Коммерциялық емес акционерлік қоғам

АЛМАТЫ ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС УНИВЕРСИТЕТІ

Жоғары математика кафедрасы

МАТЕМАТИКА 2

5В071700 – Жылу энергетикасы, 5В071800 – Электр энергетикасы, 5В071900 – Радиотехника, электроника және телекоммуникациялар мамандықтарының студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар
2-бөлім

Алматы 2014

ҚҰРАСТЫРУШЫЛАР: Базарбаева С.Е. Төлеуова Б.Ж., Математика 2: 5В071700 – Жылу энергетикасы, 5В071800 – Электр энергетикасы, 5В071900 – Радиотехника, электроника және телекоммуникациялар мамандықтарының студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар. 2-бөлім. - Алматы: АЭжБУ, 2013.- 24 б.

Әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар 5В071700 – Жылу энергетикасы, 5В071800 – Электр энергетикасы, 5В071900 – Радиотехника, электроника және телекоммуникациялар мамандықтарының студенттері үшін «Математика 2» пәнінің №2 есептеу-сызба жұмыстарын орындауға арналған.

Бұл материал «Математика 2» пәнінің «Дифференциалдық теңдеулер» тарауының бағдарламасына негізделіп жасалған. Тапсырмалар берілген және қажетті теориялық мәліметтер келтірілген. Типтік нұсқаның шешуі көрсетілген.

Кестелер 18, әдеб.көрсеткіші – 9 атау.

Пікір беруші: тех.ғыл. канд., доцент Гали К.О.

«Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2013ж. жоспары бойынша басылды

© «Алматы энергетика және байланыс университеті» КЕАҚ, 2014ж.

Кіріспе

Бұл әдістемелік нұсқауда «Математика 2» пәнінің «Дифференциалдық теңдеулер» тарауының бағдарламасына сәйкес есептеу-сызба жұмыстары (ЕСЖ) берілген. Қажетті теориялық материалдар [6] дәрістер жинағында келтірілген. Теориялық сұрақтар [7] әдістемелік нұсқауда көрсетілген.

Бірінші деңгей тапсырмаларын орындауға қажетті негізгі формулалар келтірілді. Кез-келген деңгей есептерін «MATHCAD» бағдарламасында орындауға болады. Бірінші деңгей тапсырмалары бойынша типтік нұсқаның шешуі келтірілді.

Сырттай оқу бөлімінің студенттерінің бақылау жұмысының нұсқасы сынақ кітапшасының номерін 30-ға бөлгеннен қалған қалдық бойынша анықталады.

Есептеу-сызба жұмыстары және бақылау жұмыстары оқушы дәптеріне орындалуы тиіс. Барлық есептер анық және түсінікті жазылуы керек.

1 Есептеу-сызба жұмыстарының тапсырмалары

1-тапсырма. *f(x)* функциясының берілген теңдеудің шешімі болатындығын, болмайтындығын тексеріңіз (мұндағы С – тұрақты).

№	Функция $y = f(x)$	Теңдеу
1.1	$y = x^2\left(1 + ce^{\frac{1}{x}}\right)$	$x^2y' + (1-2x)y = x^2$
1.2	$y = xe^{cx}$	$y'x = (1 + \ln y - \ln x)y$
1.3	$y = \frac{cx}{x+1} + 1$	$y - xy' = 1 + x^2y'$
1.4	$y = \left(1 + ce^{-e^x}\right)^2$	$y' + 2e^xy = 2e^x\sqrt{y}$
1.5	$y = cx + e^x$	$xy' - y + e^x = 0$
1.6	$y = \frac{2+cx}{1+2x}$	$2\left(1 + x^2y'\right) = y - xy'$
1.7	$y = ce^{tg\frac{x}{2}}$	$y'\sin x = y\ln y$
1.8	$y = c\sqrt{x^2-1}$	$(x^2-1)y' - xy = 0$
1.9	$y = cx^2e^{-\frac{3}{x}}$	$x^2y' - 2xy = 3y$
1.10	$y = ce^{-2x} + 2x - 1$	$y' + 2y = 4x$
1.11	$y = cx^2e^{\frac{1}{x}} + x^2$	$y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$

1.12	$y = e^{-x^2}\left(c + \frac{x^2}{2}\right)$	$y' + 2xy = xe^{-x^2}$
1.13	$y = (x + c)(1 + x^2)$	$(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$
1.14	$y = cx^2 + \frac{1}{x}$	$x^2 dy + (3 - 2xy)dx = 0$
1.15	$y = ce^{-2x}$	$y' + 2y = 0$
1.16	$y = (x + c)e^x$	$y' - y = e^x$
1.17	$y = c\sqrt{x^2 - 1}$	$(x^2 - 1)y' - xy = 0$
1.18	$y = x^2(1 + ce^{1/x})$	$x^2 y' + (1 - 2x)y = x^2$
1.19	$y = cx + \frac{1}{c}$	$xy' - y + \frac{1}{y} = 0$
1.20	$y = c\sin x - 2$	$\sin x y' = y\cos x + 2\cos x$
1.21	$y = \sqrt{x^2 + c}$	$yy' = x$
1.22	$y = \frac{2 + cx}{1 + 2x}$	$2(1 + x^2 y') = x - xy'$
1.23	$e^{\frac{y}{x}} = cy$	$xyy' - y^2 = x^2 y$
1.24	$y = c\sqrt{x^2 - 1}$	$(x^2 - 1)y' - xy = 0$
1.25	$y = \frac{2x}{1 - cx^2}$	$y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$
1.26	$y = (c + x)e^x$	$y'' - 2y' + y = 0$
1.27	$y = \cos x + C \cdot \sin x$	$y'' + y = 0$
1.28	$y = \frac{1}{12}(x + C)^3$	$(y'')^2 = y'$
1.29	$y = \frac{1}{3}x^3 + Cx^2$	$y'' = \frac{y'}{x} + x$
1.30	$y = C\cos x + \sin x$	$y'' + y = 0$

2-тапсырма. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін (жалпы интегралын) табыңыз.

№	Тапсырма	№	Тапсырма	№	Тапсырма
2.1	$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$	2.2	$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$	2.3	$\frac{dy}{dx}=yx$
2.4	$\frac{dy}{dx}=-\frac{2y}{x}$	2.5	$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{3x}$	2.6	$\frac{dy}{dx}=2yx$
2.7	$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{5x}$	2.8	$\frac{dy}{dx}=-yx$	2.9	$\frac{dy}{dx}=2y^2x^2$
2.10	$\frac{dy}{dx}=-2yx$	2.11	$\frac{dy}{dx}=yx^2$	2.12	$\frac{dy}{dx}=y\sqrt{x}$
2.13	$\frac{dy}{dx}=-yx^2$	2.14	$\frac{dy}{dx}=y^2x$	2.15	$\frac{dy}{dx}=y^2$
2.16	$\frac{dy}{dx}=y\frac{1}{\sqrt{x}}$	2.17	$\frac{dy}{dx}=y^2x^2$	2.18	$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$
2.19	$\frac{dy}{dx}=-y^2x$	2.20	$\frac{dy}{dx}=2y^2$	2.21	$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{2x}$
2.22	$\frac{dy}{dx}=y^3x$	2.23	$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}$	2.24	$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{2y}$
2.25	$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{2y}$	2.26	$\frac{dy}{dx}=\sqrt{y}\cdot\sqrt{x}$	2.27	$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{3x}$
2.28	$\frac{dy}{dx}=4yx$	2.29	$\frac{dy}{dx}=2y\frac{1}{\sqrt{x}}$	2.30	$\frac{dy}{dx}=-\frac{3y}{x}$

3-тапсырма. Коши есебін шешіп, интегралдық қисықты сызыңыз.

