке 7.5, в; $\dot{U}_K \overset{*}{J}_K < 0$, если U_K и J_K направлены так, как показано на рисунке 7.5,г;

$\sum_{K=1}^{n} I_K^2 \underline{Z}_K$ - арифметическая сумма мощностей, расходуемых в приёмниках, $I_K^2 \underline{Z}_K = I_K^2 R_K + jI_K^2(X_{LK} - X_{CK})$ - первое слагаемое соответствует активной мощности, второе – реактивной, знак «+» при индуктивном характере, «-» - при емкостном.

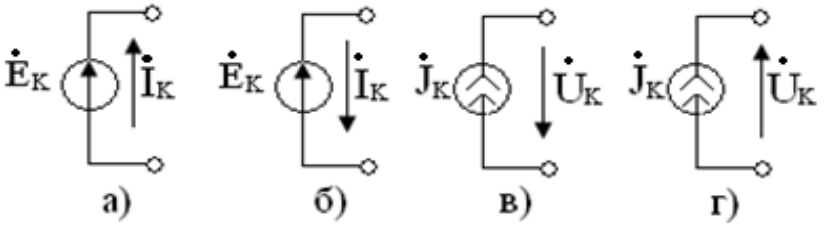


Рисунок 7.5

8 Лекция № 8. Входные и передаточные характеристики

Цель лекции: исследовать входные и передаточные характеристики простейших цепей.

8.1 Входные характеристики

Под входной характеристикой понимают зависимость $\underline{Z}_{âõ}(j\omega) = Z_{âõ}(\omega)e^{j\varphi_{âõ}(\omega)}$ в свою очередь состоит из двух характеристик:

АЧХ - $Z_{âõ}(\omega)$ и ФЧХ - $\varphi_{ÂÕ}(\omega)$.

Рассмотрим входные характеристики простейших цепей RC (рисунок 8.1) и RL (рисунок 8.4).

Граничная частота- это частота, при которой модуль реактивного сопротивления равен активному.

Для цепи RL: $\omega_{ãð}L = R$, тогда $\omega_{ãð} = \frac{R}{L}$ или $f_{ãð} = \frac{R}{2\pi L}$.

Для цепи RC: $\frac{1}{\omega_{ãð}\tilde{N}} = R$, тогда $\omega_{гр} = \frac{1}{RC}$ или $f_{гр} = \frac{1}{2\pi RC}$.

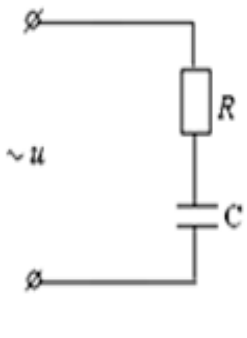


Рисунок 8.1

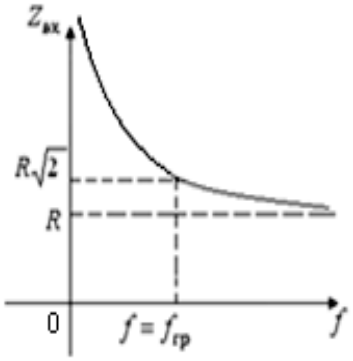


Рисунок 8.2

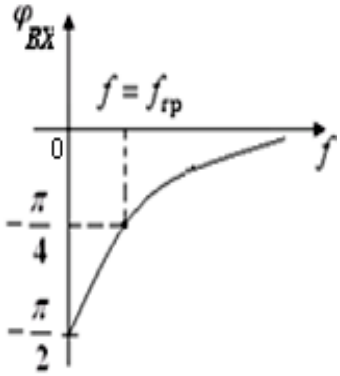


Рисунок 8.3

Для схемы 8.1, запишем:

$$Z_{ВХ} = R - j\frac{1}{-} = R(1 - j\frac{1}{\omega CL}) = R(1 - j\frac{\omega_{гр}}{\omega}) = R(1 - j\frac{f_{гр}}{f}).$$

Амплитудно-частотная характеристика

$$Z_{ВХ} = R\sqrt{1 + (\frac{1}{\omega CL})^2} = R\sqrt{1 + (\frac{f_{гр}}{f})^2}.$$

(8.1)

Фазо-частотная характеристика:

$$\varphi_{BX} = arctg(-\frac{X_C}{R}) = -arctg\frac{1}{\omega cR} = -arctg\frac{f_{гр}}{f} \qquad (8.2)$$

На основании (8.1 и 8.2) построим соответственно $Z_{âõ}(\omega)$ (рисунок 8.2) и $\varphi_{ÂÕ}(\omega)$ (рисунок 8.3) для цепи RC.

Для схемы 8.4, запишем:

$$Z_{BX} = R + j\omega L = R(1 + j\frac{\omega}{\omega_{гр}}) = R(1 + j\frac{f}{f_{гр}}),$$

Амплитудно-частотная характеристика:

$$Z_{вх} = \mathrm{R}\sqrt{1+\left(\frac{\omega \mathrm{L}}{R}\right)^2} = R\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_{гр}}\right)^2}, \qquad (8.3)$$

Фазо-частотная характеристика:

$$\varphi_{BX} = arctg\frac{X_C}{R} = arctg\frac{\omega L}{R} = arctg\frac{f}{f_{гр}}. \qquad (8.4)$$

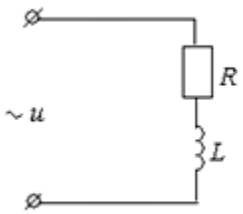


Рисунок 8.4

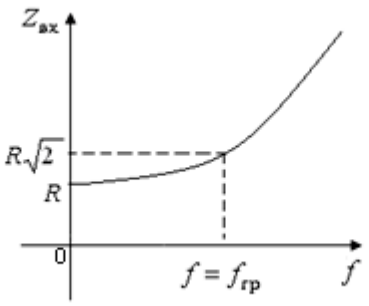


Рисунок 8.5

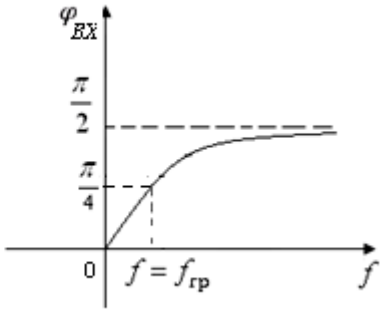


Рисунок 8.6

На основании (8.3 и 8.4) построим соответственно $Z_{âõ}(\omega)$ (рисунок 8.5) и $\varphi_{ÂÕ}(\omega)$ (рисунок 8.6) для цепи RL.

8.2 Передаточная функция по напряжению

Комплексным коэффициентом передачи по напряжению называется отношение:

$$\underline{Í}_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1},$$

где $\dot{U}_2$ - выходное;

$\dot{U}_1$ - входное напряжение.

Совокупность коэффициентов передачи на различных частотах называется комплексной передаточной функцией и обозначается:

$$\underline{H}_U(j\omega)=\frac{\dot{U}_2(j\omega)}{\dot{U}_1(j\omega)} \text{ или } \underline{H}_U=H_U e^{j\varphi_H},$$

где $H_U(\omega)$- АЧХ передаточной функции;

$\phi_H(\omega)$ - ФЧХ передаточной функции.

Рассмотрим передаточную функцию по напряжению на примере цепи RC (рисунок 8.7).

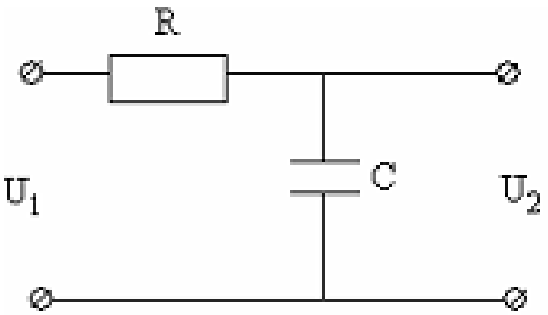


Рисунок 8.7

Комплексная передаточная функция по напряжению:

$$\underline{H}_U=\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=\frac{\frac{1}{j\omega c}}{R+\frac{1}{j\omega c}}=\frac{1}{1+j\omega cR}=\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_{гр}}}.$$

Амплитудно-частотная характеристика комплексной передаточной функции по напряжению:

$$H_U=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_{гр}})^2}}.$$

(8.5)

Фазо-частотная характеристика комплексной передаточной функции по напряжению:

$$\varphi_H=arctg(-\omega CR)=-arctg\left(\frac{\omega}{\omega_{гр}}\right). \quad (8.6)$$

По выражениям (8.5) и (8.6) построим соответственно АЧХ передаточной функции (рисунок 8.8) и ФЧХ передаточной функции (рисунок 8.9).

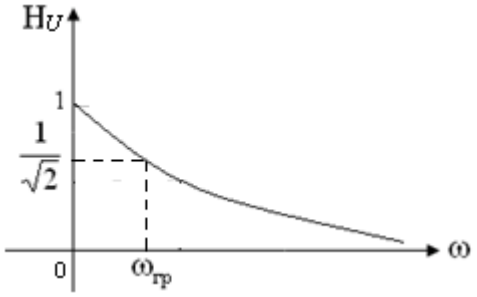


Рисунок 8.8

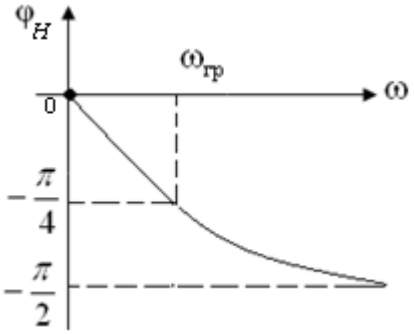


Рисунок 8.9

Для цепи *RL*(рисунок 8.10).

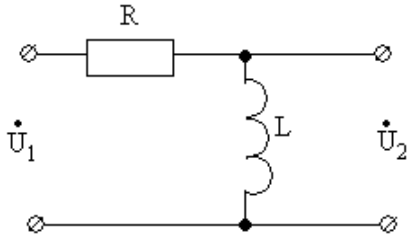


Рисунок 8.10

Комплексная передаточная функция по напряжению:

$$H_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_{гр}}}{1 + (\dfrac{\omega}{\omega_{гр}})}.$$

Амплитудно-частотная характеристика комплексной передаточной функции по напряжению:

$$H_U = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{\dfrac{\omega}{\omega_{гр}}}{\sqrt{1 + (\dfrac{\omega}{\omega_{гр}})^2}}. \qquad (8.7)$$

Фазо-частотная характеристика комплексной передаточной функции по напряжению:

$$\varphi_H = 90^0 - arctg\frac{\omega L}{R} = 90^0 - arctg\frac{\omega}{\omega_{гр}}. \qquad (8.8)$$

По выражениям (8.7) и (8.8) построим соответственно АЧХ (рисунок 8.11) и ФЧХ передаточной функции (рисунок 8.12) для цепи *RL*.

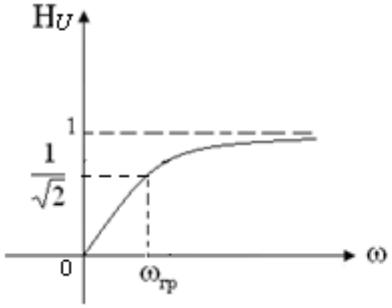


Рисунок 8.11

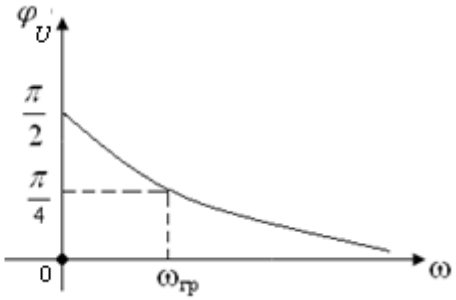


Рисунок 8.12

9 Лекция №9. Резонанс напряжений

Цель лекции: изучить резонансные явления в последовательном колебательном контуре.

9.1 Резонанс напряжений

Резонансом называется такой режим работы цепи, включающей в себя индуктивные и емкостные элементы, при котором ее входное сопротивление вещественно. Следствием этого является совпадение по фазе тока на входе цепи с входным напряжением.

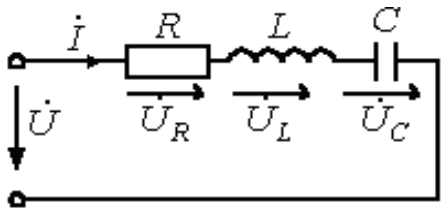


Рисунок 9.1

Для цепи на рисунке 9.1 имеет место:

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{I}[R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})] = \dot{I}\,\underline{Z},$$

где

$$\underline{Z} = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}\, e^{j\varphi}, \qquad (9.1)$$

$$\varphi = arctg\frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \qquad (9.2)$$

В зависимости от соотношения величин ωL и $\frac{1}{\omega \tilde{N}}$ возможны три различных случая:

1) В цепи преобладает индуктивность, т.е. $\omega L > \frac{1}{\omega \tilde{N}}$, а, следовательно, $\dot{U}_L > \dot{U}_C$.

Этому режиму соответствует векторная диаграмма на рисунке 9.2,а.

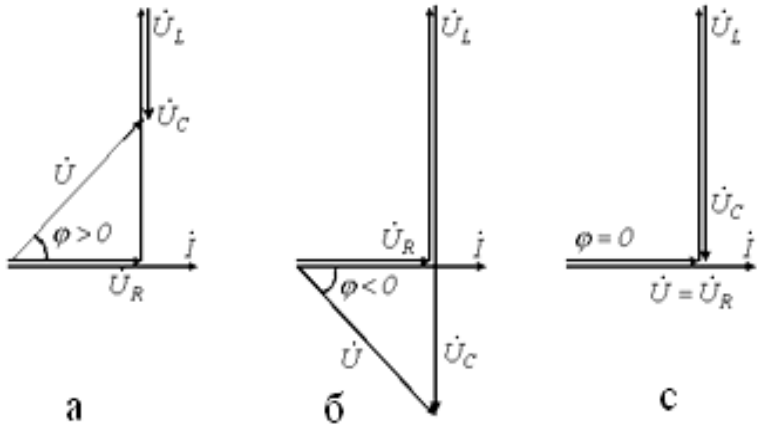


Рисунок 9.2

2) В цепи преобладает емкость, т.е. $\omega L < \frac{1}{\omega C}$, а значит, $\dot{U}_L < \dot{U}_C$. Этот случай отражает векторная диаграмма на рисунке 9.2,б.

3) $\dot{U}_L = \dot{U}_C$ - случай резонанса напряжений (рисунок 9.2,с).

Условие резонанса напряжений:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}. \qquad (9.3)$$

При этом, как следует из (9.1) и (9.2), $\underline{Z} = R;\ \varphi = 0$.

