Коммерциялық емес акционерлік қоғам

АЛМАТЫ ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС УНИВЕРСИТЕТІ

Жоғары математика кафедрасы

МАТЕМАТИКА II

5В071600 - Прибор жасау,
5В073100 - Қоршаған ортаны қорғау және өмір тіршілігінің қауіпсіздігі мамандықтарының студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар

Алматы 2016

ҚҰРАСТЫРУШЫЛАР: Б.Ж. Атабай, Э.С. Есботаева. Математика II. 5В071600 - Прибор жасау, 5В073100 - Қоршаған ортаны қорғау және өмір тіршілігінің қауіпсіздігі мамандықтарының студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар. – Алматы: АЭжБУ, 2016. -54 б.

5В071600 - Прибор жасау, 5В073100 - Қоршаған ортаны қорғау және өмір тіршілігінің қауіпсіздігі мамандықтарының студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар Математика II курсының бағдарламасына сәйкес орындалған.

Жұмыста типтік есептердің шешу жолдары және оларды орындауға қажетті нұсқаулар келтірілген.

Сурет-2, кесте -31, әдебиет көр. – 4 атау.

Пікір беруші: физика кафедрасының доценті Саламатина А.М.

«Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2016 ж. жоспары бойынша басылды

© «Алматы энергетика және байланыс университеті» КЕАҚ, 2016 ж.

Кіріспе

Есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар Математики II бағдарламасына сай «Көп айнымалы функциялардың дифференциалдық есептеулері. Еселі интегралдар», «Қарапайым дифференциалдық теңдеулер» және «Қатарлар. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика элементтері» бөлімдері бойынша орындалған. Бұл бөлімдер физика, механика және әр тұрғыдағы инженерлік есептерді шешуде ерекше орын алады және де әртүрлі зертеулер есептеулерінде, сонымен бірге математика мен оның қолданыстарында кеңінен қолданыс табады.

Теориялық сұрақтарға жауабы мен есептік тапсырманың қандай да бір нұсқаларын орындауы студенттердің іргелі білімді игеруімен бірге, ғылыми-зерттеу жұмыстарының есептері мен қолданбалы есептерді шешуді дағдылану мүмкіндігіне ие болады.

Тапсырмалар 30 нұсқадан тұрады. Әрбір студенттің нұсқа реті топ тізімінің реттік нөмірі бойынша анықталады. Тапсырмалар кестесінің реттік нөмірінің екінші саны студенттің нұсқасының реті болады. Есептеу-сызба жұмысы оқушылар дәптеріне орындалады және жұмыстың соңында әдебиеттер тізімі келтірілуі керек.

1 Есептеу-сызба жұмыс №1. Көп айнымалы функциялардың дифференциалдық есептеулері. Еселі интегралдар

Мақсаты: көп айнымалылы функциялар туындыларын табуды және еселі интегралдарды есептеуді үйрену.

1.1 Теориялық сұрақтар

1. Көп айнымалылы функциялар, негізгі түсініктер.
2. Екі айнымалылы функциялардың үздіксіздігі.
3. Екі айнымалылы функциялардың туындылары.
4. Жоғарғы ретті дербес туындылар.
5. Екі айнымалылы функциялардың дифференциалы.
6. Бағыт бойынша туынды, градиент
7. Айқын емес түрде берілген функция туындысы.
8. Жанама жазықтығы және беттің нормалы.
9. Екі айнымалылы функциялардың экстремумы.
10. Екі еселі интегралдар, негізгі түсініктер.
11. Екі еселі интегралдардың есептеулері.
12. Үш еселі интегралдар, негізгі түсініктер.
13. Үш еселі интегралдардың есептеулері.
14. Екі және үш еселі интегралдардың қосымшалары.

1.2 Есептік тапсырмалар

1-тапсырма. Екі айнымалылы функция $z = f(x, y)$ берілген. Табыңыз:

а) Δz - толық өсімшесін;

б) $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ - дербес туындыларын;

в) dz - дифференциалын;

г) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ - екінші ретті дербес туындыларын;

д) $d^2 z$ - екінші ретті дифференциалын.

1 кесте

№	$z = f(x, y)$	№	$z = f(x, y)$
1.1	$z = 2x^2y^2 - 6x + 3y - 1$	1.2	$z = arctg(xy)$
1.3	$z = x^3y^3 - x - y + 3$	1.4	$z = x^y + 6$
1.5	$z = e^{x^3y^3} + x$	1.6	$z = y^2 - e^{x^3+y^3}$
1.7	$z = (x^2 + 3y^2)^3 - 1$	1.8	$z = \sin(xy) + 2x - 1$
1.9	$z = \ln\frac{x}{y}$	1.10	$z = \frac{x}{y+1}$
1.11	$z = \frac{y}{x+1}$	1.12	$z = \sin(xy) + 2x - 1$
1.13	$z = \cos(xy) - y + 3$	1.14	$z = (2x - 3y)^5 + x$
1.15	$z = x^3 + y^3 - 2x^2y^2 + 1$	1.16	$z = \ln(x^2 - y^2)$
1.17	$z = \sqrt{xy}$	1.18	$z = \arcsin(xy)$
1.19	$z = y^x - 3$	1.20	$z = \sqrt{x + y}$
1.21	$z = \ln(x + y)$	1.22	$z = x^3y^2 - 3$
1.23	$z = (x^3 + 3y)^4 + 2y$	1.24	$z = e^{xy} - 2x$
1.25	$z = x^2y^2 + 2^{xy}$	1.26	$z = \ln\sqrt{xy}$
1.27	$z = \cos\sqrt{xy}$	1.28	$z = y^{1-x}$
1.29	$z = e^{3x^4 - y^4} - 2x$	1.30	$z = x^4 - y^2x^2 - y^4 - 2$

2-тапсырма. $\omega = f(x, y, z)$ функциясының $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесіндегі $\frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}, \frac{\partial \omega}{\partial z}$ дербес туындыларының мәндерін есептеңіз.

2 кесте

№	$f(x, y, z)$	$M_0(x_0, y_0, z_0)$	№	$f(x, y, z)$	$M_0(x_0, y_0, z_0)$
2.1	$\ln(xyz)$	$M_0(2;1;1)$	2.2	$y\sqrt[3]{x + z}$	$M_0(2;4;2)$

2 кестенің соңы

2.3	$\sin(xyz)$	$M_0\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\pi\right)$	2.4	$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$M_0(-1;1;3)$
2.5	$x^2y^2z^2$	$M_0\left(2;\frac{1}{2};-2\right)$	2.6	z^{xy}	$M_0(1;3;-2)$
2.7	$\cos\frac{x}{yz}$	$M_0(-1;3;1)$	2.8	$\cos(x+yz)$	$M_0\left(\frac{\pi}{2};1;0\right)$
2.9	$ze^{3x^4-y^4}$	$M_0(1;1;1)$	2.10	$\ln\left(\sqrt{x}+y+\sqrt{z}\right)$	$M_0(4;3;1)$
2.11	$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$M_0(3;0;4)$	2.12	$e^{x^2y^2z}$	$M_0(-1-1;1)$
2.13	$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$M_0(5;-2;0)$	2.14	$\frac{x}{y^2z^2}$	$M_0(-1;1;-1)$
2.15	$\sqrt{xyz}$	$M_0(3;1;3)$	2.16	$\ln\cos(x+yz)$	$M_0\left(0;1;\frac{\pi}{4}\right)$
2.17	$z\arcsin xy$	$M_0(0;1;2)$	2.18	$x^2y^2+z^2-\sqrt{yz}$	$M_0(-3;2;2)$
2.19	$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{z}}{y}$	$M_0(4;1;9)$	2.20	$zarcctg(xy)$	$M_0\left(\sqrt{3};1;-2\right)$
2.21	3^{xyz}	$M_0(1;3;0)$	2.22	$\sqrt{x+yz}$	$M_0(1;4;2)$
2.23	$\sin\frac{xy}{z}$	$M_0(2;0;2)$	2.24	$\ln^2\left(\frac{xy}{z}\right)$	$M_0(-4;1;-2)$
2.25	$\sqrt{z-\cos xy}$	$M_0(1;0;3)$	2.26	$\frac{x}{\sqrt{z^2+y^2}}$	$M_0(3;-3;4)$
2.27	$\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}$	$M_0(-1;2;1)$	2.28	$arctg\left(\frac{xy}{z}\right)$	$M_0\left(1;1;\sqrt{3}\right)$
2.29	$\arcsin\sqrt{xyz}$	$M_0\left(\frac{1}{2};1;1\right)$	2.30	$\frac{x+y}{y^2+z^2}$	$M_0(3;4;0)$

3-тапсырма. $F(x,y,z)=0$ функциясының $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ туындыларын табыңыз.

3 кесте

№	$F(x,y,z)=0$	№	$F(x,y,z)=0$
3.1	$2x^2y^2-6xz^2+3y^3-z=4$	3.2	$arctg\left(x^2y^2-2z\right)+7=0$
3.3	$4x^2-3y^2z^2-xyz+1=0$	3.4	$2x^3+3y^3-z^3-xy^2z=1$
3.5	$\sin(xyz)-z^2x+3=0$	3.6	$xyz+z^2x^2+3y^2-4=0$
3.7	$x^2-2y^2+3z^2-xyz=3$	3.8	$e^{-xy}+x^2-3y^2z^2-z=3$
3.9	$\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)-1=0$	3.10	$3^{\sqrt{xyz}}+x^2-z-2=0$

3 кестенің соңы

3.11	$x^2y^2z^2 - xy - 3z = 5$	3.12	$2x^2 - y^2 - z^2 + 3xy^3z = 4$
3.13	$\arcsin\sqrt{xy+z} + 7 = 0$	3.14	$\sqrt{x^2+y^2+z^2} + xz = 0$
3.15	$2x^3 + 3y^3 - z^3 - xy^2z = 1$	3.16	$\ln xy + xyz - z^3 = 5$
3.17	$x^2 - 2xy - 3y^2 - 2yz + z^2 = 10$	3.18	$\ln\sqrt{xz - y^2} + 2 = 0$
3.19	$e^{xyz-1} + x^2 + y^2 - z^2 = 5$	3.20	$x^2y - 3y^2z + z^2x + 3 = 0$
3.21	$4xyz - \ln z + x^2y^2 = 1$	3.22	$e^{\sqrt{xyz}} - 2xyz = 2$
3.23	$x^3 - 5y^3z^3 + z^2x + 3y = 0$	3.24	$\sqrt[3]{xyz} + x^2 - 3z^2 = 2$
3.25	$e^z + xy^2z^2 - x^2y - 3$	3.26	$2^{\sqrt{3xy-2z}} + 11 = 0$
3.27	$\ln\dfrac{x}{y+z} - 1 = 0$	3.28	$\dfrac{2x}{\sqrt{y+z}} + 4 = 0$
3.29	$\arccos\sqrt{xyz} - 1 = 0$	3.30	$x^4 - y^2x^2 - yz^4 = 2$

4-тапсырма. Екі айнымалы $z = f(x,y)$ функциясы, $\bar{a} = (a_x, a_y)$ векторы және $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі берілген. Табыңыз:

а) функцияның берілген $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде $\bar{a}$ векторының бағыты бойынша туындысын;

б) $z = f(x,y)$ функциясының M_0 нүктесінде градиент бағыты мен шамасын;

в) $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде $z = f(x,y)$ бетіне жүргізілген жанама жазықтығының теңдеуін;

г) $M_0(x_0, y_0)$ нүктесіндегі жанама жазықтығының нормалының теңдеуін.

4 кесте

№	$z = f(x,y)$	$\bar{a} = (a_x, a_y)$	$M_0(x_0, y_0)$
4.1	$z = x^2 - 2xy + y^2$	$(1;\ 2)$	$(-2;\ 0)$
4.2	$z = e^{2xy}$	$(2;\ 2)$	$(3;\ 0)$
4.3	$z = \sqrt{x^2+y^2}$	$(1;\ 1)$	$(-1;\ 1)$
4.4	$z = \sqrt[3]{xy^2}$	$(-1;\ 2)$	$(2;\ 1)$
4.5	$z = 3^{xy}$	$(2;\ -2)$	$(0;\ 2)$
4.6	$z = x^2 + 3y^2 - 2x - 4y$	$(3;\ 1)$	$(-3;\ 1)$
4.7	$z = arctg\,\dfrac{y}{x}$	$(-2;\ 2)$	$\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
4.8	$z = \ln(x^2 + y^2)$	$(1;\ 1)$	$(-1;\ -1)$
4.9	$z = \sqrt{\dfrac{y}{x}}$	$(1;\ 1)$	$(4;\ 9)$

4 кестенің соңы

4.10	$z = 3x^2 - 4xy + 2y^2$	$(5; -2)$	$(-1; 2)$
4.11	$z = \dfrac{x+1}{y+1}$	$(1; 2)$	$(1; 1)$
4.12	$z = x\sin y - y\cos x$	$(-2; -1)$	$(0; \pi)$
4.13	$z = \dfrac{y^2}{x}$	$(4; 2)$	$(3; -2)$
4.14	$z = 3x^2 - 2y^2 + x + 3y$	$(-2; 1)$	$(2; 2)$
4.15	$z = e^{x-2y}$	$(-3; 0)$	$(3; 1)$
4.16	$z = x - 3y + \sqrt{xy}$	$(-2; 1)$	$(4; 2)$
4.17	$z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$	$(1; -1)$	$(-1; 2)$
4.18	$z = 3^{2x-4y}$	$(2; -3; 1)$	$(5; 0)$
4.19	$z = ar\sin\dfrac{x}{x+y}$	$(-1; -1)$	$(0; 1)$
4.20	$z = arctgxy$	$(1; 1)$	$(1; 2)$
4.21	$z = \ln(e^x + e^y)$	$(3; -1)$	$(1; 1)$
4.22	$z = 3x^3 + xy + 3y^2$	$(1; 1)$	$(2; -2)$
4.23	$z = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$	$(-1; 1)$	$(9; 4)$
4.24	$z = \dfrac{x-y}{x+y}$	$(2;\ 3)$	$(3; 2)$
4.25	$z = y^{\ln x}$	$(1;\ 2)$	$(1; 2)$
4.26	$z = e^{\sqrt{xy}}$	$(1;\ -2)$	$(2; 2)$
4.27	$z = x\sin^2 y$	$(1; -3)$	$(1; \pi/4)$
4.28	$z = \ln\dfrac{xy+1}{x}$	$(-1; 1)$	$(-2; 1)$
4.29	$z = \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$	$(-1; 2)$	$(0; -1)$
4.30	$z = \sin(4x - 3y)$	$(3; -3)$	$(\pi/2; \pi/2)$

5-тапсырма. Екі айнымалы $z = f(x, y)$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

5 кесте

№	$z = f(x, y)$	№	$z = f(x, y)$
5.1	$z = x^2 + y^4$	5.2	$z = 15xy - x^3 - y^3 - 3$
5.3	$z = x^2 + y^2 - xy + 9x - 6y + 15$	5.4	$z = 4x^2 + 5y^2 - 2xy + 1$
5.5	$z = 2x^3 + y^2 - xy^2 + 5x^2 - 3$	5.6	$z = (x-2)^2 + y^2$

5 кестенің соңы

5.7	$z = x^2 + y^2 - xy - 4x + 2y + 1$	5.8	$z = x^2 + 2y^2 - 4x - 6$
5.9	$z = x^2 + 4y^3 - 2xy - 1$	5.10	$z = x^2y + xy^2 - xy$
5.11	$z = 2x^2(1-y) + y^2$	5.12	$z = x^3 + 2y^3 - 12xy + 1$
5.13	$z = 2x^2 + y^2 - 4xy - 12x + 2y + 5$	5.14	$z = y^2 + y\sqrt{x} - x + 6y + 1$
5.15	$z = 3x^2 + y - 2x\sqrt{y} - 8x + 4$	5.16	$z = 3 - x^3 - y^4 + 3x^2y$
5.17	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	5.18	$z = x^3 + 5y^3 - 6xy + 4$
5.19	$z = 3x + 6y - x^2 - y^2 - xy + 3$	5.20	$z = 4x - 4y - x^2 - y^2 + 3$
5.21	$z = (x+y)e^{\frac{x}{2}}$	5.22	$z = x^3 + y^2 + 3xy - 2$
5.23	$z = 2 - x^2 - y + x\sqrt{y} + 6x$	5.24	$z = x^3 + 2xy + y^2$
5.25	$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 2$	5.26	$z = 1 - x^2y - xy^2 + 6xy$
5.27	$z = x^3 - 15xy + y^3 + 4$	5.28	$z = x^2 - y^4$
5.29	$z = (x^2 + 1)e^{y^2}$	5.30	$z = x^3 + y^2 - 6xy - 4$

6-тапсырма. Берілген D аймағы бойынша екі еселі интегралды есептеңіз.