№	Тапсырма	№	Тапсырма	№	Тапсырма
3.1	$y'=2y,\ y(0)=3$	3.2	$y'=-y,\ y(0)=2$	3.3	$y'=y,\ y(0)=-2$
3.4	$y'=-y,\ y(0)=-3$	3.5	$y'=2y,\ y(0)=-7$	3.6	$y'=-3y,\ y(0)=-1$
3.7	$y'=2y,\ y(0)=5$	3.8	$y'=-3y,\ y(0)=1$	3.9	$y'=\frac{1}{2}y,\ y(0)=-1$
3.10	$y'=\frac{1}{2}y,\ y(0)=4$	3.11	$y'=\frac{1}{3}y,\ y(0)=4$	3.12	$y'=3y,\ y(-1)=-2$
3.13	$y'=y,\ y(1)=2$	3.14	$y'=-y,\ y(-1)=2$	3.15	$y'=-y,\ y(1)=-2$

3.16	$y' = 3y,$ $y(-1) = 2$	3.17	$y' = -y,\ y(1) = 2$	3.18	$y' = -y,$ $y(-1) = -2$
3.19	$y' = -y,\ y(3) = -2$	3.20	$y' = y,\ y(\ln 3) = 4$	3.21	$y' = y,\ y(1) = -2$
3.22	$y' = k \cdot y,$ $y(0) = y_0$	3.23	$y' = k \cdot y,$ $y(x_0) = y_0$	3.24	$y' = y,$ $y(-3) = 2$
3.25	$y' = -y,\ y(\ln 2) = -1$	3.26	$y' = \frac{1}{4}y,\ y(0) = 4$	3.27	$y' = -4y,$ $y(1) = 2 \cdot e^{-4}$
3.28	$y' = -2y,$ $y(1) = 2 \cdot e^{-2}$	3.29	$y' = 2y,\ y(-\ln 2) = 1$	3.30	$y' = 5y,$ $y(-1) = 2 \cdot e^{-5}$

4-тапсырма. Коши есебін шешіңіз.

№	Тапсырма	№	Тапсырма
4.1	$y' = y^2,\ y(0) = 1$	4.2	$y' = y^2,\ y(0) = -1$
4.3	$y' = y^2,\ y(0) = 0$	4.4	$y' = y^2,\ y(1) = 2$
4.5	$y' = y^2,\ y(-1) = 2$	4.6	$y' = y^2,\ y(1) = -3$
4.7	$y' = y^2,\ y(-1) = -4$	4.8	$y' = -y^2,\ y(0) = 1$
4.9	$y' = -y^2,\ y(0) = -2$	4.10	$y' = -y^2,\ y(2) = 5$
4.11	$y' = -y^2,\ y(2) = -3$	4.12	$y' = -y^2,\ y(-1) = 4$
4.13	$y' = 2y^2,\ y(0) = 3$	4.14	$y' = -3y^2,\ y(0) = -1$
4.15	$y' = y^3,\ y(0) = 2$	4.16	$y' = -y^3,\ y(0) = 4$
4.17	$y' = \frac{1}{y^2},\ y(1) = 1$	4.18	$y' = \frac{1}{y^2},\ y(0) = -1$
4.19	$y' = 1 + y^2,\ y(0) = 0$	4.20	$y' = 4 + y^2,\ y(1) = 0$
4.21	$y' = y^2 - 1,\ y(0) = 1$	4.22	$y' = y^2 - 1,\ y(0) = 2$
4.23	$y' = y^2 - 1,\ y(0) = -2$	4.24	$y' = 1 - y^2,\ y(0) = -1$
4.25	$y' = 1 - y^2,\ y(0) = 2$	4.26	$y' = \frac{y}{1 - y^2},\quad y(0) = 1$
4.27	$y' = 3y^2,\quad y(0) = 1$	4.28	$y' = \frac{1}{y},\quad y(0) = -2$
4.29	$y' = \frac{3y}{4 - y^2},\ y(0) = 1$	4.30	$y' = \frac{3y}{4 - y},\quad y(0) = 1$

5-тапсырма. Коши есебін шешіңіз.

№	Тапсырма	№	Тапсырма
5.1	$y' - \frac{y}{x} = x^3,\ y(1) = 0$	5.2	$y' - \frac{y}{x} = \sqrt{x},\ y(4) = 2$
5.3	$y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}},\ y(1) = 1$	5.4	$y' + \frac{y}{x} = x,\ y(-1) = 1$
5.5	$y' + \frac{y}{x} = \sqrt{x},\ y(4) = -1$	5.6	$y' + \frac{y}{x} = e^x,\ y(1) = 0$
5.7	$y' + \frac{y}{x} = \frac{2}{1+x^2},\ y(1) = 0$	5.8	$y' - 2xy = e^{x^2},\ x, y(0) = -1$
5.9	$y' - 2xy = e^{x^2},\ x, y(-1) = 2$	5.10	$y' + 2xy = e^{-x^2},\ y(1) = 2$
5.11	$y' + 2xy = x,\ y(0) = 1$	5.12	$y' + 2xy = 2x,\ y(0) = -2$
5.13	$y' + \frac{y}{x} = \cos x,\ y(\pi) = 0$	5.14	$y' - \frac{y}{x} = \ln x,\ y(e) = 1$
5.15	$y' - \frac{2y}{x} = x,\ y(1) = 1$	5.16	$y' - \frac{2y}{x} = 1,\ y(2) = -2$
5.17	$y' - \frac{2y}{x} = \sqrt[3]{x},\ y(8) = -1$	5.18	$y' + \frac{2y}{x} = \sqrt{x},\ y(4) = 0$
5.19	$y' + \frac{2y}{x} = \frac{\cos 2x}{x^2},\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$	5.20	$y' - 2xy = -x,\ y(0) = -1$
5.21	$y' - \frac{y}{x} = \sqrt[3]{x},\ y(8) = 1$	5.22	$y' - \frac{y}{x} = x^2 e^x,\ y(1) = 1$
5.23	$y' - 2xy = x,\ y(0) = 1$	5.24	$y' - 2xy = x^2 e^{x^2},\ y(1) = 2$
5.25	$y' + 2xy = xe^{-x^2},\ y(0) = 2$	5.26	$y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2},\ y(1) = 1$
5.27	$y' - y\cos x = \sin 2x,\ y(0) = -1$	5.28	$y' - 4xy = -4x^3,\ y(0) = -\frac{1}{2}$
5.29	$y' + \frac{y}{x} = 3x,\ y(1) = 1$	5.30	$y' + \frac{y}{x} = \sin x,\ y(\pi) = \frac{1}{\pi}$

6-тапсырма. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

№	Тапсырма	№	Тапсырма	№	Тапсырма
6.1	$y' + y = xy^2$	6.2	$y' + 2y = xy^3$	6.3	$y' - y = xy^2$
6.4	$y' + y = x\sqrt{y}$	6.5	$y' - y = -x\sqrt{y}$	6.6	$y' - 2y = xy^3$
6.7	$y' + y = x^2 y^2$	6.8	$y' + 2y = x^2 y^2$	6.9	$y' - y = x^2 y^2$
6.10	$y' - y = 2xy^2$	6.11	$y' + y = 2xy^3$	6.12	$y' - 2y = x^2 y^2$

6.13	$y'-\frac{1}{3}y=xy^2$	6.14	$y'+2y=2xy^2$	6.15	$y'-2y=\frac{1}{2}xy^2$
6.16	$y'+\frac{1}{x}y=y^2$	6.17	$y'-\frac{2}{x}y=y^2$	6.18	$y'-\frac{1}{x}y=y^2$
6.19	$y'+\frac{2}{x}y=y^2$	6.20	$y'+3y=xy^2$	6.21	$y'-3y=xy^3$
6.22	$y'+2y=y^2e^x$	6.23	$y'+2y=y^2e^{-2x}$	6.24	$y'+3y=\frac{x}{y}$
6.25	$y'+2y=y^2e^{-5x}$	6.26	$y'+4y=2\frac{x}{y}$	6.27	$y'-2y=y^2e^{-x}$
6.28	$y'+\frac{2}{x}y=2y^2$	6.29	$y'-\frac{1}{4}y=xy^2$	6.30	$y'+2y=xy^2$

7-тапсырма. Дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралын табыңыз.