При резонансе напряжений ток в цепи наибольший $I_o = \frac{U}{R}$.

Напряжения на индуктивном и емкостном элементах, которые могут во много раз превышают величину напряжения источника питания. Физическая сущность резонанса заключается в периодическом обмене энергией между магнитным полем катушки индуктивности и электрическим полем конденсатора, причем сумма энергий полей остается постоянной.

Как показывает анализ уравнения (9.3), режима резонанса можно добиться путем изменения параметров L и C, а также частоты. На основании (9.3) резонансная частота:

$$f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad (9.4)$$

9.2 Добротность и затухание последовательного колебательного контура

Добротность Q определяется отношением напряжения на индуктивном (емкостном) элементе в режиме резонанса к входному напряжению

$$Q = \frac{U_{LP}}{U} = \frac{U_{CP}}{U} = \frac{\omega_p L}{R} = \frac{1}{\omega_p CR}. \qquad (9.5)$$

Добротность характеризует “избирательные” свойства резонансного контура.

Другим параметром резонансного контура является характеристическое сопротивление, связанное с добротностью соотношением:

$$\rho = QR, \qquad (9.6)$$

или с учетом (9.4) и (9.5) для ρ можно записать:

$$\rho = \omega_\rho L = \frac{1}{\omega_p C} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \qquad (9.7)$$

Тогда добротность:

$$Q = \frac{X_{Lp}}{R} = \frac{X_{cp}}{R} = \frac{\rho}{R}\ . \qquad (9.8)$$

Затухание - величина обратная добротности:

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\rho}. \qquad (9.9)$$

9.3 Частотные характеристики последовательного колебательного контура

Зависимость реактивного сопротивления контура от частоты $X = f(\omega)$ (рисунок 9.3), где $X = X_L - X_c$, $X_L = \omega L$, $X_c = \frac{1}{\omega c}$.

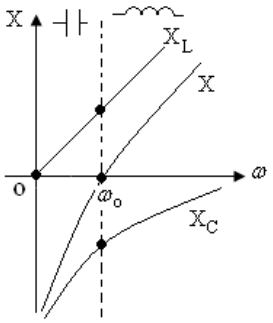


Рисунок 9.3

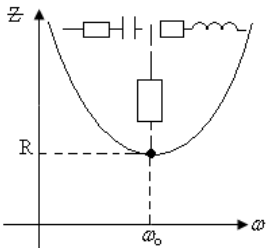


Рисунок 9.4

Зависимость полного сопротивления контура от частоты $Z = f(\omega)$, $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ (рисунок 9.4). До резонанса характер сопротивления контура активно- емкостной, при резонансе активный, после резонанса активно-индуктивный.

Зависимость $I = f(\omega)$- амплитудно - частотная характеристика (АЧХ), $I = \frac{U}{Z}$, резонансный ток наибольший и чисто активный $I_{\text{î}} = \frac{U}{R}$ (рисунок 9.5). Зависимости $U_L = f(\omega)$ $U_C = f(\omega)$, где $U_L = I\omega L$, $U_c = \frac{1}{\omega C} I$ (рисунок 9.6). При резонансе $U_{L\text{î}} = U_{c\text{î}}$.

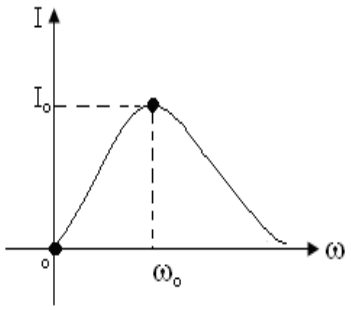


Рисунок 9.5

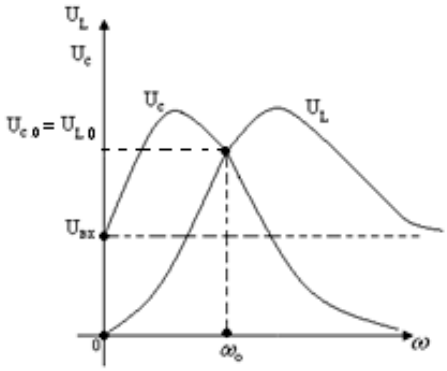


Рисунок 9.6

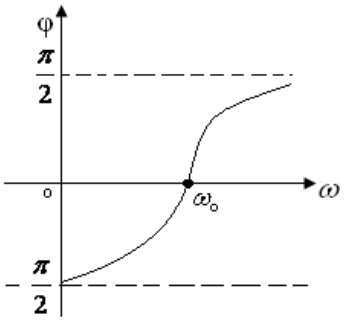


Рисунок 9.7

Зависимость $\varphi = f(\omega)$- фазо- частотная характеристика (ФЧХ), $\varphi = arctg\frac{X_L - X_C}{R}$ (рисунок 9.7).

9.4 Последовательный колебательный контур при узкой полосе частот

В технике связи часто имеют дело с контурами высокой добротности, работающими в диапозоне частот, мало отличающихся от резонансной. В этом случае расчетным формулам можно придать более общий вид, если ввести в них новые независимые переменные.

Абсолютная расстройка: $\Delta\omega = \omega - \omega_{\text{ð}}$
$\Delta f = f - f_{\text{ð}}$.

Относительная расстройка: $\frac{\Delta\omega}{\omega_{\text{ð}}} = \frac{\Delta f}{f_{\text{ð}}}$.

Обобщенная расстройка: $\xi = \frac{X}{R}$, при резонансе $(\omega = \omega_{\text{ð}})\ \xi = 0$, при $\omega \neq \omega_{\text{î}}$

$$x = \omega L - \frac{1}{\omega C} = \frac{\omega L \omega_0}{\omega_0} - \frac{\omega_0 1}{\omega C \omega_0} = \frac{R\rho}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = RQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \rho\nu, \qquad (9.10)$$

где $\xi = \frac{x}{R} = \frac{\rho\nu}{R} = Q\nu = \frac{\nu}{d}$, (9.11)

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = (\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\omega_0}) = \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega_0\omega} = |\omega \approx \omega_0| = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\Delta f}{f_0} \qquad (9.12)$$

Удобно для сравнения резонансных кривых пользоваться относительными единицами.

АЧХ в относительных единицах $\frac{I}{I_\circ} = f\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)$ - (рисунок 9.8)

$$\frac{I}{I_0} = \frac{U}{Z}\frac{R}{U} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{R\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\nu^2 Q^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2 Q^2}}, \qquad (9.13)$$

где $\underline{Z} = R + jx = R + jR\xi = R(1 + j\xi) = R(1 + j\nu Q)$.

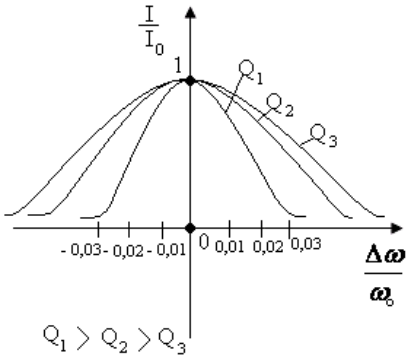


Рисунок 9.8

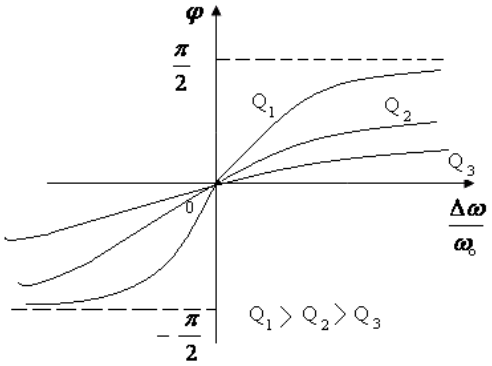


Рисунок 9.9

ФЧХ в относительных единицах (рисунок 9.9):

$$\varphi = arctg\frac{x}{R} = arctg\xi = arctg2\frac{\Delta\omega}{\omega_\circ}Q\ . \qquad (9.14)$$

9.5 Полоса пропускания последовательного колебательного контура

Полосой пропускания контура называется тот диапазон частот, в пределах которого мощность, поглощаемая контуром не меньше половины той мощности, которую контур поглощает при резонансной частоте:

$$\frac{I^2 R}{I_0^2 R} = \frac{1}{2},\ \frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

тогда ток на границе полосы пропускания равен $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ (рисунок 9.9).

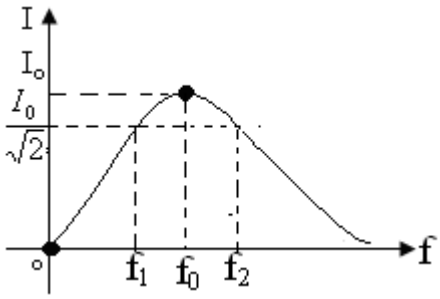


Рисунок 9.10

Абсолютная полоса пропускания контура $\Delta S = f_2 - f_1$.

Граничные частоты полосы пропускания найдем из условия

$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1+\nu^2 Q^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, значит $\nu^2 Q^2 = \pm 1$, т.е. $\nu = \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} = \pm d$ или

$$f^2 \mp f_0 df - f_0^2 = 0. \qquad (9.15)$$

Решая уравнение (9.15), получим верхнюю (f_2) и нижнюю (f_1) граничные частоты:

$$f_2 = \frac{f_0 d}{2} + \sqrt{\frac{f_0^2 d^2}{4} + f_0^2}; \quad f_1 = -\frac{f_0 d}{2} + \sqrt{\frac{f_0^2 d^2}{4} + f_0^2}. \qquad (9.16)$$

Абсолютная полоса пропускания:

$$\Delta S = f_2 - f_1 = f_0 d = \frac{f_0}{Q}. \qquad (9.17)$$

Чем выше Q, тем уже полоса пропускания контура (рисунок 9.11).

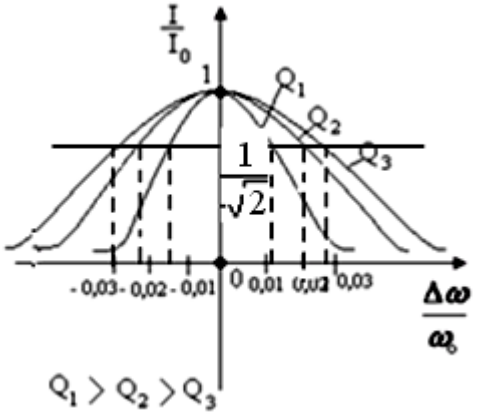


Рисунок 9.11

10 Лекция №10. Резонанс токов

Цель лекции: исследование резонансных явлений в параллельном колебательном контуре.

10.1 Параллельный колебательный контур с потерями. Условие резонанса и резонансная частота

Параллельный колебательный контур с потерями изображен на рисунке 10.1.

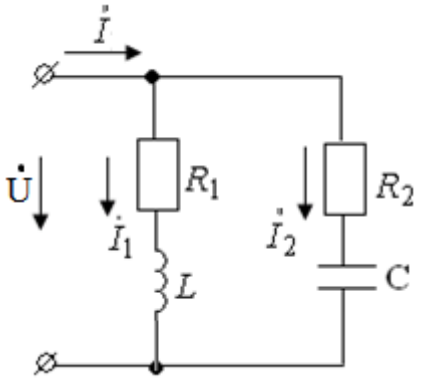


Рисунок 10.1

Комплексная входная проводимость этого контура равна:

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = (g_1 - jb_1) + (g_2 + jb_2) = g_1 + g_2 - j(b_1 - b_2) = g - jb, \quad (10.1)$$

где

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1 + j\omega L} = g_1 - jb_1, \quad g_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega L)^2}, \quad b_1 = \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2},$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2 - j\dfrac{1}{\omega C}} = g_2 + jb_2, \quad g_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + (1/\omega C)^2}, \quad b_1 = \frac{1/\omega C}{R_1^2 + (\omega C)^2}.$$

Резонанс токов в параллельном колебательном контуре возникает при условии, что входная реактивная проводимость равна нулю:

$$b = b_1 - b_2 = 0, \; b_1 = b_2. \quad (10.2)$$

Подставим в (10.2) выражения для b_1, b_2, получим условие резонанса виде:

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = \frac{1/\omega C}{R_2^2 + (1/\omega C)^2} \; . \quad (10.3)$$

Решим уравнение (10.3) относительно частоты ω и получим выражение для резонансной частоты:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{\sqrt{\rho^2 - R_1^2}}{\sqrt{\rho^2 - R_2^2}} = \omega_0 \frac{\sqrt{\rho^2 - R_1^2}}{\sqrt{\rho^2 - R_2^2}}, \quad (10.4)$$

где $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \rho = \sqrt{\dfrac{L}{C}}.$

Резонанс в параллельном колебательном контуре с потерями возникает при частоте ω_P, если подкоренное выражение в (10.4) положительное, т.е. выполняется условие: $R_1>\rho$; $R_2>\rho$ или $R_1<\rho$; $R_2<\rho$. Если $R_1=R_2\neq\rho$ или $R_1<<\rho$ и $R_2<<\rho$, то резонанс возникает при резонансной частоте $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. В случае, когда $R_1=R_2=\rho$ получаем неопределенность, т.е. может быть любое значение резонансной частоты. Резонанс ни при какой частоте не возникает, если $R_1>\rho$, $R_2<\rho$ или $R_1<\rho$, $R_2>\rho$.

10.2 Параллельный колебательный контур с потерями. Токи в режиме резонанса, эквивалентное резонансное сопротивление, векторная диаграмма

Реактивные составляющие токов в ветвях равны:

$$I_{p1} = b_1 U = \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega \mathrm{L})^2} U, \quad I_{p2} = -b_2 U = \frac{1/\omega C}{R_2^2 + (1/\omega C)^2} U . \qquad (10.5)$$

Так как при резонансе $b_1 = -b_2$, то реактивные составляющие токов при резонансе равны друг другу $I_{1p0} = I_{2p0}$ и противоположны по фазе, следовательно $\dot{I}_{1p0} + \dot{I}_{2p0} = 0$. Ток в неразветвленной части цепи при резонансе будет равен сумме активных составляющих токов в ветвях:

$$I_0 = I_{1a0} + I_{2a0} = g_{10}U + g_{20}U = (\mathrm{g}_{10} + \mathrm{g}_{20})\,\mathrm{U} = \mathrm{g}_{0Э}\,U = \frac{U}{R_{oЭ}} . \qquad (10.6)$$

где

$$g_{10} = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega_p L)^2}, \quad g_{20} = \frac{R_2}{R_2^2 + (\omega_p C)^2},$$

$$g_{0Э} = g_{10} + g_{20} = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega_p L)^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + (\omega_p L)^2}. \qquad (10.7)$$

Подставим в выражение (10.7) значение $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{\sqrt{\rho^2 - R_1^2}}{\sqrt{\rho^2 - R_2^2}} = \omega_0 \frac{\sqrt{\rho^2 - R_1^2}}{\sqrt{\rho^2 - R_2^2}},$

Получим :

$$g_{0Э} = \frac{R_1 + R_2}{\rho^2 + R_1 R_2}, \quad R_{0Э} = \frac{\rho^2 + R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \qquad (10.8)$$

где $g_{0Э}$ - эквивалентная резонансная проводимость контура;

$R_{0Э}$ -эквивалентное резонансное сопротивление контура.