6 кесте

6.1 $\iint\limits_D (\sqrt{x} - 2)y\,dxdy$, D: $0 \le x \le 4,\ -1 \le y \le 0$	6.2 $\iint\limits_D (x+1)\sqrt{y}\,dxdy$, D: $-1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 4$	6.3 $\iint\limits_D (3x + 2y^2)\,dxdy$, D: $0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2$
6.4 $\iint\limits_D (2x - 3y^2)\,dxdy$, D: $-1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 2$	6.5 $\iint\limits_D (x + y^2)\,dxdy$, D: $0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2$	6.6 $\iint\limits_D e^{x+y}\,dxdy$, D: $-1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 0$
6.7 $\iint\limits_D \sqrt{xy}\,dxdy$, D: $1 \le x \le 4,\ 1 \le y \le 0$	6.8 $\iint\limits_D (1 + xy)\,dxdy$, D: $-1 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2$	6.9 $\iint\limits_D y\sqrt{x+2}\,dxdy$, D: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$
6.10 $\iint\limits_D (x^2 - y^2)\,dxdy$, D: $-1 \le x \le 0,\ 2 \le y \le 3$	6.11 $\iint\limits_D xye^{xy^2}\,dxdy$, D: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$	6.12 $\iint\limits_D xy\cos(x^2y)\,dxdy$, D: $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \pi/2$
6.13 $\iint\limits_D (1 - x - y)\,dxdy$, D: $0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2$	6.14 $\iint\limits_D (x^2 - y^2)\,dxdy$, D: $-1 \le x \le 0,\ 2 \le y \le 3$	6.15 $\iint\limits_D xy\,dxdy$, D: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$
6.16 $\iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}\,dxdy$, D: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$	6.17 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dxdy$, D: $-1 \le x \le 0,\ 1 \le y \le 2$	6.18 $\iint\limits_D \frac{ydxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$, D: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$
6.19 $\iint\limits_D (\sqrt{x+y})\,dxdy$, D: $0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 0$	6.20 $\iint\limits_D \frac{x^2}{1 + y^2}\,dxdy$, D: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$	5.21 $\iint\limits_D \frac{y^2}{1 + x^2}\,dxdy$, D: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$

6 кестенің соңы

6.22 $\iint\limits_D \sin(x+y)dxdy$, $D:\ 0\le x\le \pi,\ \ 0\le y\le \pi/2$	6.23 $\iint\limits_D (4+2x-3y)dxdy$ $D:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$	6.24 $\iint\limits_D (3x^3-4y^2)dxdy$, $D:\ -1\le x\le 0,\ \ 1\le y\le 2$
6.25 $\iint\limits_D \frac{\cos x}{\cos^2 y}dxdy$, $D: 0\le x\le \pi/2,\ 0\le y\le \pi/4$	6.26 $\iint\limits_D x^2\sqrt{1-y}dxdy$, $D: -1\le x\le 1,\ -3\le y\le 0$	6.27 $\iint\limits_D \frac{y+1}{\sqrt{x+3}}dxdy$, $D:\ 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2$
6.28 $\iint\limits_D \frac{(x-1)^2}{(y+1)^2}dxdy$, $D:\ 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2$	6.29 $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(1+x+y)^{2/3}}$, $D:\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1$	6.30 $\iint\limits_D \frac{dxdy}{xy}$, $D:\ 1\le x\le e,\ \ e\le y\le 3$

7-тапсырма. Екі еселі интегралдың интегралдау ретін өзгертіңіз.

7 кесте

7.1 $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^0 f(x,y)dy$	7.2 $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{\sqrt{-y}}^0 f(x,y)dx$	7.3 $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$
7.4 $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_{-2}^{2-x^2} f(x,y)dy$	7.5 $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x}^{-x^2} f(x,y)dy$	7.6 $\int\limits_{-2}^0 dy \int\limits_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^0 f(x,y)dx$
7.7 $\int\limits_{-2}^0 dy \int\limits_{-\sqrt{y+1}}^2 f(x,y)dx$	7.8 $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^0 f(x,y)dx$	7.9 $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{-3}^{\frac{3-y}{2}} f(x,y)dy$
7.10 $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2x+1} f(x,y)dy$	7.11 $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y}}^0 f(x,y)dx$	7.12 $\int\limits_0^3 dx \int\limits_x^3 f(x,y)dy$
7.13 $\int\limits_0^{1/4} dy \int\limits_{2y}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$	7.14 $\int\limits_{-2}^0 dx \int\limits_{x^2+1}^{1-2x} f(x,y)dy$	7.15 $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{y^2-1} f(x,y)dx$
7.16 $\int\limits_{-3}^0 dx \int\limits_{x+3}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy$	7.17 $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$	7.18 $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-x}^{2-x^2} f(x,y)dy$
7.19 $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$	7.20 $\int\limits_{-2}^1 dx \int\limits_{x^2-1}^{1-x} f(x,y)dy$	7.21 $\int\limits_{-2}^0 dx \int\limits_{x-2}^{-x^2} f(x,y)dy$
7.22 $\int\limits_{-2}^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^0 f(x,y)dx$	7.23 $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{y^2+1}^2 f(x,y)dx$	7.24 $\int\limits_3^4 dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx$
7.25 $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{3-2x} f(x,y)dy$	7.26 $\int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_0^{1-y^2} f(x,y)dx$	7.27 $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)dy$
7.28 $\int\limits_{-2}^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x}} f(x,y)dy$	7.29 $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{y^2-1}^0 f(x,y)dx$	7.30 $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

8-тапсырма. Екі еселі интегралды полярлық координатаға көшу арқылы есептеңіз.

8 кесте

8.1 $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, $D:\ x^2+y^2\le 4,\ \ x\ge 0$	8.2 $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, $D:\ x^2+y^2\le 1$	8.3 $\iint\limits_D \sin(x^2+y^2)dxdy$, $D:\ x^2+y^2\le \pi/2$
8.4 $\iint\limits_D \frac{xdxdy}{x^2+y^2}$, $D: x^2+y^2\le 2,\ x^2+y^2\ge 1$	8.5 $\iint\limits_D \frac{ydxdy}{x^2+y^2}$, $D: x^2+y^2\le 1,\ x\le 0$	8.6 $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$, $D:\ x^2+y^2\le 3$
8.7 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+1}dxdy$, $D:\ 2\le x^2+y^2\le 4$	8.8 $\iint\limits_D y\cos(x^2+y^2)dxdy$, $D:\ x^2+y^2\le 4$	8.9 $\iint\limits_D \sqrt[3]{x^2+y^2}dxdy$, $D: x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0$
8.10 $\iint\limits_D (2x^2+3y^2)dxdy$, $D: x^2+y^2\le 4, x^2+y^2\ge 1$	8.11 $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, $D:\ x^2+y^2\le x,\ x\ge 0$	8.12 $\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, $D: x^2+y^2=9,\ x\ge 0$
8.13 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, $D: x^2+y^2=4,\ x\ge 0,\ y\le 0$	8.14 $\iint\limits_D (2x^2+y^2)dxdy$, $D:\ x^2+y^2\le 4,\ \ x\ge 0$	8.15 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, $D: x^2+y^2\le 2$
8.16 $\iint\limits_D \sqrt[4]{x^2+y^2}dxdy$ $D: x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0$	8.17 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+2}dxdy$, $D:\ 1\le x^2+y^2\le 2$	8.18 $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$, $D:\ x^2+y^2\le 2x,\ x\ge 0$
8.19 $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ $D: x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0$	8.20 $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, $D:\ 1\le x^2+y^2\le 3$	8.21 $\iint\limits_D \frac{ydxdy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ $D: x^2+y^2\le 9$
8.22 $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, $D: x^2+y^2=9,\ x\le 0,\ y\ge 0$	8.23 $\iint\limits_D \frac{xdxdy}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$ $D: x^2+y^2\le 4$	8.24 $\iint\limits_D \frac{ydxdy}{x^2+y^2}$, $D: x^2+y^2\le 2,\ x\ge 0$
8.25 $\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)dxdy$, $D:\ x^2+y^2\le \pi$	8.26 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, $D: x^2+y^2\le 4x,\ x\le 0$	8.27 $\iint\limits_D e^{2x^2+3y^2}dxdy$, $D:\ x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0$
8.28 $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, $D:\ 2\le x^2+y^2\le 3$	8.29 $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D: x^2+y^2=9,\ x\le 0$	8.30 $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $D:\ x^2+y^2\le 2$

9-тапсырма. Үш еселі интегралды есептеңіз.

9 кесте

9.1 $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, $V: 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2,\ 2\le z\le 3$	9.2 $\iiint\limits_V (xy-z^2)dxdydz$, $V: -1\le x\le 2,\ -1\le y\le 0,\ 0\le z\le 1$

9 кестенің соңы

9.3 $\iiint\limits_V \frac{yz}{\sqrt{2+x}}dxdydz$, $V: 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 3,\ -1\le z\le 0$	9.4 $\iiint\limits_V \frac{xy}{\sqrt{1+z}}dxdydz$, $V: 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 2,\ 1\le z\le 2$
9.5 $\iiint\limits_V (x^2-3y^2-2z)dxdydz$, $V: 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 3,\ 1\le z\le 3$	9.6 $\iiint\limits_V (x+z)ydxdydz$, $V: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2,\ 1\le z\le 2$
9.7 $\iiint\limits_V xyz^2dxdydz$, $V: 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 3,\ 1\le z\le 3$	9.8 $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$, $V: 1\le x\le 2,\ 0\le y\le 2,\ 0\le z\le 1$
9.9 $\iiint\limits_V (x^2-yz)dxdydz$, $V: 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 2,\ 1\le z\le 2$	9.10 $\iiint\limits_V (x^2-y^2z)dxdydz$, $V: 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2,\ 0\le z\le 3$
9.11 $\iiint\limits_V (3x^2+2y^2+z^2)dxdydz$, $V: -1\le x\le 0,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1$	9.12 $\iiint\limits_V \sqrt{xyz}\,dxdydz$, $V: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2,\ 1\le z\le 2$
9.13 $\iiint\limits_V (x+1)(y-1)zdxdydz$, $V: 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 0,\ 1\le z\le 2$	9.14 $\iiint\limits_V (2x+y^2-z)dxdydz$, $V: 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 2,\ 1\le z\le 2$
9.15 $\iiint\limits_V (2x+y-3z)dxdydz$, $V: 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 0,\ 1\le z\le 2$	9.16 $\iiint\limits_V e^{x-y-z}dxdydz$ $V: 0\le x\le 3,\ 1\le y\le 2,\ 0\le z\le 1$
9.17 $\iiint\limits_V (y-z)xdxdydz$, $V: 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 3,\ 1\le z\le 3$	9.18 $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, $V: -1\le x\le 1,\ 1\le y\le 2,\ -1\le z\le 0$
9.19 $\iiint\limits_V (xy+z)dxdydz$, $V: -1\le x\le 0,\ 0\le y\le 1, 1\le z\le 2$	9.20 $\iiint\limits_V (y^2+xz)dxdydz$, $V: 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2,\ 2\le z\le 3$
9.21 $\iiint\limits_V e^{x+y+z}dxdydz$ $V: -1\le x\le 0,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1$	9.22 $\iiint\limits_V x^2yz^2dxdydz$, $V: 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 3,\ -1\le z\le 0$
9.23 $\iiint\limits_V (x^2y+z^2)dxdydz$, $V: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2,\ 1\le z\le 2$	9.24 $\iiint\limits_V (5x^2-4y^2+z)dxdydz$, $V: 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 0,\ 1\le z\le 2$
9.25 $\iiint\limits_V (x+y+1)zdxdydz$, $V: 1\le x\le 2,\ 0\le y\le 1,\ 2\le z\le 3$	9.26 $\iiint\limits_V (y^2-z^2)x^2dxdydz$, $V: 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 3,\ 1\le z\le 3$
9.27 $\iiint\limits_V (x-3y+2z)dxdydz$, $V: -1\le x\le 2,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1$	9.28 $\iiint\limits_V (xy-3z^2)dxdydz$, $V: -1\le x\le 0,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1$
9.29 $\iiint\limits_V \frac{xyz}{\sqrt{2+x^2}}dxdydz$, $V: 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 2,\ 1\le z\le 2$	9.30 $\iiint\limits_V e^{2x+3y-z}dxdydz$ $V: -1\le x\le 0,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1$

10-тапсырма. Берілген беттермен шектелген дененің көлемін екі еселі интеграл көмегімен есептеңіз.

10 кесте

10.1 $z=4-y^2,\ \ y=\frac{x^2}{2},\ z=0$	10.2 $z^2=xy,\ \ x=4,\ \ x=0,\ y=4$
10.3 $z=x^2+y^2,\ \ x+y=4,$ $x=0,\ z=0,\ y=0$	10.4 $z+y=1,\ x=7\sqrt{y},\ x=2\sqrt{y},$ $z=0$
10.5 $z=4x,\ x^2+y^2=16,\ z=0$	10.6 $x^2+y^2=4,\ z=xy,\ z=0$
10.7 $z=e^2-y^2,\ y=e^x,\ y=e^{-x}$ $z=0$	10.8 $z=x^2+y^2,\ \ x+y=2,$ $x=0,\ z=0,\ y=0$
10.9 $x^2+y^2=4,\ x^2+z^2=4$	10.10 $x+y+3z=0,\ y=0,$ $x=0,\ \ z=4,\ z=0$
10.11 $z=x+y+4,\ y^2=4x,$ $x=4,\ \ y=0,\ z=0$	10.12 $z=x+y,\ y=4x,$ $x=2,\ \ y=0,\ z=0$
10.13 $z=x^2+y^2,\ \ x+y-1=0,$ $x=0,\ z=0,\ y=0$	10.14 $x+y+z+2=0,$ $x=0,\ z=0,\ y=0$
10.15 $y=x^2,\ \ z+y=4,$ $z=y,\ y=0$	10.16 $z=x^2+y^2,\ \ z=2\left(x^2+y^2\right)$ $y=x,\ y^2=x$
10.17 $z=y,\ \ y=4-x^2,\ z=0$	10.18 $z+x=5,\ z=0,\ y=\sqrt{x},\ y=3\sqrt{x}$
10.19 $x+y+z=3,\ y=x^2,$ $z=0,\ y=1$	10.20 $z=x+y+2,\ y^2=2x,$ $x=2,\ \ y=0,\ z=0$
10.21 $x^2+y^2-z=4,\ z=0$	10.22 $4z=y^2,\ \ x+3y=6$ $x=0,\ y=0,\ z=0$
10.23 $x^2+y^2+2x=0,\ \ z=9-y^2,\ z=0$	10.24 $z=x+y+5,\ \ x^2+y^2=4,\ z=0$
10.25 $z=x^2+y^2,\ \ z=x^2+2y^2,$ $y=x,\ \ y=2x,\ x=1$	10.26 $z=x^2+y^2,\ \ x+y=1,$ $x=0,\ z=0,\ y=0$
10.27 $x+3y+z=9,\ \ x=3y^2$ $z=0,\ y=0$	10.28 $z=1+y^2,\ \ x+y=3,$ $x=0,\ z=0,\ y=0$
10.29 $z+1=x^2+y^2,\ \ z=0$	10.30 $z=y^2,\ \ 3x+2y-6=0,$ $x=0,\ z=0,\ y=0$

11-тапсырма. 10-тапсырма берілімдері бойынша дененің көлемін үш еселі интегралдың көмегімен есептеңіз.

1.2 №1 ЕГЖ-ға әдістемелік нұсқаулар

1.2.1 Бірінші тапсырмаға нұсқау.

а) кейбір D аймағында анықталған екі айнымалы $z = f(x, y)$ функциясының x және y айнымалыларына сәйкесінше Δx және Δy өсімшелерін берсек, онда функция толық өсімше деп аталатын

$$\Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y)$$

өсімшесін қабылдайды;

б) екі айнымалы $z = f(x, y)$ функциясының $\frac{\partial z}{\partial x}$ және $\frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындыларын табу үшін бір айнымалы функциясының дифференциалдау ережесін қолдана отырып, екінші айнымалыны тұрақты ретінде қарастырамыз;

в) $M(x, y)$ нүктесінде дербес $\frac{\partial z}{\partial x}$ және $\frac{\partial z}{\partial y}$ туындылары бар екі айнымалы $z = f(x, y)$ функциясының толық дифференциалы

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

түрінде табылады.

г) екі айнымалы $z = f(x, y)$ функциясының дербес $\frac{\partial z}{\partial x}$ және $\frac{\partial z}{\partial y}$ туындыларын x және y айнымалылары бойынша дифференциалдап, функцияның екінші ретті дербес туындыларын:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

табамыз;

д) функцияның екінші ретті $d^2 z$ дифференциалы оның бірінші ретті дифференциалының дифференциалы болып табылады: $d^2 z = d(dz)$, яғни

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

1-мысал. Екі айнымалы $z = x^3 y^3 - 3x + 2y$ функциясы берілген.

Шешуі.

