Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра высшей математики

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Методические указания и задания по выполнению лабораторных работ для студентов специальности 5В071800 - Электроэнергетика

Алматы 2014

СОСТАВИТЕЛЬ: Дулэпо В.М. Решение дифференциальных уравнений с применением операционного исчисления. Методические указания и задания по выполнению лабораторных работ для студентов специальности 5В071800 – Электроэнергетика. – Алматы: АУЭС, 2014. – 75с.

Методические указания предназначены для выполнения лабораторных работ по высшей математике с помощью системы компьютерной математики **Mathcad -** мощного средства для осуществления аналитических, графических и численных методов решения математических задач на компьютере.
Ил. 8, табл. 29, библиогр. – 5 назв.

Рецензент: М.В.Башкиров, доцент кафедры ЭПП АУЭС

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2014г.

© НАО «Алматинский университет энергетики и связи», 2014 г.

1 Знакомство с основами компьютерной системы Mathcad

Введение

Цель настоящих лабораторных работ – получить первоначальное знакомство с продуктом самых высоких современных научных достижений – системой компьютерной математики Mathcad и с её помощью научиться быстро и легко решать некоторые основные задачи элементарной и высшей математики.

Mathcad – это название совокупности компьютерных программ для осуществления математических операций в электронном (компьютерном) виде. Традиционная «бумажная» математика дополнилась компьютерной математикой с записью на электронном носителе.

Mathcad является одной из лучших в мире систем компьютерной математики для научных, технических и учебных вычислений. Она имеет мощные инструменты для выполнения численных методов расчёта в сочетании с возможностью выполнения множества операций символьной математики.

Среди других замечательных систем компьютерной математики (Maple, Mathematica, MATLAB) Mathcad обладает уникальной особенностью – возможностью написания на экране компьютера *работающих* математических формул в привычном виде, с применением общепринятой символики, такой как знак интеграла, корня, матрицы и т.д. Это делает документ на экране чрезвычайно похожим на страницы текста математических конспектов и книг.

Такой подход избавляет пользователя от специального изучения языков программирования и написания программ решения математических задач в кодах, совершенно не напоминающих математический текст.

Записав в обычной форме математическое выражение, можно выполнить с ним самые разнообразные символьные или численные математические операции: вычислить значение, выполнить алгебраическое преобразование, решить уравнение, продифференцировать, построить график и т.п. Вычисления можно снабдить текстовыми комментариями, иллюстрациями и получить полный отчёт о проделанной работе.

Название системы Mathcad происходит от слов MATHematica (математика) и CAD (Computer Aided Design – компьютерный помощник проектирования). В русскоязычной литературе применяется словосочетание САПР – система автоматического проектирования. Первые версии системы появились в начале 90-х годов (Mathcad 1.0), к настоящему времени (2014) используются версии до Mathcad 14.

Разделы данного практикума посвящены решению некоторых задач из учебных тем элементарной и высшей математики с помощью системы Mathcad 13 (и выше), прорабатывавшихся ранее в классическом изложении. Приведены формулировки и индивидуальные задания для группы студентов, указания к выполнению работ в среде Mathcad.

1.1 Основные характеристики системы Mathcad

Mathcad имеет огромное число математических возможностей. Среди них:

- операции с действительными, комплексными числами, а также величинами, имеющими размерность;
- операторы и логические функции, выполняющие действия с числами, векторами и матрицами;
- вычисление значений и построение графиков элементарных и специальных функций;
- немедленная обработка любого символьного выражения;
- символьное решение уравнений и систем уравнений;
- символьное интегрирование, дифференцирование, вычисление пределов, суммирование рядов и другие математические операции;
- решение вероятностных и статистических задач.

Графика:

- интерактивная двумерная и трёхмерная графика; в том числе декартовы, параметрические, полярные, точечные, линии уровня, параметрические поверхности, гистограммы, векторные поля;
- трассировка, анимация;
- быстрое построение плоских и трёхмерных графиков.

Тексты:

- проверка орфографии;
- форматирование текстов, вставка формул;
- предварительный просмотр текста перед печатью.

Таким образом, Mathcad объединяет в себе формульный, текстовый и графический редакторы и позволяет объединение с целым рядом других математических, графических и офисных систем.

В течение всей работы пользователю предоставлена легкодоступная справочная система, содержащая:

- справку с оглавлением и инструментами поиска;
- руководство по решению уравнений;
- руководство по программированию;
- справочные таблицы;
- множество быстрых подсказок (шпаргалок).

1.2 Начало работы с Mathcad

Предполагается, что программа Mathcad заранее установлена на компьютер в среду Windows 95 – XP и в дальнейшем нами используется [illegible] гия этих известных компьютерных систем, а также терминология [illegible] работы (копирование, форматирование, перетаскивание, вставка и т.д.) широко распространённых офисных приложений.

Рисунок 1

Вызов рабочего окна Mathcad, в котором выполняются

все необходимые действия, осуществляется нажатием курсора мыши или клавишей Enter на пиктограмму (значок, ярлык) программы Mathcad. Значок этот может быть расположен в любом удобном для пользователя месте - на рабочем столе, на панелях инструментов, в папках и т.д.

После вызова программы на экране откроется рабочий документ (окно) Mathcad (см. рисунок 2), во многом напоминающий интерфейс известных