На рисунке 10.2 приведена векторная диаграмма в режиме резонанса для параллельного колебательного контура с потерями (рисунок 10.1).

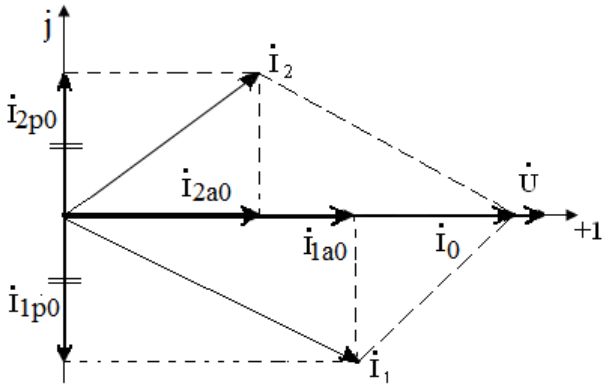


Рисунок 10.2

10.3 Параллельный колебательный контур без потерь. Условие резонанса и резонансная частота, векторная диаграмма в режиме резонанса, частотные характеристики

Для контура без потерь $R_1 = R_2 = 0$ (рисунок 10.3).

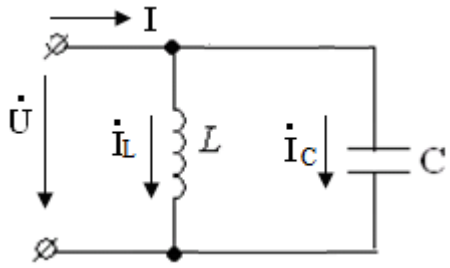


Рисунок 10.3

Резонансная частота для контура без потерь равна:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \ . \tag{10.9}$$

При резонансе реактивная входная проводимость $b_0 = b_{L0} - b_{C0} = 0$, индуктивная $b_{L0} = 1/\omega_0 L$ и емкостная $b_{C0} = \omega_0 C$ проводимости равны $b_{L0} = b_{C0} = 1/\rho$. Комплексные действующие токи в ветвях при резонансе:

$$\dot{I}_{L0} = \frac{\dot{U}}{j\omega_0 L} = \frac{\dot{U}}{\rho} e^{-j90^0}; \qquad \dot{I}_{C0} = j\omega_0 C\dot{U} = \frac{\dot{U}}{\rho} e^{-j90^0}. \tag{10.10}$$

Из выражений (10.10) следует, что токи в параллельных ветвях контура без потерь в режиме резонанса равны друг другу и противоположны по фазе, ток в индуктивности отстает по фазе от напряжения на 90^0, а ток в емкости опережает напряжение на 90^0. Ток на входе параллельного колебательного

контура без потерь при резонансе равен нулю $I_0 = \dot{I}_{L0} + \dot{I}_{C0} = 0$, а добротность обращается в бесконечность.

Векторная диаграмма для параллельного колебательного контура без потерь показана на рисунке 10.4.

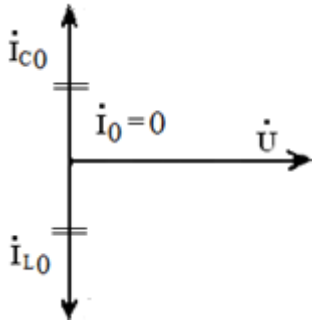


Рисунок 10.4

Частотные характеристики параллельного колебательного контура без потерь имеют вид: проводимость катушки $b_L(\omega) = \frac{1}{\omega L}$, проводимость конденсатора $b_C(\omega) = \omega C$, входная реактивная проводимость контура $b(\omega) = b_L(\omega) - b_C(\omega)$ (рисунок 10.5). При частотах $\omega \le \omega_0$ индуктивная проводимость больше емкостной проводимости $b_L(\omega) \ge b_C(\omega)$ и входная реактивная проводимость контура носит индуктивный характер $b(\omega) \ge 0$, при частотах $\omega \ge \omega_0$ индуктивная проводимость меньше емкостной проводимости $b_L(\omega) \le b_C(\omega)$ и входная реактивная проводимость контура носит емкостной характер $b(\omega) \le 0$.

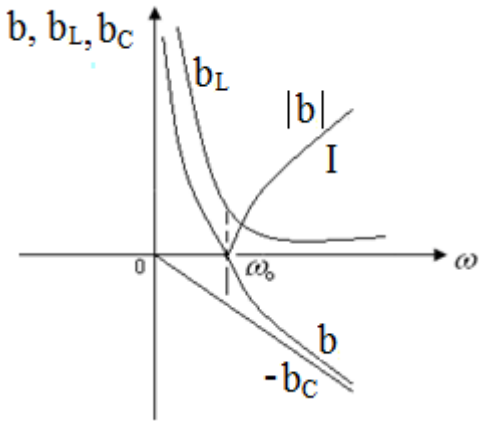


Рисунок 10.5

При резонансе $\omega = \omega_0$ входная реактивная проводимость равна $b(\omega) = 0$, а входное реактивное сопротивление бесконечно большое $|x(\omega_0)| = \infty$. Фазо-частотная характеристика контура без потерь при переходе через $\omega = \omega_0$

изменяется скачком от –π/2 до π/2. Ток на входе контура $I(\omega)=|b(\omega)|U$, так как U=const, то резонансная кривая тока в соответствующем масштабе и есть кривая абсолютной величины входной проводимости $|b(\omega)|$ (рисунок 10.5).

10.4 Параллельный колебательный контур с малыми потерями. Условие резонанса и резонансная частота, частотные характеристики

Контур с малыми потерями: $R_1<<\rho$ и $R_2<<\rho$. Резонансная частота для контура с малыми потерями будет равна $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$. Для контура с малыми потерями $\rho^2>>R_1R_2$, тогда эквивалентное резонансное сопротивление:

$$R_{0Э}=\frac{\rho^2}{R_1+R_2}=\frac{\rho^2}{R}. \qquad (10.11)$$

Добротность контура с малыми потерями определяются по формуле:

$$Q=\frac{\rho}{R_1+R_2}=\frac{\rho}{R}. \qquad (10.12)$$

Эквивалентное резонансное сопротивление с учётом формулы (10.12) можно записать в виде:

$$R_{0Э}=\frac{\rho^2}{R_1+R_2}=\frac{\rho^2}{R}=Q^2R=\frac{L}{RC}, \qquad (10.13)$$

где $R=R_1+R_2$.

Действующие токи на входе и в параллельных ветвях контура в малыми потерями в режиме резонанса равны:

$$I_0=\frac{U}{R_{0Э}}=\frac{U}{Q^2R}. \qquad I_{10}=I_{20}=\frac{U}{\rho}=\frac{U}{QR}. \qquad (10.14)$$

Из уравнения (10.14) следует, что отношение токов в параллельных ветвях к току на входе контура в режиме резонанса равно добротности контура:

$$\frac{I_{10}}{I_0}=\frac{I_{20}}{I_0}=Q. \qquad (10.15)$$

Таким образом токи в реактивных элементах L и C при резонансе в Q раз превышают ток на входе контура. Поэтому резонанс в параллельном колебательном контуре называют резонансом токов.

11 Лекция №11. Линейные электрические цепи при несинусоидальных периодических воздействиях

Цель лекции: изучение несинусоидальных периодических ЭДС, напряжений, токов и основных характеризующих их величин.

11.1 Несинусоидальные ЭДС, напряжения и токи

На практике ЭДС, напряжения и токи в большей или меньшей степени являются несинусоидальными. Это связано с тем, что реальные генераторы не обеспечивают синусоидальной формы кривых напряжения, наличие нелинейных элементов в цепи обусловливает искажение формы токов даже при синусоидальных ЭДС. В радиотехнике, вычислительной технике применяются генераторы несинусоидальных периодических воздействий.

В качестве примера (рисунок 11.1, а) представлена цепь с нелинейным резистором (НР), нелинейная вольт-амперная характеристика (ВАХ) которого обусловливает несинусоидальную форму тока i в цепи при синусоидальном напряжении u на ее входе (рисунок 11.1, б).

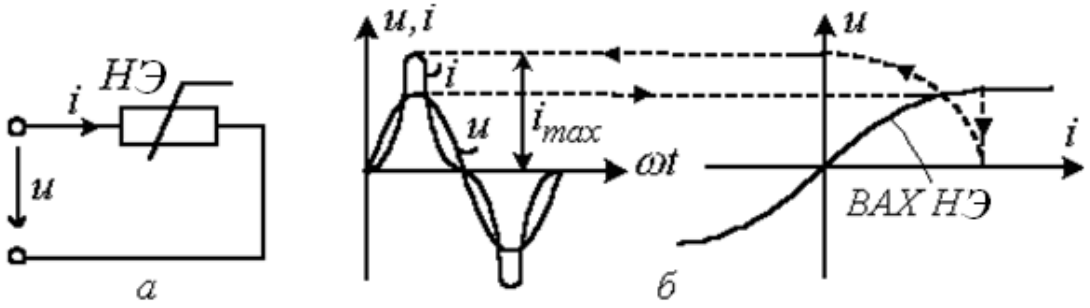


Рисунок 11.1

11.2 Разложение несинусоидальных периодических кривых в ряд Фурье

Периодическая функция $f(t) = f(\mathrm{t}+T)$, где T – период, удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть разложена в ряд Фурье:

$$f(t) = \mathrm{A}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{A}_{km} \sin(k\omega t + \psi_k), \qquad (11.1)$$

где A_0 – постоянная составляющая или нулевая гармоника;

$\mathrm{A}_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$ - основная синусоида или 1-я гармоника;

$\mathrm{A}_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$, при k>1- высшие гармоники;

$\omega = 2\pi/\mathrm{T}$ – основная угловая частота.

Тригонометрический ряд Фурье можно записать в форме:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (B_{km} \sin k\omega t + C_{km} \cos k\omega t). \qquad (11.2)$$

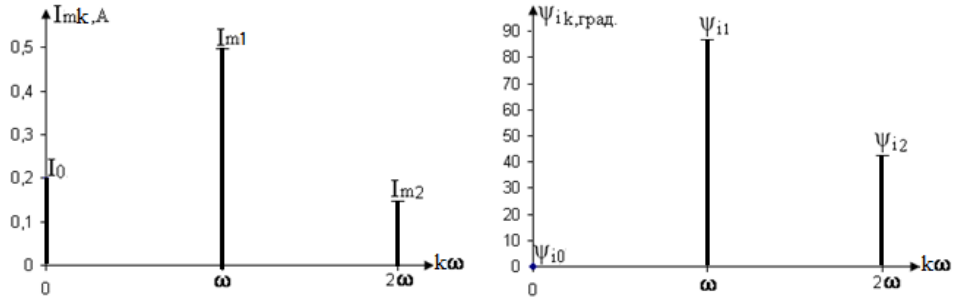
Разложение несинусоидальных периодических ЭДС, напряжений и токов в тригонометрический ряд Фурье:

$$e(t) = E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} E_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ek}), \quad u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \psi_{uk}),$$
$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ik}). \qquad (11.3)$$

11.3 Спектры несинусоидальных периодических функций

Совокупность гармонических составляющих несинусоидальной периодической функции называется её дискретным частотным спектром. Зависимость амплитуд гармонических составляющих A_{km} от частоты $k\omega$ называется амплитудно-частным спектром (АЧС), зависимость начальных фаз гармонических составляющих ψ_k от частоты $k\omega$ называется спектром фазо-частным спектром (ФЧС).

Построим амплитудно-частный спектр и фазо-частный спектр для несинусоидального тока: $i(t) = 0,2 + 0,5\sin(\omega t + 87^0) + 0,15\sqrt{2}\sin(2\omega t + 43^0), A$
По оси абсцисс откладывается частота $k\omega$, по оси ординат откладываются в соответствующем масштабе амплитуды или начальные фазы гармонических составляющих несинусоидальной периодической функции. На рисунке 11.2 а представлен спектр амплитуд тока, на рисунке 11.2 б – спектр фаз.



а б

Рисунок 11.2.

11.4 Средние и действующие значения несинусоидальных периодических ЭДС, напряжений и токов

Среднее по модулю значение несинусоидальной периодической функции:

$$A_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|\,dt. \qquad (11.4)$$

Действующее значение несинусоидальной периодической функции:

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt}\,. \qquad (11.5)$$

Следовательно, действующее значение несинусоидального периодического тока:

$$\mathrm{I} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{i}^2(\mathrm{t})\mathrm{dt}} \ . \qquad (11.6)$$

Подставим в формулу (11.6) разложение несинусоидального периодического тока в тригонометрический ряд Фурье (11.3) и после интегрирования получим: $I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}$. (11.7)

Аналогичные выражения имеют место для ЭДС и напряжения:

$$E = \sqrt{E_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} E_k^2} \ , \ U = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2} \ , \qquad (11.8)$$

где E_0, U_0, I_0 – постоянные составляющие ЭДС, напряжения и тока;

$E_k = E_{km}/\sqrt{2}$, $U_k = U_{km}/\sqrt{2}$, $I_k = I_{km}/\sqrt{2}$ – действующие значения гармоник порядка $k \geq 1$, соответственно, ЭДС, напряжения и тока.

11.5 Мощность в цепях несинусоидального периодического тока

Подставим в выражение для активной мощности $P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)\,\mathrm{dt}$ разложение несинусоидального периодического тока и напряжения в тригонометрический ряд Фурье (11.3) и получим:

$$P == \frac{1}{T}\int_0^T \left(\mathrm{U}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{U}_{km}\sin(k\omega t + \psi_{uk})\right)\left(\mathrm{I}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{I}_{km}\sin(k\omega t + \psi_{ik})\right)\mathrm{dt} \ . \qquad (11.9)$$

После интегрирования:

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{km} I_{km}}{2}\cos(\psi_{uk} - \psi_{ik}) = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos\varphi_k \ , \qquad (11.10)$$

где

$$P_0 = U_0 I_0, \quad P_k = U_k I_k \cos\varphi_k \ .$$

Таким образом, активная мощность несинусоидального тока равна сумме активных мощностей отдельных гармонических:

$$P_k = \sum_{k=0}^{\infty} P_k \ . \qquad (11.11)$$

Аналогично для реактивной мощности можно записать:

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin\varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \ . \qquad (11.12)$$

Полная мощность:

$$S = UI = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2} \qquad (11.13)$$

Для несинусоидального тока $S^2 \geq P^2 + Q^2$. Знак равенства выполняется, если форма кривых напряжения и тока одинакова, это имеет место только для резистивных элементов. Если цепь содержит реактивные элементы L и C, то форма кривых напряжения и тока различается и $S^2 > P^2 + Q^2$. Мощность искажения характеризует степень различия форм кривых напряжения и тока:

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}\ .$$

12 Лекция №12. Расчёт линейных электрических цепей при несинусоидальных периодических воздействиях

Цель лекции: изучение методов расчета линейных электрических цепей при несинусоидальных периодических воздействиях

12.1 Расчёт цепей несинусоидального периодического тока.