а) функцияның толық өсімшесін табамыз:

$$\Delta z = (x + \Delta x)^3 (y + \Delta y)^3 - 3(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y) - x^3 y^3 + 3x - 2y;$$

б) функцияның дербес туындыларын табамыз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^3 - 3,\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^3 y^2 + 2;$$

в) функцияның дифференциалын б) бөлімнің нәтижелерін қолдана отырып жазамыз:

$$dz = 3(x^2 y^3 - 1)dx + (3x^3 y^2 + 2)dy;$$

г) функцияның екінші ретті дербес туындыларын табамыз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(3x^2y^3-3\right)'_x=6xy^3,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(3x^3y^2+2\right)'_y=6x^2y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(3x^2y^3-3\right)'_y=9x^2y^2;$$

д) функцияның екінші ретті дифференциалын г) бөлімнің нәтижелерін қолдана отырып жазамыз:

$$d^2z=6xy^3dx^2\ +18x^2y^2dxdy+6x^2ydy.$$

1.2.2 Екінші тапсырмаға нұсқау.

2-тапсырмада үш айнымалы $\omega=f(x,y,z)$ функциясының $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктесіндегі дербес туындыларының мәні есептелінеді.

1.2.3 Үшінші тапсырмаға нұсқау.

Егер $z=f(x,y)$ функциясы $F(x,y,z)=0$ теңдеуімен берілсе, онда функция айқын емес түрде берілген. Оның дербес $\frac{\partial z}{\partial x}$ немесе $\frac{\partial z}{\partial y}$ туындыларын сәйкесінше y немесе x айнымалыларын тұрақты ретінде қарастыра отырып табамыз:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z},\ \left(F'_z\neq 0\right).$$

3-мысал. Берілген $x^2y^2-3z+\sin z=0$ функциясының $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ туындыларын табыңыз.

Шешуі. Мұнда $F(x,y,z)=x^2y^2-3z+\sin z$ болғандықтан, айқын емес түрде берілген функция туындысы негізінде, туындылары:

$$F'_x=2xy^2,\ F'_y=2x^2y,\ F'_z=\cos z-3.$$

Яғни, $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2xy^2}{\cos z-3},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x^2y}{\cos z-3}.$

1.2.4 Төртінші тапсырмаға нұсқау.

а) $z=f(x,y)$ функциясымен берілген бетке $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінде жүргізілген жанама жазықтығының теңдеуі:

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

түрінде анықталады;

б) жанама жазықтығының нормалының канондық теңдеуі:

$$\frac{x-x_0}{f'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1};$$

в) функцияның берілген M_0 нүктесінде $\bar{a}$ векторының бағыты бойынша туындысы, яғни функцияның M_0 нүктесінде $\bar{a}$ векторының бағыты бойынша өзгеру жылдамдығы:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\bar{a}} = z'_x\big|_{M_0} \cdot \cos\alpha + z'_y\big|_{M_0} \cdot \cos\beta$$

формуласымен табылады. Мұнда α, β - $\bar{a}$ векторымен сәйкес Ox, Oy координат остерінің арасындағы бұрыштар. Яғни: $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}$, $\cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}$;

г) функция градиентінің бағыты мен шамасы

$$gradz(M_0) = z'_x\big|_{M_0} \cdot \bar{i} + z'_y\big|_{M_0} \cdot \bar{j}, \qquad |gradz(M_0)| = \sqrt{\left(z'_x\big|_{M_0}\right)^2 + \left(z'_y\big|_{M_0}\right)^2}$$

түрлерінде анықталады.

4-мысал. Екі айнымалы $z = x^3 + y^3$ функциясы, $\bar{a} = (-3,\ 4)$ векторы және $M_0(1;\ 2)$ берілген. Табыңыз:

а) функцияның берілген M_0 нүктесінде $\bar{a}$ векторының бағыты бойынша туындысын;

б) z функциясының M_0 нүктесінде градиент бағыты мен шамасын;

в) M_0 нүктесінде $z = x^3 + y^3$ бетіне жүргізілген жанама жазықтығының теңдеуін;

г) M_0 нүктесіндегі жанама жазықтығының нормалының теңдеуін.

Шешуі.

а) функцияның берілген $M_0(1;\ 2)$ нүктесіндегі дербес туындыларының мәндерін есептейміз:

$$f'_x(1;\ 2) = 3x^2\big|_{(1;\ 2)} = 3,\ \ f'_y(1;\ 2) = 3y^2\big|_{(1;\ 2)} = 12.$$

M_0 нүктесінде $z = 9$, яғни жанама жазықтық теңдеуінің түрі:

$$z - 9 = 3(x-1) + 12(y-2) \text{ или } 3x + 12y - z - 18 = 0;$$

б) жанама жазықтығының нормалының теңдеуі: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{12} = \frac{z-9}{-1}$;

в) $\bar{a} = (-3,\ 4)$ векторының ортасы: $\bar{a}^0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \left(\frac{-5}{\sqrt{9+16}};\ \frac{4}{\sqrt{9+16}}\right) = \left(-1;\ \frac{4}{5}\right)$.

Сондықтан да, функцияның M_0 нүктесіндегі берілген $\bar{a} = (-3,\ 4)$ векторының бағыты бойынша туындысы:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\bar{a}} = 3 \cdot (-1) + 12 \cdot \frac{4}{5} = 7;$$

г) функция градиентінің бағыты мен шамасы:

$$gradz(M_0) = 3\bar{i} + \frac{4}{5}\bar{j}, \quad |gradz(M_0)| = \sqrt{9 + \frac{16}{25}} \approx 3{,}11.$$

1.2.5 Бесінші тапсырмаға нұсқау.

1-теорема (экстремумның қажетті шарты). Дифференциалданатын $z = f(x, y)$ функциясының $M_0(x_0, y_0)$ экстремум нүктесінде бүкіл бірінші ретті дербес туындылары нөлге тең:

$$f_x'(x_0;y_0)=0,\ \ f_y'(x_0;y_0)=0.$$

2-теорема (экстремумның жеткілікті шарты). Егер $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінде $z=f(x,y)$ функциясының екінші ретті дербес туындылары

$$f_{xx}''(x_0,y_0)=A,\ \ f_{xy}''(x_0,y_0)=B,\ \ f_{yy}''(x_0,y_0)=C$$

болып және $\Delta=AC-B^2>0$ болса, онда $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінде $z=f(x,y)$ функциясының экстремумы бар және де $A<0$ болса, онда бұл нүктеде максимум; ал $A<0$ болса, онда – минимум; егер $\Delta<0$ болса, онда $z=f(x,y)$ функциясының бұл нүктеде экстремумы жоқ, ал, егер $\Delta=0$ болса, онда $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінде $z=f(x,y)$ функциясының экстремумы бар болуы да, болмауы да мүмкін, яғни қосымша зерттеуді талап етеді.

Экстремумға зерттеу ережесі:

а) стационарлық немесе кризистік нүктелерін табамыз (1-теорема);

б) 2-теорема негізінде Δ анықтауышының таңбасын зерттеп, жауабын жазамыз.

5-мысал. $z=x^2+y^2+2x-y$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

Шешуі. Бірінші ретті дербес туындыларын табымыз:

$$z_x'=2x+2,\ \ z_y'=2y-1.$$

Теңдеулер жүйесінен стационарлық нүктелерін анықтаймыз:

$$\begin{cases}2x+2=0,\\ 2y-1=0\end{cases}\ \to M\left(-1;\frac{1}{2}\right).$$

Бұл нүктедегі екінші ретті дербес туындылардың мәндері:

$$z_{xx}''\left(-1;\frac{1}{2}\right)=2=A,\ \ z_{yy}''\left(-1;\frac{1}{2}\right)=2=C,\ \ z_{xy}''\left(-1;\frac{1}{2}\right)=0=B.$$

Және де, $\Delta=AC-B^2=4>0$. Яғни, бұл нүктеде функция экстремумға ие. $A=2>0$ болғандықтан, M - минимум нүктесі болады. Сонымен, $z_{\min}\left(-1;\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}$.

1.2.6 Алтыншы тапсырмаға нұсқау.

Егер екі еселі интегралда $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ интегралдау аймағы $D: a\le x\le b,\ c\le y\le d$ тікбұрыш болса, онда оны қайталама интегралға келтіруде екі анықталған интеграл көбейтіндісіне келеміз:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

Егер интегралданушы функция $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$ түрінде болса, онда қайталама интеграл

$$\iint\limits_D f_1(x)f_2(y)dxdy=\int\limits_a^b f_1(x)dx\int\limits_c^d f_2(y)dy$$

түрінде есептелінеді.

6-мысал. Берілген $D:\ -2\le x\le -1,\ 0\le y\le 1$ аймағы бойынша екі еселі $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ интегралын есептеңіз.

Шешуі. $\iint\limits_D (x+y)dxdy=\int\limits_{-2}^{-1}dx\int\limits_0^1(x+y)dy=\int\limits_{-2}^{-1}\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1}dx=$

$$=\int\limits_{-2}^{-1}\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{-1}=0-1=-1.$$

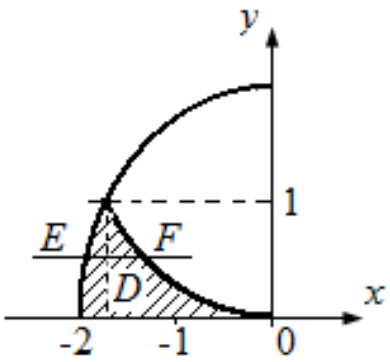
1.2.7 Жетінші тапсырмаға нұсқау.

Екі еселі интегралдың интегралдау ретін өзгертуде, интегралдау аймағының координата остеріне қарағанда бұрыс не дұрыстығын ескеру қажет.

Егер интегралдау D аймағын координата осіне параллель жүргізілген түзу көп дегенде екі нүктеде қиып өтсе, онда аймақ дұрыс делінеді, ал екіден көп нүктеде қиса, онда ол бұрыс аймақ болғандығы.

7-мысал. Екі еселі $I=\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}}dx\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy+\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0}dx\int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy$ интегралының интегралдау ретін өзгертіңіз.

Шешуі. Ішкі интегралдардың жоғарғы шектері шеңберлер: $x^2+y^2=4$ және $x^2+(y-2)^2=4$. Олар $A\left(-\sqrt{3};1\right)$ нүктесінде қиылысады.



1 сурет

Берілген аймағымыз екі аймақтың бірігу болады: $D=D_1\cup D_2$, мұнда

$$D_1:\ -2\le x\le -\sqrt{3},\ 0\le y\le\sqrt{4-x^2}$$

және

$$D_2:\ -\sqrt{3}\le x\le 0,\ 0\le y\le 2-\sqrt{4-x^2}\ .$$

Сонымен, бүкіл аймақ

$$D:\ -\sqrt{4-y^2}\le x\le -\sqrt{4y-y^2},\ \ 0\le y\le 1.$$

Мұнда E және F нүктелері D аймағына ену және шығу нүктелері.

Сонымен, интегралдау ретін өзгертуден кейін:

$$I=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dx.$$

1.2.8 Сегізінші тапсырмаға нұсқау.

Екі еселі интегралда полярлық координатаға көшу $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $dxdy=rdrd\varphi$ алмастыруларымен орындалады:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdrd\varphi.$$

Мұнда интегралданушы функциямен бірге интегралдау аймағы да түрлендіріледі.

8-мысал. Екі еселі интегралды полярлық координатаға көшу арқылы есептеңіз: $\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}dxdy$, D: $x^2+y^2=9$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

Шешуі. Мұнда интегралдау аймағы D - шеңбер, ол полярлық координатада $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$:

$$x^2+y^2=9 \;\rightarrow\; r=3, \text{ яғни, } 0\le r\le 3 \text{ және } 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$$

Көрсетілген алмастыру бойынша интегралданушы функцияны да түрлендіреміз: $\sqrt{9-x^2-y^2}=\sqrt{9-r^2}$. Сонымен,

$$\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}dxdy=\iint\limits_{D^*}\sqrt{9-r^2}rdrd\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^3\sqrt{9-r^2}rdr=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^3\sqrt{9-r^2}d\left(9-r^2\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(9-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{r=0}^{r=3}d\varphi=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{9\pi}{2}.$$

1.2.9 Тоғызыншы тапсырмаға нұсқау.

Егер үш еселі интегралдың интегралдау аймағы қабырғалары координата остеріне параллель тікбұрышты параллелепипед болса, онда аймақ координата остеріне қарағанда дұрыс аймақ болып табылады. Сондықтан

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b dx\int_c^d dy\int_k^h f(x,y,z)dz.$$

9-мысал. Үш еселі интегралды есептеңіз

$$\iiint\limits_V (3x-y)dxdydz,\ V:\ 0\le x\le 2,\ \ 0\le y\le 1,\ \ 0\le z\le 1.$$

Шешуі. Интегралданушы функция z айнымалысынан тәуелсіз, яғни

$$\iiint\limits_V (3x-y)dxdydz=\int_0^1 dz\int_0^2 dx\int_0^1(3x-y)dy=\int_0^1 dz\int_0^2\left(3xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=1}dx=$$

$$=\int_0^1 dz\int_0^2\left(3x-\frac{1}{2}\right)dx=z\Big|_0^1\cdot\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)\Big|_{x=0}^{x=2}=5.$$

1.2.10 Оныншы тапсырмаға нұсқау.

Берілген беттермен шектелген дене көлемін екі еселі және үш еселі интералдар көмегімен табуға болады:

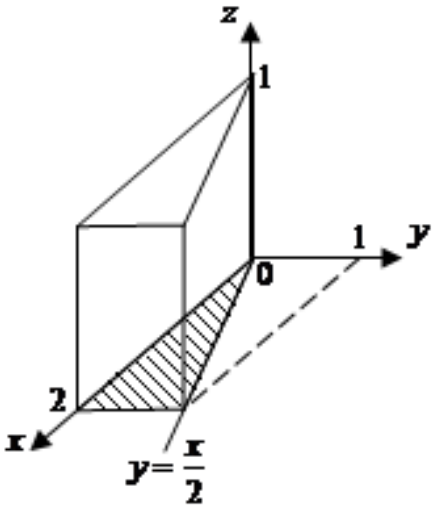
$$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy \ , \ V = \iiint\limits_V dxdydz.$$

10-мысал. Берілген беттермен шектелген дененің көлемін табыңыз:

$$z = 1, \ y = \frac{x}{2}, \ y = 0, \ x = 2.$$

Шешуі. Интегралдау аймағы тік призма, оның табаны ұшбұрыш:

$$D: \ y = \frac{x}{2}, \ y = 0, \ x = 2.$$



2 сурет

Сонымен, дене көлемі екі еселі интеграл көмегімен:

$$V = \iint\limits_D zdxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\frac{x}{2}} dy = \frac{x^2}{4}\Big|_0^2 = 1.$$

2 Есептеу-сызба жұмыс №2. Қарапайым дифференциалдық теңдеулер

Мақсаты: әртүрлі ретті қарапайым дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешуін табуды үйрену.

2.1 Теориялық сұрақтар

1. Қарапайым дифференциалдық теңдеулер, негізгі түсініктер.
2. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер.
3. Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер
4. Біртекті теңдеулер.
5. Бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулер.

6. Толық дифференциалды теңдеулер.
7. Реті төмендетілетін дифференциалдық теңдеулер.
8. Тұрақты коэффициентті сызықтық дифференциалдық теңдеулер.

2.2 Есептік тапрсырмалар

1-тапсырма. Берілген $y=\varphi(x,C)$ функциясы дифференциалдық теңдеудің (ДТ) шешуі бола ма?

11 кесте

№	$y=\varphi(x,C)$, ДТ	№	$y=\varphi(x,C)$, ДТ
1.1	$y=\frac{Cx^2}{2(1+x)^2}-\frac{1}{2}, y'-\frac{2y}{x(x+1)}=\frac{1}{x^2+x}$	1.2	$y=-\frac{x-C}{Cx+1}, \quad y'+\frac{1+y^2}{1+x^2}=0$
1.3	$y=e^x\sqrt{C-2x}, \quad yy'=y^2-e^{2x}$	1.4	$y=Cx-x^2, \quad xy'=y-x^2$
1.5	$y=C\cos x+\sin x, \quad y''+y=0$	1.6	$y=1-Ce^{-\frac{x^2}{2}}, \quad y'=x-xy$
1.7	$y=(c+x)e^x, \quad y''-2y'+y=0$	1.8	$y=C\sqrt[3]{x}, \quad y'-\frac{y}{3x}=0$
1.9	$y=x^3e^x-C, \quad (x^3-1)y'+3x^2e^x=0$	1.10	$y=(C_1x+C_2)^2, 2yy''-(y')^2=0$
1.11	$y=\frac{C-\cos 2x}{2\cos x}, \ y'-ytgx=2\sin x$	1.12	$y=C(x+1)-1, \quad y'-\frac{y+1}{x+1}=0$
1.13	$y=C\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), \quad y'\sqrt{x^2+1}-y=0$	1.14	$y=c\sqrt{x^2-1}, \ y'-\frac{xy}{x^2-1}=0$
1.15	$y=x^3e^y-C, \quad (x^3e^y-1)y'+3x^2e^y=0$	1.16	$y=Ce^{-\frac{1}{x^2}}, \quad y'x^3-2y=0$
1.17	$y=xe^{-x}-C, \ (1-xe^{-})y'+1=0$	1.18	$y=(x+c)e^x, \quad y'-y=e^x$
1.19	$y=Ce^{tgx}, \quad y'-\frac{y}{\cos^2 x}=0$	1.20	$y=Ce^{\frac{x^2}{2}}, \quad y'-xy=0$
1.21	$y=\frac{x}{\sqrt{C-\ln\lvert x\rvert}}, \ 2x^2y'=y^3+xy$	1.22	$y=\frac{1}{C-x}, \ y'-y^2=0$
1.23	$y=Cx^3-x^2, \ xy'-3y=x^2$	1.24	$y=x^2+Cx, \quad xy'-y=x^2$
1.25	$y=\sqrt{x(\ln x-1)+C}, \quad y'-2\sqrt{y}\ln x=0$	1.26	$y=-\ln(1+Ce^x), \ e^y(1+y')=1$
1.27	$y=\frac{C}{\sin x}+\cos x, \ y'tgx=\cos 2x-y$	1.28	$y=e^x(\ln\lvert x\rvert+C), \ xy'-xy=e^x$
1.29	$y=\frac{1}{C-\ln(x^2-1)}, \ (x^2-1)y'=-2xy^2$	1.30	$y=x\sqrt{Cx+1}, \quad 2yy'=\frac{3y^2}{x}-x$

2-тапсырма. Коши есебін шешіңіз.