№	Тапсырма
7.1	$3x^2e^y dx+\left(x^3e^y-1\right)dy=0$
7.2	$\left(3x^2+\frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y}\right)dx-\frac{2x}{y^2}\cos\frac{2x}{y}dy=0$
7.3	$\left(3x^2+4y^2\right)dx+\left(8xy+e^y\right)dy=0$
7.4	$\left(2x-1-\frac{y}{x^2}\right)dx-\left(2y-\frac{1}{x}\right)dy=0$
7.5	$\left(y^2+y\sec^2 x\right)dx+\left(2xy+tgx\right)dy=0$
7.6	$\left(3x^2y+2y+3\right)dx+\left(x^3+2x+3y^2\right)dy=0$
7.7	$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0$
7.8	$\left[\sin 2x-2\cos(x+y)\right]dx-2\cos(x+y)dy=0$
7.9	$\left(xy^2+x/y^2\right)dx+\left(x^2y-x^2/y^3\right)dy=0$
7.10	$\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4}\right)dx-\frac{2y}{x^3}dy=0$
7.11	$\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx-\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}+2y\right)dy=0$
7.12	$\frac{y}{x^2}dx-\frac{xy+1}{x}dy=0$

7.13	$\frac{1+xy}{x^2}dx+\frac{1-xy}{xy^2}dy=0$
7.14	$\frac{dx}{y}-\frac{x+y^2}{y^2}dy=0$
7.15	$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(x+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0$
7.16	$\left(xe^x+\frac{y}{x^2}\right)dx-\frac{1}{x}dy=0$
7.17	$\left(10xy-\frac{1}{\sin y}\right)dx+\left(5x^2+\frac{x\cos y}{\sin^2 y}-y^2\sin y^3\right)dy=0$
7.18	$\left(\frac{y}{x^2+y^2}+e^x\right)dx-\left(5x^2+\frac{x\cos y}{\sin^2 y}-y^2\sin y^3\right)dy=0$
7.19	$e^y dx+\left(\cos y+xe^y\right)dy=0$
7.20	$\left(y^3+\cos x\right)dx+\left(3xy^2+e^y\right)dy=0$
7.21	$xe^{y^2}dx+\left(x^2y\,e^{y^2}+tg^2y\right)dy=0$
7.22	$\left(5xy^2-x^3\right)dx+\left(5x^2y-y\right)dy=0$
7.23	$\left[\cos\left(x+y^2\right)+\sin x\right]dx+2y\cos\left(x+y^2\right)dy=0$
7.24	$\left(x^2-4xy-2y^2\right)dx+\left(y^2-4xy-2x^2\right)dy=0$
7.25	$\left(\sin y+y\sin x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y}\right)dy=0$
7.26	$\left(1+\frac{1}{y}e^{x/y}\right)dx+\left(1-\frac{x}{y^2}e^{x/y}\right)dy=0$
7.28	$2\left(3xy^2+2x^3\right)dx+3\left(2x^2y+y^2\right)dy=0$
7.29	$\left(3x^3+6x^2y+3xy^2\right)dx+\left(2x^3+3x^2y\right)dy=0$
7.30	$xy^2dx+y\left(x^2+y^2\right)dy=0$

8-тапсырма. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

№	Тапсырма	№	Тапсырма	№	Тапсырма
8.1	$y'' = \sin 2x$	8.2	$y'' = e^{2x}$	8.3	$y'' = xe^{x}$
8.4	$y'' = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$	8.5	$y'' = \frac{1}{1+x^2}$	8.6	$y'' = \cos 7x$
8.7	$y'' = xe^{-x}$	8.8	$y'' = \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x}$	8.9	$y'' = \cos^2 x$
8.10	$y'' = \sin^2 2x$	8.11	$y'' = \frac{1}{1+x}$	8.12	$y'' = \frac{x}{(x+1)^3}$
8.13	$y'' = \left(e^{x} + e^{-x}\right)^2$	8.14	$y'' = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$	8.15	$y'' = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$
8.16	$y'' = \sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}$	8.17	$y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$	8.18	$y'' = \sqrt{x}(1-x)^2$
8.19	$y'' = \sin x \cdot \cos x$	8.20	$y'' = \frac{1}{\sin^2 x}$	8.21	$y'' = -\frac{1}{1+x^2}$
8.22	$y'' = \frac{1}{\cos^2 2x}$	8.23	$y'' = \cos^2 x$	8.24	$y'' = \frac{1}{2x+1}$
8.25	$y'' = x - \frac{1}{x^3}$	8.26	$y'' = 2^{x}$	8.27	$y'' = -\sin 4x$
8.28	$y'' = (2+x)^3$	8.29	$y'' = \sin x \cdot \cos^2 x$	8.30	$y'' = 3\ell^{2x}$

9-тапсырма. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

№	Теңдеу	№	Теңдеу	№	Теңдеу
9.1	$y''x\ln x = y'$	9.2	$xy'' + y' = 1$	9.3	$2xy'' = y'$
9.4	$xy'' + y' = x + 1$	9.5	$\frac{y''}{ctgx} - y' = -\frac{1}{\sin x}$	9.6	$x \cdot y'' - y' = -\frac{1}{x}$
9.7	$y''ctg\,2x + 2y' = 0$	9.8	$x^3y'' + x^2y' = 1$	9.9	$tgx \cdot y'' = 2y'$
9.10	$y''cth2x = 2y'$	9.11	$x^4y'' + x^3y' = 1$	9.12	$xy'' + 2y' = 0$
9.13	$(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$	9.14	$x^5y'' + x^4y' = 1$	9,15	$x^2y'' + xy' = 1$
9.16	$xy'' + y' + x = 0$	9.17	$y''thx = y'$	9.18	$xy'' + y' = \sqrt{x}$
9.19	$y''tgx = y' + 1$	9.20	$y''tg5x = 5y'$	9.21	$y''th7x = 7y'$
9.22	$x^3y'' + x^2y' = \sqrt{x}$	9.23	$(1+x)y'' + y' = x + 1$	9.24	$(1+\sin x)y'' = \cos x \cdot y'$

9.25	$x \cdot y'' + y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$	9.26	$-x \cdot y'' + 2y' = \frac{2}{x^2}$	9.27	$y'' + \frac{2x}{x^2+1} y' = 2x$
9.28	$x^4 \cdot y'' + x^3 y' = 4$	9.29	$(1+x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$	9.30	$chx \cdot y'' + y' = chx$