Расчёт линейных электрических цепей несинусоидального тока распадается на три этапа:

а) разложение несинусоидальных ЭДС или токов источников тока в ряд Фурье;

б) расчет каждой из гармонических составляющих.

В основе расчёта лежит применение принципа наложения. При расчете постоянных составляющих следует учитывать, что индуктивное сопротивление равно 0 и индуктивность в эквивалентной схеме заменяется короткозамкнутым участком, а ёмкостное сопротивление равно ∞ и ветвь с ёмкостью размыкается. При расчете цепи для из каждой гармоник можно пользоваться комплексным методом, но недопустимо сложение комплексных токов и напряжений различных гармоник. Индуктивное сопротивление для k-й гармоники равно $x_{L_k} = k\omega L = kx_{L_1}$, а емкостное сопротивление для k-й гармоники - $x_{C_k} = \dfrac{1}{k\omega C} = \dfrac{x_{C_1}}{k}$;

в) нахождение мгновенных токов.

Пусть в линейной электрической цепи действует источник несинусоидальной периодической ЭДС. Представим несинусоидальную ЭДС в виде суммы постоянной и синусоидальных составляющих:

$$e(t) = E_0 + E_{1m}\sin(\omega t + \psi_{e1}) + E_{km}\sin(k\omega t + \psi_{ek})\ .$$

В этом случае действие несинусоидальной ЭДС аналогично действию трёх источников ЭДС: E_0, $e_1 = E_{1m}\sin(\omega t + \psi_{e1})$, $e_k = E_{km}\sin(k\omega t + \psi_{ek})$, соединенных последовательно (рисунок 12.1).

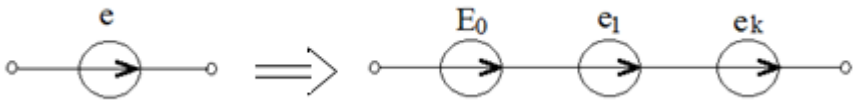


Рисунок 12.1

Применим принцип наложения и определим токи для каждой из составляющих ЭДС в отдельности. Токи в какой-либо ветви, создаваемые каждой из гармонических составляющих ЭДС: E_0, e_1, e_k, соответственно, равны:

I_0, $i_1 = I_{1m}\sin(\omega t + \psi_{i1})$, $i_k = I_{km}\sin(k\omega t + \psi_{ik})$.

Результирующий ток в этой же ветви равен сумме гармонических составляющих токов:

$$i(t) = I_0 + I_{1m}\sin(\omega t + \psi_{i1}) + I_{km}\sin(k\omega t + \psi_{ik}) = I_0 + i_1 + i_k \,. \qquad (12.1)$$

Следовательно расчет линейных электрических цепей с несинусоидальными периодическими ЭДС сводится к решению одной задачи с постоянным ЭДС и n задач с синусоидальными ЭДС, где n – число синусоидальных составляющих ЭДС различных частот.

Пример 12.1. Электрическая цепь (рисунок 12.2) подключена к источнику несинусоидальной периодической ЭДС. Определить мгновенные значения несинусоидальных токов во всех ветвях цепи.

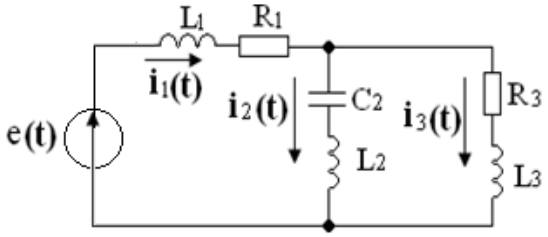


Рисунок 12.2

Решение. Разложим несинусоидальную ЭДС в ряд Фурье:

$$e(t) = E_0 + E_{m1}\sin(\omega t + \psi_{e1}) + E_{m2}\sin(2\omega t + \psi_{e2}) \,. \qquad (12.2)$$

Расчет постоянных составляющих токов.

Эквивалентная схема для расчета постоянных составляющих токов представлена на рисунке 12.3. Постоянная составляющая ЭДС E_0.

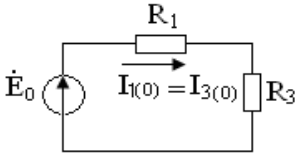


Рисунок 12.3

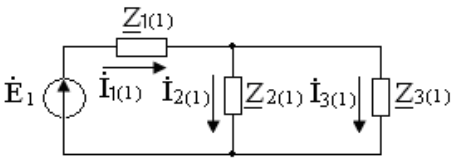


Рисунок 12.4

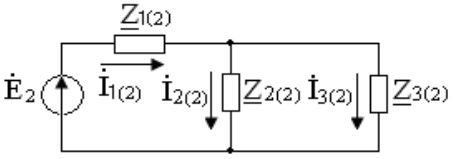


Рисунок 12.5

Постоянные составляющие токов равны:

$$I_{1(0)} = I_{3(0)} = \frac{E_0}{R_1 + R_3}, \quad I_{2(0)} = 0. \tag{12.3}$$

Расчет токов первой гармоники.

Эквивалентная схема для расчета токов первой гармоники представлена на рисунке 12.4. Первая гармоника ЭДС: $e_1(t) = E_{m1}\sin(\omega t + \psi_{e1})$, комплексное действующее ЭДС:

$$\dot{E}_1 = \frac{E_{m1}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_{e1}}. \tag{12.4}$$

Комплексные сопротивления ветвей для токов первой гармоники:

$$\underline{Z}_{1(1)} = R_1 + jX_{L1(1)}, \quad \underline{Z}_{2(1)} = j(X_{L2(1)} - X_{C_{2(1)}}), \quad \underline{Z}_{3(1)} = R_3 + jX_{L3(1)}.$$

Входное комплексное сопротивление:

$$\underline{Z}_{BX(1)} = \underline{Z}_{1(1)} + \frac{\underline{Z}_{2(1)}\underline{Z}_{3(1)}}{\underline{Z}_{2(1)} + \underline{Z}_{3(1)}}. \tag{12.5}$$

Найдём комплексные токи первой гармоники, используя закон Ома и формулы разброса:

$$\dot{I}_{1(1)} = \frac{\dot{E}_1}{\underline{Z}_{BX(1)}} = I_{1(1)} e^{j\psi_{i1(1)}}; \quad \dot{I}_{2(1)} = \dot{I}_{1(1)} \frac{\underline{Z}_{3(1)}}{\underline{Z}_{2(1)} + \underline{Z}_{3(1)}} = I_{2(1)} e^{j\psi_{i2(1)}};$$

$$\dot{I}_{3(1)} = \dot{I}_{1(1)} \frac{\underline{Z}_{2(1)}}{\underline{Z}_{2(1)} + \underline{Z}_{3(1)}} = I_{3(1)} e^{j\psi_{i3(1)}}. \tag{12.6}$$

Мгновенные значения токов первой гармоники записываются в виде:

$$i_{1(1)} = I_{m1(1)}\sin(\omega t + \psi_{1(1)}); \; i_{2(1)} = I_{m2(1)}\sin(\omega t + \psi_{2(1)}); \; i_{3(1)} = I_{m3(1)}\sin(\omega t + \psi_{3(1)});$$

где $I_{m1(1)} = I_{1(1)}\sqrt{2}; \quad I_{m2(1)} = I_{2(1)}\sqrt{2}; \quad I_{m3(1)} = I_{3(1)}\sqrt{2}$.

Расчет токов второй гармоники.

Эквивалентная схема для расчета токов второй гармоники представлена на рисунке 12.5. Вторая гармоника ЭДС: $e_2(t) = E_{m2}\sin(2\omega t + \psi_{e2})$, комплексное действующее ЭДС:

$$\dot{E}_2 = \frac{E_{m2}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_{e2}}. \tag{12.7}$$

Индуктивные и емкостные сопротивления для токов второй гармоники:

$$X_{L1(2)} = 2X_{L1(1)}; \quad X_{L2(2)} = 2X_{L2(1)}; \quad X_{L3(2)} = 2X_{L3(1)}; \quad X_{C2(2)} = \frac{X_{C2(1)}}{2}.$$

Комплексные сопротивления для токов второй гармоники равны:

$$\underline{Z}_{1(2)} = R_1 + jX_{L1(2)}; \quad \underline{Z}_{2(2)} = j(X_{L2(2)} - X_{C_{2(2)}}); \quad \underline{Z}_{3(2)} = R_3 + jX_{L3(2)}.$$

Комплексное входное сопротивление цепи:

$$\underline{Z}_{BX(2)} = \underline{Z}_{1(2)} + \frac{\underline{Z}_{2(2)}\underline{Z}_{3(2)}}{\underline{Z}_{2(2)} + \underline{Z}_{3(2)}}. \tag{12.8}$$

Определим комплексные токи второй гармоники, используя закон Ома и формулы разброса:

$$\dot{I}_{1(2)} = \frac{\dot{E}_2}{\underline{Z}_{BX(2)}} = I_{1(2)} e^{j\psi_{i1(2)}}; \quad \dot{I}_{2(2)} = \dot{I}_{1(2)} \frac{\underline{Z}_{3(2)}}{\underline{Z}_{2(2)} + \underline{Z}_{3(2)}} = I_{2(2)} e^{j\psi_{i2(2)}};$$

$$\dot{I}_{3(2)} = \dot{I}_{1(2)} \frac{\underline{Z}_{2(2)}}{\underline{Z}_{2(2)} + \underline{Z}_{3(2)}} = I_{3(2)} e^{j\psi_{i3(2)}}. \qquad (12.9)$$

Мгновенные значения токов второй гармоники записываются в виде:

$$i_{1(2)} = I_{m1(2)} \sin(2\omega t + \psi_{1(2)}); \quad i_{2(2)} = I_{m1(2)} \sin(2\omega t + \psi_{2(2)});$$

$$i_{3(2)} = I_{m3(2)} \sin(2\omega t + \psi_{3(2)}),$$

где $I_{m1(2)} = I_{1(2)}\sqrt{2}; \quad I_{m2(2)} = I_{2(2)}\sqrt{2}; \quad I_{m3(2)} = I_{3(2)}\sqrt{2}$.

Мгновенные значения токов в ветвях электрической цепи равны сумме мгновенных токов нулевой, первой и второй гармоник:

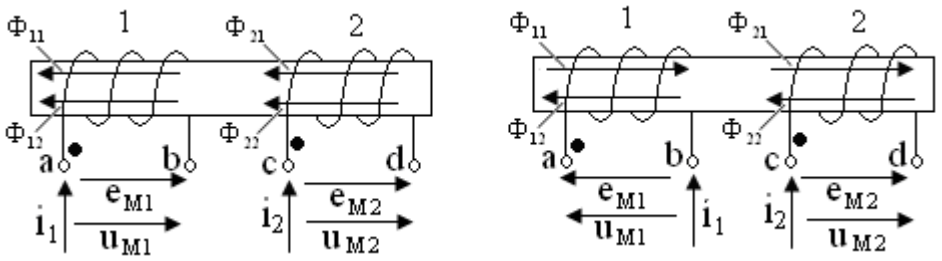
$$i_1 = I_{1(0)} + i_{1(1)} + i_{1(2)}, \quad i_2 = i_{2(1)} + i_{2(2)}, \quad i_3 = I_{3(0)} + i_{3(1)} + i_{3(2)}.$$

13 Лекция №13. Индуктивно связанные цепи

Цель лекции: знакомство с основными понятиями о индуктивно связанных цепях, последовательное соединение индуктивно связанных катушек.

13.1 Индуктивно связанные элементы цепи. ЭДС и напряжение взаимной индукции

Два элемента индуктивно связаны, если изменение тока в одном элементе приводит к появлению ЭДС в другом элементе. Возникающая ЭДС называется ЭДС взаимной индукции (рисунок 13.1,а,б).



а) б)

Рисунок 13.1

Ток i_1 создает в первой катушке магнитный поток самоиндукции Φ_{11}, а во второй катушке магнитный поток взаимной индукции Φ_{21}. Ток i_2 создает во второй катушке магнитный поток самоиндукции Φ_{22}, а в первой катушке магнитный поток взаимной индукции Φ_{12} (рисунок 13.1). Потокосцепления самоиндукции и взаимной индукции первой и второй катушек: $\psi_{11} = w_1\Phi_{11}$, $\psi_{21} = w_2\Phi_{21}$, $\psi_{22} = w_2\Phi_{22}$; $\psi_{12} = w_1\Phi_{12}$ где w_1, w_2- число витков первой и второй катушек. Индуктивность первой L_1 и второй L_2 катушек и их взаимная индуктивность $M_{12} = M_{21} = M$ определяются по формулам:

$$L_1 = \frac{\psi_{11}}{i_1}, \quad L_2 = \frac{\psi_{22}}{i_2}, \quad M_{21} = \left|\frac{\psi_{21}}{i_1}\right|, \quad M_{12} = \left|\frac{\psi_{12}}{i_2}\right|, \quad M_{12} = M_{21} = M. \quad (13.1)$$

Степень индуктивной связи двух индуктивно связанных элементов цепи характеризуется коэффициентом связи:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} < 1. \quad (13.2)$$

При изменении тока в одном из индуктивно связанных элементов в другом элементе возникает ЭДС взаимной индукции $e_м$ и на его разомкнутых выводах появляется напряжение $u_м$:

$$|e_{M1}| = |u_{M1}| = |d\psi_{12}/dt| = |M\, di_2/dt| \; ; \; |e_{M2}| = |u_{M2}| = |d\psi_{21}/dt| = |M\, di_1/dt|. \quad (13.3)$$

Для определения знака $e_м$ и $u_м$ делают специальную разметку выводов индуктивно связанных элементов.

Два вывода принадлежащие двум разным индуктивно связанным элементам называются одноимёнными и обозначаются одинаковыми значками: $*$*,$\bullet\bullet$,$\Delta\Delta$, если при одинаковом направлении токов в обоих элементах относительно этих выводов магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции в каждом элементе складываются.