12 кесте

№	Тапсырма	№	Тапсырма
2.1	$y' + ytgx = 0, \quad y(0) = 1$	2.2	$y' = \sqrt{xy}, \quad y(0) = 1$
2.3	$y' = -\frac{y}{x}, \quad y(1) = 1$	2.4	$y' = \cos x \sin^2 y, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$
2.5	$y' = \frac{1+y^2}{x}, \quad y(1) = \frac{\pi}{4}$	2.6	$y' = \frac{y}{2x+1}, \quad y(0) = 3$
2.7	$y' = 2x\sqrt{y}, \quad y(0) = 1$	2.8	$y' = y \sin x, \quad y(0) = 1$
2.9	$y' = yx, \quad y(0) = 2$	2.10	$y' = xe^y, \quad y(0) = 0$
2.11	$y' = \frac{x}{y^3}, \quad y(0) = -1$	2.12	$y' = \frac{y}{y+1}, \quad y(0) = 1$
2.13	$y' = \frac{y}{x \ln x}, \quad y(e) = 1$	2.14	$y' - \frac{x}{\cos y} = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$
2.15	$y' = \frac{x}{1+y^2}, \quad y(0) = 1$	2.16	$y' = \frac{y}{1-y^2}, \quad y(0) = 1$
2.17	$y'x^2 = 3y, \quad y(1) = 1$	2.18	$y' = y^2 x, \quad y(1) = 1$
2.19	$y' = \frac{y}{x-1}, \quad y(2) = 1$	2.20	$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}, \quad y(-1) = 1$
2.21	$y' = \sqrt{\frac{x}{y}}, \quad y(1) = 1$	2.22	$y' = -\frac{x}{y}, \quad y(0) = 1$
2.23	$y' = \frac{y}{3x-1}, \quad y(0) = 3$	2.24	$y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y(0) = \frac{1}{2}$
2.25	$y' - y \cos x = 0, \quad y(0) = 2$	2.26	$y' = e^{x-y}, \quad y(0) = 0$
2.27	$y' - \frac{3}{y} = 0, \quad y(0) = 1$	2.28	$y' + y = 0, \quad y(0) = 2$
2.29	$y' = \frac{y}{2\sqrt{x}}, \quad y(0) = 2$	2.30	$y' = \frac{y^2+1}{2yx}, \quad y(1) = 0$

3-тапсырма. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешуін (жалпы интегралын) табыңыз.

13 кесте

№	Тапсырма	№	Тапсырма	№	Тапсырма
3.1	$y' = \frac{y}{x} + 1$	3.2	$y' = 4 - \frac{3y}{x}$	3.3	$y' = \frac{xy}{x^2+y^2}$
3.4	$y' = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}$	3.5	$y' = \frac{3y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 1$	3.6	$y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{4y}{x} + 2$

13 кестенің соңы

3.7	$y' = \frac{5y}{x} + 1$	3.8	$y' = \frac{y^2}{x^2} + 3$	3.9	$y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$
3.10	$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$	3.11	$y' = \frac{4xy}{y^2 - x^2}$	3.12	$y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} - 3$
3.13	$y' = \frac{y^2 + xy}{x^2}$	3.14	$y' = \frac{y^2 - 2x^2}{x^2}$	3.15	$y' = \frac{3y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$
3.16	$y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{2y}{x}$	3.17	$y' = \frac{3xy}{x^2 - y^2}$	3.18	$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$
3.19	$y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 1$	3.20	$y' = \frac{y^2}{2x^2} + \frac{3y}{x} + 1$	3.21	$y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{5y}{x} + 4$
3.22	$y' = \frac{2y^2 - xy}{x^2}$	3.23	$y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{5y}{x}$	3.24	$y' = \frac{3x - y}{x + y}$
3.25	$y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$	3.26	$y' = \frac{4x + y}{y + x}$	3.27	$y' = \frac{y + y \ln \frac{y}{x}}{x}$
3.28	$y' = \frac{yx + y^2 e^{\frac{x}{y}}}{x^2}$	3.29	$y' = \frac{y}{x + y}$	3.30	$y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{3y}{x} + 2$

4-тапсырма. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешуін табыңыз.

14-кесте

№	Тапсырма	№	Тапсырма	№	Тапсырма
4.1	$y' - \frac{3y}{x} = x$	4.2	$y' + \frac{y}{x} = \frac{2}{1 + x^2}$	4.3	$y' - \frac{y}{x - 1} = x^2 - 1$
4.4	$y' + \frac{y}{x} = xe^x$	4.5	$y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{x^2}}{x}$	4.6	$y' - \frac{y}{x} = \sin x$
4.7	$y' + 2y = 3x$	4.8	$y' - ytgx = \sin x$	4.9	$y' + 2xy = xe^{x^2}$
4.10	$y' - \frac{y}{x} = \ln x$	4.11	$y' + \frac{y}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + x^2}$	4.12	$y' - \frac{2y}{x} = \sqrt{x}$
4.13	$y' - \frac{y}{x} = \ln x$	4.14	$y' - \frac{y}{x} = x + 1$	4.15	$y' - \frac{y}{3x} = \sqrt[3]{x}$
4.16	$y' - ytgx = \sin 2x$	4.17	$y' - xy = x$	4.18	$y' + y = \cos x$
4.19	$y' + 2xy = 4x$	4.20	$y' - y \sin x = \sin x$	4.21	$y' - y \cos x = e^{-\sin x}$
4.22	$y' + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x^2}$	4.23	$y' - \frac{y}{x + 1} = \ln(x + 1)$	4.24	$y' + \frac{y}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$
4.25	$y' + yx = 3x$	4.26	$y' - ytgx = ctgx$	4.27	$y' + 2xy = e^{-x^2}$
4.28	$y' - \frac{y}{2\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}$	4.29	$y' + \frac{y}{2x} = 3x^2$	4.30	$y' - \frac{y}{3x} = x\sqrt[3]{x}$

5-тапсырма. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешуін табыңыз.

15 кесте

№	Тапсырма	№	Тапсырма	№	Тапсырма
5.1	$y' + \frac{y}{x+1} = -y^2$	5.2	$y' - \frac{y}{2x} = -y^3 \sin x$	5.3	$y' + 2xy = 3x^3 y^3$
5.4	$y' - 2y = y^2 e^{-x}$	5.5	$y' - \frac{y}{4} = xy^2$	5.6	$y' - y = -x\sqrt{y}$
5.7	$y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x$	5.8	$y' + 4y = \frac{2x}{y}$	5.9	$y' + 3y = \frac{x}{y}$
5.10	$y' - y = 2xy^2$	5.11	$y' - 2y = x^2 y^2$	5.12	$y' + y = 2xy^3$
5.13	$y' + \frac{2y}{x} = y^2$	5.14	$y' - 2y = \frac{xy^2}{2}$	5.15	$y' - \frac{y}{3} = xy^2$
5.16	$y' - \frac{2y}{x} = y^2$	5.17	$y' - \frac{xy}{x^2 - 1} = x\sqrt{y}$	5.18	$y' - \frac{4y}{x} = x\sqrt{y}$
5.19	$y' - y = -y\cos x$	5.20	$y' - 3y = xy^3$	5.21	$y' + 3y = xy^2$
5.22	$y' + 2y = y^2 e^x$	5.23	$y' + 2y = y^2 e^{-5x}$	5.24	$y' + 2y = y^2 e^{-2x}$
5.25	$y' + xy = xy^3$	5.26	$y' + y = x\sqrt{y}$	5.27	$y' - y = x^2 y^2$
5.28	$y' + 2y = x^2 y^2$	5.29	$y' - ytgx = -y^2 \cos x$	5.30	$y' + \frac{2y}{x} = \frac{\sqrt{y}}{\cos^2 x}$

6-тапсырма. Дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралын табыңыз.

16 кесте

№	Тапсырма	№	Тапсырма
6.1	$\left(1 + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$	6.2	$\left(x^2 y^2 - y\right)dx - \left(x - \frac{2}{3}x^3 y\right)dy = 0$
6.3	$\left(2x^3 y^2 - y\right)dx + \left(2x^2 y^3 - x\right)dy = 0$	6.4	$\left(x - y^3\right)dx + \left(1 - 3xy^2\right)dy = 0$
6.5	$\left(ye^x + 1\right)dx + \left(e^x - y\right)dy = 0$	6.6	$\left(x^2 + y^2 + x\right)dx + 2xydy = 0$
6.7	$\left(x^2 + 3y\right)dx + \left(3x + y^2\right)dy = 0$	6.8	$\left(1 - 2xy\right)dx - \left(x^2 + y\right)dy = 0$
6.9	$\left(e^y + 1\right)dx - \left(2y - xe^y\right)dy = 0$	6.10	$\left(2x^3 - xy^2\right)dx + \left(2y - x^2 y\right)dy = 0$
6.11	$\left(x + \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}\right)dx + \left(y - \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}\right)dy = 0$	6.12	$\left(3x - \frac{1}{y^2}\right)dx + \left(\frac{x}{y} + 2y\right)dy = 0$
6.13	$\left(1 + \frac{4x}{3y^3}\right)dx + \frac{1 - 2x^2}{y^2}dy = 0$	6.14	$\left(3 - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{x} + 2y\right)dy = 0$
6.15	$\left(2x + y\right)dx + \left(x + \frac{3}{y}\right)dy = 0$	6.16	$\left(2xy + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x^2 - \frac{1}{y}\right)dy = 0$
6.17	$x\left(1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - \left(y - y\sqrt{x^2 + y^2}\right)dy = 0$	6.18	$\left(e^x - y^2\right)dx + \left(e^y - 2xy\right)dy = 0$

16 кестенің соңы

6.19	$(xy^2+\cos x)dx+(x^2y+e^y)dy=0$	6.20	$(2x^3-xy^2)dx+(2y-x^2y)dy=0$
6.21	$(2x^3-y^2)dx-(2xy+y^2)dy=0$	6.22	$(ye^x-x)dx+(e^x-y)dy=0$
6.23	$\left(2-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\left(y+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy=0$	6.24	$\left(\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-1)^2}\right)dx-\frac{2y}{x-1}dy=0$
6.25	$\frac{y}{x}dx-(y+\ln x)dy=0$	6.26	$\frac{\sin y}{x^2}dx-\frac{\cos y}{x}dy=0$
6.27	$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy=0$	6.28	$\left(1-\frac{\ln y}{x}\right)dx-\frac{\ln xy}{y}dy=0$
6.29	$(x^3+y)dx+(y^2+x)dy=0$	6.30	$2xtgydx+\frac{x^2}{\cos^2 y}dy=0$

7-тапсырма. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешуін табыңыз.

17 кесте

№	Тапсырма	№	Тапсырма	№	Тапсырма
7.1	$y''=e^{-2x}-3$	7.2	$y''=\cos^2 x$	7.3	$y''=2x^4-\cos x$
7.4	$y''=\cos 5x$	7.5	$y''=x\left(\sqrt{x}-1\right)$	7.6	$y''=(2x-1)^5$
7.7	$y''=(1+3x)^2$	7.8	$y''=\sqrt{4x+1}$	7.9	$y''=\cos x\sin^2 x$
7.10	$y''=3^{-x}$	7.11	$y''=e^{1-3x}+1$	7.12	$y''=(4-5x)^3$
7.13	$y''=\sin 3x$	7.14	$y''=e^x+\sqrt{x}$	7.15	$y''=\sin 4x-\sqrt{x+1}$
7.16	$y''=\frac{3}{x^3}$	7.17	$y''=\frac{x+2}{\sqrt[3]{x}}$	7.18	$y''=\frac{2}{(x+1)^3}$
7.19	$y''=\sin^2 x$	7.20	$y''=\cos^2 3x$	7.21	$y''=2^{3x+1}+x$
7.22	$y''=\frac{3}{\cos^2 x}$	7.23	$y''=\frac{\sqrt{x}-1}{x^2}$	7.24	$y''=\frac{x}{x^2+1}$
7.25	$y''=\frac{1}{\sin^2 2x}$	7.26	$y''=\sin^2 2x-\cos^2 x$	7.27	$y''=\cos^3 x$
7.28	$y''=\frac{1}{x^2+4}$	7.29	$y''=-\frac{4}{\sqrt{x^3}}$	7.30	$y''=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

8-тапсырма. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешуін табыңыз.

18 кесте

№	Тапсырма	№	Тапсырма	№	Тапсырма
8.1	$y''=y'x$	8.2	$y''+x^2y'=x^4$	8.3	$xy''-y'=x+1$
8.4	$y''tg5x=5y'$	8.5	$xy''-y'+2x=0$	8.6	$y''-xy'=x$
8.7	$y''-\cos x\cdot y'=\cos x$	8.8	$x^3\cdot y''+xy'=2$	8.9	$x^3y''+x^2y'=3$
8.10	$x^2\cdot y''+y'=-\frac{1}{\sqrt{x}}$	8.11	$x\cdot y''-y'=\frac{1}{x^2}$	8.12	$y''+xy'=-x$

18 кестенің соңы

8.13	$y''+2y'=x$	8.14	$xy''+y'=\sqrt{x}$	8.15	$x^4y''+xy'=1$
8.16	$2xy''-(y')^2=1$	8.17	$y''tg3x-y'=0$	8.18	$y''(x^2+1)-2xy'=1$
8.19	$y''+2xy'=x$	8.20	$(1+x^2)y''+2xy'=2x$	8.21	$xy''-xy'=e^x$
8.22	$y''tgx-y'=1$	8.23	$y''ctg2x-y'=0$	8.24	$xy''+y'=x^4$
8.25	$y''-\frac{y'}{x}=\frac{1}{x}$	8.26	$xy''=y'\ln\frac{y'}{x}$	8.27	$x^3y''-y'=2x$
8.28	$x^4y''+x^2y'=0$	8.29	$(1+x^2)y''+2xy'=2x^2$	8.30	$y''+2xy'=-x$

9-тапсырма. Коши есебін шешіңіз.

19 кесте

№	Тапсырма	№	Тапсырма	№	Тапсырма
9.1	$y''-2y'+y=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=2$	9.2	$y''-4y'+3y=0$, $y(0)=3,\ y'(0)=1$	9.3	$y''+8y'+7y=0$, $y(0)=2,\ y'(0)=-2$
9. 4	$y''+5y'-6y=0$, $y(0)=-1,\ y'(0)=6$	9.5	$y''-4y'-5y=0$, $y(0)=2,\ y'(0)=6$	9.6	$y''-6y'+2y=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=0$
9.7	$y''+5y'+3y=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=2$	9.8	$y''+9y=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=1$	9.9	$y''+y'=0$, $y(0)=-1, y'(0)=-2$
9.10	$y''-3y'+2y=0$, $y(0)=3,\ y'(0)=1$	9.11	$y''+2y'=0$, $y(0)=0,\ y'(0)=1$	9.12	$y''+2y'+y=0$, $y(0)=0,\ y'(0)=1$
9.13	$y''-9y'=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=3$	9.14	$2y''-5y'+4y=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=0$	9.15	$y''-2y'+y=0$ $y(0)=1, y'(0)=3$
9.16	$y''+5y'-6y=0$, $y(0)=0,\ y'(0)=-5$	9.17	$y''-4y'+4y=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=0$	9.18	$3y''+2y'-y=0$ $y(0)=2, y'(0)=3$
9.19	$y''+8y'+16y=0$, $y(0)=-1,\ y'(0)=1$	9.20	$4y''+8y'-5y=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=2$	9.21	$y''+y'-2y=0$ $y(0)=0, y'(0)=1$
9.22	$y''+4y'+8y=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=0$	9.23	$y''+2y'+5y=0$, $y(0)=2,\ y'(0)=0$	9.24	$y''+y=0$ $y(0)=0, y'(0)=3$
9.25	$y''+3y'+2y=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=1$	9.26	$y''-y'=0$, $y(0)=0,\ y'(0)=4$	9.27	$y''+4y=0$ $y(0)=0, y'(0)=-4$
9.28	$9y''-6y'+y=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=3$	9.29	$y''+y'+y=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=1$	9.30	$y''-4y'+13y=0$ $y(0)=1, y'(0)=3$

10 задание. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешуін табыңыз.