10-тапсырма. Коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

№	Тапсырма	№	Тапсырма
10.1	$y'' - 3y' = 0$	10.2	$y'' + 3y' + 2y = 0$
10.3	$y'' + 2y' + 17y = 0$	10.4	$y'' + 6y' + 9y = 0$
10.5	$y'' + 4y' + 3y = 0$	10.6	$y'' - 6y' + 25y = 0$
10.7	$y'' - 2y' + 5y = 0$	10.8	$y'' + 4y = 0$
10.9	$y'' + y' - 2y = 0$	10.10	$y'' - 2y' + 2y = 0$
10.11	$y'' + 2y' = 0$	10.12	$y'' + 2y' + y = 0$
10.13	$y'' + 4y' + 13y = 0$	10.14	$y'' - 5y' + 4y = 0$
10.15	$y'' - 2y' + y = 0$	10.16	$y'' + y' - 20y = 0$
10.17	$y'' - 4y' + 4y = 0$	10.18	$9y'' + 3y' - 2y = 0$
10.19	$y'' + 8y' + 25y = 0$	10.20	$4y'' + 8y' - 5y = 0$
10.21	$y'' + 6y' + 10y = 0$	10.22	$y'' + 12y' + 37y = 0$
10.23	$y'' - 6y' + 8y = 0$	10.24	$9y'' - 6y' + y = 0$
10.25	$y'' + 2y' + 10y = 0$	10.26	$y'' - 4y' + 8y = 0$
10.27	$y'' + 4y' + 8y = 0$	10.28	$y'' + y' + y = 0$
10.29	$y'' - y' + y = 0$	10.30	$y'' - y' - y = 0$

11-тапсырма. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

№	Тапсырма	№	Тапсырма
11.1	$y'' + 2y' - 8y = x^2 + 1$	11.2	$y'' - 3y' = x - 2$
11.3	$y'' - 2y' + y = 5e^x$	11.4	$y'' + 2y' - 8y = xe^{4x}$
11.5	$y'' - 2y' - 8y = 7e^{4x}$	11.6	$y'' - 2y' - 8y = -e^{-2x}$
11.7	$y'' + 2y' = x^2 + 2$	11.8	$y'' + 2y' + y = -e^{-x}$
11.9	$y'' - 6y' + 5y = 2x^2 - 5$	11.10	$y'' + 6y' + 5y = x^2 - 3$
11.11	$y'' - 6y' + 8y = 2xe^x$	11.12	$y'' + 6y' + 8y = 5e^{-4x}$
11.13	$y'' + 6y' + 8y = xe^{-2x}$	11.14	$y'' + y = 5\cos x$

11.15	$y''+y=-\sin x$	11.16	$y''+y=\cos x-\sin x$
11.17	$y''-y'=x+x^2-x^3$	11.18	$y''+y'=-xe^x$
11.19	$y''-y'=(1-x)e^{2x}$	11.20	$y''+y'=(5-x)e^x$
11.21	$y''-4y'+4y=-2e^{2x}$	11.22	$y''-4y'+4y=xe^{-x}$
11.23	$y''-4y'+8y=(1+2x)e^x$	11.24	$y''+4y'+8y=5-x^2$
11.25	$y''+y'+y=(x+2)e^x$	11.26	$y''-5y'+6y=-6x^2+2x+5$
11.27	$y''-13y'+12=x-1$	11.28	$y''-y'=5x^2-1$
11.29	$y''+y'-6y=(20x+14)e^{2x}$	11.30	$y''-2y'+y=2x(1-x)$

12-тапсырма. Дифференциалдық теңдеулер жүйесін айнымалыны жою тәсілімен шешіңіз.

№	Тапсырма	№	Тапсырма	№	Тапсырма
12.1	$\begin{cases} y_1' = -2y_1+3y_2, \\ y_2' = 2y_1-3y_2 \end{cases}$	12.2	$\begin{cases} y_1' = -y_1+2y_2, \\ y_2' = y_1-2y_2 \end{cases}$	12.3	$\begin{cases} y_1' = -3y_1+2y_2, \\ y_2' = 3y_1-2y_2 \end{cases}$
12.4	$\begin{cases} y_1' = -3y_1+4y_2, \\ y_2' = 3y_1-4y_2 \end{cases}$	12.5	$\begin{cases} y_1' = -4y_1+3y_2, \\ y_2' = 4y_1-3y_2 \end{cases}$	12.6	$\begin{cases} y_1' = -2y_1+y_2, \\ y_2' = 2y_1-y_2 \end{cases}$
12.7	$\begin{cases} y_1' = -5y_1+y_2, \\ y_2' = 5y_1-y_2 \end{cases}$	12.8	$\begin{cases} y_1' = -2y_1+4y_2, \\ y_2' = 2y_1-4y_2 \end{cases}$	12.9	$\begin{cases} y_1' = -y_1+4y_2, \\ y_2' = y_1-4y_2 \end{cases}$
12.10	$\begin{cases} y_1' = -2y_1+5y_2, \\ y_2' = 2y_1-5y_2 \end{cases}$	12.11	$\begin{cases} y_1' = -3y_1+5y_2, \\ y_2' = 3y_1-5y_2 \end{cases}$	12.12	$\begin{cases} y_1' = -y_1+5y_2, \\ y_2' = y_1-5y_2 \end{cases}$
12.13	$\begin{cases} y_1' = -5y_1+2y_2, \\ y_2' = 5y_1-2y_2 \end{cases}$	12.14	$\begin{cases} y_1' = -5y_1+4y_2, \\ y_2' = 5y_1-4y_2 \end{cases}$	12.15	$\begin{cases} y_1' = -5y_1+3y_2, \\ y_2' = 5y_1-3y_2 \end{cases}$
12.16	$\begin{cases} y_1' = -\frac{1}{2}y_1+7y_2, \\ y_2' = \frac{1}{2}y_1-7y_2 \end{cases}$	12.17	$\begin{cases} y_1' = -4y_1+5y_2, \\ y_2' = 4y_1-5y_2 \end{cases}$	12.18	$\begin{cases} y_1' = -2y_1+7y_2, \\ y_2' = 2y_1-7y_2 \end{cases}$

12.19	$\begin{cases} y_1' = -4y_1 + y_2, \\ y_2' = 4y_1 - y_2 \end{cases}$	12.20	$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 7y_2, \\ y_2' = y_1 - 7y_2 \end{cases}$	12.21	$\begin{cases} y_1' = -y_1 + \frac{3}{2}y_2, \\ y_2' = y_1 - \frac{3}{2}y_2 \end{cases}$
12.22	$\begin{cases} y_1' = -y_1 + \frac{5}{2}y_2, \\ y_2' = y_1 - \frac{5}{2}y_2 \end{cases}$	12.23	$\begin{cases} y_1' = -5y_1 + \frac{1}{2}y_2, \\ y_2' = 5y_1 - \frac{1}{2}y_2 \end{cases}$	12.24	$\begin{cases} y_1' = -7y_1 + y_2, \\ y_2' = 7y_1 - y_2 \end{cases}$
12.25	$\begin{cases} y_1' = -0{,}4y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 0{,}4y_1 - 2y_2 \end{cases}$	12.26	$\begin{cases} y_1' = 0{,}2y_1 - y_2, \\ y_2' = -0{,}2y_1 + y_2 \end{cases}$	12.27	$\begin{cases} y_1' = -2{,}1y_1 + y_2, \\ y_2' = 2{,}1y_1 - y_2 \end{cases}$
12.28	$\begin{cases} y_1' = -4{,}5y_1 - 0{,}5y_2, \\ y_2' = 4{,}5y_1 + 0{,}5y_2 \end{cases}$	12.29	$\begin{cases} y_1' = 0{,}8y_1 - 0{,}2y_2, \\ y_2' = -0{,}8y_1 + 0{,}2y_2 \end{cases}$	12.30	$\begin{cases} y_1' = 3{,}2y_1 + y_2, \\ y_2' = -3{,}2y_1 - y_2 \end{cases}$

13-тапсырма. Коши есебін шешіңіз.