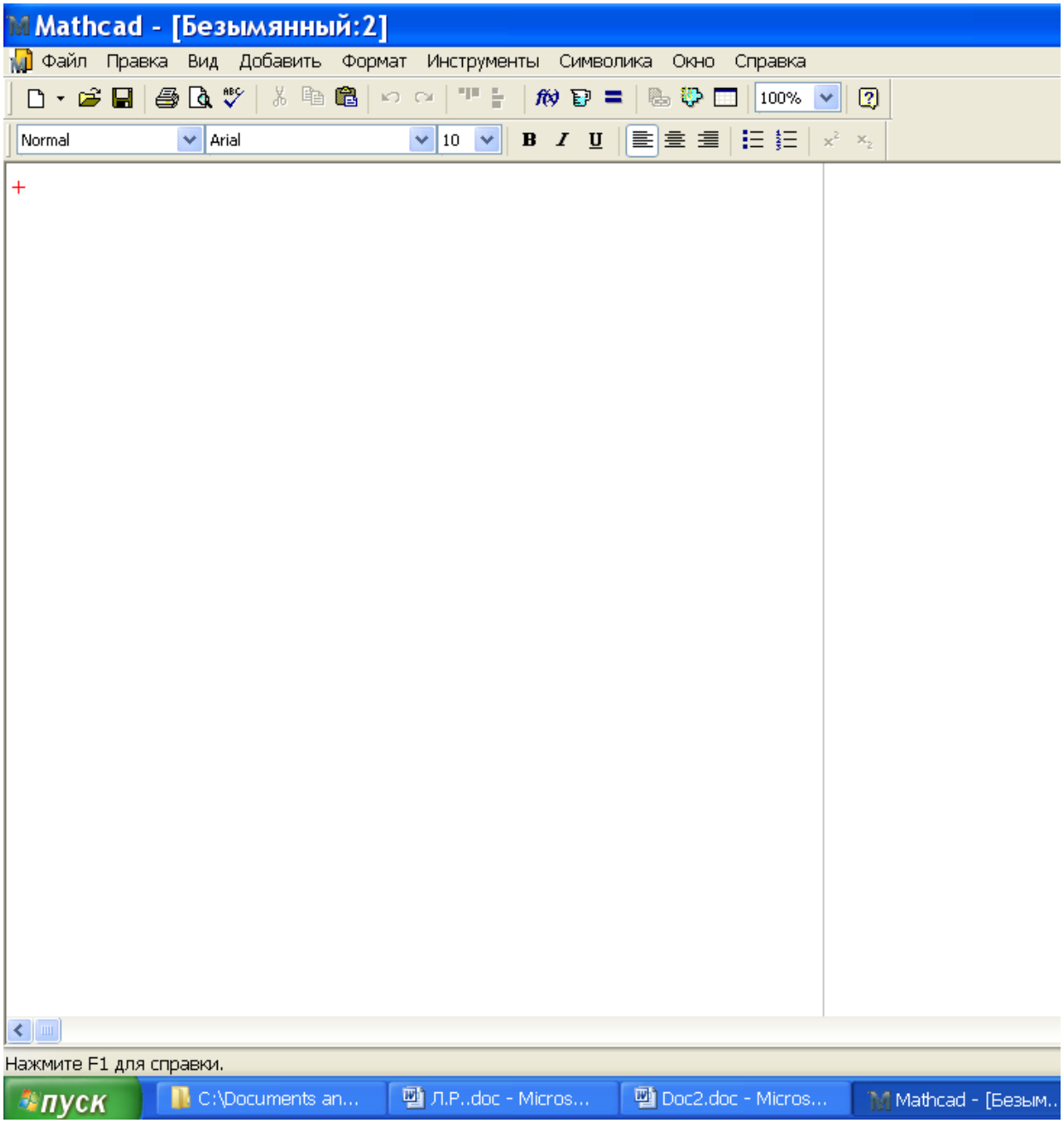


Рисунок 2

программ из пакета Microsoft Office. Сразу после запуска система Mathcad готова к созданию документа.

Первая строка рабочего окна Mathcad - стандартная строка с названием вызванной программы и именем данного документа (синонимы - папка, файл) на экране (в нашем случае [Безымянный:2]). Справа в первой строке - три кнопки с действиями **Свернуть, Развернуть** окно и **Закрыть** это окно.

Вторая строка окна - строка главного меню. Щелчок левой кнопкой мыши по конкретному пункту меню открывает ниспадающие дополнительные меню со списком доступных операций.

В строке меню представлены следующие пункты:

- **File** (Файл) – работа с файлами;
- **Edit** (Правка) – редактирование документов;
- **View** (Вид) – изменение способов представления документов и отображение/скрытие элементов рабочего окна;
- **Insert** (Вставка) – вставка объектов и их шаблонов, включая графику;
- **Format** (Формат) – изменение формата объектов;
- Tools (Инструменты) – инструменты управления вычислениями;
- **Symbolics** (Символы) – выбор операций символьного процессора;
- **Window** (Окно) – управление окнами системы;
- **Help** (Справка) – работа со справочной базой системы.

Третья строка сверху рабочего окна – панель инструментов, четвёртая - панель форматирования. С работой этих и других строк мы будем знакомиться в дальнейшем изложении.

1.3 Математические панели Mathcad

Среди всех позиций главного меню (вторая строка рабочего окна) основной для Mathcad является та, которая позволяет выводить шаблоны математических знаков - матриц, производных, стандартных функций и т.д. для организации вычислительных процедур. Вызывается эта позиция следующим образом. В главном меню курсором нажимаем на команду **Вид (**View), в выпавшем подменю указываем без щелчка строку **Панели инструментов** (Tools) и в следующем появившемся меню щелкаем по строке **Математика (**Math).

На экране появляется панель математических инструментов с таким же названием (см. рисунок 3). С помощью этой панели щелчком по соответствующей позиции можно вызывать другие математические панели, одну или сразу несколько. Чтобы они не мешали работе с рабочим окном, их можно переместить в любое удобное место экрана, уцепившись курсором за синюю верхнюю часть панели и, нажав левую клавишу мыши (не отпуская), перетягивать в нужное место.

На рисунке 4 показаны все математические панели. Их список:

1) **Калькулятор** (Calculator) – вставка шаблонов основных математических операций, цифр, знаков;
2) **График** (Graph) – вставка шаблонов графиков;
3) **Матрица** (Matrix) - вставка шаблонов матриц и матричных отношений;

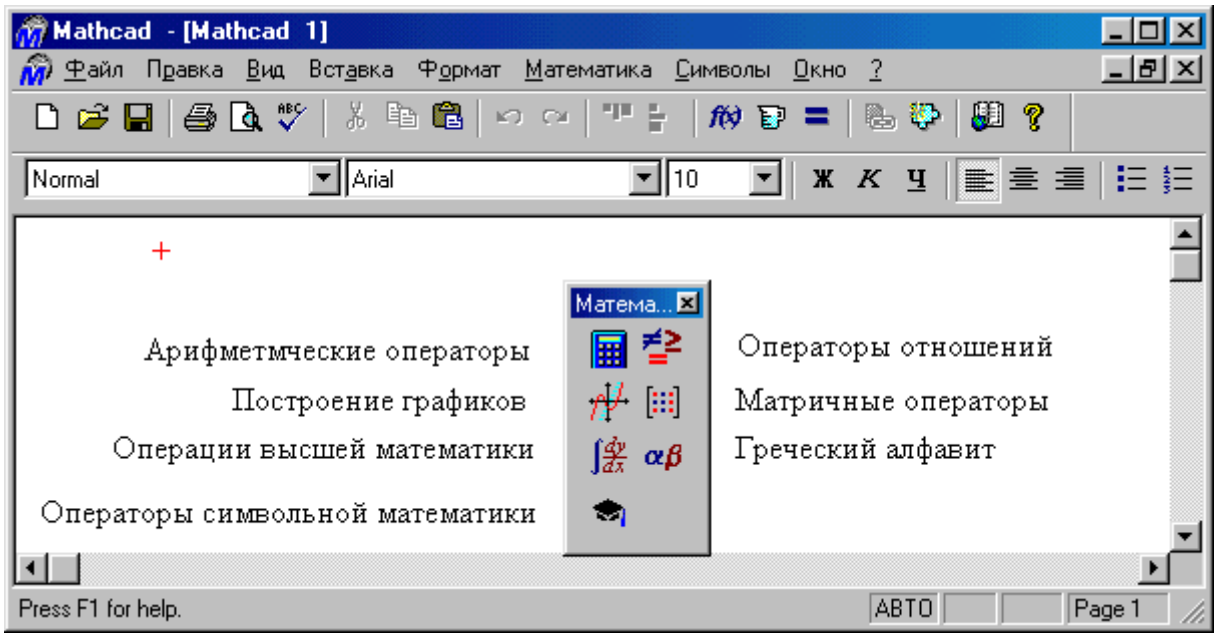


Рисунок 3

4) **Вычислить** (Evaluation) – операторы присвоения значений и вывода значений вычислений;
5) **Логическая** (Boolean) – вставка логических (булевых) операторов;
6) **Исчисление** (Calculus) - вставка шаблонов дифференцирования, интегрирования, суммирования;
7) **Программирование** (Programming) – операторы для программирования;
8) **Греческая** (Greek) – греческие буквы;
9) **Символьная** (Simbolics) – вставка операторов символьных вычислений.