20 кесте

№	Тапсырма	№	Тапсырма
10.1	$y''-y'-2y=x^2+1$	10.2	$y''-y=2e^x$

20 кестенің соңы

10.3	$y''-3y'+2y=\sin x$	10.4	$y''-6y'+9y=x^2$
10.5	$y''+4y'+4y=5e^{-2x}$	10.6	$y''+2y'+y=\left(x^2+1\right)e^x$
10.7	$y''+4y=x\cos x-x^2\sin x$	10.8	$y''-4y'=x^2+3$
10.9	$y''-8y'-9y=4e^{-x}$	10.10	$y''+2y'-3y=\left(x^2+x\right)e^{-x}$
10.11	$y''-2y'+y=xe^x$	10.12	$y''-2y'+2y=x\cos x$
10.13	$y''+6y'+10y=3e^{-3x}$	10.14	$y''-5y'+6y=3x-1$
10.15	$y''-2y'=x^2+x-1$	10.16	$y''+9y=3x\sin x$
10.17	$y''-y'-2y=x\sin x$	10.18	$y''-4y'+5y=e^{-2x}\cos 2x$
10.19	$y''-2y'-3y=e^{4x}$	10.20	$y''+4y=e^2\sin x$
10.21	$y''+2y=2\cos x+3\sin x$	10.22	$y''+3y'+4y=\left(x-2\right)e^{2x}$
10.23	$y''-6y'+5y=7$	10.24	$y''+6y'+10y=-2e^{3x}\cos x$
10.25	$y''-2y'+10y=3e^{-3x}$	10.26	$y''+y'-6y=\left(3x+4\right)e^{2x}$
10.27	$y''-2y'+2y=2^x$	10.28	$y''-7y'-8y=e^{2x}\cos 2x$
10.29	$y''+y=4\sin x$	10.30	$y''-7y'+12y=\left(x^2-1\right)e^{3x}$

11-тапсырма. Біртекті емес дифференциалдық теңдеуді ырықты тұрақтыны вариациялау әдісімен шешіңіз.

21 кесте

№	Тапсырма	№	Тапсырма
11.1	$y''+2y'+5y=tg4x$	11.2	$y''-y'=e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$
11.3	$y''-4y'-5y=\frac{1}{1+e^x}$	11.4	$y''+y=\frac{1}{\sin x}$
11.5	$y''+5y'+6y=\frac{x}{e^{5x}}$	11.6	$y''+16y=\frac{1}{\sin 4x}$
11.7	$y''+9y'=\frac{e^{9x}}{x}$	11.8	$y''-3y'+2y=\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}$
11.9	$y''+4y'=\frac{e^{4x}}{1+e^{4x}}$	11.10	$y''-y'=\frac{e^x}{1+e^x}$
11.11	$y''-4y'+3y=\frac{1}{2+e^{3x}}$	11.12	$y''+5y'-6y=tgx$
11.13	$y''-y=\frac{x^2-2}{x^3}$	11.14	$y''+y=\frac{x}{\cos x}$
11.15	$y''-4y'+4y=\frac{e^{-2x}}{2-e^{-2x}}$	11.16	$y''-2y'+y=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$
11.17	$y''+5y'-6y=ctg2x$	11.18	$y''+y=2ctgx$

21 кестенің соңы

11.19	$y''+4y=\dfrac{2}{\sin 2x}$	11.20	$9y''-6y'+y=\dfrac{2}{1+e^{-x}}$
11.21	$y''+8y'+7y=\dfrac{3e^{x}}{4+e^{-x}}$	11.22	$y''+3y'+2y=tgx$
11.23	$y''-6y'-7y=\dfrac{e^{7x}}{1+e^{-7x}}$	11.24	$y''-2y'+y=\dfrac{1}{2+e^{x}}$
11.25	$y''-y'=e^{2x}\cos e^{x}$	11.26	$y''-5y'+4y=e^{2x}\sin e^{x}$
11.27	$y''+2y'+y=\dfrac{e^{x}}{x^{2}}$	11.28	$y''-2y'+y=\dfrac{e^{x}}{x^{2}+1}$
11.29	$y''+4y'+8y=\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$	11.30	$4y''+8y'-5y=\dfrac{e^{-2x}}{3+e^{2x}}$

2.3 ЕСЖ №2 әдістемелік нұсқаулар

2.3.1 Бірінші тапсырмаға нұсқау.

Берілген дифференциалдық теңдеуді қанағаттандыратын кез келген n рет дифференциалданатын функция $y=\varphi(x,C_1,...,C_n)$ қарапайым $F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$ дифференциалдық теңдеуінің шешімі деп аталады.

Берілген функция дифференциалдық теңдеудің шешімі болатындығын анықтау үшін, функцияны және оның n ретке дейінгі туындыларын теңдеудегі орындарынан қойып, оны тепе-теңдікке айналдыратындығын тексеру қажет. Егер функция теңдеуді қанағаттандырса, онда ол дифференциалдық теңдеудің шешімі болады.

1-мысал. Берілген $y=1-2x+Ce^{x}$ функциясы дифференциалдық теңдеудің $y'-y=2x-3$ шешімі болатындығын тексеріңіз.

Шешуі. $y=1-2x+Ce^{x}$, $y'=-2+Ce^{x}$. Функцияны және оның туындысын дифференциалдық теңдеудегі орындарына қоямыз:

$$-2+Ce^{x}-\left(1-2x+Ce^{x}\right)=-3+2x=2x-3.$$

Яғни, $y=1-2x+Ce^{x}$ функциясы дифференциалдық теңдеудің шешімі болып табылады.

2.3.2 Екінші тапсырмаға нұсқау.

Берілген бастапқы шартты қанағаттандыратын қарапайым дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу есебі Коши есебі деп аталады.

n-ретті дифференциалдық теңдеудің бастапқы шарты

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{n-1}$$

түрінде жазылады.

Бастапқы шарттар мәндерін дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі мен оның $(n-1)$-ретке дейінгі туындыларына қойғаннан алынған теңдеулер

жүйесінен белгісіз $C_1, \ldots, C_n$ тұрақтыларын табамыз. Бұл мәндерді дифференциалдық теңдеудің жалпы шешіміндегі орындарына қойып, берілген теңдеудің дербес шешімін аламыз.

2-мысал. Коши есебін шешіңіз $\frac{dy}{dx} = x, \quad y(0) = 1.$

Шешуі. $\frac{dy}{dx} = x \quad \rightarrow \quad \int dy = \int x dx, \quad y = \frac{x^2}{2} + C$ - жалпы шешім.

Бастапқы шарттан: $x = 0, \ y = 1.$ Онда $y = \frac{x^2}{2} + C \ \Rightarrow 1 = 0 + C \ \Rightarrow C = 1.$

Сонымен, ізделінді дербес шешім $y = \frac{x^2}{2} + 1.$

2.3.3 Үшінші тапсырмаға нұсқау.

Егер теңдеуде $f(x, y)$ функциясы нөлінші ретті біртекті функция болса, онда қарапайым бірінші ретті $y' = f(x, y)$ дифференциалдық теңдеу біртекті болып саналады.

Егер

$$f(tx, ty) = t^0 f(x, y), \ t > 0$$

болса, онда $f(x, y)$ нөлінші ретті біртекті функция деп аталады.

Біртекті $y' = f(x, y)$ дифференциалдық теңдеу $y = tx, \ y' = t'x + t$ алмастырулары негізінде айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеуге келтіріледі.

3-мысал. Дифференциалдық теңдеудің $y' = \frac{yx + y^2 e^{\frac{x}{y}}}{x^2}$ жалпы шешуін (жалпы интегралын) табыңыз.

Шешуі. $y = tx, \ y' = t'x + t$ алмастыруымен дифференциалдық теңдеудің

$$t'x + t = \frac{tx^2 + (tx)^2 e^{\frac{x}{tx}}}{x^2} = t + t^2 e^{\frac{1}{t}}, \quad t'x = t^2 e^{\frac{1}{t}}$$

түріне келеміз.

Айнымалыларын ажыратып және интегралдап,

$$\frac{e^{-\frac{1}{t}} dt}{t^2} = \frac{dx}{x}, \ -e^{-\frac{1}{t}} = \ln|x| + C$$

теңдігін аламыз. Кері $t = \frac{y}{x}$ қойылымы арқылы дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралын

$$-e^{-\frac{x}{y}} = \ln|x| + C$$

аламыз.

2.3.4 Төртінші тапсырмаға нұсқау.

Теңдеудің

$$y' + p(x)\cdot y = g(x)$$

түрі бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Сызықтық дифференциалдық теңдеуде белгісіз функция және туындысы бірінші дәрежелі болып келеді.

Егер теңдеуде $g(x) \equiv 0$ болса, онда сызықтық дифференциалдық теңдеу

$$y' + p(x)\cdot y = 0$$

түрінде жазылады да, ол сызықтық дифференциалдық теңдеуге сәйкес бірінші ретті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеу деп аталады. Теңдеудің шешімін табудың екі әдісін қарастырайық: Бернулли және Лагранж (ырықты тұрақтыны вариациялау) әдістері.

1. Бернулли әдісі. Бұл әдіс бойынша сызықтық дифференциалдық теңдеудің шешімін $y = u\cdot v,\ u = u(x), v = v(x)$ түрінде іздейміз. Олай болса, $y' = u'\cdot v + u\cdot v'$. Теңдеудегі орындарына y және y' қойып,

$$u'\cdot v + u\cdot\left(v' + p(x)\cdot v\right) = g(x)$$

теңдігін аламыз.

Бұл теңдіктегі $v' + p(x)\cdot v = 0$ өрнегінің айнымалыларын ажыратып және интегралдап шешуімін табамыз: $v = e^{-\int p(x)dx}$. Табылған мәнді алынған екінші $u'\cdot v = g(x)$ теңдеуге қойсақ $u' = g(x)e^{\int p(x)dx}$ теңдігіне келеміз. Интегралдау негізінде $u = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx$. Табылған u және v мәндерін ізделінді шешімге қойсақ, берілген сызықтық дифференциалдық теңдеудің шешімін аламыз:

$$y = \left(\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)e^{-\int p(x)dx}.$$

Бұл формуланы бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің шешімін табуда дайын формула ретінде қолдануға болады.

2. Лагранж (ырықты тұрақтыны вариациялау) әдісі. Бұл әдісте алдымен берілген сызықтық дифференциалдық теңдеуге сәйкес біртекті

$$y' + p(x)\cdot y = 0$$

түрінің жалпы шешімін табамыз: $y = Ce^{-\int p(x)dx}$. Бұл шешімде Лагранж әдісінің негізі болып табылатын $C = C(x)$ деп аламыз: $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$. Бұл функция мен туындысын берілген дифференциалдық теңдеудегі орындарын қойып, алынған нәтижені интегралдай отырып $C(x)$ табамыз. Табылған мәнді орнына қойып берілген бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің шешімін аламыз. Нәтиже теңдеудің Бернулли әдісімен алынған шешіміндей болады.

4-мысал. Дифференциалдық $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 1$ теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

.

Шешуі. $p(x)=-\frac{1}{x}, \quad g(x)=x^2+1.$

Дайын формуланы пайдаланып теңдеудің жалпы шешімін табамыз:

$$y=\left(\int\left(x^2+1\right)e^{-\int\frac{dx}{x}}dx+C\right)e^{\int\frac{dx}{x}}=\left(\int\left(x^2+1\right)e^{-\ln|x|}dx+C\right)e^{\ln|x|}=$$

$$=\left(\int\left(x^2+1\right)\frac{1}{x}dx+C\right)\cdot x=\left(\int\left(x+\frac{1}{x}\right)dx+C\right)\cdot x=\left(\frac{x^2}{2}+\ln|x|+C\right)x,$$

немесе $y=\frac{x^3}{2}+x\ln|x|+Cx.$

2.3.5 Бесінші тапсырмаға нұсқау.

Бірінші ретті сызықтық емес дифференциалдық теңдеу түрі

$$y'+p(x)\cdot y=g(x)\cdot y^n, \ n\in R, \quad n\neq 0,1,$$

Бернулли теңдеуі деп аталады. Мұнда $p(x),\ g(x)$ - үздіксіз функциялар.

Бернулли теңдеуі $y^{1-n}=z, \ \left(y^{-n}\cdot y'=\frac{z'}{1-n}\right)$ қойылымы арқылы бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеуге келтіріледі. Оның шешу әдістері 4-тапсырма нұсқауында келтірілгендіктен студенттерге өзіндік жұмыс ретінде қарастыру ұсынылады.

2.3.6 Алтыншы тапсырмаға нұсқау.

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің дифференциалдық формадағы

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

түрі толық дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Яғни, теңдіктің сол жағы $D\subset R_2$ аймағында қандай да бір $u(x,y)$ функциясының дифференциалы болып табылады:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du(x,y).$$

Егер $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ болса, онда толық дифференциалдық теңдеудің шешімі айқын емес түрде $u(x,y)=C$ деп жазылады. Мұндағы $u(x,y)$ функциясын

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(\xi,y)d\xi+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,\xi)d\xi, \qquad (1)$$

түрінде, болмаса

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(\xi,x_0)d\xi+\int_{y_0}^{y}Q(y,\xi)d\xi \qquad (2)$$

формуласынан табамыз. Бұл формулаларда көбіне x_0 және y_0 мәндерін $x_0=0$ және $y_0=0$ деп алады, яғни оларды таңдауда $(x_0,y_0)\in D$ болуы ескеріледі.

5-мысал. Дифференциалдық $\left(x^2 \ln y - 1\right)dx - \left(2 - \frac{x^3}{3y}\right)dy = 0$ теңдеудің жалпы интегралын табыңыз.

Шешуі. Теңдеуден $P(x, y) = x^2 \ln y - 1,\ Q(x, y) = \frac{x^3}{3y} - 2$.

Яғни, $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{x^2}{y}$ және $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{x^2}{y}$. Демек, $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ шарты орындалады. Берілген дифференциалдық теңдеу толық дифференциалдық теңдеу. Сонымен, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ десек,

$$u(x, y) = \int_0^x \left(\xi^2 \ln y - 1\right)d\xi - 2\int_0^y d\xi = \ln y \int_0^x \xi^2 d\xi - \xi\Big|_0^x - 2\xi\Big|_0^y =$$

$$= \ln y \cdot \frac{\xi^3}{3}\Big|_0^x - x - 2y = \frac{x^3}{3} \cdot \ln y - x - 2y.$$

Ізделінді жалпы интеграл: $\frac{x^3}{3} \cdot \ln y - x - 2y = C$.

2.3.7 Жетінші және сегізінші тапсырмаларға нұсқау.

Кейбір жағдайларда сызықтық біртекті қарапайым дифференциалдық теңдеулер шешімін біртіндеп интегралдап, ретін төмендете отырып табуға болады.

1. Жоғарғы туындысы бойынша шешілген n-ретті дифференциалдық теңдеу түрі: $y^{(n)} = f(x)$, мұнда $f(x)$ - аймақта үздіксіз функция. Біртіндеп интегралдау арқылы дифференциалдық теңдеудің ретін төмендетіледі және де ретінің әрбір төмендеуінде бір тұрақты қосылып остырады.

2. Егер n-ретті $(n \geq 2)$ дифференциалдық теңдеуде белгісіз функция немесе оның $n-1$-ретке дейінгі туындысы қатыспай тұрса, онда ретін төменедету үшін

$$y^{(n)} = p^{(n-k)}, \ldots, y' = p,\ p = p(x)$$

алмастыруларын енгіземіз. Мысалы, екінші ретті дифференциалдық теңдеуде ретін төмендету үшін

$$y'' = p',\ y' = p,\ p = p(x)$$

алмастыруын қолданамыз.

3. Егер n-ретті $(n \geq 2)$ дифференциалдық теңдеуде тәуелсіз x айнымалысы қатыспай тұрса, онда ретін төмендету үшін жаңа белгісіз $y' = p(y)$ функциясын енгіземіз. Онда $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$ және т.с.с.