№	Тапсырма	№	Тапсырма
13.1	$y'' - 2y' - 3y = 0,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$	13.2	$y'' + 2y' - 3y = 0,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
13.3	$y'' - 6y' + 13y = 0,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = -1$	13.4	$y'' + 6y' + 13y = 0,$ $y(0) = -1,\ y'(0) = 0$
13.5	$y'' + 6y' + 10y = 0,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = -1$	13.6	$y'' - 6y' + 10y = 0,$ $y(0) = -1,\ y'(0) = 1$
13.7	$y'' + 9y = 0,$ $y(0) = -1,\ y'(0) = 2$	13.8	$y'' - 2y' + y = 0,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = -1$
13.9	$y''' + y' = 0, y(0) = 0,$ $y'(0) = 0, y''(0) = 1$	13.10	$y'' - 6y' + 8y = 0,$ $y(0) = 2,\ y'(0) = 1$
13.11	$y'' + 6y' + 8y = 0,$ $y(0) = -1,\ y'(0) = 2$	13.12	$y'' - 4y' + 4y = 0,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$
13.13	$y'' + 4y' + 4y = 0,$ $y(0) = -2,\ y'(0) = 0$	13.14	$y'' + 4y' + 5y = 0,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
13.15	$y'' + 4y' + 8y = 0,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$	13.16	$y'' - 4y' + 5y = 0,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

13.17	$y''-4y'+8y=0,$ $y(0)=0,\ y'(0)=1$	13.18	$y''+6y'+9y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=-1$
13.19	$y'''-y'=0, y(0)=0,$ $y'(0)=0,\ y''(0)=2$	13.20	$y''+2y'+10y=0,$ $y(0)=0,\ y'(0)=-1$
13.21	$y''-2y'+10y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=1$	13.22	$y''+2y'-8y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=2$
13.23	$y''-6y'+9y=0,$ $y(0)=2,\ y'(0)=1$	13.24	$y''+10y'+26y=0,$ $y(0)=0,\ y'(0)=1$
13.25	$y''-10y'+26y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=0$	13.26	$y''+18y+32=0,$ $y(0)=-1,\ y'(0)=2$
13.27	$y''-4y'+13y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=1$	13.28	$y''+10y'+26y=0,$ $y(0)=2,\ y'(0)=1$
13.29	$y''+4y'-5y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=2$	13.30	$y''-6y'+25y=0,$ $y(0)=2,\ y'(0)=1$

14-тапсырма. Сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеуді тұрақтыны вариациялау тәсілімен шешіңіз.

№	Тапсырма
14.1	$y''+\pi^2 y=\pi^2/\cos\pi x, y(0)=3, y'(0)=0$
14.2	$y''+3y'=9e^{3x}/\left(1+e^{3x}\right), y(0)=\ln 4, y'(0)=3(1-\ln 2)$
14.3	$y''+4y=8ctg\,2x, y\left(\frac{\pi}{4}\right)=5, y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=4$
14.4	$y''-6y'+8y=4/\left(1+e^{-2x}\right), y(0)=1+2\ln 2, y'(0)=6\ln 2$
14.5	$y''-9y'+18y=9e^{3x}/\left(1+e^{-3x}\right), y(0)=0, y'(0)=0$
14.6	$y''+\pi^2 y=\pi^2/\sin\pi x, y(1/2)=1, y'(1/2)=\pi^2/2$
14.7	$y''+\frac{1}{\pi^2}y=\frac{1}{\pi^2\cos(x/\pi)}, y(0)=2, y'(0)=0$
14.8	$y''-3y'=\frac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}}, y(0)=4\ln 4, y'(0)=3(3\ln 4-1)$
14.9	$y''+y=4ctgx, y(\pi/2)=4, y'(\pi/2)=4$
14.10	$y''-6y'+8y=4/\left(2+e^{-2x}\right), y(0)=1+3\ln 3, y'(0)=10\ln 3$
14.11	$y''+6y+8y=4e^{-2x}/\left(2+e^{2x}\right), y(0)=0, y'(0)=0$
14.12	$y''+9y=9/\sin 3x, y(\pi/6)=4, y'(\pi/6)=3\pi/2$

14.13	$y''+9y=9/\cos 3x, y(0)=1, y'(0)=0$
14.14	$y''-y'=e^{-x}/\left(2+e^{-x}\right), y(0)=\ln 27, y'(0)=\ln 9-1$
14.15	$y''+4y=4ctg\,2x, y(\pi/4)=3, y'(\pi/4)=2$
14.16	$y''-3y'+2y=\dfrac{1}{3+e^{-x}}, y(0)=1+8\ln 2, y'(0)=14\ln 2$
14.17	$y''-6y'+8y=4e^{2x}/\left(1+e^{-2x}\right), y(0)=0, y'(0)=0$
14.18	$y''+16y=16/\sin 4x, y(\pi/8)=3, y'(\pi/8)=2\pi$
14.19	$y''+16y=16/\cos 4x, y(0)=3, y'(0)=0$
14.20	$y''-2y'=4e^{-2x}/\left(1+e^{-2x}\right), y(0)=\ln 4, y'(0)=\ln 4-2$
14.21	$y''+\dfrac{y}{4}=\dfrac{1}{4}ctg\left(x/2\right), y(\pi)=2, y'(\pi)=1/2$
14.22	$y''-3y'+2y=1/\left(2+e^{-x}\right), y(0)=1+3\ln 3, y'(0)=5\ln 3$
14.23	$y''+3y'+2y=e^{-x}/\left(2+e^{x}\right), y(0)=0, y'(0)=0$
14.24	$y''+4y=4/\sin 2x, y(\pi/4)=2, y'(\pi/4)=\pi$
14.25	$y''+4y=4/\cos 2x, y(0)=2, y'(0)=0$
14.26	$y''+y'=e^{x}/\left(2+e^{x}\right), y(0)=\ln 27, y'(0)=1-\ln 9$
14.27	$y''+y=2ctgx, y(\pi/2)=1, y'(\pi/2)=2$
14.28	$y''-3y'+2y=1/\left(1+e^{-x}\right), y(0)=1+2\ln 2, y'(0)=3\ln 2$
14.29	$y''-3y'+2y=e^{x}/\left(1+e^{-x}\right), y(0)=0, y'(0)=0$
14.30	$y''+y=1/\sin x,\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1,\quad y'(\pi/2)=\pi/2$
31	$y''+y=1/\cos x,\quad y(0)=1, y'(0)=0$

15-тапсырма. 12-тапсырмадағы дифференциалдық теңдеулер жүйесін сипаттаушы теңдеулер және өзіндік мәндері арқылы шешіңіз.

16-тапсырма. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

№	Тапсырма	№	Тапсырма
16.1	$y'''+3y''+2y'=1-x^2$	16.2	$y'''-y'=6x^2+3x$
16.3	$y'''-y'=x^2+x$	16.4	$y^{IV}+3y'''+3y''-y'=2x$
16.5	$y^{IV}-y'''=5(x+2)^2$	16.6	$y^{IV}-2y'''+y''=2x(1-x)$
16.7	$y^{IV}+2y'''+y''=x^2+x-1$	16.8	$y^{V}-y^{IV}=2x+3$

16.9	$3y^{IV} + y''' = 6x - 1$	16.10	$y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^2$
16.11	$y''' + y'' = 5x^2 - 1$	16.12	$y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^2$
16.13	$7y''' - y'' = 12x$	16.14	$y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x$
16.15	$y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1$	16.16	$y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2$
16.17	$y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3$	16.18	$y^{IV} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x$
16.19	$y''' - 4y'' = 32 - 384x^2$	16.20	$y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2$
16.21	$y''' + y'' = 49 - 24x^2$	16.22	$y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4$
16.23	$y''' - 13y'' + 12y' = x - 1$	16.24	$y^{IV} + y''' = x$
16.25	$y''' - y'' = 6x + 5$	16.26	$y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 5$
16.27	$y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^2$	16.28	$y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1$
16.29	$y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39$	16.30	$y^{IV} + y''' = 12x + 6$

2 Тапсырмаларды орындауға әдістемелік нұсқаулар. Типтік нұсқаның шешуі

$y' = f(x,y)$, $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ бірінші ретті дифференциалдық теңдеулерді шешу алгоритмі шешу тәсілін анықтауға көмектеседі.