Панель **Символьная (**Symbolics) (см. рисунок 4) представляет следующие операции:

→ – символьный знак равенства (символьное вычисление);

□→ – символьная оценка;

float (плавающий) – преобразование в формат чисел с плавающей запятой;

coeffs (коэффициенты) – выбор коэффициентов многочлена;

complex (комплексное) – представить результат в комплексном виде;

assume – присваивание переменным неопределённого значения;

solve (решить **)** – решить уравнение относительно выделенной переменной;

simplify (упростить) упростить выделенное выражение (суммирование подобных членов, приведение к общему знаменателю, использование тригонометрических тождеств и т.д.);

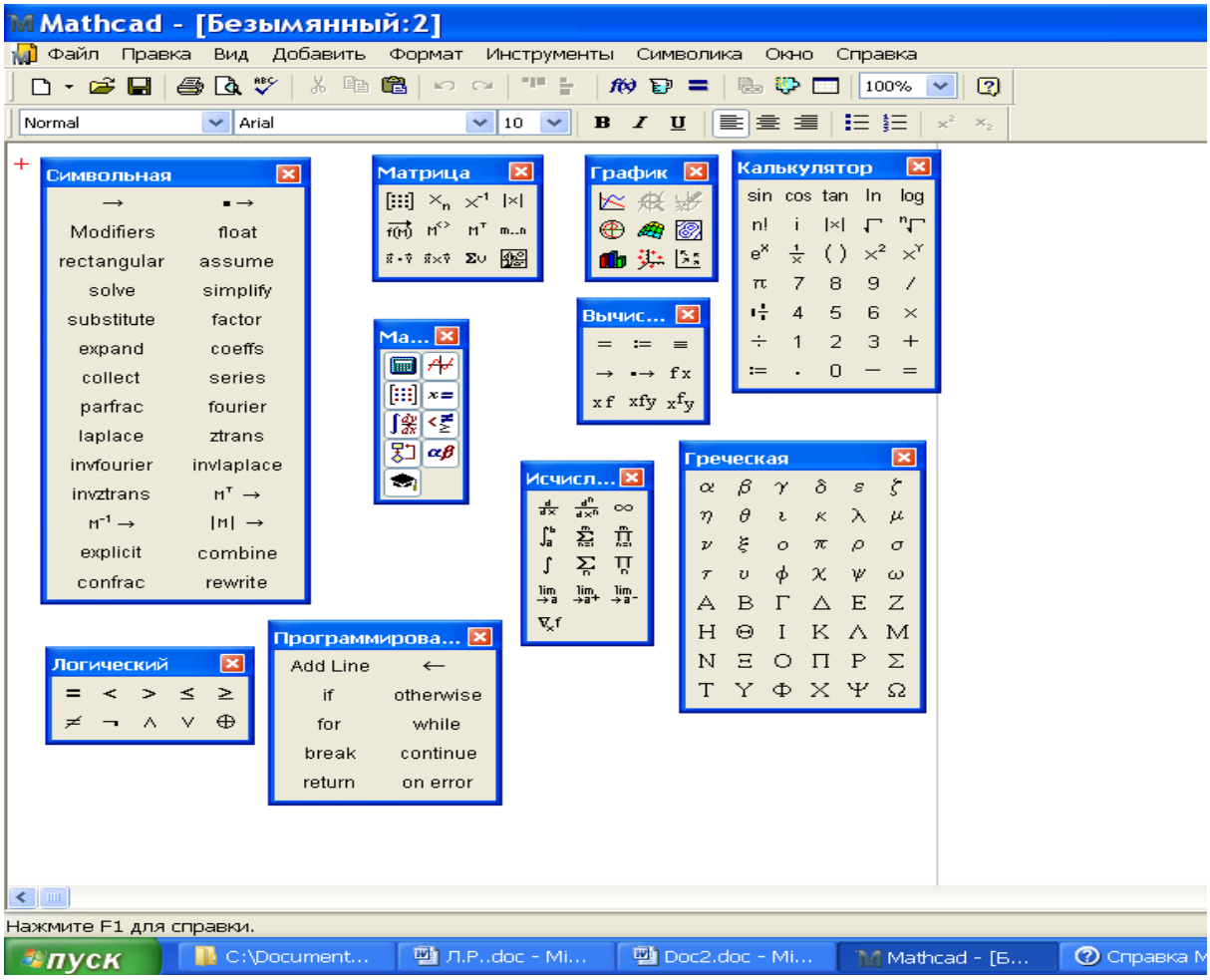


Рисунок 4

substitute (подстановка) - заменить указанную переменную содержимым буфера обмена;
factor (разложить) - разложить выражение на множители;
expand (развернуть) - раскрыть выражение (например, перемножить скобки);
collect (собрать) - собрать слагаемые, подобные выделенному выражению;
series (ряд**)** - найти несколько членов разложения выражения в ряд Тейлора относительно выделенной переменной;
parfrac - разложение на простейшие дроби;
fourier - преобразование Фурье;
invfourier - обратное преобразование Фурье;
laplace - преобразование Лапласа;
invlaplace - обратное преобразование Лапласа;
ztrans - z-преобразование;
invztrans - обратное z-преобразование;
модификаторы - дополнительная панель с операциями:
real - вещественное значение;

RealRange - означает принадлежность вещественной переменной интервалу [a; b];

trig - задаёт направление тригонометрических преобразований;

$M^T \rightarrow$ - транспонирование матрицы;

$M^{-1} \rightarrow$ - получение обратной матрицы;

$|M| \rightarrow$ - вычисление определителя матрицы.

Отметим, что в Mathcad обычный знак равенства = имеет три различных вида. Это связано с тем, что в обычных математических текстах знак равенства несёт разную смысловую нагрузку. Например, $x = y$ либо означает присвоение переменной x значения y, либо означает логическое равенство выражения x выражению y.

Такая двойственность недопустима в компьютерных программах. Поэтому в Mathcad используются следующие знаки:

= (обычный знак равенства, вводится с клавиатуры) - знак вывода результатов вычислений (исполняется слева направо команда **Вычислить**);

= (жирный знак равенства, вводится нажатием клавиш **Ctrl** и = одновременно) - знак равенства как отношения между выражениями x и y;

: = знак присваивания переменной конкретного значения справа налево (например, x **: =** 4 присваивает переменной x значение 4), вводится символом **:** (двоеточие).

П р и м е ч а н и е . Если попытаться ввести знак обычного равенства (например, x = 5) для переменной, впервые встречающейся в документе, он будет автоматически заменён символом присваивания.

1.4 Виды курсоров в Mathcad

указатель мыши. Следует за движением мыши.

+ (красный крестик на мониторе). Является указателем на странице позиции ввода формулы или текста.

└ (синий уголок). Указатель выделения части или всей формулы в активной математической области. Активная математическая область появляется в рамке на странице документа с началом ввода формулы.

| (красная вертикальная черта). Указатель ввода текстовой области на странице. Появляется после нажатия на клавишу ″ (кавычки).

▫ ▪ местозаполнители. Находятся внутри незавершенных формул, которые должны быть заполнены.

указатель места на границе формулы для её перетаскивания.

1.5 Ввод формул

Ввести математическое выражение можно в любом месте рабочей области Mathcad. Для этого необходимо поместить курсор ввода (красный крестик) в пустое место страницы, щёлкнув по нему мышью, и начать ввод с

клавиатуры или с предварительно вызванных панелей инструментов. При этом на странице создаётся *математическая область,* которая распознаётся и используется программой Mathcad для математических вычислений.

При вводе элементов формул автоматически происходит их выделение синим уголком, так называемыми линиями редактирования. Для правильного набора формулы необходимо внимательно следить за этими линиями.

Управление синим уголком осуществляется большой клавишей **Пробел** (Spase) и клавишами со стрелками. Небольшая практическая тренировка позволит уверенно изменять положение синего уголка.

1.6 Ввод текста

Текст в документе может понадобиться для пояснений к формулам, комментариев и в других целях. Для открытия *текстовой области* нажимается клавиша ″ (кавычки) и производится обычный набор текста.