6-мысал. Дифференциалдық $y''' = x^2 - 3x$ теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі. $y'' = \int (x^2 - 3x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + C_1$.

$$y' = \int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + C_1 \right) dx = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{2} + C_1 x + C_2.$$

$$y = \int \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{2} + C_1 x + C_2 \right) dx = \frac{x^5}{60} - \frac{x^4}{8} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

7-мысал. Дифференциалдық $y'' + y' \sin x = \sin x$ теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі. Дифференциалдық теңдеуде белгісіз y функциясы жоқ, сондықтан да $y'' = p',\ y' = p,\ p = p(x)$ алмастыруын енгіземіз. Сонымен, алмастырудан кейін бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеуіне келеміз: $p' + p \sin x = \sin x,\ p(x) = \sin x,\ g(x) = \sin x$. Дайын формула негізінде теңдеудің жалпы шешімін табамыз:

$$p = \left(\int \sin x \cdot e^{\int \sin x dx} dx + C_1 \right) e^{-\int \sin x dx} = \left(\int \sin x \cdot e^{-\cos x} dx + C_1 \right) e^{\cos x} =$$

$$= \left(e^{-\cos x} + C_1 \right) \cdot e^{\cos x} = 1 + C_1 e^{\cos x}, \qquad y' = 1 + C_1 e^{\cos x}.$$

$$y = \int \left(1 + C_1 e^{\cos x} \right) dx = \left| \begin{array}{l} e^{\cos x} = t, \quad x = \arccos \ln t \\ dx = -\dfrac{dt}{t \cdot \sqrt{1 - \ln^2 t}} \end{array} \right| =$$

$$= x - C_1 \int \frac{dt}{t \cdot \sqrt{1 - \ln^2 t}} = x - C_1 \int \frac{d \ln t}{\sqrt{1 - \ln^2 t}} = x + C_1 \cdot \arcsin \ln t + C_2.$$

$$y = x + C_1 \cdot \arcsin(\cos x) + C_2.$$

2.3.8 Тоғызыншы тапсырмаға нұсқау.

Дифференциалдық теңдеу түрі

$$y'' + py' + qy = 0,\ p, q = const$$

тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Мұндай теңдеудің дербес шешуі

$$y = e^{kx} \rightarrow\ y' = ke^{lx},\ y'' = k^2 e^{kx}$$

түрінде ізделінеді.

Алгебралық теңдеу

$$k^2 + pk + q = 0$$

тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеуге сәйкес сипаттамалық теңдеу деп аталады.

Сипаттамалық теңдеу түбірлеріне байланысты тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімінің жазылуының 3 жағдайы қарастырылады.

1. Сипаттамалық теңдеу түбірлері әртүрлі нақты сандар $(D>0)$: $k_1 \neq k_2$. Бұл жағдайда теңдеудің жалпы шешімі

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

түрінде жазылады.

2. Сипаттамалық теңдеу түбірлері өзара тең нақты сандар $(D=0)$: $k_1 = k_2 = k$. Бұл жағдайда теңдеудің жалпы шешім:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{kx}.$$

3. Сипаттамалық теңдеу түбірлері комплекстік түйіндес сандар $(D<0)$: $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Бұл жағдайда теңдеудің жалпы шешім:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

8-мысал. Коши есебін шешіңіз

$$y'' - 6y' + 12y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Шешуі. $y'' = k^2,\ y' = k,\ y = 1$ алмастыруларын дифференциалдық теңдеуге енгізіп, оған сәйкес $k^2 - 6k + 12 = 0$ сипаттамалық теңдеуін аламыз. Оның түбірлер комплекстік түйіндес сандар: $k_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3}i$. Сондықтан, үшінші жағдай негізінде жалпы шешім

$$y = e^{3x}\left(C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x\right)$$

түрінде болады.

Берілген теңдеудің дербес шешуін алу үшін жалпы шешімді дифференциалдап

$$y' = 3e^{3x}\left(C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x\right) + e^{3x}\left(-\sqrt{3}C_1 \sin\sqrt{3}x + \sqrt{3}C_2 \cos\sqrt{3}x\right),$$

бастапқы $x = 0,\ y = 1,\ y' = 0$ шарттын ескереміз:

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ 3C_1 + \sqrt{3}C_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -\sqrt{3}. \end{cases}$$

Сонымен, Коши есебінің шешуі: $y = e^{3x}\left(\cos\sqrt{3}x - \sqrt{3}\sin\sqrt{3}x\right).$

2.3.9 Оныншы тапсырмаға нұсқау.

Дифференциалдық теңдеу түрі

$$y'' + py' + qy = f(x),\ p, q = const$$

тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі оның дербес y^* шешуі мен оған сәйкес біртекті түрінің жалпы $\bar{y}$ шешулерінің қосындысынан тұрады:

$$y_{ж.ш.} = \bar{y} + y^*.$$

Теңдеуге сәйкес біртекті түрінің жалпы $\bar{y}$ шешуін табу 9-тапсырма нұсқауын келтірілген.

Тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеудің дербес y^* шешуін іздеу тәсілдерін қарастырайық:

1) Егер тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеудің оң жағы $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$ түрінде болса, онда оның дербес шешуі $y^*=x^rQ_n(x)e^{\alpha x}$ түрінде ізделінеді. Мұнда r саны сипаттамалық теңдеу түбірі ретінде α санының қайталану еселігі. Ал, $Q_n(x)$ - белгісіз коэффициентті $P_n(x)$ көпмүшелігімен бірдей дәрежелі көпмүшелік.

2) Егер тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеудің оң жағы $f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right)$ түрінде болса, онда оның дербес шешуі $y^*=x^re^{\alpha x}\left(M_l(x)\cos\beta x+N_j(x)\sin\beta x\right)$ түрінде ізделінеді. Мұнда $M_l(x),\ N_l(x)$ - белгісіз коэффициентті $l=\max(n,m)$ дәрежелі көпмүшеліктер, ал r саны сипаттамалық теңдеу түбірі ретінде $\alpha+\beta i$ санының қайталану еселігі. Белгісіз коэффициенттер анықталмаған коэффициентер әдісі бойынша y^* функциясын және оның туындыларын берілген теңдеудегі орындарына қою негізінде, яғни теңдіктің екі жағынан да бірдей дәрежелі айнымалылардың коэффициенттерін теңестіріп табамыз.

9-мысал. Дифференциалдық $y''-4y=\sin x$ теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі. Теңдеудің жалпы шешімі: $y_{ж.ш.}=\bar{y}+y^*$.

$\bar{y}$: $y''-4y=0,\ k^2-4=0,\ k_{1,2}=\pm2.\ \bar{y}=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$.

Теңдеудің оң жағы $f(x)=\sin x=e^{0x}(0\cdot\cos x+1\cdot\sin x)$ түрінде берілген. Сондықтан оның дербес шешуін $y^*=x^re^{\alpha x}\left(M_l(x)\cos\beta x+N_j(x)\sin\beta x\right)$ түрінде іздейміз. Мұнда $\alpha+\beta i=i$ саны сипаттамалық теңдеу түбірлері ретінде кездеспейді, ал, $l=\max(n,m)=0$. Содықтан:

$$y^*=A\cos x+B\sin x.$$

Бұдан $(y^*)'$ және $(y^*)''$ туындыларын тауып, теңдеудегі орындарына қоямыз:

$$(y^*)'=-A\sin x+B\cos x,\ (y^*)=-A\cos x-B\sin x$$
$$-A\cos x-B\sin x-4A\cos x-4B\sin x=\sin x,$$
$$-5A\cos x-5B\sin x=\sin x.$$

Теңдіктің екі жағынан да $\cos x,\ \sin x$ коэффициенттерін теңестіріп, белгісіз A және B коэффициенттерін табамыз:

$$\begin{array}{l|l}\cos x: & -5A=0,\\ \sin x: & -5B=1\end{array}\rightarrow\begin{cases}A=0,\\ B=-\dfrac{1}{5}.\end{cases}$$

Бұларды орындарына қойып, дербес $y^*=-\dfrac{1}{5}\sin x$ шешуін аламыз. Сонымен ізделінді жалпы шешу:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{5}\sin x.$$

2.3.10 Он бірінші тапсырмаға нұсқау.

Тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі: $y_{ж.ш.} = \bar{y} + y^*$.

Теңдеуге сәйкес біртекті түрінің жалпы $\bar{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ шешуін табу 9-тапсырма нұсқауында келтірілген.

Теңдеудің дербес y^* шешуін іздеуде ырықты тұрақтыны вариациялау әдісін қолданамыз. Мұнда $C_i = C_i(x),\ i = 1,2$ деп, дербес шешуін

$$y^* = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$$

түрінде іздейміз.

$C_1'(x)$ және $C_2'(x)$ белгісіздерді

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

теңдеулер жүйесінен табамыз. Табылған нәтижелерді интегралдап және орнына қойып теңдеудің ізделінді дербес шешуін аламыз.

10-мысал. Біртекті емес дифференциалдық $y'' + 2y' + y = \frac{1}{xe^x}$ теңдеуді ырықты тұрақтыны вариациялау әдісімен шешіңіз.

Шешуі. Берілген теңдеуге сәйкес біртекті

$$y'' + 2y' + y = 0$$

түрінің жалпы шешімін табамыз. Оның сипаттамалық теңдеуінің түбірлері:

$$k^2 + 2r + 1 = 0,\ k_{1,2} = -1.$$

Жалпы шешім: $\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$. Дербес шешуін $C_i = C_i(x),\ i = 1,2$ деп алып,

$$y^* = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) \cdot x e^{-x}$$

түрінде іздейміз. Крамер ережесімен теңдеулер жүйесінен

$$\begin{cases} C_1'(x) e^{-x} + C_2'(x) x e^{-x} = 0, \\ -C_1'(x) e^{-x} + C_2'(x) e^{-x}(x-1) = \frac{1}{xe^x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x) x = 0, \\ -C_1'(x) + C_2'(x)(x-1) = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

$C_1'(x),\ C_2'(x)$ табамыз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & x \\ \frac{1}{x} & x-1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x}. \quad C_1'(x) = 1,\ C_2'(x) = \frac{1}{x}.$$

Бұларды интегралдап $C_1(x) = x + C_1,\ C_2(x) = \ln|x| + C_2$ және орындарына қойып теңдеуідің дербес шешуін жазамыз:

$$y^* = (x + C_1) e^{-x} + (\ln|x| + C_2) \cdot x e^{-x},\ (C_1, C_2 = 0).$$

Сонымен, ізделінді жалпы шешім:

$$y^* = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x e^{-x} + x \ln|x| e^{-x}.$$

3. Есептеу-сызба жұмыс №3. Қатарлар. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика элементтері

Мақсаты: оңтаңбалы және кезектаңбалы қатарларды жинақтылыққа зерттеуді және сонымен бірге ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика әдістерін игеру.

3.1 Теориялық сұрақтар

1. Сандық қатарлар, негізгі түсініктер.
2. Жинақтылықтың жеткілікті шарттары.
3. Кезектаңбалы қатарлар.
4. Абсолют және шартты жинақтылық.
5. Функциялық қатарлар.
6. Дәрежелік қатарлар.
7. Қарапайым функцияларды Тейлор қатарына жіктеу.
8. Қатарларды жуықтап есептеуде қолдану.
9. Кездейсоқ оқиғалар, негізгі түсініктер.
10. Ықтималдықтардың негізгі теоремалары.
11. Бір өлшемді кездейсоқ шамалар.
12. Таңдамалық теориясының негізгі түсініктері.
13. Нүктелік, интервалдық бағалау және сенімділік интервалы.

3.2 Есептік тапсырмалар

1-тапсырма. Берілген сандық қатардың жазыңыз: а) a_n - жалпы мүшесін; б) S_n - n-ші дербес қосындысын; в) r_n - қатар қалдығын; г) S - қатардың қосындысын.

22 кесте

№	Тапсырма	№	Тапсырма	№	Тапсырма
1.1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$	1.2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$	1.3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$
1.4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$	1.5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$	1.6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+5)}$
1.7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$	1.8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+5)}$	1.9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2)(5n+3)}$
1.10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$	1.11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$	1.12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+5)}$

22 кестенің соңы

1.13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$	1.14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+4)}$	1.15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$
1.16	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$	1.17	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n}$	1.18	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$
1.19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)(n+6)}$	1.20	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}$	1.21	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+4)}$
1.22	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$	1.23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+5)(2n+9)}$	1.24	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)(4n+7)}$
1.25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-1)(5n+4)}$	1.26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$	1.27	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n$
1.28	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$	1.29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+12n+5}$	1.30	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$

2-тапсырма. Сандық $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ қатары берілген. Қатардың жинақтылығының қажетті белгісі орындала ма? Орындалса, қатарды салыстыру белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

23 кесте

№	Тапсырма	№	Тапсырма	№	Тапсырма
2.1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+4}$	2.2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3+4}$	2.3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+2}$
2.4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$	2.5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^5+3}$	2.6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$
2.7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{\sqrt{n^3}+2}$	2.8	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{4n^2+3}\right)^3$	2.9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{3n^2+1}$
2.10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$	2.11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$	2.12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+1}{\sqrt{n^7}+4}$
2.13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2}$	2.14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{n^2+1}}$	2.15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$
2.16	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-1}{n}$	2.17	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt[3]{n^5}+1}$	2.18	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}$
2.19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3+1}{3n^2+4}$	2.20	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt[5]{n^3}+2}$	2.21	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{1+n^2}$
2.22	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}}$	2.23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n+6n+1}}$	2.24	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$
2.25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n+3}}$	2.26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n\sin^2 n}$	2.27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-2}{n^4+3}$
2.28	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n+\ln(1+n)}{n^2+\ln^2 n}$	2.29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{4n+1}$	2.30	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{2n^3+5}$

3-тапсырма. Даламбер белгісін қолданып, қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

24 кесте

№	Тапсырма	№	Тапсырма	№	Тапсырма
3.1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^2\cdot 3^n}$	3.2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n+2)!}$	3.3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n\cdot 10^n}$
3.4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n}$	3.5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2+n+1}$	3.6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n\cdot 5^n}$
3.7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^2\cdot 7^n}$	3.8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$	3.9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)\cdot 4^n}$
3.10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n\cdot(n-1)!}$	3.11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{n^2+n+1}$	3.12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{3n^2+1}$
3.13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{6^n}$	3.14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{(n-1)\cdot 3^{n-1}}$	3.15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{n!}$
3.16	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot 2^n}{(n+1)!}$	3.17	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{4^n}$	3.18	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{n^3+1}$
3.19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{3^{n-1}}$	3.20	$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$	3.21	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n\cdot 5^{n-1}}$
3.22	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{n^2\cdot 3^n}$	3.23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n+1}{n!}$	3.24	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{n-1}}$
3.25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+2)!}$	3.26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!4^{n+1}}{n!}$	3.27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-2}}{n^2+4}$
3.28	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(n^2+1)}{(n+1)!}$	3.29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$	3.30	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{3^{n-1}}$

4-тапсырма. Радикалдық Коши белгісін қолданып, қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

25 кесте

№	Тапсырма	№	Тапсырма	№	Тапсырма
4.1	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$	4.2	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{4n+3}\right)^{2n}$	4.3	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-1}{n+1}\right)^n$
4.4	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n^2+1}\right)^n$	4.5	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{3^n}\right)^{2n}$	4.6	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2-1}{3n+1}\right)^n$
4.7	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{2n}\right)^n$	4.8	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3+3n}{4+n^5}\right)^n$	4.9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^n}{5^n}$
4.10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n n}$	4.11	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^{\frac{n}{2}}$	4.12	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^{n^2}$

25 кестенің соңы

4.13	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+2n-1}{3n^2-4n+2}\right)^n$	4.14	$\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{1}{n}$	4.15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{(n+1)^n}$
4.16	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$	4.17	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+3}{2n+1}\right)^n$	4.18	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8n^2+n+1}{6n^2+4n-3}\right)^n$
4.19	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{2n+1}\right)^n$	4.20	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n n}$	4.21	$\sum_{n=1}^{\infty}arctg^n\frac{1}{n+1}$
4.22	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{4n-1}\right)^n$	4.23	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^2-1}{3n^2+1}\right)^n$	4.24	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n^2-1}{3n^2-1}\right)^n$
4.25	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2-3n+5}{3n^2-4n+3}\right)^n$	4.26	$\sum_{n=1}^{\infty}arctg^{2n}\frac{1}{3n+1}$	4.27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^{2n}(n+1)}$
4.28	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{4n^2+1}\right)^{\frac{n}{2}}$	4.29	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-1}{n+2}\right)^{n^2}$	4.30	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)^{2n^2}$

5-тапсырма. Интегралдық Коши белгісін қолданып, қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

26 кесте

№	Тапсырма	№	Тапсырма	№	Тапсырма
5.1	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$	5.2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7}$	5.3	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$
5.4	$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln\frac{n}{2}}$	5.5	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n}{2}+1\right)^3}}$	5.6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)^4}$
5.7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$	5.8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}$	5.9	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$
5.10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)^5}$	5.11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(3n)}$	5.12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\ln^2(3n+1)}$
5.13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+2)^3}}$	5.14	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln^2 n}}$	5.15	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\sqrt{\ln^3(n+3)}}$
5.16	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(2n+2)}$	5.17	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}}$	5.18	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{\ln^2(n+1)}}$
5.19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^3(2n+1)}$	5.20	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\ln(3n+1)}$	5.21	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(3n-1)^3}}$
5.22	$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\cdot\ln(\ln n)}$	5.23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{1+n^3}$	5.24	$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\cdot(\ln(\ln n))^2}$

26 кестенің соңы

5.25	$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[3]{\ln^2 n}}$	5.26	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln(2n+1)}$	5.27	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(3n-1)^5}}$
5.28	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$	5.29	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)^2}$	5.30	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln^3(n+1)}}$

6-тапсырма. Кезектаңбалы қатарды абсолют немесе шартты жинақтылыққа зерттеңіз.