№	Теңдеудің аты	Теңдеудің формуламен жазылуы + түсініктеме	Теңдеуді шешуге нұсқау
1	Қарапайым ДТ	$y' = f(x)$	$y = \int f(x)dx$
2	Айнымалылары ажыратылған теңдеу	$M(x)dx + N(y)dy = 0$	$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$, C – тұрақты
3	Айнымалылары ажыратылатын теңдеу	$y' = f(x)g(y)$	→ №2 $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$
		$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$	→ №2
4	Сызықтық біртекті теңдеу	$y' + p(x)y = 0$	3-пунктті қараңыз: $\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + C$ → $y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}$ (1)
5	Сызықтық біртекті емес теңдеу	$y' + p(x)y = q(x)$, $q(x) \neq 0$	Сәйкес сызықтық біртекті теңдеуді шешіңіз. (1) - дегі С-ны x -ке тәуелді функция деп есептеп, (1)-ді

			5-пунктке қойыңыз: $y = e^{-\int p(x)dx}(C+$ $+\int q(x)\, e^{\int p(x)dx}dx)$
6	Бернулли теңдеуі	$y'+p(x)y = q(x)y^n,$ $n \neq 0$	Ауыстыру: $u(x) = y^{1-n}(x) \rightarrow$ $y = u^{\frac{1}{1-n,}},$ $y' = \frac{1}{1-n}u^{\frac{n}{1-n}} \cdot u'$
7	Толық дифференциалды теңдеу	$P(x,y)dx +$ $Q(x,y)dy = 0,$ мұндағы $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$	$\int_{x_0}^{x} P(x_0,y)dx +$ $\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C$ немесе $\int_{0}^{x} P(x,y)dx +$ $\int_{0}^{y} Q(x,y)dy = C$

Тапсырма 1. $y = \dfrac{c^2 - x^2}{2x}$ функциясының $x + y + x \cdot y' = 0$ теңдеудің шешімі болатындығын, болмайтындығын тексеріңіз.

Шешуі.

Функцияның туындысын табамыз:

$$y' = \left(\frac{c^2 - x^2}{2x}\right)' = \left(\frac{c^2}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{x}{2}\right)' = -\frac{c^2}{2x^2} - \frac{1}{2}.$$

Берілген теңдеуге y және y' мәндерін қоямыз:

$$x + \frac{c^2 - x^2}{2x} + x \cdot \left(-\frac{c^2}{2x^2} - \frac{1}{2}\right) = 0; \quad x + \frac{c^2}{2x} - \frac{x}{2} - \frac{c^2}{2x} - \frac{x}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.$$

Жауабы: берілген функция теңдеудің шешімі болады.

Тапсырма 2. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $\dfrac{dy}{dx} = x^3 y^3.$

Шешуі.

$\dfrac{dy}{dx} = x^3 y^3 \quad \Rightarrow \quad dy = x^3 y^3 dx$ – айнымалылары ажыратылатын теңдеу.

$dy = x^3 y^3 dx \quad / : y^3 \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{y^3} = x^3 dx$ – айнымалылары ажыратылған теңдеу.

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int x^3 dx; \quad \frac{y^{-2}}{-2} = \frac{x^4}{4} + c; \quad -\frac{1}{2y^2} = \frac{x^4}{4} + c$$

Жауабы: $-\frac{1}{2y^2}=\frac{x^4}{4}+c$ – теңдеудің жалпы интегралы.

Тапсырма 3. Коши есебін шешіп, интегралдық қисықты сызыңыз: $y'=6y,\quad y(0)=5$.

Шешуі.

$y'=6y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=6y \Rightarrow dy=6y\,dx$ – айнымалылары ажыратылатын теңдеу.

$\frac{dy}{y}=6dx;\quad \int\frac{dy}{y}=\int 6dx;\quad \ln|y|=6x+c;\quad |y|=e^{6x+c}$ – теңдеудің жалпы шешімі.

Бастапқы шарттарды қолданамыз: $|5|=e^{6\cdot 0+c};\ 5=e^c;\quad C=\ln 3;$ $y=e^{6x+\ln 3};\quad y=e^{6x}\cdot e^{\ln 3};\quad y=3e^{6x}$ – бастапқы шарттарды қанағаттандыратын дербес шешім.

Жауабы: $y=3e^{6x}$.

Тапсырма 4. Коши есебін шешіңіз: $y'=-5y^2,\ y(0)=\frac{1}{5}$.

Шешуі.

$y'=-5y^2;\quad \frac{dy}{dx}=-5y^2;\quad dy=-5y^2dx$ – айнымалылары ажыратылатын теңдеу.

y^2 – қа бөлеміз: $\frac{dy}{y^2}=-5x;\quad \int\frac{dy}{y^2}=-5\cdot\int dx;\quad y=\frac{1}{5x+c}$ – теңдеудің жалпы шешімі.

Бастапқы шарттарды қанағаттандыратын дербес шешімді іздейміз: $y(0)=\frac{1}{5};\quad \frac{1}{5}=\frac{1}{5\cdot 0+c};\quad c=5$.

Ескерту. y^2 – қа бөлгенде $y^2=0$ немесе $y=0$ шешімін жоғалтуымыз мүмкін. Теңдеуге қою арқылы $y=0$ осы теңдеудің шешімі екендігіне көз жеткіземіз. Сонымен қатар, $y=0$ теңдеудің жалпы шешіміне кірмейтіндіктен, ерекше шешімі болады.

Жауабы: $y=\frac{1}{5x+5},\ y=0$.

Тапсырма 5. Коши есебін шешіңіз: $y'\cos^2 x+y=tgx,\ y(0)=0$.

Шешуі.

Тұрақтыны вариациалау тәсілін қолданамыз. Теңдеуді $\cos^2 x$ – ке бөлеміз:

$y' + \frac{1}{\cos^2 x} \cdot y = \frac{tgx}{\cos^2 x}$ – бірінші ретті сызықтық біртекті емес теңдеу.

Сәйкес сызықтық біртекті теңдеу жазамыз: $y' + \frac{1}{\cos^2 x} \cdot y = 0$.

Бұл – айнымалылары ажыратылатын теңдеу.

$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\cos^2 x} = 0;$ $\frac{dy}{y} + \frac{dx}{\cos^2 x} = 0;$ $\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = 0;$

$\ln|y| + tg|x| = \ln|c|;$ $y = Ce^{-tgx}$ – сызықтық біртекті теңдеудің жалпы шешімі. Сызықтық біртекті емес теңдеудің шешімін $y = C(x)e^{-tgx}$ түрінде іздейміз, мұндағы $C(x)$ – белгісіз функция.