Нежелательно набирать текст в математической области, так как процессор Mathcad будет воспринимать текст как формулы, что может приводить к неверным результатам вычислений.

Формулы в текстовую область можно вводить с помощью программы Word, вызываемой командами **Добавить/Объект/Microsoft Word** (Insert/Object/Microsoft Word) или вставкой в текстовую область математической области командами **Добавить/Математическая область** (Insert/Math Region).

При забывчивости открытия текстовой области и создании текста в математической области положение легко исправить нажатием клавиши **Пробел** (Spase), и тогда Mathcad перенесёт текст из математической области в текстовую.

1.7 Простейшие арифметические вычисления

Вычислим значения арифметических выражений $14+\frac{18}{3}$ *и* $14+\frac{18}{6}$.

Указания к действию	Вид на экране
Щелкните мышью по любому месту в рабочем документе - в поле появится крестик, обозначающий позицию, с которой начинается ввод данных.	+
Введите с клавиатуры символы в следующей последовательности: 14 + 18/3	$14+\frac{18}{3}$
Введите с клавиатуры знак равенства = Справа от выражения выводится результат.	$14+\frac{18}{3}=20$

Щелкните мышью справа внизу возле цифры 3 (цифра выделится уголком) и нажмите клавишу **BackSpase**. Теперь знаменатель пуст, он обозначен черной меткой.

$$14+\frac{18}{\blacksquare}=\blacksquare\ \blacksquare$$

Введите с клавиатуры цифру новую цифру 6 в знаменатель и щелкните мышью вне выделяющей рамки. Появится новый результат.

$$14+\frac{18}{6}=17\ \blacksquare$$

Теперь удалим содержимое рамки. Щелкнем мышью по любому месту внутри рамки и будем нажимать клавишу **Пробел** до тех пор, пока все содержимое не будет выделено угловым синим курсором. Нажмем последовательно клавиши **Backspase** и **Delete**. Выражение исчезнет с экрана.

Примечания.

1. Удалять компоненты формул можно и с помощью выделения в чёрный цвет нужной части формулы перетаскиванием курсора мыши при нажатой левой кнопке.
2. После щелчка мышью вне рамки математической области рамка исчезает, и область перестаёт быть активной. Для возможности изменения этой формулы требуется щелчок по этой формуле для возврата её в активное состояние.

1.8 Определение переменной и её значение. Вычисление значений выражений, содержащих переменные

Вычислим значение $a \cdot t^2/2$ *при* $t = 5,\ a = 9{,}8.$

Указания к действию	Вид на экране
Щелкните мышью по свободному месту в рабочем документе и введите с клавиатуры символы a : 9.8 (при вводе символа **:** в документе отображается знак присваивания **:=**).	$a := 9.8$
Щелкните мышью по свободному месту и введите t**:=**5	$t := 5$
Щелкните по свободному месту и введите a * t ^2 Пробел / 2 Пробел =	$a\cdot\frac{t^2}{2} = 122.5$
Внимание! Mathcad читает и выполняет введенные выражения *слева направо и сверху вниз*. Поэтому следите, чтобы выражение для вычисления располагалось правее или ниже определенных для него значений переменных.	

1.9 Определение и вычисление значения функции в точке. Построение таблицы значений функций

Зададим функцию $f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$, вычислим её значение при x = 1,2 и построим таблицу значений функции для x $\in[0;\ 5]$ с шагом 1.

Указания к действию	Вид на экране
Щелкните по свободному месту в рабочем окне и введите клавишами f (x) := x + 1 Пробел / x ^ 2 Пробел + 1	$f(x) := \frac{x+1}{x^2+1}$
Щелкните по свободному месту и введите f (1.2) = Появится вычисленное значение.	f(1.2) = 0.902
Зададим теперь дискретные значения аргумента x $\in[0;5]$ с шагом 1. Щелкнем по свободному месту и введем x **:=** 0, 1; 5 (при вводе ; в документе появится двоеточие).	x := 0, 1.. 5
Щелкнем и введем f (x) = В результате под именем функции появится таблица значений функции.	f(x) = 1, 1, 0.6, 0.4, 0.294, 0.231

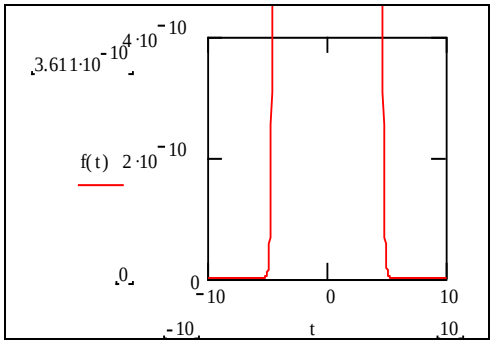
1.10 Построение декартова графика функции

Построим график функции $f(t)=e^{-t^2}$.

Т а б л и ц а 3

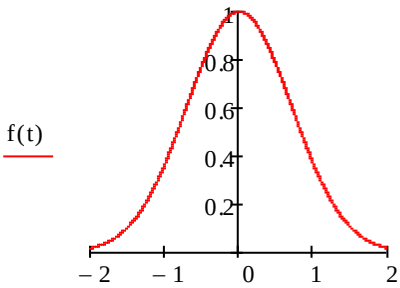
Указания к действию	Вид на экране
Щелкнем по свободному месту и введем f (t) **:=** exp(-t ^ 2 **Пробел**)	$f(t) := \exp\left(-t^2\right)$
С панели **Математика** вызываем **Панель графиков** (Graph) и нажимаем кнопку **X-Y график** (X-Y graph). Курсор стоит возле чёрной метки у оси абсцисс. Введите имя аргумента t, затем, щелкнув по чёрной метке возле оси ординат,	

введем f(t).



Щелкнем мышью вне прямоугольной рамки. Полученный график вышел за границы области и получился плохо читаемым. Изменим масштаб осей координат и для этого поменяем промежуток изменения аргумента на [-2.2]. Для этого щелкнем по полю графика, затем по левому числу оси абсцисс, удалим его клавишей **BackSpase** и введем число -2. Аналогично изменим правую границу оси на число 2.

Щелкнем мышью вне прямоугольной рамки.



Построим на графике оси координат. Щелкнем по графику правой кнопкой мыши, затем строчку **Формат** и в разделе **Стиль осей** (Axis Style) отметим пункт **Пересекающиеся** (Crossed). Нажмём **ОК.**

График стал удобным для чтения.

В дополнение скажем, что получить нужный результат в **Mathcad** можно различными путями исполнения операций: с помощью главного меню, через математические панели и с помощью клавиатуры. Последний является самым быстрым, но для его использования нужно знать соответствующие сочетания клавиш.

С другими примерами решения математических задач будем знакомиться в настоящем пособии в дальнейшем изложении.

2 Лабораторные работы

К выполнению предлагаются четыре лабораторные работы, которые проводятся в компьютерных классах университета. Данное пособие содержит набор индивидуальных заданий для группы студентов по каждой работе и указания для их выполнения.

После выполнения в классе очередной лабораторной работы студент сохраняет её в электронном виде на флэш-накопителе, при необходимости самостоятельно проводит дооформление и сдаёт преподавателю распечатанный письменный отчёт о проделанной работе. Сдача отчётов является необходимым условием для допуска студента к итоговому экзамену по математике.

Лабораторная работа № 1

Тема: Решение задач элементарной математики
Вариант № 24

Выполнила: студентка группы БЭ-08-14 Такешева А.Д.