При одинаковых направлениях i_2, e_{M1}, u_{M1}, и i_1, e_{M2}, u_{M2}, относительно одноименных выводов , т.е. при согласном включении (рисунок 13.1, а):

$$u_{M1} = -e_{M1} = M\, di_2/dt \; ; \quad \dot{U}_{M1} = -\dot{E}_{M1} = j\omega M \dot{I}_2 ; \quad (13.4)$$

$$u_{M2} = -e_{M2} = M\, di_1/dt \; ; \quad \dot{U}_{M2} = -\dot{E}_{M2} = j\omega M \dot{I}_1. \quad (13.5)$$

Напряжение взаимной индукции $\dot{U}_{M1}$ опережает ток $\dot{I}_2$ на $\pi/2$, напряжение взаимной индукции $\dot{U}_{M2}$ опережает ток $\dot{I}_1$ на $\pi/2$.

При различных направлениях i_2, e_{M1}, u_{M1}, и i_1, e_{M2}, u_{M2}, относительно одноименных выводов, т.е. при встречном включении (рисунок 13.1,б):

$$u_{M1} = -e_{M1} = -M\, di_2/dt ; \quad \dot{U}_{M1} = -\dot{E}_{M1} = -j\omega M \dot{I}_2 ; \quad (13.6)$$

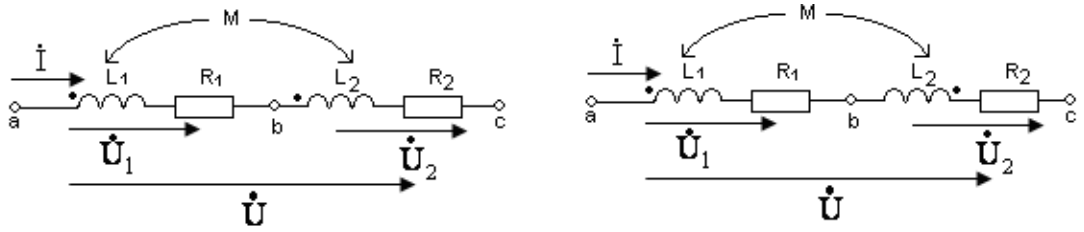
$$u_{M2} = -e_{M2} = -M\, di_1/dt ; \quad \dot{U}_{M2} = -\dot{E}_{M2} = -j\omega M \dot{I}_1. \quad (13.7)$$

Напряжение взаимной индукции $\dot{U}_{M1}$ отстаёт от тока $\dot{I}_2$ на $\pi/2$, напряжение взаимной индукции $\dot{U}_{M2}$ отстаёт от тока $\dot{I}_1$ на $\pi/2$.

Сопротивление $X_M = \omega M$ называется сопротивлением взаимной индукции, $\underline{Z}_i = j\omega M$ называется комплексным сопротивлением взаимной индукции.

13.2 Последовательное соединение индуктивно связанных элементов цепи

Согласное включение: токи в обоих элементах в любой момент времени направлены одинаково относительно одноименных выводов (рисунок 13.2, а). Потокосцепления самоиндукции и взаимной индукции в каждом элементе складываются $\psi_1 = \psi_{11} + \psi_{12} = L_1 i + Mi$, $\psi_2 = \psi_{22} + \psi_{21} = L_2 i + Mi$.



а) б)

Рисунок 13.2

Индуктивность двух последовательно соединенных индуктивно связанных элементов при согласном включении равна:

$$L = \psi / i = (\psi_1 + \psi_2)/i = L_1 + L_2 + 2M. \qquad (13.8)$$

Комплексные напряжения на зажимах первой и второй катушках:

$$\dot{U}_1 = R_1\dot{I} + j\omega L_1\dot{I} + j\omega M\dot{I} = [R_1 + j\omega(L_1 + M)]\dot{I}; \qquad (13.9)$$

$$\dot{U}_2 = R_2\dot{I} + j\omega L_2\dot{I} + j\omega M\dot{I} = [R_2 + j\omega(L_2 + M)]\dot{I}. \qquad (13.10)$$

Комплексное напряжение на зажимах цепи (рисунок 13.2,а):

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_M)\dot{I} = \underline{Z}\dot{I}, \qquad (13.11)$$

где $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_M$ - входное сопротивление цепи при согласном включении; $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$, $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$, $\underline{Z}_M = j\omega M$.

Векторная диаграмма для согласного включения показана на рисунке 13.3,а.

Встречное включение: токи в обоих элементах в любой момент времени направлены различно относительно одноименных выводов (рисунок 13.2,б). Потокосцепления самоиндукции и взаимной индукции в каждом элементе вычитаются $\psi_1 = \psi_{11} - \psi_{12} = L_1 i - Mi$, $\psi_2 = \psi_{22} - \psi_{21} = L_2 i - Mi$.

Индуктивность двух последовательно соединенных индуктивно связанных элементов при встречном включении равна:

$$L = \psi / i = (\psi_1 + \psi_2)/i = L_1 + L_2 - 2M. \qquad (13.12)$$

Комплексные напряжения на зажимах первой и второй катушках:

$$\dot{U}_1 = R_1\dot{I} + j\omega L_1\dot{I} - j\omega M\dot{I} = [R_1 + j\omega(L_1 - M)]\dot{I}; \qquad (13.13)$$

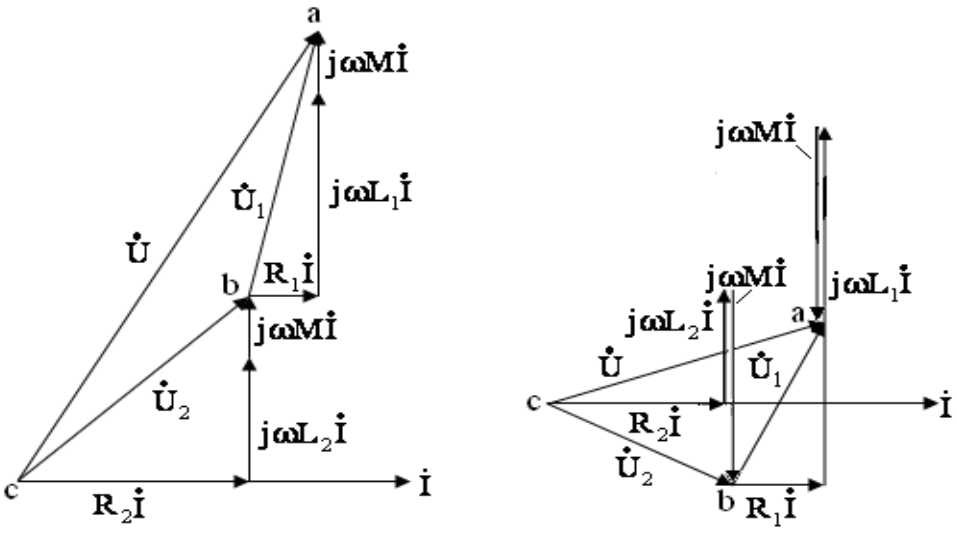
$$\dot{U}_2 = R_2\dot{I} + j\omega L_2\dot{I} - j\omega M\dot{I} = \left[R_2 + j\omega(L_2 - M)\right]\dot{I}\,. \qquad (13.14)$$

Комплексное напряжение на зажимах цепи (рисунок 13.2,б)

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M)\dot{I} = \underline{Z}\dot{I}\,, \qquad (13.15)$$

где $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M$ - входное сопротивление цепи при встречном включении.

Векторная диаграмма для встречного включения при $L_1 > M$ и $L_2 < M$ показана на рисунке 13.3,б.



а) б)

Рисунок 13.3

14 Лекция №14. Расчёт индуктивно связанных цепей

Цель лекции: получение навыков расчёта индуктивно связанных цепей

14.1 Параллельное соединение индуктивно связанных элементов цепи

Две индуктивно связанные катушки соединены параллельно, причем одноименные выводы присоединены к одному и тому же узлу. Такое включение называется согласным включением (рисунок 14.1).

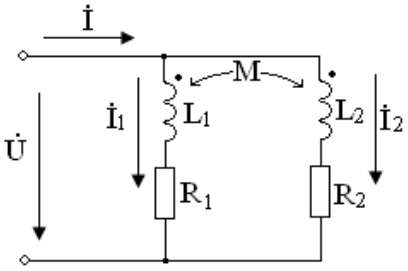


Рисунок 14.1

Запишем законы Кирхгофа:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2; \quad \dot{U} = \underline{Z}_1 \dot{I}_1 + \underline{Z}_M \dot{I}_2; \quad \dot{U} = \underline{Z}_2 \dot{I}_2 + \underline{Z}_M \dot{I}_1, \tag{14.1}$$

где $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$, $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$, $\underline{Z}_M = j\omega M$.

Решая систему уравнений (14.1), получим:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}\frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}; \quad \dot{I}_2 = \dot{U}\frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}; \quad \dot{I} = \dot{U}\frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}. \tag{14.2}$$

Входное сопротивление цепи: $\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M}$. (14.3)

Рассмотрим встречное включение, при котором индуктивно связанные катушки присоединены одноименными выводами к разным узлам (рисунок 14.2).

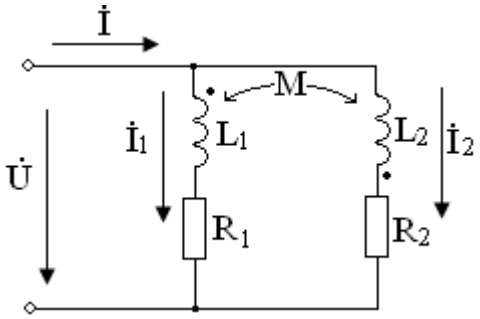


Рисунок 14.2

Запишем законы Кирхгофа для встречного включения индуктивно связанных катушек

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2; \quad \dot{U} = \underline{Z}_1 \dot{I}_1 + \underline{Z}_M \dot{I}_2; \quad \dot{U} = \underline{Z}_2 \dot{I}_2 + \underline{Z}_M \dot{I}_1, \tag{14.4}$$

где $\underline{Z}_1 = R_1 + + j\omega L_1, \quad \underline{Z}_2 = R_2 + + j\omega L_2, \quad \underline{Z}_M = j\omega M.$

Решая систему уравнений (14.4), получим:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}\frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}; \quad \dot{I}_2 = \dot{U}\frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}; \quad \dot{I} = \dot{U}\frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_M}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}.. \tag{14.5}$$

Входное сопротивление цепи для встречного включения индуктивно связанных катушек:

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_M}. \tag{14.7}$$

14.2 Расчёт разветвлённых цепей при наличии взаимной индукции

Для расчёта разветвлённых цепей с индуктивными связями применяются законы Кирхгофа и МКТ. В уравнениях по второму закону Кирхгофа учитывается напряжение взаимной индукции $\pm j\omega M_{KS}\dot{I}_S$ на элементе К, обусловленное током в элементе S. Напряжение записывается с знаком «+», если направление обхода элемента К и положительное

направление тока в элементе S одинаковы относительно одноимённых выводов.

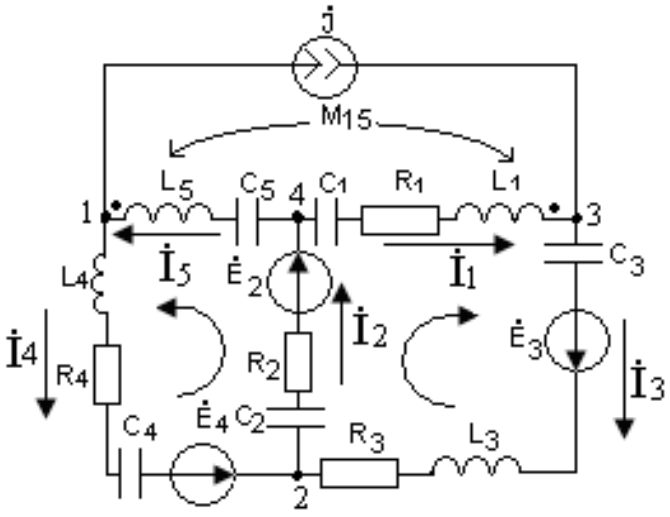


Рисунок 14.3

Запишем уравнения по второму закону Кирхгофа для схемы (рисунок 14.3):

$$\begin{aligned}&(R_2 - j/\omega C_2)\dot{I}_2 + (R_4 + j\omega L_4 - j/\omega C_4)\dot{I}_4 + j(\omega L_5 - j/\omega C_5)\dot{I}_5 + \\ &+ j\omega M_{15}\dot{I}_1 = \dot{E}_2 + \dot{E}_4, \\ &(R_1 + j\omega L_1 - j/\omega C_1)\dot{I}_1 + (R_2 - j/\omega C_2)\dot{I}_2 + (R_3 + j\omega L_3 - j/\omega C_3)\dot{I}_3 \\ &+ j\omega M_{15}\dot{I}_5 = \dot{E}_2 + \dot{E}_3.\end{aligned} \qquad (14.8)$$

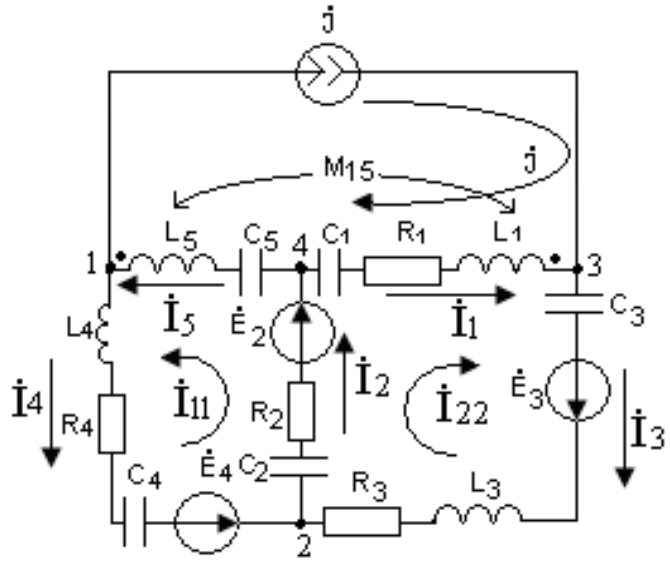


Рисунок 14.4

Запишем уравнения, составленные по второму закону Кирхгофа для контурных токов с учетом взаимной индукции (рисунок 14.4):

$$
\begin{aligned}
&(R_2 - \frac{j}{\omega C_2} + R_4 + j\omega L_4 - \frac{j}{\omega C_4} + j\omega L_5 - \frac{j}{\omega C_5})\dot{I}_{11} + (R_2 - \frac{j}{\omega C_2})\dot{I}_{22} + \\
&+ j\omega M_{15}\dot{I}_{22} + (j\omega L_5 - \frac{j}{\omega C_5})\dot{J} - j\omega M_{15}\dot{J} = \dot{E}_2 + \dot{E}_4, \\
&(R_2 - \frac{j}{\omega C_2})\dot{I}_{11} + (R_1 + j\omega L_1 - \frac{j}{\omega C_1} + R_2 - \frac{j}{\omega C_2} + R_3 + j\omega L_3 - \frac{j}{\omega C_3})\dot{I}_{22} + \\
&+ j\omega M_{15}\dot{I}_{11} - (R_1 + j\omega L)\dot{J} + j\omega M_{15}\dot{J} = \dot{E}_2 + \dot{E}_3.
\end{aligned}
\tag{14.9}
$$

Обозначим:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 - \frac{j}{\omega C_1}; \quad \underline{Z}_2 = R_2 - \frac{j}{\omega C_2}; \quad \underline{Z}_3 = R_3 + j\omega L_3 - \frac{j}{\omega C_3};$$

$$\underline{Z}_4 = R_4 + j\omega L_4 - \frac{j}{\omega C_4}; \quad \underline{Z}_5 = j(\omega L_5 - \frac{1}{\omega C_5}); \quad \underline{Z}_{M15} = j\omega M_{15}.$$

Запишем сокращенно уравнения(14.7):

$$
\begin{aligned}
&(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5)\dot{I}_{11} + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{M15})\dot{I}_{22} + (\underline{Z}_5 - \underline{Z}_{M15})\dot{J} = \dot{E}_2 + \dot{E}_4, \\
&(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{M15})\dot{I}_{11} + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)\dot{I}_{22} + (\underline{Z}_{M15} - \underline{Z}_1)\dot{J} = \dot{E}_2 + \dot{E}_3.
\end{aligned}
\tag{14.10}
$$

15 Лекция №15. Нелинейные электрические цепи постоянного тока

Цель лекции: изучение нелинейных электрические цепи постоянного тока и методов их расчета

15.1 Нелинейные резистивные элементы и их вольт-амперные характеристики

При постоянных токах и напряжениях в качестве нелинейных могут рассматриваться только резистивные электрические цепи.