27 кесте

№	Тапсырма	№	Тапсырма	№	Тапсырма
6.1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^3}{(n+1)!}$	6.2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2+1}}$	6.3	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$
6.4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n \cdot n}$	6.5	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^n$	6.6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}$
6.7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)}{n^3+2}$	6.8	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$	6.9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
6.10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$	6.11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^3+1}$	6.12	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{2}{3n+1}\right)^n$
6.13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$	6.14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)}{2^n}$	6.15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n+1}}$
6.16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+1)}{n^3}$	6.17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$	6.18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^n}{n \cdot n!}$
6.19	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln^2 n}$	6.20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{\sqrt{n^3+2}}$	6.21	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^7}$
6.22	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{4}\right)^n$	6.23	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n! \cdot 2^{n-1}}$	6.24	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^n}{n!}$
6.25	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$	5.26	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$	6.27	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4^n \cdot n^2}$
6.28	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n^2+2)}{2n^2+1}$	5.29	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-4}{5n-1}\right)^n$	6.30	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^2}{\sqrt{n^5+3}}$

7-тапсырма. Функциялық қатардың жинақтылық аймағын табыңыз.

28 кесте

№	Тапсырма	№	Тапсырма	№	Тапсырма
7.1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot (2x-1)^n}{2^n \cdot (n+1)}$	7.2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 3^n}{(x-1)^n \cdot (n+1)}$	7.3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{3^n \cdot (n^2+1)}$

28 кестенің соңы

7.4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot(3x+1)^n}{3^n}$	7.5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(x-2)^n\cdot 2^n}$	7.6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\cdot(3x-1)^n}{n^3}$
7.7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot x^n}{3^{n-1}\cdot(n+2)}$	7.8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{2^n\cdot n}$	7.9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
7.10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cdot 2^n}{(x+1)^n\cdot n^2}$	7.11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n\cdot\sqrt[3]{n}}$	7.12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+4)\cdot(3x-1)^n}{3^n\cdot(n+2)}$
7.13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot(2x+1)^n}{n^2+3}$	7.14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(x-1)^n\cdot 3^n}$	7.15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}\cdot x^n}{n^2-2n+3}$
7.16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(x-1)^n}$	7.17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$	7.18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$
7.19	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)\cdot(2x+3)^n}{n^3+1}$	7.20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{(x+1)^n}$	7.21	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$
7.22	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{(x+3)^n}$	7.23	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n\cdot(n-4)}{4^n}$	7.24	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2-3)\cdot(x-3)^n}{3^n}$
7.25	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cdot x^n}{2^n\cdot(n^3+2)}$	7.26	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{n^2+1}$	7.27	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)\cdot(3x+2)^n}{3^n}$
7.28	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n^2}$	7.29	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\cdot(4x+1)^n}{n^2-3}$	7.30	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 2^n}{(2x-1)^n\cdot(n^2+1)}$

8-тапсырма. Анықталған интегралды 0,001 дәлдікке дейін есептеңіз.

29 кесте

№	Тапсырма	№	Тапсырма	№	Тапсырма
8.1	$\int_0^{0,4} \frac{dx}{1+x^3}$	8.2	$\int_0^{0,5} xe^{-\sqrt{x}}dx$	8.3	$\int_0^1 \cos\sqrt{x}dx$
8.4	$\int_0^1 \sin x^2 dx$	8.5	$\int_0^{1/2} \sqrt{x^3+1}dx$	8.6	$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^4}dx$
8.7	$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$	8.8	$\int_0^1 \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$	8.9	$\int_0^1 x^2\sin x^2 dx$
8.10	$\int_0^1 \sin\sqrt{x}dx$	8.11	$\int_0^{1/2} e^{-\frac{x^2}{4}}dx$	8.12	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$
8.13	$\int_{-0,2}^0 \sin\frac{x^2}{3}dx$	8.14	$\int_{-0,1}^0 \frac{\sin x}{x^2}dx$	8.15	$\int_{-0,25}^0 \cos\frac{2x^2}{3}dx$
8.16	$\int_0^{0.1} \cos\left(25x^2\right)dx$	8.17	$\int_0^{0,25} e^{-\sqrt{x}}dx$	8.18	$\int_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^4}}$

29 кестенің соңы

8.19	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$	8.20	$\int_{-0,2}^0 \frac{\ln(1-x^2)}{x}dx$	8.21	$\int_0^{\sqrt{3}} x^2 \cdot \operatorname{arctg} x dx$
8.22	$\int_0^1 \sqrt{x}\cos x dx$	8.23	$\int_{-0,3}^0 e^{-3x^2}dx$	8.24	$\int_0^{1/2} arctg\sqrt{x}dx$
8.25	$\int_0^1 e^{-x^2}dx$	8.26	$\int_{-0,2}^0 \frac{1-\cos 2x}{x^2}dx$	8.27	$\int_{-0,2}^0 \cos\frac{5x^2}{4}dx$
8.28	$\int_0^{0.25} \sqrt{x^2+1}dx$	8.29	$\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cdot\cos\sqrt{x}dx$	8.30	$\int_0^{0,5} x\ln(1+x^2)dx$

9-тапсырма. Берілген интервалда $\omega = 2l$ периодты $f(x)$ функциясын Фурье қатарына жіктеңіз.

30 кесте

№	Тапсырма	№	Тапсырма	№	Тапсырма
9.1	$f(x)=\begin{cases}0, & -2<x<0,\\ 3, & 0\le x<2\end{cases}$	9.2	$f(x)=\begin{cases}0, & -3<x<0,\\ 5, & 0\le x<3\end{cases}$	9.3	$f(x)=\begin{cases}-4, & 0<x<1/2,\\ 4, & 1/2\le x<1\end{cases}$
9.4	$f(x)=\begin{cases}4, & 0<x<2,\\ 0, & 2\le x<4\end{cases}$	9.5	$f(x)=\begin{cases}0, & -4<x<0,\\ 4, & 0\le x<4\end{cases}$	9.6	$f(x)=\begin{cases}2, & 0<x<3,\\ 0, & 3\le x<6\end{cases}$
9.7	$f(x)=\begin{cases}0, & -3<x<0,\\ 3, & 0\le x<3\end{cases}$	9.8	$f(x)=\begin{cases}0, & -1<x<0,\\ 4, & 0\le x<1\end{cases}$	9.9	$f(x)=\begin{cases}-2, & 0<x<1,\\ 2, & 1\le x<2\end{cases}$
9.10	$f(x)=\begin{cases}-4, & 0<x<2,\\ 4, & 2\le x<4\end{cases}$	9.11	$f(x)=\begin{cases}0, & -6<x<0,\\ 2, & 0\le x<6\end{cases}$	9.12	$f(x)=\begin{cases}-3, & 0<x<1.5,\\ 3, & 1.5\le x<3\end{cases}$
9.13	$f(x)=\begin{cases}-2, & 0<x<4,\\ 2, & 4\le x<8\end{cases}$	9.14	$f(x)=\begin{cases}0 & -1/2<x<0,\\ 2, & 0\le x<1/2\end{cases}$	9.15	$f(x)=\begin{cases}-3, & -1/2<x<0,\\ 3, & 0\le x<1/2\end{cases}$
9.16	$f(x)=\begin{cases}-8, & 0<x<2,\\ 8, & 2\le x<4\end{cases}$	9.17	$f(x)=\begin{cases}0, & -8<x<0,\\ 4, & 0\le x<8\end{cases}$	9.18	$f(x)=\begin{cases}-5, & 0<x<3{,}5,\\ 5, & 3.5\le x<7\end{cases}$
9.19	$f(x)=\begin{cases}-5 & 0<x<2,\\ 5, & 2\le x<4\end{cases}$	9.20	$f(x)=\begin{cases}0, & -4<x<0,\\ 8, & 0\le x<4\end{cases}$	9.21	$f(x)=\begin{cases}-3, & -3/2<x<0,\\ 3, & 0\le x<3/2\end{cases}$
9.22	$f(x)=\begin{cases}0, & -7<x<0,\\ 5, & 0\le x<7\end{cases}$	9.23	$f(x)=\begin{cases}-3, & -1<x<0,\\ 0, & 0\le x<1\end{cases}$	9.24	$f(x)=\begin{cases}-5, & 0<x<3.5,\\ 0, & 3.5\le x<7\end{cases}$
9.25	$f(x)=\begin{cases}-3, & 0<x<1/2,\\ 3, & 1/2\le x<1\end{cases}$	9.26	$f(x)=\begin{cases}2, & 0<x<1,\\ 0, & 1\le x<3\end{cases}$	9.27	$f(x)=\begin{cases}6, & -2<x<0,\\ -6, & 0\le x<2\end{cases}$
9.28	$f(x)=\begin{cases}0, & -6<x<3,\\ 3, & 3\le x<6\end{cases}$	9.29	$f(x)=\begin{cases}5, & -1<x<0,\\ -5, & 0\le x<1\end{cases}$	9.30	$f(x)=\begin{cases}-3, & 0<x<3,\\ 0, & 3\le x<6\end{cases}$

10-тапсырма. Бұл тапсырманың орындалуы оқиғалар алгебрасы, комбинаторика элементтері, ықтималдықтың классикалық анықтамасы және гипергеометриялық схема ықтималдығына негізделген.

10.1 Жәшікте 10 алма және 5 алмұрт бар. Кездейсоқ алынған 4 жемістің үшеуі алма болуының ықтималдығы қандай.

10.2 Қорапта 7 ақ және 3 қара шар бар. Қораптан кездейсоқ ретпен барлық шарларды бірінен соң бірін алғанда екінші шардың ақ болуының ықтималдығы қандай.

10.3 Топтағы 9 адам дөңгелек стол басында отыр. Нақты екі адамның қатар отыруының ықтималдығын табыңыз.

10.4 Екі ойын сүйегін лақтырғанда түскен ұпайлар қосындысы тоғыздан кем болмауының ықтималдығын табыңыз.

10.5 Екі ойын сүйегін лақтырғанда түскен ұпайлар қосындысы беске, ал көбейтіндісі төртке тең болуының ықтималдығыны табыңыз.

10.6 Ойын сүйегін лақтырғанда түскен ұпайдың төрттен артық болмауының ықтималдығын табыңыз.

10.7 Қоржында 6 ақ және 4 қара шар бар. Тәуекел алынған үш шардың екеуі ақ, ал біреуі қара болуының ықтималдығын табыңыз.

10.8 Жәшіктегі 24 сигнал ракетасының 6-уы қызыл, ал қалғаны жасыл түсті. Тәуекел алынған 5 ракетаның 3-уі қызыл болуының ықтималдығын табыңыз.

10.9 Студент бағдарламаның 60 сұрағының 45-не дайын. Әрбір емтихан билеті 3 сұрақтан тұрады. Табыңыз: а) студенттің билет сұрақтарының үшеуінде білуінің; б) тек екі сұрағын білуінің; в) тек бір сұрағын ғана білуінің ықтималдығын табыңыз.

10.10 Қоржында 7 ақ және 4 қара шар бар. Шарларды араластырып, тәукеле алынған 3 шардың екеуі ақ, ал біреуі қара болуының ықтималдығын табыңыз.

10.11 Екі ойын сүйегі лақтырылады. Келесі оқиғалардың ықтималдықтарын табыңыз: *A* – түскен ұпайлар қосындысы 6-ға тең; *B* - түскен ұпайлар көбейтіндісі 6-ға тең; *C* - түскен ұпайлар қосындысы оладың көбейтіндісінен артық.

10.12 Кездейсоқ 36 картадан тұратын колода екіге бөлінді. Колоданың әрбір бөлігінде екі “тұз" болуының ықтималдығын табыңыз.

10.13 Алты карточкада О, Ц, Е, Н, К, А әріптері жазылған. Карточкалар теріс аударылып араластырылды. Бес карточканы кері аударғанда КОНЕЦ сөзі шығуының ықтималдығын табыңыз.

10.14 Жәшіктегі 110 бұйымның 10-ы жарамсыз. Тәуекел алынған 5 бұйымның 1-уі жарамсыз болуының ықтималдығын табыңыз.

10.15 Екі ойын сүйегін лақтырғанда түскен ұпайлардың қосындысы 5-тен артық болмауының ықтималдығын табыңыз.

10.16 Жәшікте 1-ден 10-ға дейін нөмірленген 10 бұйым бар. Тәуекел алынған 6 бұйымның ішінде 3-ке еселі нөмерлі бұйым болуының ықтималдығын табыңыз.

10.17 Қоржында 8 ақ, 6 қара және 4 қызыл шарлар бар. Тәуекел алынған 2 шардың түрлі түсті болуының ықтималдығын табыңыз.

10.18 Барлығы 25 бұйымның 4-уі ақаулы. Тәуекел алынған екі бұйымның

ішінде ақаулы бұйымның болуының ықтималдығын табыңыз.

10.19 Студент бағдарламаның 60 сұрағының 50-не дайын. Студенттің емтихан билетінің екі сұрағында білетіндігінің ықтималдығын табыңыз.

10.20 Жәшіктегі 12 шардың 8-і ақ және 4-уі қара. Тәуекел алынған 5 шардың 2-уі қара болуының ықтималдығын табыңыз.

10.21 Қоржында 8 ақ және 4 қара шар бар. Тәуекел бір мезетте 2 шар алынды. Келесі оқиғалардың ықтималдығын табыңыз: *A* – екі шарда бір түсті; *B* – шарлар әртүрлі түсті.

10.22 Екі ойын сүйегін лақтырғанда түскен ұпайлардың көбейтіндісі жұп болуының ықтималдығын табыңыз.

10.23 Қоржында 8 ақ және 4 қара шар бар. Тәуекел алынған 3 шардың 2-уі ақ және 1-уі қара болуының ықтималдығын табыңыз.

10.24 Екі ойын сүйегі лақтырылды. Келесі оқиғалар ықтималдығын табыңыз: *A* – түскен ұпайлар қосындысы 7-ге тең; *B* – түскен ұпайлар көбейтіндісі 7-ге тең; *C* - түскен ұпайлар қосындысы оладың көбейтіндісінен артық.

10.25 Барлық 16 бұйымның 4-уі ақаулы. Тәуекел алынған 4 бұйымның 1-уі ақаулы болуының ықтималдығын табыңыз.

10.26 Бес ер адам және 10 әйел адам 5 столға кездейсоқ үш-үштен отырды. Әрбір столда ер адам болуының ықтималдығын қандай?

10.27 Дүкенге түскен 45 жаңа теледидардың 5-уінің жасырын ақауы бар. Сатып алынған теледидардың ақаусыз болуының ықтималдығын табыңыз.

10.29 «СТУДЕНТ» сөзінің әріптерінің орнын ауыстырудан қанша сөз құрауға болады? Сөздерді жазып шығыңыз.

10.30 Екі ойын сүйегін лақтыруда келесі оқиғалар ықтималдығын табыңыз: *A* – түскен ұпайлар қосындысы 6-ға тең; *B* – түскен ұпайлар көбейтіндісі 6-ға тең; *C* - түскен ұпайлар қосындысы оладың көбейтіндісінен артық.

11-тапсырма. Тиын n рет лақтырылды. «Елтаңба» жағының k_1 рет және кем дегенде k_2 рет түсуінің ықтималдығын табыңыз.

31 кесте

№	n	k_1	k_2	№	n	k_1	k_2
11.1	7	3	5	11.2	8	4	6
11.3	4	2	2	11.4	7	2	5
11.5	5	2	3	11.6	4	2	3
11.7	6	4	5	11.8	5	1	2
11.9	4	1	3	11.10	6	4	2
11.11	8	3	7	11.12	4	3	3
11.13	9	4	8	11.14	8	5	6
11.15	6	2	4	11.16	9	6	7
11.17	5	2	3	11.18	6	4	3
11.19	8	3	6	11.20	5	2	2

31 кестенің соңы

11.21	7	3	5	11.22	8	2	7
11.23	4	2	3	11.24	6	5	4
11.25	6	5	5	11.26	5	1	2
11.27	7	2	6	11.28	7	3	5
11.29	9	1	8	11.30	8	6	5

3.3 ЕСЖ №3 әдістемелік нұсқаулар

3.3.1 Бірінші тапсырмаға нұсқау.

Өрнек

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

сандық қатар деп аталады. Мұнда $a_1, a_2, a_3, \ ...$ - сандық қатардың мүшелері, a_n - қатардың жалпы мүшесі.

Егер сандық қатар нөлден бастап нөмірленсе, онда ол

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

түрінде жазылады.