Принял: ст. преподаватель Д.Д. Бесфамильный

Алматы, 2014

Рисунок 1 - Образец оформления титульного листа письменного отчёта (выполняется в документе Word)

Задание 1. Вычислить $\left(1\frac{2}{5}+3{,}5:1\frac{1}{4}\right):2\frac{2}{5}+3{,}4:2\frac{1}{8}-0{,}35$ (набор в Word).

Выполнение задания.

(Задание выполняется в Mathcad. Затем оно вставляется в Word).

$$\left(\frac{1+\frac{2}{5}+\frac{3.5}{1+\frac{1}{4}}}{2+\frac{2}{5}}+\frac{3.4}{2+\frac{1}{8}}\right)-0.35=3$$

Ответ: 3 (в Word).

Задание 2. Упростить выражение

$$\frac{\frac{a-b}{2a-b}-\frac{a^2+b^2+a}{2a^2+ab-b^2}}{\left(4b^2 4ab^2+a^2\right):\left(2b^2+a\right)}\cdot\left(b^2+b+ab+a\right).$$

Выполнение задания.

$$\frac{\frac{a-b}{2\cdot a-b}-\frac{a^2+b^2+a}{2\cdot a^2+a\cdot b-b^2}}{\left[\frac{\left(4\cdot b^4\right)+4\cdot a\cdot b^2+a^2}{2\cdot b^2+a}\right]}\cdot\left(b^2+b+a\cdot b+a\right)$$

$$\frac{b+1}{b-2a}$$

Ответ: $\frac{b+1}{b-2a}$.

Рисунок 2 – Образец оформления выполненных заданий в письменном отчёте (выполняется в Word с вставкой выполненных заданий в Mathcad)

1.1 Лабораторная работа № 1

Тема: задачи элементарной математики.

Содержание:
1) знакомство с работой математической системы Mathcad;
2) арифметические вычисления;
3) преобразования алгебраических выражений;

4) решение уравнений.

Задание 1. Вычислить.

Варианты заданий

№ варианта	Индивидуальные задания	Ответ
1.1	$\left(\frac{(3{,}2-1{,}7):0{,}003}{\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot 4:0{,}2}-\frac{\left(1\frac{13}{20}-1{,}5\right)\cdot 1{,}5}{\left(2{,}44+1\frac{14}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}\right):\left(62\frac{1}{20}\right)+1{,}364:0{,}124$	12
1.2	$\frac{\left(\left(3\frac{7}{12}-2\frac{11}{18}+2\frac{1}{24}\right)\cdot 1\frac{5}{31}-\frac{3}{52}\left(3\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\right)\cdot 1\frac{7}{13}}{\frac{19}{84}:\left(5\frac{13}{42}-2\frac{13}{28}+\frac{5}{24}\right)+1\frac{2}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}$	5
1.3	$\frac{\left(\left(4,625-\frac{13}{18}\cdot\frac{9}{26}\right)\cdot\frac{4}{9}+2,5:1,25:6,75\right):1\frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2}-0,375\right):0,125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0,358-1,4796:13.7)}+\frac{10}{27}$	1
1.4	$\frac{3{,}75:1\frac{1}{2}+\left(1{,}5:3\frac{3}{4}\right)\cdot 2\frac{1}{2}+\left(1\frac{1}{72}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}}{2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}-\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}}$	16
1.5	$5\frac{4}{7}:\left(8,4\cdot\frac{6}{7}\cdot\left(6-\frac{(2,3+5:6,25)\cdot 7}{8\cdot 0,0125+6,9}\right)-20,384\right)-\frac{29}{14}$	-1
1.6	$\frac{\left(0{,}3275-\left(2\frac{15}{88}+\frac{4}{33}\right):12\frac{2}{9}\right):0{,}07}{(13-0{,}416):6{,}05+1{,}92}$	0,5
1.7	$\left(2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}+\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}\right)$	1,5
1.8	$\left(1\frac{2}{5}+3{,}5:1\frac{1}{4}\right):2\frac{2}{5}+3{,}4:2\frac{1}{8}-0{,}35$	3

№ варианта	Индивидуальные задания	Ответ
1.9	$\left(\frac{3.75+2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}-1{,}875}-\frac{2\frac{3}{4}+1{,}5}{2{,}75-1\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{10}{11}$	6

1.10	$\dfrac{(3{,}4-1{,}275)\cdot\dfrac{16}{17}}{\dfrac{5}{18}\cdot\left(1\dfrac{7}{85}+6\dfrac{2}{17}\right)}+0{,}5\cdot\left(2+\dfrac{12{,}5}{5{,}75+\dfrac{1}{2}}\right)$	3
1.11	$\left((520\cdot 0{,}43):0{,}26-217\cdot 2\dfrac{3}{7}\right)-\left(31{,}5:12\dfrac{3}{5}+114\cdot 2\dfrac{1}{3}+61\dfrac{1}{2}\right)$	3
1.12	$\left(26\dfrac{2}{3}:6{,}4\right)\cdot\left(19{,}2:3\dfrac{5}{9}\right)-\dfrac{8\dfrac{4}{7}:2\dfrac{26}{77}}{0{,}5:18\dfrac{2}{3}\cdot 11}-\dfrac{1}{18}$	10
1.13	$\dfrac{0{,}4+8\left(5-0{,}8\cdot\dfrac{5}{8}\right)-5:2\dfrac{1}{2}}{\left(1\dfrac{7}{8}\cdot 8-\left(8{,}9-2{,}6:\dfrac{2}{3}\right)\right)\cdot 34\dfrac{2}{5}}$	9
1.14	$\left(\left(1\dfrac{1}{7}-\dfrac{23}{49}\right):\dfrac{22}{147}-\left(0{,}6:3\dfrac{3}{4}\right)\cdot 2\dfrac{1}{2}+3{,}75:1\dfrac{1}{2}\right):2{,}2$	3
1.15	$\dfrac{0{,}125:0{,}25+1\dfrac{9}{16}:2{,}5}{(10-22:2{,}3)\cdot 0{,}46+1{,}6}+\left(\dfrac{17}{20}+1{,}9\right)\cdot 0{,}5$	2
1.16	$\dfrac{((7-6{,}35):6{,}5+9{,}9)\cdot\dfrac{1}{12{,}8}}{\left(1{,}2:36+1{,}2:0{,}25-1\dfrac{5}{6}\right):\dfrac{4}{5}}:0{,}125+\dfrac{7}{3}$	2.5
1.17	$\left(\left(\dfrac{7}{9}-\dfrac{47}{72}\right):1{,}25+\dfrac{7}{40}\right):(0{,}358-0{,}108)\cdot 1{,}6-\dfrac{19}{25}$	1
1.18	$\dfrac{\left(0{,}5:1{,}25+\dfrac{7}{5}:1\dfrac{4}{7}-\dfrac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1{,}5+\dfrac{1}{4}\right):18\dfrac{1}{3}}$	32
1.19	$\dfrac{\left(5\dfrac{4}{45}-4\dfrac{1}{6}\right):5\dfrac{8}{15}}{\left(4\dfrac{2}{3}+0{,}75\right)\cdot 3\dfrac{9}{13}}\cdot 34\dfrac{2}{7}+\dfrac{0{,}3:0{,}01}{70}+\dfrac{2}{7}$	1
№ варианта	Индивидуальные задания	Ответ
1.20	$\dfrac{\left(\dfrac{3}{5}+0{,}425-0{,}005\right):0{,}1}{30{,}5+\dfrac{1}{6}+3\dfrac{1}{3}}+\dfrac{6\dfrac{3}{4}+5\dfrac{1}{2}}{26:3\dfrac{5}{7}}-0{,}05$	2