Резистивными нелинейными цепями называются цепи, содержащие хотя бы один нелинейный резистивный элемент .

Нелинейным резистивным элементом (НЭ) называется резистивный элемент с нелинейной вольт-амперной характеристикой (ВАХ).

По виду ВАХ нелинейные резистивные элементы можно разбить на две основные группы: симметричные и несимметричные.

Симметричными называются нелинейные резистивные элементы, у которых ВАХ не зависит от направления тока в них и напряжения на их зажимах: $I(U) = -I(-U)$ (рисунок 15.1, а).

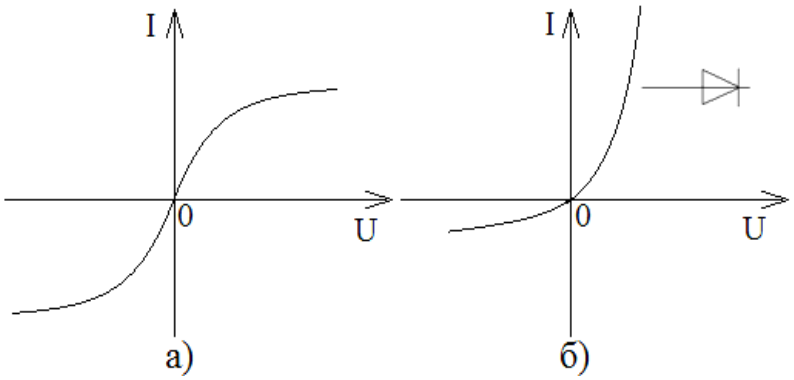


Рисунок 15.1

Несимметричными называются нелинейные резистивные элементы, у которых ВАХ неодинаковы при различных направлениях тока и напряжения на их зажимах (рисунок 15.1, б).

15.2 Статическое и дифференциальное сопротивления

Различают два вида сопротивлений нелинейных резистивных элементов: статическое и дифференциальное (динамическое).

Статическое сопротивление – это сопротивление НЭ постоянному току, оно характеризуется тангенсом угла β наклона прямой, проходящей через начало координат и рабочую точку (U_0, I_0) на ВАХ НЭ (рисунок 15.2).

Статическое сопротивление всегда положительное $R_{CT} > 0$.

Статическое сопротивление определяется по формуле:

$$R_{\text{СТ}} = \frac{U_0}{I_0} = m_R tg\beta . \qquad (15.1)$$

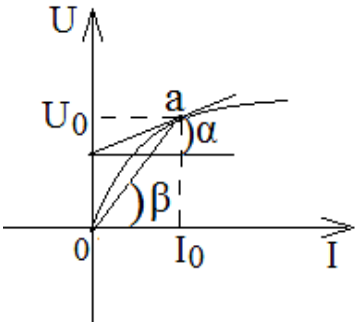


Рисунок 15.2

Дифференциальное сопротивление характеризуется тангенсом угла α наклона касательной к ВАХ в рабочей точке.

Дифференциальное сопротивление определяется по формуле:

$$R_g = \lim_{\Delta I \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{dU}{dI} = m_R tg\alpha. \qquad (15.2)$$

Дифференциальное сопротивление может быть как положительным $R_g > 0$ (на восходящем участке ВАХ), так и отрицательным $R_g < 0$ (на падающем участке ВАХ).

15.3 Вольт – амперные характеристики активного нелинейного двухполюсника

Нелинейный активный двухполюсник (рисунок 15.3) содержит один нелинейный резистор с ВАХ I(U), изображенной на рисунке 15.4, и один идеальный источник ЭДС.

Для построения ВАХ $I(U_{12})$ активного нелинейного двухполюсника определяется напряжения $U_{12} = E + U$.

Пользуясь вольт – амперной характеристикой нелинейного резистора $I(U)$ строится вольт – амперная характеристика нелинейного двухполюсника $I(U_{12}) = I(E + U)$, абсциссы которой получены сложениям абсцисс ВАХ $I(U)$ и ЭДС Е для различных значений тока (рисунок 15.5).

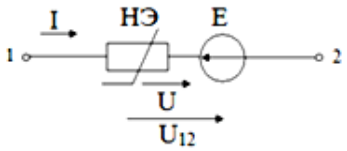


Рисунок 15.3

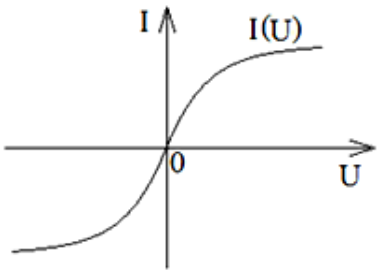


Рисунок 15.4

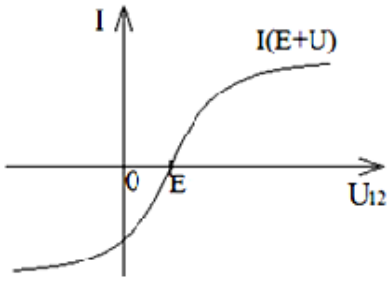
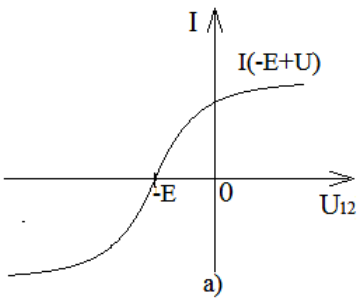


Рисунок 15.5

При изменении положительного направления ЭДС Е кривая $I(U_{12}) = I(-E + U)$ получается путем сдвига ВАХ нелинейного резистора $I(U)$ влево на величину равную Е (рисунок 15.6, а). При изменении положительного направления тока на противоположное в активном нелинейном двухполюснике (рисунок 15.3) кривая $I(U_{12}) = I(E - U)$ получается путем зеркального отображения ВАХ $I(U)$ с последующим сдвигом вправо на величину Е (рисунок 15.6, б).



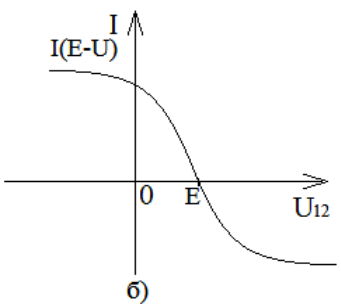


Рисунок 15.6

15.4 Графический метод расчета неразветвленных цепей с нелинейными резистивными элементами

К цепи (рисунок 15.7) с последовательным соединением двух нелинейных резисторов НЭ1 и НЭ2, ВАХ которых $I_1(U_1), I_2(U_2)$ приложено постоянное напряжения $E = U$. Требуется определить ток I и напряжения U_1 и U_2 на элементах НЭ1 и НЭ2.

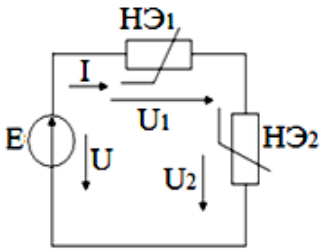


Рисунок 15.7

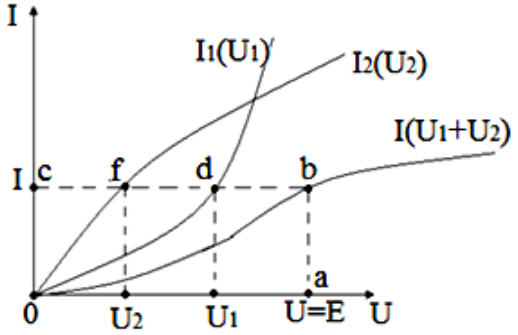


Рисунок 15.8

Запишем второй закон Кирхгофа для нелинейной цепи (рисунок 15.7): $U = U_1 + U_2$. Ток в обоих элементах один и тот же $I_1 = I_2 = I$. Построим ВАХ $I(U) = I(U_1 + U_2)$, для построения которой просуммируем напряжения U_1 и U_2 при одинаковых значениях тока (рисунок 15.8). Отложим на оси абсцисс напряжение $U = E$ из точки a проведем прямую параллельно оси ординат до пересечения с кривой $I(U_1 + U_2)$. Отрезок *ab* равен в масштабе m_I току I: $I = m_I ab$. Из точки b проводим прямую bc, параллельную оси абсцисс, в результате получим отрезки *cd* и *cf*, равные в масштабе m_u напряжениям U_1 и U_2: $U_1 = m_u cd, U_2 = m_u cf$.

Графический расчет неразветвленных цепей с двумя нелинейными резистивными элементами (рисунок 15.7) можно выполнить и другим способом. Построим на одном графике ВАХ $I_2(U_2)$ и $I_1(U_2) = I_1(E - U_1)$. ВАХ $I_1(U_2) = I_1(E - U_1)$ строится по характеристике $I_1(U_1)$ смещением на ЭДС E и зеркальным отображением относительно оси ординат. По точке пересечения $I_2(U_2)$ и $I_1(E - U_1)$ определяем ток в цепи *I* и напряжения U_1, U_2, сумма которых равна E (рисунок 15.9).

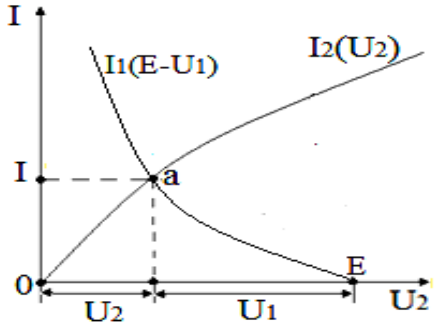


Рисунок 15.9

15.5 Графический метод расчета цепей с параллельным соединением нелинейных элементов

К цепи (рисунок 15.10) с параллельным соединением нелинейных резистивных элементов НЭ$_1$ и НЭ$_2$ с вольт – амперными характеристиками $I_1(U_1)$ и $I_2(U_2)$ (рисунок 15.11) приложено постоянное напряжение U.

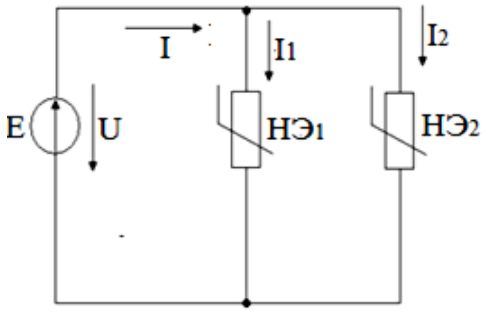


Рисунок 15.10

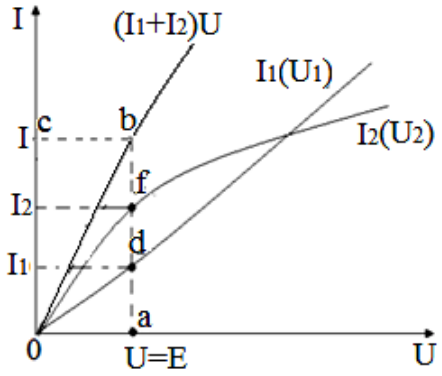


Рисунок 15.11

При параллельном соединении $U_1 = U_2 = U$ и согласно первому закону Кирхгофа I=I$_1$+I$_2$. Если задано напряжение U, то токи I_1 и I_2 в нелинейных элементах определяются по ВАХ $I_1(U_1)$, $I_2(U_2)$, а ток в неразветвленной части цепи на основании уравнения I=I$_1$+I$_2$. Если задан ток I, то для определения напряжения U и токов I_1, I_2 строят вспомогательную характеристику $(I_1 + I_2)U$ путем суммирования ординат кривых $I_1(U_1)$ и $I_2(U_2)$ для одних и тех же значений напряжения U. Далее откладывается на оси ординат отрезок ос, равный в масштабе m_I току I, из точки c проводим прямую до пересечения с характеристикой $(I_1 + I_2)U$, полученный отрезок cb=0a равен в масштабе m_u напряжению $U = m_u 0a$. Из точки b проведем прямую ba до пересечения с осью абсцисс, получим отрезки ad и af которые в масштабе m_I равны токам I$_1$, I$_2$: $I_1 = m_I ad, I_2 = m_1 af$ (рисунок 15.11).

16 Лекция №16. Четырёхполюсники. Уравнения передачи четырёхполюсников

Цель лекции: изучение основ теории четырёхполюсников, и получение навыков расчета линейных пассивных четырёхполюсников.

16.1 Основные определения и классификация четырёхполюсников

Четырёхполюсником называется электрическая цепь или её часть, имеющая две пары зажимов (полюсов), для подключения к источнику и приемнику электрической энергии (рисунок 16.1). К четырёхполюсникам относятся трансформаторы, усилители, электрические фильтры, линии передачи электрической энергии.