Берілген теңдеуге $y = C(x)e^{-tgx}$, $y' = C'(x)e^{-tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ мәндерін қоямыз:

$$\cos^2 x \cdot C'(x)e^{-tgx} - C(x)e^{-tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x + C(x)e^{-tgx} = tgx;$$

$$C'(x)\cos^2 x e^{-tgx} = tgx; C'(x) = \frac{e^{tgx} \cdot tgx}{\cos^2 x};$$

$$C(x) = \int \frac{e^{tgx} \cdot tgx}{\cos^2 x} dx = \int e^{tgx} \cdot tgx \; d(tgx) = |tgx = z| = \int e^z \cdot z dz = \left| \begin{matrix} z = u, du = dz; \\ e^z dz = dv, \\ v = e^z \end{matrix} \right| =$$

$$ze^z - \int e^z dz = ze^z - e^z + C = tgx \cdot e^{tgx} - e^{tgx} + C = e^{tgx}(tgx - 1) + C.$$

Демек, $y = C(x) \cdot e^{-tgx} = \left[e^{tgx}(tgx - 1) + e\right]e^{-tgx} = tgx - 1 + Ce^{-tgx}$ – теңдеудің жалпы шешімі. y (0) = 0 бастапқы шартын қолданамыз:

0 = -1+ C; C = 1.

Жауабы: $y = tgx - 1 + e^{-tgx}$.

Тапсырма 6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:

$y' + y = xy^{\frac{1}{2}}$.

Шешуі.

$y' + y = xy^{\frac{1}{2}}$ – Бернулли теңдеуі.

Ауыстыру жасаймыз: $z = y^{1-n} = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}.$ $y = z^2;$ $y' = 2z \cdot z'.$

Теңдеуге қоямыз: $2z \cdot z' + z^2 = x \cdot z;$ $z' + \frac{1}{2} \cdot z = \frac{1}{2} \cdot x$ – сызықтық теңдеу.

$z = u \cdot v,\ \ z' = u'v + uv',\ u'v + uv' + \frac{1}{2}uv = \frac{1}{2}x,\ v' + \frac{1}{2}v = 0,\ \ \frac{dv}{v} + \frac{dx}{2} = 0,$

$\ln v + \frac{x}{2} = 0, \quad v = e^{-\frac{x}{2}}, \quad u' \cdot e^{-\frac{x}{2}} = \frac{x}{2}, \quad \frac{du}{dx} \cdot e^{-\frac{x}{2}} = \frac{x}{2},$

$du = \frac{x}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} dx,\ u = \int \frac{x}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} dx = xe^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}} + c.$

Демек, $z = u \cdot v = e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(xe^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}} + c \right) = x + ce^{-\frac{x}{2}} - 2.$

Сонымен, $y = z^2$, яғни $y = \left(x + ce^{-\frac{x}{2}} - 2 \right)^2$.

Жауабы: $y = \left(x + ce^{-\frac{x}{2}} - 2 \right)^2$.

Тапсырма 7. Дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралын табыңыз: $(x + y - 1)dx + (e^y + x)dy = 0.$

Шешуі.

$P(x,y) = x + y + 1,\ \ Q(x,y) = e^y + x,\ \ \frac{\partial Q}{\partial x} = 1,\ \ \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \ \Rightarrow \ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$,

демек толық дифференциалдың шарттары орындалады: $du = (x + y - 1)dx + (e^y + 1)dy$. Белгісіз u функцияны мына формула бойынша табамыз:

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x;\ y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0; y)dy.$$

$x_0 = 0,\ \ y_0 = 0$ деп аламыз:

$$u = \int_0^x (x = y - 1)dx + \int_0^y e^y dy = \left(\frac{x^2}{2} + xy - x \right) \Big|_0^x + e^y \Big|_0^y = \frac{x^2}{2} + xy - \overset{0}{x} + e^y - 1.$$

$du = 0$ болғандықтан, $u = C$ – берілген теңдеудің жалпы интегралы.

Жауабы: $\frac{x^2}{2} + xy - x + e^y - 1 = C.$

8 және 9 тапсырмаларды «Ретін төмендетуге болатын жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер» тақырыбы бойынша құрылған төмендегі кестенің көмегімен шешуге болады.

№	Теңдеудің формуламен жазылуы	Түсініктеме	Қажет ауыстыру (инструкция)
1	$y^{(n)} = f(x)$	Функцияның туындысы x -ке тәуелді функция арқылы айқын түрде берілген	n рет интегралдау
2	$F(y,\ y',\ y'') = 0$	Теңдеуде тәуелсіз айнымалы x жоқ	$y'(x) = u(y)$, $y''(x) = u(y)\,u'(y)$
3	$F(x,\ y',\ y'') = 0$	Теңдеуде белгісіз функция y (x) жоқ	$y'(x) = u(x)$, $y''(x) = u'(x)$
4	$F(x, y^{(k)},\ y^{(k+1)},\ \ldots,\ y^{(n+k)}) = 0$	Теңдеуде белгісіз функцияның k-1 ретті туындылары жоқ	$y^{(k)}(x) = u(x)$, $y^{(k+1)}(x) = u'(x),\ \ldots,$ $y^{(n+k)}(x) = u^{(n)}(x)$

Тапсырма 8. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y'' = \sin 2x \cos 2x.$

Шешуі.

Бұл теңдеу $y'' = f(x)$ түріндегі екінші ретті теңдеу. Екі рет интегралдау арқылы ретін төмендетеміз:

$$y' = \int \sin 2x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin 4x dx = -\frac{1}{8}\cos 4x + C_1;$$

$$y' = \int\left(-\frac{1}{8}\cos 4x + C_1\right)dx = -\frac{1}{8}\int \cos 4x dx + \int C_1 dx = -\frac{1}{32}\sin 4x + C_1 x + C_2.$$

Жауабы: $y = -\frac{1}{32}\sin 4x + C_1 x + C_2$ – жалпы шешімі.

Тапсырма 9. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0.$

Шешуі.

Бұл – y функциясы айқын түрде көрсетілмеген теңдеу.

$y' = p$ ауыстыруын қолданамыз, сонда $y'' = \frac{dp}{dx} = p'$.

Теңдеу мына түрге келеді: $(1+x^2)y' - 2xp = 0,\ (1+x^2)dy - 2xpdx = 0$ – айнымалылары ажыратылатын теңдеу. Екі жағын $p(1+x^2)$ бөлеміз: $\frac{dp}{p} = \frac{2xdx}{1+x^2},\ \frac{dp}{p} = \frac{d(1+x^2)}{1+x^2},\ \ \ln|p| = \ln(1+x^2) + \ln|C_1|,\ \ p = C_1(1+x^2).$

$p=\frac{dy}{dx}$ болғандықтан, $\frac{dy}{dx}=C_1\left(1+x^2\right)$ – айнымалылары ажыратылатын теңдеу.

$dy=C_1\left(1+x^2\right)dx,\ y=\int C_1\left(1+x^2\right)dx,\ y=C_1\left(x+\frac{x^3}{3}\right)+C_2$ – жалпы шешімі.

Ескерту. $p\left(1+x^2\right)$ –ке бөлгенде $p=0$ және $1+x^2=0$ шешімдерін жоғалтып алуымыз мүмкін. $p=0$ теңдеуінен $y'=0\Rightarrow y=C,$ бірақ бұл шешім $C_1=0$ мәнінде жалпы шешімде бар. $1+x^2=0$ теңдеуі x-тің нақты мәндерінде орындалмайды.