1.21	$\dfrac{3\frac{1}{3}\cdot 1{,}9+19{,}5:4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75}-0{,}16}:\dfrac{3{,}5+4\frac{2}{3}+2\frac{2}{15}}{0{,}5\cdot\left(1\frac{1}{20}+4{,}1\right)}$	4
1.22	$\dfrac{\left(1\frac{1}{5}:\left(\frac{17}{40}+0{,}6-0{,}005\right)\right)\cdot 1{,}7}{\frac{5}{6}+1\frac{1}{3}-1\frac{23}{30}}+\dfrac{4{,}75+7\frac{1}{2}}{33:4\frac{5}{7}}:0{,}25$	
1.23	$\dfrac{\left(4{,}5\cdot 1\frac{2}{3}-6{,}75\right)\cdot\frac{2}{3}}{\left(3\frac{1}{3}\cdot 0{,}3+\frac{2}{3}\right):2\frac{2}{3}}+\dfrac{1\frac{4}{11}\cdot 0{,}22:0{,}3-0{,}96}{\left(0{,}2-\frac{3}{40}\right)\cdot 1{,}6}$	
1.24	$\dfrac{\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{3}{16}}{0{,}625-\frac{13}{18}:\frac{26}{9}}+\dfrac{\left(\frac{0{,}216}{0{,}15}+0{,}56\right):0{,}5}{\left(7{,}7:24\frac{3}{4}+\frac{2}{15}\right)\cdot 4{,}5}$	
1.25	$\left(16\frac{1}{2}-13\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{18}{33}+2.2\cdot\left(\frac{8}{33}-\frac{1}{11}\right)+\frac{2}{11}$	

Задание 2. Упростить выражение.

Варианты заданий

№ варианта	Индивидуальные задания
2.1	$\dfrac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}}-\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$
2.2	$\left(\dfrac{1+x+x^2}{2x+x^2}+2-\dfrac{1-x+x^2}{2x-x^2}\right)^{-1}\cdot\left(5-2x^2\right)$
2.3	$\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\dfrac{a-b-c}{2bc}$

Варианты	Индивидуальные задания
2.4	$\dfrac{\frac{a-b}{2a-b}-\frac{a^2+b^2+a}{2a^2+\alpha b-b^2}}{\left(4b^4+4ab^2+a^2\right):\left(2b^2+a\right)}\cdot\left(b^2+b+ab+a\right)$

2.5	$\frac{a^2+2ax+x^2}{(3x+a)(a+x)}-2+10\cdot\frac{ax-3x^2}{a^2-9x^2}$
2.6	$\left(\left(\frac{x}{y-x}\right)^{-2}-\frac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy}\right)^2\cdot\frac{x^4}{x^2y^2-y^4}$
2.7	$\left(\left(\frac{x^2}{y^3}+\frac{1}{x}\right):\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\right):\frac{(x-y)^2+4xy}{1+y/x}$
2.8	$\left(\frac{3}{2x-y}-\frac{2}{2x+y}-\frac{1}{2x-5y}\right):\frac{y^2}{4x^2-y^2}$
2.9	$\left(6a^2+5a-1+\frac{a+4}{a+1}\right):\left(3a-2+\frac{3}{a+1}\right)$
2.10	$\frac{x^{-6}-64}{4+2x^{-1}+x^{-2}}\cdot\frac{x^2}{4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-\frac{4x^2(2x+1)}{1-2x}$
2.11	$\frac{2b+a-\frac{4a^2-b^2}{\alpha}}{b^3+2ab^2-3a^2b}\cdot\frac{a^3b-2a^2b^2+ab^3}{a^2-b^2}$
2.12	$\frac{a^3-2a^2+5a+26}{a^3-5a^2+17a-13}$
2.13	$\frac{2a^4+a^3+4a^2+a+2}{2a^3-a^2+a-2}$
2.14	$\frac{p^3+4p^2+10p+12}{p^3-p^2+2p+16}\cdot\frac{p^3-3p^2+8p}{p^2+2p+6}$
2.15	$\left(\frac{z-2}{6z+(z-2)^2}+\frac{(z+4)^2-12}{z^3-8}-\frac{1}{z-2}\right):\frac{z^3+2z^2+2z+4}{z^3-2z^2+2z-4}$
2.16	$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}+\frac{1}{(a+3)(a+4)}+\frac{1}{(a+4)(a+5)}$
2.17	$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}$

№ варианта	Индивидуальные задания
2.18	$\frac{a^2-3ab+ac+2b^2-2bc}{a^2-b^2+2bc-c^2}$
2.19	$\frac{a^4-16}{a^4-4a^3+8a^2-16a+16}$

2.20	$\dfrac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\dfrac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\dfrac{2}{x^{-0,5}}$
2.21	$\dfrac{d(a-b)(b-c)+b(a-d)(c-d)}{c(a-b)(c-d)+a(b-c)(c-d)}$
2.22	$\dfrac{x-1}{x^{3/4}+x^{1/2}}\cdot\dfrac{x^{1/2}+x^{1/4}}{x^{1/2}+1}\cdot x^{1/4}+1$
2.23	$\dfrac{\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+1\right)\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)^2}{\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}-\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)}$
2.24	$\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{x^2+x-1}{x^3-x^2+x-1}+\dfrac{x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}-\dfrac{2x^3}{x^4-1}$
2.25	$\dfrac{x^6+x^4+x^2+1}{x^3+x^2+x+1}$

Задание 3. Раскрыть скобки и привести подобные члены.

Варианты заданий

№ варианта	Индивидуальные задания
3.1	$(b^3-b^2+b-1)(b+1)$
3.2	$(a^2-ab+2b^2)(a-b)-(a^2+2ab-b^2)(a+2b)$
3.3	$(a^2+4\cdot a\cdot x+x^2)\cdot(a-2\cdot x)-(a^2-5\cdot a\cdot x-2\cdot x^2)\cdot(a+x)$
3.4	$(2x^3+x^2y+3xy^2-y^3)(x+5y)-(x^3-2x^2y+3xy^2+5y^3)(2x-y)$
3.5	$(y^3-3y^2z+2yz^2-6z^3)(2y-z)-(y^3-5y^2z-6yz^2+2z^3)(2y+3z)$
3.6	$2(7a-3x)^2-3(a-14x)^2$
3.7	$3\cdot(5\cdot x+2\cdot y)^2+2\cdot(3\cdot x-5\cdot y)^2$
3.8	$(3a-5b)^2+(2a+9b)^2-(2a+3b)(27b-16a)$
3.9	$(4x-7y)^2-(3x+5y)^2-2(2x+3y)(4y-17x)$
3.10	$\left(\frac{1}{2}x^2+2y-xy\right)\left(\frac{1}{2}x^2-2y+xy\right)$
3.11	$\left(10x-\frac{1}{2}z+xz\right)\left(10x-\frac{1}{2}z-xz\right)$
№ варианта	Индивидуальные задания
3.12	$(3a-2b)(3a+2b)+(a-3b)^2-(5a-b)(2a-5b)$
3.13	$2(5\alpha+6x)(3\alpha+2x)-(4\alpha+7x)^2-(3\alpha-5x)(3\alpha+5x)$
3.14	$(\alpha+b)(\alpha-b+1)-(\alpha-b)(\alpha+b-1)$
3.15	$(\alpha^2-3\alpha+1)(2\alpha+1)^2$

3.16	$(\alpha-1)^3+3(\alpha-1)^2+3(\alpha-1)+1$
3.17	$(b-2)(b^4+2b^3+4b^2+8b+16)$
3.18	$(\alpha^2+\alpha b+b^2)(\alpha^2-\alpha b+b^2)(\alpha^4-\alpha^2b^2+b^4)$
3.19	$(2\alpha-b)(4\alpha^2+2ab+b^2)$
3.20	$(3\alpha-2b)(9\alpha^2+6ab+4b^2)$
3.21	$(5x+3y)(25x^2-15xy+9y^2)$
3.22	$(n+5k)^2(n-k)+(n-5k)^2(n+k)-2n(n+4k)(n-4k)$
3.23	$x^2(3-x)-(2-x^2)(x+1)-4x^2$
3.24	$(\alpha+1)^4+(\alpha-1)^4$
3.25	$(\alpha+3b)(\alpha+b+2)-(\alpha+b)(\alpha+3b+2)$

Задание 4. Разложить на множители данное выражение.