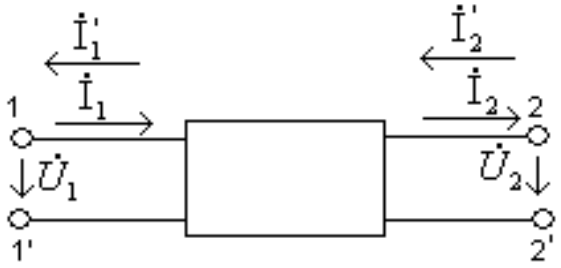


Рисунок 16.1

Пара зажимов $1-1'$ называется первичными, $2-2'$ вторичными, зажимами. Зажимы, к которым подключается источник, называются входными, зажимы, к которым подключается приёмник - выходными. Положительные направления напряжений и токов показано на рисунке 16.1.

Активные и пассивные четырехполюсники.

Активные четырехполюсники содержат независимые и зависимые источники, пассивные четырехполюсники не содержат источников электрической энергии.

Линейные и нелинейные четырёхполюсники.

Линейные четырёхполюсники не содержат нелинейные элементы, нелинейные четырёхполюсники содержат нелинейные элементы.

Обратимые и необратимые четырёхполюсники.

Для обратимых четырёхполюсников выполняется теорема обратимости или взаимности: отношение напряжения на входе к току на выходе не меняется при перемене местами зажимов. Пассивные четырёхполюсники всегда обратимы.

Симметричные и несимметричные четырёхполюсники.

В симметричном четырёхполюснике перемена местами входных и выходных зажимов не изменяет напряжений и токов в цепи.

Схемы типовых пассивных четырёхполюсников (Г-,Т-,П-образных) показаны на рисунку 16.2 .

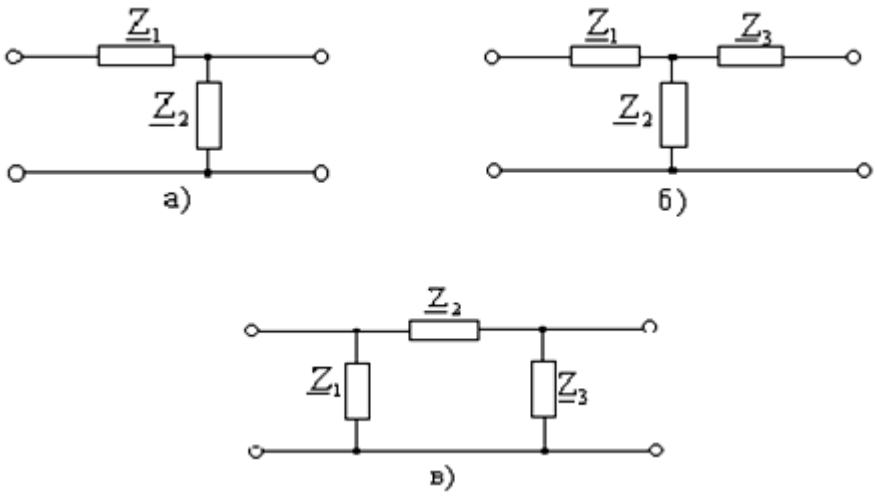


Рисунок 16.2

16.2 Уравнения передачи четырёхполюсника

Уравнения определяющие зависимость между $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{I}_1, \dot{I}_2$ называются уравнениями передачи четырёхполюсника. Величины, связывающие в уравнениях передачи напряжения и токи, называются параметрами четырёхполюсника.

Уравнения передачи в Y-параметрах

$$\left.\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \underline{Y}_{11}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 &= \underline{Y}_{21}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{22}\dot{U}_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (16.1)$$

Коэффициенты $\underline{Y}_{11}, \underline{Y}_{12}, \underline{Y}_{21}, \underline{Y}_{22}$ называются Y-параметрами и имеют размерность проводимостей.

Уравнения передачи в Z-параметрах

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{Z}_{11}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= \underline{Z}_{21}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{22}\dot{I}_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (16.2)$$

Коэффициенты $\underline{Z}_{11}, \underline{Z}_{12}, \underline{Z}_{21}, \underline{Z}_{22}$ называются Z-параметрами и имеют размерность сопротивлений.

Уравнения передачи в A- параметрах

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{A}_{11}\dot{U}_2 + \underline{A}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 &= \underline{A}_{21}\dot{U}_2 + \underline{A}_{22}\dot{I}_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (16.3)$$

Коэффициенты $\underline{A}_{11}, \underline{A}_{12}, \underline{A}_{21}, \underline{A}_{22}$ называются A- параметрами или обобщенными параметрами. $\underline{A}_{11}$, $\underline{A}_{22}$-безразмерные, $\underline{A}_{12}$ имеет размерность сопротивления, $\underline{A}_{21}$ имеет размерность проводимости.

Уравнения передачи в А - параметрах применяют при передаче энергии через четырёхполюсник от зажимов $1-1'$ к зажимам $2-2'$.

При передаче энергии от зажимов $2-2'$ к зажимам $1-1'$ уравнения передачи для обратимых четырёхполюсников могут быть записаны через А – параметры, при этом коэффициенты $\underline{A}_{11}$ и $\underline{A}_{22}$ меняются местами:

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_2 &= \underline{A}_{22}\dot{U}_1 + \underline{A}_{12}\dot{I}_1' \\ \dot{I}_2' &= \underline{A}_{21}\dot{U}_1 + \underline{A}_{11}\dot{I}_1'\end{aligned}\right\}. \qquad (16.4)$$

Уравнение передачи в Н – параметрах:

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \underline{H}_{11}\dot{I}_1 + \underline{H}_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 &= \underline{H}_{21}\dot{I}_1 + \underline{H}_{22}\dot{U}_2\end{aligned}\right\}. \qquad (16.5)$$

16.3 Свойства параметров-коэффициентов

Системы Y-,Z-,A-,H-параметров называются параметрами - коэффициентами. Параметры-коэффициенты являются комплексными величинами, определяются только схемой четырёхполюсника и её элементами, между различными системами параметров – коэффициентов существует однозначная связь.

Пассивные четырёхполюсники характеризуются тремя независимыми параметрами.

Для пассивного четырёхполюсника $\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21}$, $\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_{21}$.

Для А- параметров справедливо соотношение $\Delta A = \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1$

Симметричные четырёхполюсники характеризуются двумя независимыми параметрами.

Для симметричного четырёхполюсника: $\underline{A}_{11}=\underline{A}_{22}$, $\underline{Y}_{11}=-\underline{Y}_{22}$, $\underline{Z}_{11}=-\underline{Z}_{22}$.

Пример 16.1 Определим А-параметры Г-образного четырёхполюсника, используя уравнения, составленные по законам Кирхгофа.

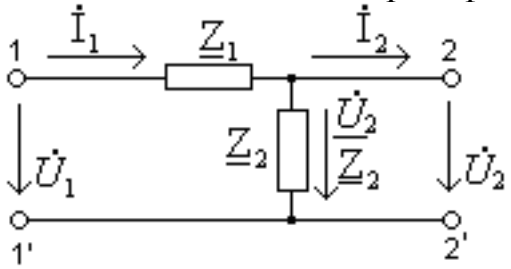


Рисунок 16.3

Для Г-образного четырёхполюсника (рисунок 16.3) запишем уравнения по законам Кирхгофа:

$$\dot{U} = \underline{Z}_1\dot{I}_1 + \dot{U}_2, \quad \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_2} + \dot{I}_2,$$

подставим выражение для тока I_1 в первое уравнение, получим $\dot{U}_1 = (1 + \underline{Z}_1/\underline{Z}_2)\dot{U}_2 + \underline{Z}_1\dot{I}_2$.

Сравнивая эти уравнения с уравнениями передачи в А-параметрах:

$$\dot{U}_1 = (1 + \underline{Z}_1 / \underline{Z}_2)\dot{U}_2 + \underline{Z}_1 \dot{I}_2; \quad \dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_2 / \underline{Z}_2 + \dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2; \qquad (16.1)$$

определим А-параметры Г-образного четырёхполюсника

$$\underline{A}_{11} = 1 + \underline{Z}_1 / \underline{Z}_2; \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_1; \quad \underline{A}_{21} = 1/\underline{Z}_2; \quad \underline{A}_{22} = 1. \qquad (16.2)$$

17 Лекция №17. Входные сопротивления четырехполюсников. Параметры холостого хода и короткого замыкания

Цель лекции: изучение входных сопротивлений четырехполюсников и параметров холостого хода и короткого замыкания.

17.1 Входные сопротивления четырёхполюсника

Если к зажимам $2-2'$ четырёхполюсника подключить произвольное сопротивление нагрузки $\underline{Z}_{H2}$ (рисунок 17.1, а), то входное сопротивление четырёхполюсника со стороны зажимов $1-1'$ будет равно $\underline{Z}_{BX1} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1$.

Входное сопротивление $\underline{Z}_{BX1}$ можно выразить через А-параметры:

$$\underline{Z}_{BX1} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\underline{A}_{11}\dot{U}_2 + \underline{A}_{12}\dot{I}_2}{\underline{A}_{21}\dot{U}_2 + \underline{A}_{22}\dot{I}_2} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_{H2} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{H2} + \underline{A}_{22}} \quad . \qquad (17.1)$$

Аналогично определяется входное сопротивление четырёхполюсника со стороны зажимов $2-2'$, если к к зажимам $1-1'$ подключить произвольное сопротивление нагрузки $\underline{Z}_{H1}$ (рисунок 17.1,б):

$$\underline{Z}_{BX2} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2'} = \frac{\underline{A}_{22}\dot{U}_1 + \underline{A}_{12}\dot{I}_1'}{\underline{A}_{21}\dot{U}_1 + \underline{A}_{11}\dot{I}_1'} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_{H1} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{H1} + \underline{A}_{11}}. \qquad (17.2)$$

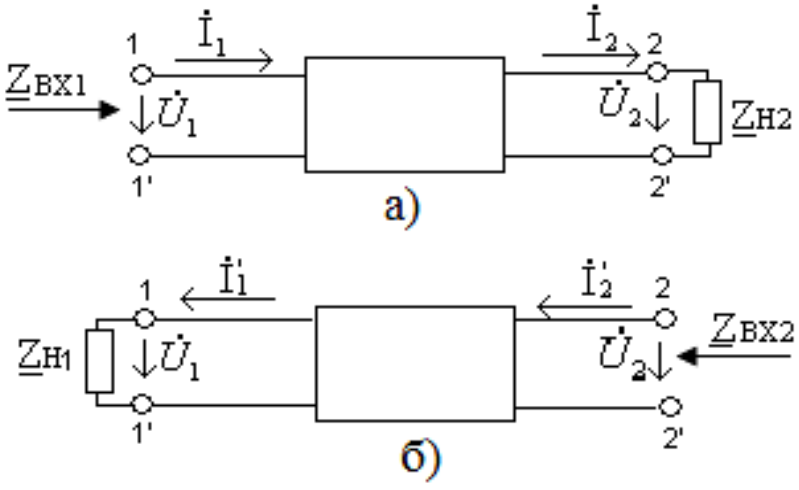


Рисунок 17.1

17.2 Параметры холостого хода и короткого замыкания четырёхполюсника

Параметрами холостого хода и короткого замыкания называются $\underline{Z}_{BX1}$ и $\underline{Z}_{BX2}$ при разомкнутых и замкнутых накоротко зажимах четырёхполюсника.

Входное сопротивление четырёхполюсника со стороны зажимов $1-1'$ в режиме холостого хода на зажимах $2-2'$ ($\underline{Z}_{H2}=\infty$, $I_2=0$) равно:

$$\underline{Z}_{ÂÕ1} = \underline{Z}_{X1} = (\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1})_{I_2=0} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}. \qquad (17.3)$$

Входное сопротивление четырёхполюсника со стороны зажимов $2-2'$ в режиме холостого хода на зажимах $1-1'$ ($\underline{Z}_{H1}=\infty$, $I_1=0$) равно:

$$\underline{Z}_{ÂÕ2} = \underline{Z}_{X2} = (\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2^{/}})_{I_1=0} = \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}. \qquad (17.4)$$

При коротком замыкании зажимов $2-2'$ ($\underline{Z}_{H2}=0$, $U_2=0$) входное сопротивление четырёхполюсника со стороны зажимов $1-1'$ определяется по формуле:

$$\underline{Z}_{BX1} = \underline{Z}_{K1} = (\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1})_{U_2=0} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}}. \qquad (17.5)$$

При коротком замыкании зажимов $1-1'$ ($Z_{H1}=0$, $U_1=0$) входное сопротивление четырёхполюсника со стороны зажимов $2-2'$ равно:

$$\underline{Z}_{ÂÕ2} = \underline{Z}_{K2} = (\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2^{/}})_{U_1=0} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}. \qquad (17.6)$$

Сопротивления $\underline{Z}_{X1}$, $\underline{Z}_{X2}$, $\underline{Z}_{K1}$, $\underline{Z}_{K2}$ называются параметрами холостого хода и короткого замыкания.

Параметры ХХ и КЗ удовлетворяют соотношению: $\underline{Z}_{X1}/\underline{Z}_{X2} = \underline{Z}_{K1}/\underline{Z}_{K2}$, т.е. только три параметра из четырёх независимы и их достаточно для составления уравнений передачи пассивных четырёхполюсников, из параметров ХХ и КЗ может быть получена любая система параметров-коэффициентов пассивных четырёхполюсников. Для симметричных четырёхполюсников $\underline{A}_{11}=\underline{A}_{22}$, $\underline{Z}_{X1}=\underline{Z}_{X2}$, $\underline{Z}_{K1}=\underline{Z}_{K2}$.

Пример 17.1 Определить параметры холостого хода и короткого замыкания для Т-образного четырехполюсника.

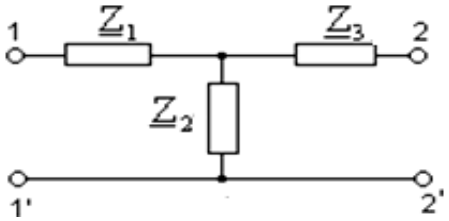


Рисунок 17.2

Параметры холостого хода: $\underline{Z}_{X1} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$, $\underline{Z}_{X2} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2$.

Параметры короткого замыкания:

$$\underline{Z}_{K1} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3/(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3), \quad \underline{Z}_{K2} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2\underline{Z}_1/(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1).$$

18 Лекция №18. Характеристические параметры четырёхполюсника. Уравнения четырёхполюсника с гиперболическими функциями

Цель лекции: изучение характеристических параметров четырехполюсника, получение навыков расчета пассивных четырёхполюсников с использованием характеристических параметров.

18.1 Характеристические параметры четырёхполюсника

К характеристическим параметрам четырёхполюсника относятся характеристические сопротивления и характеристическая постоянная передачи.

18.1.1 Характеристические сопротивления четырёхполюсника.