Сандық (1) қатардың алғашқы n мүшелерінің қосындысы n-дербес қосындысы деп аталады:

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{n=1}^{n} a_k \ .$$

Қатардың алғашқы n мүшелерінен кейінгілерінің қосындылары

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + ... = r_n$$

оның n-ші қалдығы деп аталады.

Сандық қатардың n-дербес қосындысының шекті не шексіз шегі сандық қатардың қосындысы деп аталады:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n . \qquad (2)$$

Егер сандық қатар жинақты болса, онда оның қосындысы шекті $(S \neq \infty)$, ал қатар жинақсыз болса, онда $S = \infty$ болады.

1-мысал. Сандық $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(7n-4)(7n+3)}$ қатары берілген. Табыңыз: а) a_n - жалпы мүшесін; б) S_n - n-ші дербес қосындысын; в) r_n - қатар қалдығын; г) S - қосындысын.

Шешуі.

а) берілген сандық қатардың жалпы мүшесі: $a_n = \frac{1}{(7n-4)(7n+3)}$;

б) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(7k-4)(7k+3)} = \frac{1}{3 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 17} + \frac{1}{17 \cdot 24} + ... + \frac{1}{(7n-4)(7n+3)}$;

в) $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(7k-4)(7k+3)} = \frac{1}{(7n+3)(7n+10)} + \frac{1}{(7n+10)(7n+17)} + \ldots;$

г) қатардың жалпы мүшесін анықталмаған коэффициентер әдісі бойынша қарапайым бөлшектерге жіктейміз:

$$a_n = \frac{1}{(7n-4)(7n+3)} = \frac{A}{7n-4} + \frac{B}{7n+3}, \quad A(7n+3) + B(7n-4) = 1.$$

$$n = -\frac{3}{7}, \to -7B = 1, \quad B = -\frac{1}{7},$$

$$n = \frac{4}{7}, \to 7A = 1, \quad A = \frac{1}{7}.$$

Сондықтан,

$$a_n = \frac{1}{(7n-4)(7n+3)} = \frac{1}{7}\left(\frac{1}{7n-4} - \frac{1}{7n+3}\right).$$

Яғни, қатардың қосындысы

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{7}\left(\frac{1}{7n-4} - \frac{1}{7n+3}\right) = \frac{1}{7}\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{17}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{24}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{7n-11} - \frac{1}{7n-4}\right) + \left(\frac{1}{7n-4} - \frac{1}{7n+3}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{7}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7n+3}\right) = \frac{1}{21}.$$

Берілген қатардың қосындысы шекті $S = \frac{1}{21}$, яғни қатар жинақты.

3.3.2 Екінші тапсырмаға нұсқау.

Теорема (жинақтылықтың қажетті белгісі). Егер сандық $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақты болса, онда жалпы мүшесінің шегі нөлге тең: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Кері тұжырым дұрыс емес. Қатардың жинақтылығының қажетті белгісінің орындалуынан, қатарды жинақты немесе жинақсыз деп айта алмаймыз. Қатар жинақты немесе жинақсыз болуы мүмкін.

Қатардың жинақтылығының қажетті белгісінің бұзылуында, яғни $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ немесе шек жоқ болса, онда сандық қатар жинақсыздықтың жеткілікті белгісі бойынша жинақсыз делінеді.

Сандық қатар берілімі

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Дирихле қатары деп аталады. Ол, $p>1$ болуында жинақты, ал $p\le 1$ - жинақсыз. Дирихле қатарынан $p=1$ болуында жинақсыз гармониялық $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ қатары алынады.

Жинақтылықтың жеткілікті белгілері:

1) Салыстыру белгісі. Егер оң таңбалы $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ қатарының мүшелері $a_n \le b_n$ шартын қанағаттандырса, онда оң таңбалы $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ қатарының жинақтылығынан $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ қатарының жинақтылығы, ал, егер $a_n > b_n$ болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ жинақсыздығынан $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ жинақсыздығы шығады.

2) Шектік салыстыру белгісі. Егер оң таңбалы $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ қатарлары үшін

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A\ \ (0<A<+\infty),$$

қатынасы тура болса, онда бұл қатарлар бір мезетте жинақты немесе жинақсыз.

2-мысал. Сандық $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}+2}{\sqrt{4n^6+3}}$ қатары берілген. Қатардың жинақтылығының қажетті белгісі орындала ма? Орындалса, қатарды салыстыру белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Қатардың жалпы мүшесі: $a_n=\frac{n\sqrt{n}+2}{\sqrt{4n^6+3}}$. Олай болса,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}+2}{\sqrt{4n^6+3}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=0.$$

Қатардың жинақтылығының қажетті белгісі орындалады. Әрі қарай жинақтылыққа зерттейміз. Берілген қатарды жинақты Дирихле қатарымен салыстырамыз:

$$a_n=\frac{n\sqrt{n}+2}{\sqrt{4n^6+3}}\sim\frac{n^{\frac{3}{2}}}{2n^3}=\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}=b_n;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},\ \text{себебі,}\ p=\frac{3}{2}>1.$$

Сонымен, шектік салыстыру белгісі бойынша

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n\sqrt{n}+2\right)\cdot n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4n^6+3}}=\frac{1}{2},\ \left(0<\frac{1}{2}<+\infty\right)$$

болғандықтан, берілген қатар да жинақты.

3.3.3 Үшінші тапсырмаға нұсқау.

Даламбер белгісі. Егер оң таңбалы $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары үшін шекті немесе шексіз

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

шегі бар болса, онда $q<1$-де қатар жинақты, ал, $q>1$ - жинақсыз. Егер $q=1$ болса, онда қосымша зертеу қажет.

3-мысал. Даламбер белгісін қолданып $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3^n \cdot n!}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. $a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3^n \cdot n!}$, $a_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot (2n+1)}{3^{n+1} \cdot (n+1)!}$.

Берілген қатар Даламбер белгісі бойынша жинақты, себебі:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot (2n+1)\cdot 3^n \cdot n!}{3^{n+1} \cdot (n+1)!\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3\cdot (n+1)} = \frac{2}{3} < 1.$$

3.3.4 Төртінші тапсырмаға нұсқау.

Коши радикалдық белгісі. Егер оң таңбалы $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары үшін шекті немесе шексіз

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

шегі бар болса, онда $q<1$-де қатар жинақты, ал, $q>1$ - жинақсыз. Егер $q=1$ болса, онда қосымша зертеу қажет.

4-мысал. Коши радикалдық белгісін қолданып $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2+n}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Қатардың жалпы мүшесі: $a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2+n}$.

Берілген қатар Коши радикалдық белгісі бойынша жинақсыз, себебі:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e > 1.$$

3.3.5 Бесінші тапсырмаға нұсқау.

Коши интегралдық белгісі. Егер $[1,+\infty)$ аралығында $f(x)$ үзіксіз, оң, кемімелі функция болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ қатарының және $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз

интегралының жинақтылық жөніндегі тәртіптері бірдей: не екеуі де жинақты, не екеуі де жинақсыз болады.

Яғни, оң таңбалы қатар үшін Коши интегралдық белгісі:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \begin{cases} A \neq \infty, \ ж-ты, \\ \infty, \quad ж-сыз. \end{cases}$$

5-мысал. Интегралдық Коши белгісін қолданып $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\ln(2n)}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Берілген қатарды келесі қатармен салыстырамыз:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\ln(2n)} \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(2n)} = \sum_{n=2}^{\infty} b_n .$$

Коши белгісін қанағаттандыратын меншіксіз интеграл:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln(2x)}dx = \int_2^{\infty} \frac{d\ln(2x)}{\ln(2x)} = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{d\ln(2x)}{\ln(2x)} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\ln\ln(2x)\right)\Big|_2^b = \lim_{b\to\infty} \left(\ln\ln(2b) - \ln\ln 4\right) = \infty.$$

Яғни, меншіксіз интеграл жинақсыз болғандықтан $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ қатары да жинақсыз. Ал, $a_n > b_n$ болғандықтан, берілген қатар да жинақсыз.

3.3.6 Алтыншы тапсырмаға нұсқау.

Қатардың мүшелерінің таңбаларының кезектесуінде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

оны кезектаңбалы қатар деп атайды.

Егер $a_n \to 0, \ n \to \infty$ болса, онда кезек таңбалы қатарды Лейбниц қатары дейді.

Лейбниц белгісі. Егер кезектаңбалы қатардың мүшелерінің абсолюттік шамасы монотонды кемімелі және жалпы мүшесі a_n, $n \to \infty$ нөлге ұмтылса, онда бұл қатар жинақты және оның қосындысы $S \le a_1$.

Кез келген абсолют жинақты қатар жинақты.

Егер $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақты, ал $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатары жинақсыз болса, онда берілген $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары шартты жинақты.

6-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ қатары берілген. Абсолют немесе шартты жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Берілген қатардың мүшелерінің модульдерінен түзілген қатар гармониялық қатар, ол жинақсыз қатар: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Сонымен берілген қатар абсолют жинақты болмайды. Тізбек $\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...$ монотонды кемімелі $n\to\infty$ нөлге ұмтылады. Яғни Лейбниц шарты орындалады, сондықтан да берілген қатар шартты жинақты.

3.3.7 Жетінші тапсырмаға нұсқау.

Мүшелері D аймағында анықталған $u_n(x)$ функциясы болатын

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),\ x\in D, \qquad (1)$$

қатары функциялық қатар деп аталады.

Егер (1) функциялық қатардың мүшелерінің $x_0\in X$ мәндерінің сандық қатары жинақты болса, онда функциялық қатар бұл нүктеде жинақты. Қарсы жағдайда функциялық қатар жинақсыз.

Функциялық қатардың алғашқы n мүшелерінің қосындысы болатын

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+...+u_n(x)$$

функциясы функциялық қатардың n-дербес қосындысы деп аталады.

Алғашқы n мүшелерінен кейінгілерінің қосындысы болатын

$$r_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+u_{n+3}(x)+...\ ,$$

өрнегі функциялық қатардың n-қалдығы деп аталады.

Егер (1) функциялық қатар X жиынында жинақты болса, онда

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$$

шектілік функциясы функциялық қатардың қосындысы деп аталады.

Функциялық қатардың абсолют жинақтылық аймағын табу үшін Даламбер, не болмаса Коши белгілерінің бірі қолданылады:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=L(x),\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=L(x).$$

Жинақтылық аймағын немесе жинақсыздығы аймағын анықтауда сәйкесінше $L(x)<1$ немесе $L(x)>1$ теңсіздіктерін шешеміз.

7-мысал. Берілген функциялық $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n\cdot n}{n+1}$ қатарының жинақтылық аймағын табыңыз.

Шешуі. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+2)^n\cdot n}{n+1}\right|=|x+2|.$

Қатар $|x+2|<1$ абсолют жинақты, яғни абсолют жинақтылық интервалы $(-3;-1)$. $x=-3$-те кезек таңбалы $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3+2)^n\cdot n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n+1}$ қатарын аламыз. Бұл қатардың жалпы мүшесі $n\to\infty$ ұмтылысында нөлге ұмтылады, яғни қатар жинақты. $x=-1$ жинақсыз оң таңбалы $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1+2)^n\cdot n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ қатарын аламыз. Сонымен, берілген қатардың жинақтылық аймағы $(-3;-1)$.

3.3.8 Сегізінші тапсырмаға нұсқау.

Анықталған интегралды жуықтап есептеуде интегралданушы функцияны дәрежелік қатарға жіктейді.

Элементар функциялардың дәрежелік қатарға жіктелісі:

1) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty;+\infty).$

2) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!},\ x\in(-\infty;+\infty).$

3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty;+\infty).$

4) $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!}+...+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot...\cdot(\alpha-n+1)x^n}{n!}+...$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot...\cdot(\alpha-n+1)x^n}{n!},\quad x\in(-1;1).$$

5) $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ x\in(-1;1).$

6) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n},\quad x\in(-1;1].$

7) $arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}...+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in[-1;1]$

8) $arcctgx=\frac{\pi}{2}-x+\frac{x^2}{3}-...+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2n+1}+...=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in[-1;1].$

8-мысал. Анықталған $\int_0^{1/3}\sin^2\sqrt{x}dx$ интегралын 0,001 дәлдікке дейін есептеңіз.

Шешуі. $\sin^2\sqrt{x}=\frac{1}{2}(1-\cos 2\sqrt{x})$ түрлендіруін және

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty;+\infty)$$

жіктелісін қолдана отырып, табамыз:

$$\frac{1}{2}\left(1-\cos 2\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}\left(1-1+\frac{2^2x}{2!}-\frac{2^4x^2}{4!}+\frac{2^6x^3}{6!}-\ ...\right).$$

Сонымен,

$$\int_0^{1/3}\sin^2\sqrt{x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{1/3}\left(\frac{2^2x}{2!}-\frac{2^4x^2}{4!}+\frac{2^6x^3}{6!}-\ ...\right)dx=\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{2x^3}{9}+\frac{x^4}{45}+...\right)\Bigg|_0^{1/3}=$$

$$=\frac{1}{18}-\frac{2}{243}+\frac{1}{3645}+...\ .$$

Мұнда

$$\frac{1}{18}=0{,}056>0{,}001,\ \ \frac{2}{243}\approx 0{,}008>0.001,\ \ \frac{1}{3645}\approx 0{,}0002<0{,}001$$

болғандықтан, анықталған интегралдың жуық мәні:

$$\int_0^{1/3}\sin^2\sqrt{x}dx\approx\frac{1}{18}-\frac{2}{243}=0{,}048.$$

3.3.9 Тоғызыншы тапсырмаға нұсқау.

Тригонометриялық

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}$$

қатары $f(x)$ функциясының $[-l;\ l]$ кесіндісіндегі Фурье қатары деп аталады.

Мұндағы

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx$$

сандарын Фурье коэффициенттері деп атайды.

Егер $f(x)$ жұп функция болса, онда Фурье қатарының түрі:

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l},$$

ал егер $f(x)$ тақ функция болса, онда Фурье қатары

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{l}$$

түрінде жазылады.

9-мысал. Берілген

$$f(x)=\begin{cases}C, & 0<x<l,\\ 0, & l\le x<2l\end{cases}$$

функциясын Фурье қатарына жіктеңіз.

Шешуі. Фурье коэффициенттері:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^{l}Cdx=C,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_0^{l}C\cos\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{C}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{l}\Bigg|_0^{l}=0,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_0^l C\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx = \frac{C}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l = \frac{C}{\pi n}\left((-1)^{n+1}+1\right).$$

Сонымен, Фурье қатары:

$$f(x) \sim \frac{C}{2} + \frac{2C}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{2n-1}{l}\pi x\,.$$

Әдебиеттер тізімі

1 Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. ч.2. –М.: ОНИКС 21 век, Мир и образование, 2008. -489 с.

2 Лунгу К.Н. и др. Сборник задач по высшей математике (с контрольными работами). – М.: Айрис пресс, 2011. -576 с.

3 Мустахишев К.М., Ералиев С.Е., Атабай Б.Ж. Математика (толық курс). – Алматы: NSN-Company, 2009. – 410 б.

4 Хасеинов К.А. Задачи и упражнения по инженерной математике (с индивидуальными заданиями). Часть 2. –Алматы, 2009. -631 с.

Мазмұны

1 Есептеу-сызба жұмыс №1. Көп айнымалы функциялардың дифференциалдық есептеулері..... 3
1.1 Теориялық сұрақтар..... 3
1.2 Есептік тапсырмалар..... 4
1.3 ЕСЖ №1 әдістемелік нұсқаулар..... 13
2. Есептеу-сызба жұмыс №2. Қарапайым дифференциалдық теңдеулер..... 19
2.1 Теориялық сұрақтар..... 19
2.2 Есептік тапсырмалар..... 20
2.3 ЕСЖ №2 әдістемелік нұсқаулар..... 27
3. Есептеу-сызба жұмыс №3. Қатарлар. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика элементтері..... 36
3.1 Теориялық сұрақтар..... 36
3.2 Есептік тапсырмалар..... 36
3.3 ЕСЖ №3 әдістемелік нұсқаулар..... 45
Әдебиеттер тізімі..... 54

Жиынтық жоспар 2016 ж., бап. 130

Атабай Бегімбет Жұмабайұлы
Есботаева Эльмира Султанмуратовна

МАТЕМАТИКА II

5В071600 - Прибор жасау,
5В073100 - Қоршаған ортаны қорғау және өмір тіршілігінің қауіпсіздігі мамандықтарының студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар

Редакторы Қ.С. Телғожаева
Стандарттау бойынша маман Н.Қ. Молдабекова

Басуға « ___» ____2016 ж. қол қойылды. Пішімі 60х84 1/16
Таралымы 40 дана. Баспаханалық қағаз №1
Көлемі 3,4 оқу-бас. ә. Тапсырыс №___ Бағасы 1700 тг.

«Алматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірмелі-көбейткіш бюросы
050013, Алматы, Байтұрсынұлы көшесі, 126