Варианты заданий

№ варианта	Индивидуальные задания
4.1	$x^5-x^4+5x^3-5x^2+9x-9$
4.2	$x^7-x^6-x^5+x^4-x^3+x^2+x-1$
4.3	$27\cdot x^3-27\cdot x^2+18\cdot x-4$
4.4	$x^4-x^3+2x^2+x-3$
4.5	$2x^4+7x^3-2x^2-13x+6$
4.6	$2x^4-x^3-9x^2+13x-5$
4.7	$x^4-2\cdot x^3-3\cdot x^2+4\cdot x+4$
4.8	$x^4-2x^3-11x^2+12x+36$
4.9	$x^4+2x^3-16x^2-2x+15$
4.10	$14x-4+27x^4-9x^2$
4.11	$9x^2+4x^3-1-12x^4$
4.12	$\alpha^5-6\alpha^4+16\alpha^3-32\alpha^2+48\alpha-32$
4.13	$\alpha^6+2\alpha^5+9\alpha^4+16\alpha^3+24\alpha^2+32\alpha+16$
4.14	$x^3+x^2z+xyz+y^2z-y^3$
4.15	$x^4+6x^3y+8x^2y^2-6xy^3-9y^4$
4.16	$18\alpha^2-27ab+14ac-21bc$
4.17	$10x^2+10xy+5x+5y$

№ варианта	Индивидуальные задания
4.18	$35ax+24xy-20ay-42x^2$
4.19	$48xz^2+32xy^2-15yz^2-10y^3$
4.20	$16ab^2-5b^2c-10c^3+32ac^2$
4.21	$6mnk^2+15m^2k-14n^3k-35mn^2$
4.22	$-28ac+35c^2-10cx+8ax$

4.23	$-24bx-15c^2+40bc+9cx$
4.24	$xy^2-by^2-ax+ab+y^2-a$
4.25	$ax^2-ay-bx^2+cy+by-cx^2$

Задание 5. Данное выражение разложить на сумму простейших дробей.

Варианты заданий

№ варианта	Индивидуальные задания	№ варианта	Индивидуальные задания
5.01	$\frac{x}{2x^2-3x-2}$	5.14	$\frac{(x^2-2x+3)}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}$
5.02	$\frac{1}{6x^3-7x^2-3x}$	5.15	$\frac{(7x^3-9)}{x^4-5x^3+6x^2}$
5.03	$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}$	5.16	$\frac{x^3+x^2+x-1}{x^4+5x^2+4}$
5.04	$\frac{x^3-1}{4x^3-x}$	5.17	$\frac{5x^3-x^2+21x-9}{x^4+10x^2+9}$
5.05	$\frac{x}{x^4-3x^2+2}$	5.18	$\frac{x^3+4x-3}{x^4+4x^2}$
5.06	$\frac{(2x^2-5)}{x^4-5x^2+6}$	5.19	$\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}$
5.07	$\frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}$	5.20	$\frac{x^3-x+2}{x^4-x^2}$
5.08	$\frac{x^3+1}{x^3-x^2}$	5.21	$\frac{4x^2-2}{x^4-x^2}$
5.09	$\frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}$	5.22	$\frac{5x}{x^4+3x^2-4}$
5.10	$\frac{1}{x^4-x^2}$	5.23	$\frac{3x^2+2x+1}{x^3-1}$
5.11	$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}$	5.24	$\frac{x^3+x^2-x+3}{x^4-x^2}$
5.12	$\frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^2(x-5)}$	5.25	$\frac{6x}{8-x^3}$
5.13	$\frac{x^5}{(x-1)^2(x^2-1)^2}$		

Задание 6. Решить уравнения.

Варианты заданий

№ варианта	Индивидуальные задания

6.01	$x^{\lg^3 x-5\lg x}=0{,}0001$
6.02	$2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}=0{,}01\cdot\left(10^{x-1}\right)^3$
6.03	$3\left(x+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$
6.04	$\left(8^x+2^x\right):\left(4^x-2\right)=5$
6.05	$(2x+a)^5-(2x-a)^5=242a^5$
6.06	$5^{1+x^2}-5^{1-x^2}=24$
6.07	$ax^4-x^3+ax-a=0$
6.08	$\left(\sqrt[5]{3}\right)^x+\left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10}=84$
6.09	$\frac{x+2}{x+1}+\frac{x+6}{x+3}+\frac{x+10}{x+5}=6$
6.10	$9^x+6^x=2^{2x+1}$
6.11	$(x+1)\left(x^2+2\right)+(x+2)\left(x^2+1\right)=2$
6.12	$\left(1+x^2\right)^2=2x\left(1-x^2\right)$
6.13	$27\cdot 2^{-3x}+9\cdot 2^x-2^{3x}-27\cdot 2^{-x}=8$
6.14	$x\cdot\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x^2}+4=0$
6.15	$(2x+1)^5-(2x-1)^5=242$
6.16	$\lg\left(x^2+8\right)-0{,}5\lg\left(x^2+4x+4\right)=\lg 7$
6.17	$t^2+5t+6=15\frac{t^2+3t+6}{t^2+t}$
6.18	$2u^4+u^2(u+2)-3(u+2)^2=0$
6.19	$\left(x^2+2x\right)^2-(x+2)\left(2x^2-x\right)=6(2x-1)^2$
6.20	$\left(x^2-6x+9\right)^2=x\left(x^2-4x+9\right)$
6.21	$8x^4+6x^3-13x^2-x+3=0$
6.22	$x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$
6.23	$\left(x^2-6x\right)^2-2(x-3)^2=81$
6.24	$\left(x^2+2x\right)^2-(x+1)^2=55$
6.25	$(x-2)(x+1)(x+4)(x+7)=19$

2 Лабораторные работы

К выполнению предлагаются четыре лабораторные работы, которые проводятся в компьютерных классах университета. Данное пособие содержит набор индивидуальных заданий для группы студентов по каждой работе и указания для их выполнения.

После выполнения в классе очередной лабораторной работы студент сохраняет её в электронном виде на флэш-накопителе, при необходимости

самостоятельно проводит дооформление и сдаёт преподавателю распечатанный письменный отчёт о проделанной работе. Сдача отчётов является необходимым условием для допуска студента к итоговому экзамену по математике.

НАО Алматинский университет энергетики и связи

Кафедра высшей математики

Лабораторная работа № 1

Тема: Решение задач элементарной математики
Вариант № 24

Выполнила: студентка группы БЭ-08-14 Такешева А.Д.

Принял: ст. преподаватель Д.Д. Бесфамильный

Алматы, 2014

Рисунок 1 - Образец оформления титульного листа письменного отчёта (выполняется в документе Word)

Задание 1. Вычислить $\left(1\frac{2}{5}+3{,}5:1\frac{1}{4}\right):2\frac{2}{5}+3{,}4:2\frac{1}{8}-0{,}35$ (набор в Word).