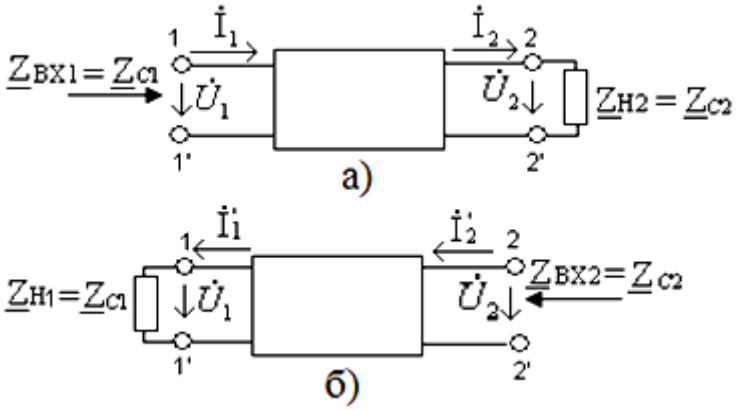


Рисунок 18.1

Характеристическими сопротивлениями четырёхполюсника называется такая пара сопротивлений $\underline{Z}_{C1}$ и $\underline{Z}_{C2}$, которая удовлетворяет условию: при $\underline{Z}_{H2} = \underline{Z}_{C2}$ имеем $\underline{Z}_{BX1} = \underline{Z}_{C1}$ и при $\underline{Z}_{H1} = \underline{Z}_{C1}$ имеем $\underline{Z}_{BX2} = \underline{Z}_{C2}$ (рисунки 18.1а, 18.1б). $\underline{Z}_{C1}, \underline{Z}_{C2}$ можно выразить через А- параметры и параметры ХХ и КЗ:

$$\underline{Z}_{C1} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}}}, \quad \underline{Z}_{C2} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}}}, \tag{18.1}$$

$$\underline{Z}_{C1} = \sqrt{\underline{Z}_{K1}\underline{Z}_{X1}}, \quad \underline{Z}_{C2} = \sqrt{\underline{Z}_{K2}\underline{Z}_{X2}}. \tag{18.2}$$

Для симметричного четырёхполюсника:

$$\underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2} = \underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}} = \sqrt{\underline{Z}_K \underline{Z}_X} \ . \qquad (18.3)$$

18.1.2 Согласованное включение четырёхполюсника.

Режим, при котором внутреннее сопротивление генератора выбрано равным $\underline{Z}_{C1}$, а сопротивление нагрузки $\underline{Z}_{H2} = \underline{Z}_{C2}$ (рисунок 18.2) называется режимом согласованного включения. Режим согласованного включения наиболее благоприятен при передаче сигнала.

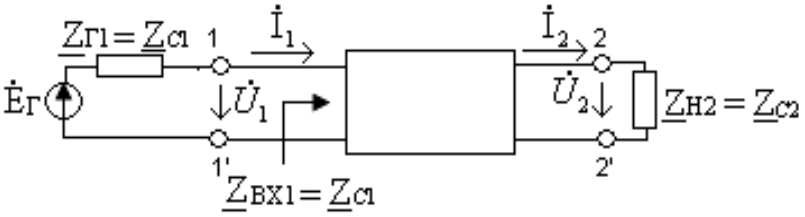


Рисунок 18.2

Режим согласованного включения симметричного четырёхполюсника (рисунок 18.3) $Z_Н = Z_С = Z_{ВХ}$; $\dot{U}_2/\dot{I}_2 = \dot{U}_1/\dot{I}_1 = Z_С$.

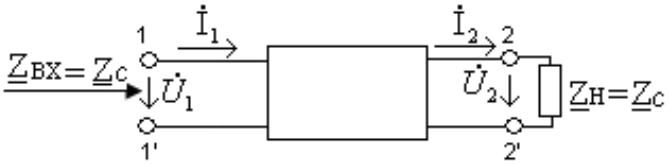


Рисунок 18.3

18.1.3 Характеристическая постоянная передачи четырёхполюсника.

Характеристическая постоянная передачи четырёхполюсника определяется в режиме согласованного включения и равна:

$$\underline{\Gamma}_С = \frac{1}{2}\ln\frac{\dot{U}_1\dot{I}_1}{\dot{U}_2\dot{I}_2}, \qquad (18.3)$$

так как $\dot{U}_1 = \dot{I}_1\underline{Z}_{C1}$ и $\dot{U}_2 = \dot{I}_2\underline{Z}_{C2}$ получим:

$$\underline{\tilde{A}}_{\tilde{N}} = \ln\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}\sqrt{\frac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}} = \ln\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\sqrt{\frac{\underline{Z}_{C2}}{\underline{Z}_{C1}}} \ . \qquad (18.4)$$

Подставим в уравнение (18.3) $\dot{U}_1 = U_1 e^{j\phi u_1}, \dot{U}_2 = U_2 e^{j\phi u_2}, \dot{I}_1 = I e^{j\phi i_1}, \dot{I}_2 = I_2 e^{j\phi i_2}$, получим:

$$\underline{\Gamma}_С = \frac{1}{2}\ln\frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} + j\frac{1}{2}\left[(\phi_{u_1} - \phi_{u_2}) + (\phi_{i1} - \phi_{i2})\right] = A_С + jB_С \ , \qquad (18.5)$$

где $A_С$ –характеристическое (собственное) ослабление четырёхполюсника:

$$A_C = \frac{1}{2}\ln\frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = \frac{1}{2}\ln\frac{S_1}{S_2} \qquad (18.6)$$

единица измерения A_C в масштабе натуральных логарифмов называется непером (Нп);

B_C – фазовая постоянная четырёхполюсника, измеряется в радианах или градусах:

$$B_C = \frac{1}{2}\left[(\phi_{u_1} - \phi_{u_2}) + (\phi_{i1} - \phi_{i2})\right]. \qquad (18.8)$$

Характеристическая постоянная передачи симметричного четырёхполюсника:

$$\underline{\Gamma}_C = \ln\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \ln\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}, \quad A_C = \ln\frac{U_1}{U_2} = \ln\frac{I_1}{I_2}, \quad B_C = (\phi_{u_1} - \phi_{u_2}) = (\phi_{i_1} - \phi_{i_2}). \qquad (18.9)$$

На практике принято измерять A_C в децибелах (дБ). Для несимметричного четырёхполюсника: $A_C = 10\lg(U_1 I_1 / U_2 I_2) = 10\lg(S_1/S_2)$. Для симметричного четырёхполюсника: $A_C = 20\lg(U_1/U_2) = 20\lg(I_1/I_2)$.

Характеристическую постоянную передачи можно выразить через А-параметры и параметры ХХ и КЗ:

$$\underline{\Gamma}_C = \ln(\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}), \quad th\underline{\Gamma}_C = \sqrt{\underline{Z}_{K1}/\underline{Z}_{X1}} = \sqrt{\underline{Z}_{K2}/\underline{Z}_{X2}}. \qquad (18.10)$$

18.2 Уравнения передачи четырёхполюсника с гиперболическими функциями

А - параметры могут быть выражены через характеристические параметры:

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\underline{Z}_{C1}/\underline{Z}_{C2}}\,ch\underline{\Gamma}_C, \quad \underline{A}_{22} = \sqrt{\underline{Z}_{C1}/\underline{Z}_{C2}}\,ch\underline{\Gamma}_C;$$
$$\underline{A}_{12} = \sqrt{\underline{Z}_{C1}/\underline{Z}_{C2}}\,sh\underline{\Gamma}_C, \quad \underline{A}_{21} = sh\underline{\Gamma}_C / \sqrt{\underline{Z}_{C1}/\underline{Z}_{C2}}. \qquad (18.11)$$

Подставим (18.11) в уравнение передачи в А-параметрах (16.3) и получим уравнение передачи с гиперболическими функциями:

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \sqrt{\underline{Z}_{C1}/\underline{Z}_{C2}}\,\dot{U}_2 ch\underline{\Gamma}_C + \sqrt{\underline{Z}_{C1}\underline{Z}_{C2}}\,\dot{I}_2 sh\underline{\Gamma}_C \\ \dot{I}_1 &= \dot{U}_2 sh\underline{\Gamma}_C \Big/ \sqrt{\underline{Z}_{C1}\underline{Z}_{C2}} + \sqrt{\underline{Z}_{C2}/\underline{Z}_{C1}}\,\dot{I}_2 ch\underline{\Gamma}_C\end{aligned}\right\}. \qquad (18.12)$$

Для симметричного четырёхполюсника ($\underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2} = \underline{Z}_C$) уравнение передачи с гиперболическими функциями имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \dot{U}_2 ch\underline{\Gamma}_C + \dot{I}_2 \underline{Z}_C sh\underline{\Gamma}_C \\ \dot{I}_1 &= \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_C} sh\underline{\Gamma}_C + \dot{I}_2 ch\underline{\Gamma}_C\end{aligned}\right\}. \qquad (18.13)$$

18.3 Каскадное согласованное соединение четырехполюсников

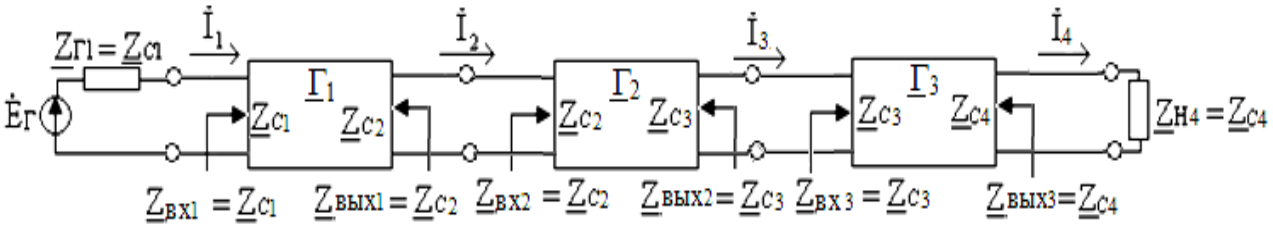


Рисунок 18.4

Каскадное согласованное соединение четырехполюсников с характеристическими постоянными передачи $\underline{\Gamma}_{C1}$, $\underline{\Gamma}_{C2}$, $\underline{\Gamma}_{C3}$ показано на рисунке 18.4. Характеристическая постоянная передачи результирующего четырёхполюсника равна: $\underline{\Gamma}_C = \underline{\Gamma}_{C1}+\underline{\Gamma}_{C2}+\underline{\Gamma}_{C3}$. Так как $\underline{\Gamma}_C = A_C + jB_C$, получим:

$$A_C = \sum_{k=1}^{3} A_{Ck}, \quad B_C = \sum_{k=1}^{3} B_{Ck}.$$

Список литературы

Основная:

1 Основы теорий цепей. Бакалов В.П. -М.: «Горячая линия-Телеком, 2013.- 592с.

2 Жолдыбаева З.И., Зуслина Е.Х. Применение MathCad в теории электрических цепей: Учебное пособие. – Алматы: АУЭС, 2012. – 86 с.

3 Жолдыбаева З.И., Зуслина Е.Х. Теория электрических цепей1. Примеры расчета установившихся процессов в линейных электрических цепах: Учебное пособие. – Алматы: АУЭС, 2009. – 93 с.

4 Жолдыбаева З.И., Зуслина Е.Х., Коровченко Т.И. Теория электрических цепей 1. Конспект лекций. – Алматы: АИЭС, 2007.- 90 с.

Дополнительная:

1 Основы теории цепей: Учебник для вузов /Г.В.Зевеке и др.- М.: Энергоатомиздат, 1989.- 528 с.

2 Шебес М.Р., Каблукова М.В. Задачник теории линейных электрических цепей: Учебное пособие для Вузов. - М.: ВШ, 1990.-544 с.

Содержание

Введение……3
1 Лекция №1. Элементы электрических цепей и электрических схем……4
2 Лекция №2. Расчет простейших электрических цепей постоянного тока…..8
3 Лекция №3. Методы расчёта разветвленных электрических
цепей постоянного тока……...…….....14
4 Лекция №4.Синусоидальный ток и основные характеризующие
его величины.....18
5 Лекция №5. Символический метод расчета цепей
синусоидального тока.....24
6 Лекция №6. Топографические диаграммы…….……..…… 27
7 Лекция №7. Мощность в цепях синусоидального тока.…….……..30
8 Лекция №8. Входные и передаточные характеристики.....35
9 Лекция №9. Резонанс напряжений..……..……...……..39
10 Лекция №10. Резонанс токов..……...……..……....44
11 Лекция №11. Линейные электрические цепи при
несинусоидальных периодических воздействиях.....49
12 Лекция №12. Расчёт линейных электрических цепей
при несинусоидальных периодических воздействиях.....53
13 Лекция №13. Индуктивно связанные цепи……..…….....56
14 Лекция №14. Расчёт индуктивно связанных цепей …….…….....59
15 Лекция №15. Нелинейные электрические цепи постоянного тока …….62
16 Лекция №16. Четырёхполюсники. Уравнения
передачи четырёхполюсников.....67
17 Лекция №17. Входные сопротивления четырехполюсников.
Параметры холостого хода и короткого замыкания …….……....70
18 Лекция №18. Характеристические параметры четырёхполюсника.
Уравнения четырёхполюсника с гиперболическими функциями.....72
Список литературы……...…….....76

Сводный план 2016г., поз. 201

Зухра Исламовна Жолдыбаева
Екатерина Хаскелевна Зуслина

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Конспект лекций
для студентов специальности 5В070300 – Информационные системы

Редактор Н. М. Голева
Специалист по стандартизации Н. К. Молдабекова

Подписано в печать «___»_____ Формат 60х84 1/16
Тираж 50 экз. Бумага типографская №1
Объём 5 уч.изд.л. Заказ_____Цена тенге.

Копировально-множительное бюро
некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013 Алматы, Байтурсынова, 126

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ
Кафедра теоретических основ электротехники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-
методической работе
_____ С.В. Коньшин
“____”_____ 2016 г.

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Конспект лекций
для студентов специальности 5В070300 – Информационные системы

СОГЛАСОВАНО
Начальник УМО
_____М.А.Мустафин
«___»_____ 2016 г.

Председатель МО и Э по УМК
_____ Б.К.Курпенов
«___»_____ 2016 г.
Редактор
_____
«__»_____ 2016 г.
Специалист по стандартизации
_____

Рассмотрено и одобрено на
заседании кафедры ТОЭ
Протокол № 7 от 10.03.2016 г.
Зав. кафедрой ТОЭ
_____ З.И. Жолдыбаева

Согласовано:
Зав. кафедрой ИС
_____ Имангалиев Ш.И.
«___»_____ 2016г.
Составители:
_____ З.И.Жолдыбаева
_____ Е.Х.Зуслина

Алматы 2016