Жауабы: $y=C_1\left(x+\frac{x^3}{3}\right)+C_2.$

Тапсырма 10. Коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

Мұндай тапсырмаларды орындау үшін екінші ретті коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеуді қарастырамыз:

$$y''+py'+qy=0.$$

Сипаттаушы теңдеуін жазамыз: $k^2+pk+q=0,\ D=p^2-4q.$

D	Сипаттаушы теңдеудің түбірлері	Шешімнің фундаментальді жүйесі	Жоғарғы ретті коэффициент тері тұрақты сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі $y=C_1y_1+C_2y_2$
$D>0$	$k_1=\frac{-p-\sqrt{D}}{2}$ $k_2=\frac{-p+\sqrt{D}}{2}$	$y_1=e^{k_1x},$ $y_2=e^{k_2x}$	$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{kx}$
$D=0$	$k_1=k_2=\mu,\ \mu=\frac{-p}{2}$	$y_1=e^{\mu x}$, $y_2=xe^{\mu x}$	$y=C_1e^{\mu x}+C_2xe^{\mu x}$ немесе $y=e^{\mu x}(C_1+C_2x)$
$D<0$	$k_{1,2}=\frac{-p\pm i\sqrt{\lvert D\rvert}}{2}$ $\alpha=\frac{-p}{2},\beta=\frac{\sqrt{\lvert D\rvert}}{2}$	$y_1=e^{\alpha x}cos\beta x$, $y_2=e^{\alpha x}sin\beta x$	$y=C_1e^{\alpha x}cos\beta x+$ $C_2e^{\alpha x}sin\beta x$ немесе $y=e^{\alpha x}(C_1cos\beta x+C_2sin\beta x)$

Мысал 1. $y''-11y'+10y=0.$

Шешуі.

$k^2-11k+10=0$ – берілген теңдеудің сипаттаушы теңдеуі.

$\begin{cases}k_1=1\\k_2=10\end{cases}$ – сипаттаушы теңдеудің әртүрлі нақты түбірлері.

Жалпы шешімі: $y = C_1 e^{1\cdot x} + C_2 e^{10x}$.

Жауабы: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{10x}$.

Мысал 2. $y'' + 16y' + 64y = 0$

Шешуі. $k^2 + 16k + 16 = 0 -$ сипаттаушы теңдеу.

$k_1 = k_2 = -8 -$ сипаттаушы теңдеудің бірдей түбірлері.

Жалпы шешімі: $y = C_1 e^{-8x} + C_2 x e^{-8x}$.

Жауабы: $y = e^{-8x}(C_1 + xC_2)$

Мысал 3. $y'' + 9y = 0$

Шешуі. Сипаттаушы теңдеу құрамыз: $k^2 + 9 = 0$.

$\begin{cases} k_1 = 3i \\ k_2 = -3i \end{cases}$ – сипаттаушы теңдеудің комплекс түбірлері.

$k_{1,2} = 0 \pm 3i \Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = 3$ болғандықтан, жалпы шешімі мына түрде болады: $y = e^{0\cdot x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$

Жауабы: $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.

Тапсырма 11. Коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:

$$y'' - 2y' + 2y = 6e^{2x}.$$

Шешуі.

Бұл екінші ретті коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеу:

$y'' + py' + qy = f(x)$, мұндағы $f(x) = e^{\propto x}(P_m(x)cosbx + Q_n(x)sinbx)$.

Жалпы шешімін мына түрде іздейміз: $y = y_{\text{бірт.}} + y_{\text{д.ш.}}$,

мұндағы $y_{\text{бірт.}}$ – берілген теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі, $y_{\text{д.ш.}} = x^r e^{\propto x}\left(\tilde{P}_k(x)cosbx + \tilde{Q}_k(x)sinbx\right)$, мұндағы r – сипаттаушы теңдеудің түбірлерінің ішіндегі $a+bi$ – дің саны, $k = max\{m, n\}$.

1) Берілген теңдеуге сәйкес біртекті теңдеуін жазып, жалпы шешімін табамыз: $y'' - 2y' + 2y = 0$, $k^2 - 2k + 2 = 0 -$ сипаттаушы теңдеуі, $k_{1,2} = 1 \pm i -$ сипаттаушы теңдеудің түбірлері, демек $y_{\text{бірт.}} = e^{x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

2) Біртекті емес теңдеудің дербес шешімін $f(x)$ функциясының түріне байланысты анықталмаған коэффициенттер тәсілімен табамыз: $f(x) = ae^{\alpha x} = 6e^{2x}(\alpha = 6,\ m = 2)$ және $m = 2$ сипаттаушы теңдеудің түбірі болмайтындықтан, дербес шешімді $y_{д.ш.} = Ae^{2x}$ түрінде іздейміз. Сонда $y'_{д.ш.} = 2Ae^{2x}$, $y''_{д.ш.} = 4Ae^{2x}$. Белгісіз A коэффициентті табу үшін $y_{д.ш.}, y'_{д.ш.}, y''_{д.ш.}$ мәндерін бастапқы теңдеуге қоямыз:

$4Ae^{2x} - 2 \cdot 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} = 6e^{2x}, \qquad 2Ae^{2x} = 6e^{2x}, \qquad 2A = 6, \qquad A = 3.$

Демек, $y_{д.ш.} = 3e^{2x}$, $y = e^{x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 3e^{2x}$ – жалпы шешімі.

Жауабы: $y = e^{x}(C_1 \cos x + C_1 \sin x) + 3e^{2x}$.

Тапсырма 12. Дифференциалдық теңдеулер жүйесін айнымалыны жою тәсілімен шешіңіз:

$$\begin{cases} y_1' = -9y_1 + 4y_2, \\ y_2' = 9y_1 - 4y_2. \end{cases}$$

Шешуі.

Бірінші теңдеуді x бойынша дифференциалдаймыз: $y_1'' = -9y_1' + 4y_2'$. Жүйеден y_2' –ті жою үшін екі теңдеуді қосамыз: $y_1' + y_2' = 0 \Rightarrow y_2' = -y_1'$. Демек, $y_1'' = -9y_1' + 4(-y_1')$; $y_1'' + 13y_1' = 0$ – коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеу.

$k^2 + 13k = 0 \quad k_1 = 0; \; k_2 = -13$

$y_1 = C_1 \cdot e^{0 \cdot x} +_2 e^{-13x}, \quad y_1 = C_1 + C_2 e^{-13x}$. y_2 – ні бірінші теңдеуден табамыз: $4y_2 = y_1' + 9y_1, \; y_2 = \frac{1}{4}\left(-13C_2 e^{-13x} + 9 \cdot \left(C_1 + C_2 e^{-13x}\right)\right) = -C_2 e^{-13x} + \frac{9}{4}C_1.$

Жауабы: $\begin{cases} y_1 = C_1 + C_2 e^{-13x}, \\ y_2 = \frac{9}{4}C_1 - C_2 e^{-13x}. \end{cases}$

Әдебиеттер тізімі

1. Хасеинов К.А. Математика канондары. – Алматы: MMIV, 2004.
2. Көксалов К.К. Жоғары математика курсы. – Алматы: 2002.
3. Айдос Е.Ж. Жоғары математика.–Алматы: «Иль-Тех-Кітап», 2003.
4. Данко П.Е., и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. ч.1,2. 2003.
5. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа /Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986, 2002– 368 с.
6. Базарбаева С.Е., Ким Л.Н., Курбанова Р.А. Математика 3 (методические указания и тестовые задания для подготовки к экзамену).- Алматы: АИЭС,-2007.-27 с.
7. Индивидуальные задания по высшей математике: Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения ч.2: Учеб. пособие/ под ред. А.П. Рябушко – Мн.:Выш.шк.,2000.-396 с.
8. Жуматаева С.А.,Темешева С.М. Математика 3. Конспект лекций (для студентов всех форм обучения всех специальностей).- Алматы: АИЭС, -2008.- 66 с.
9. Базарбаева С.Е., Дулэпо В.М. Высшая математика. Методические указания и задания к расчетно графической работе. Ч.6. – Алматы: АИЭС, 2002 – 32 с.

Мазмұны

1.	Кіріспе	3
2.	Есептеу –сызба жұмыстарының тапсырмалары	3
3.	Тапсырмаларды орындауға әдістемелік нұсқаулар. Типтік нұсқаның шешуі	16
4.	Әдебиеттер тізімі	25