Выполнение задания.

(Задание выполняется в Mathcad. Затем оно вставляется в Word).

$$\left(\frac{1+\frac{2}{5}+\frac{3.5}{1+\frac{1}{4}}}{2+\frac{2}{5}}+\frac{3.4}{2+\frac{1}{8}}\right)-0.35=3$$

Ответ: 3 (в Word).

Задание 2. Упростить выражение

$$\frac{\frac{a-b}{2a-b}-\frac{a^2+b^2+a}{2a^2+ab-b^2}}{\left(4b^2 4ab^2+a^2\right):\left(2b^2+a\right)}\cdot\left(b^2+b+ab+a\right).$$

Выполнение задания.

$$\frac{\frac{a-b}{2\cdot a-b}-\frac{a^2+b^2+a}{2\cdot a^2+a\cdot b-b^2}}{\left[\frac{\left(4\cdot b^4\right)+4\cdot a\cdot b^2+a^2}{2\cdot b^2+a}\right]}\cdot\left(b^2+b+a\cdot b+a\right)$$

$$\frac{b+1}{b-2a}$$

Ответ: $\frac{b+1}{b-2a}$.

Рисунок 2 – Образец оформления выполненных заданий в письменном отчёте (выполняется в Word с вставкой выполненных заданий в Mathcad)

1.1 Лабораторная работа № 1

Тема: задачи элементарной математики.

Содержание:

1) знакомство с работой математической системы Mathcad;
5) арифметические вычисления;
6) преобразования алгебраических выражений;

7) решение уравнений.

Задание 1. Вычислить.

Варианты заданий

№ варианта	Индивидуальные задания	Ответ
1.1	$\left(\frac{(3{,}2-1{,}7):0{,}003}{\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot 4:0{,}2}-\frac{\left(1\frac{13}{20}-1{,}5\right)\cdot 1{,}5}{\left(2{,}44+1\frac{14}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}\right):\left(62\frac{1}{20}\right)+1{,}364:0{,}124$	12
1.2	$\frac{\left(\left(3\frac{7}{12}-2\frac{11}{18}+2\frac{1}{24}\right)\cdot 1\frac{5}{31}-\frac{3}{52}\left(3\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\right)\cdot 1\frac{7}{13}}{\frac{19}{84}:\left(5\frac{13}{42}-2\frac{13}{28}+\frac{5}{24}\right)+1\frac{2}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}$	5
1.3	$\frac{\left(\left(4,625-\frac{13}{18}\cdot\frac{9}{26}\right)\cdot\frac{4}{9}+2,5:1,25:6,75\right):1\frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2}-0,375\right):0,125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0,358-1,4796:13.7)}+\frac{10}{27}$	1
1.4	$\frac{3{,}75:1\frac{1}{2}+\left(1{,}5:3\frac{3}{4}\right)\cdot 2\frac{1}{2}+\left(1\frac{1}{72}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}}{2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}-\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}}$	16
1.5	$5\frac{4}{7}:\left(8,4\cdot\frac{6}{7}\cdot\left(6-\frac{(2,3+5:6,25)\cdot 7}{8\cdot 0,0125+6,9}\right)-20,384\right)-\frac{29}{14}$	-1
1.6	$\frac{\left(0{,}3275-\left(2\frac{15}{88}+\frac{4}{33}\right):12\frac{2}{9}\right):0{,}07}{(13-0{,}416):6{,}05+1{,}92}$	0,5
1.7	$\left(2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}+\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}\right)$	1,5
1.8	$\left(1\frac{2}{5}+3{,}5:1\frac{1}{4}\right):2\frac{2}{5}+3{,}4:2\frac{1}{8}-0{,}35$	3

№ варианта	Индивидуальные задания	Ответ
1.9	$\left(\frac{3.75+2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}-1{,}875}-\frac{2\frac{3}{4}+1{,}5}{2{,}75-1\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{10}{11}$	6

1.10	$\dfrac{(3{,}4-1{,}275)\cdot\dfrac{16}{17}}{\dfrac{5}{18}\cdot\left(1\dfrac{7}{85}+6\dfrac{2}{17}\right)}+0{,}5\cdot\left(2+\dfrac{12{,}5}{5{,}75+\dfrac{1}{2}}\right)$	3
1.11	$\left((520\cdot 0{,}43):0{,}26-217\cdot 2\dfrac{3}{7}\right)-\left(31{,}5:12\dfrac{3}{5}+114\cdot 2\dfrac{1}{3}+61\dfrac{1}{2}\right)$	3
1.12	$\left(26\dfrac{2}{3}:6{,}4\right)\cdot\left(19{,}2:3\dfrac{5}{9}\right)-\dfrac{8\dfrac{4}{7}:2\dfrac{26}{77}}{0{,}5:18\dfrac{2}{3}\cdot 11}-\dfrac{1}{18}$	10
1.13	$\dfrac{0{,}4+8\left(5-0{,}8\cdot\dfrac{5}{8}\right)-5:2\dfrac{1}{2}}{\left(1\dfrac{7}{8}\cdot 8-\left(8{,}9-2{,}6:\dfrac{2}{3}\right)\right)\cdot 34\dfrac{2}{5}}$	9
1.14	$\left(\left(1\dfrac{1}{7}-\dfrac{23}{49}\right):\dfrac{22}{147}-\left(0{,}6:3\dfrac{3}{4}\right)\cdot 2\dfrac{1}{2}+3{,}75:1\dfrac{1}{2}\right):2{,}2$	3
1.15	$\dfrac{0{,}125:0{,}25+1\dfrac{9}{16}:2{,}5}{(10-22:2{,}3)\cdot 0{,}46+1{,}6}+\left(\dfrac{17}{20}+1{,}9\right)\cdot 0{,}5$	2
1.16	$\dfrac{((7-6{,}35):6{,}5+9{,}9)\cdot\dfrac{1}{12{,}8}}{\left(1{,}2:36+1{,}2:0{,}25-1\dfrac{5}{6}\right):\dfrac{4}{5}}:0{,}125+\dfrac{7}{3}$	2.5
1.17	$\left(\left(\dfrac{7}{9}-\dfrac{47}{72}\right):1{,}25+\dfrac{7}{40}\right):(0{,}358-0{,}108)\cdot 1{,}6-\dfrac{19}{25}$	1
1.18	$\dfrac{\left(0{,}5:1{,}25+\dfrac{7}{5}:1\dfrac{4}{7}-\dfrac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1{,}5+\dfrac{1}{4}\right):18\dfrac{1}{3}}$	32
1.19	$\dfrac{\left(5\dfrac{4}{45}-4\dfrac{1}{6}\right):5\dfrac{8}{15}}{\left(4\dfrac{2}{3}+0{,}75\right)\cdot 3\dfrac{9}{13}}\cdot 34\dfrac{2}{7}+\dfrac{0{,}3:0{,}01}{70}+\dfrac{2}{7}$	1
№ варианта	Индивидуальные задания	Ответ
1.20	$\dfrac{\left(\dfrac{3}{5}+0{,}425-0{,}005\right):0{,}1}{30{,}5+\dfrac{1}{6}+3\dfrac{1}{3}}+\dfrac{6\dfrac{3}{4}+5\dfrac{1}{2}}{26:3\dfrac{5}{7}}-0{,}05$	2

1.21	$\dfrac{3\frac{1}{3}\cdot 1{,}9+19{,}5:4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75}-0{,}16}:\dfrac{3{,}5+4\frac{2}{3}+2\frac{2}{15}}{0{,}5\cdot\left(1\frac{1}{20}+4{,}1\right)}$	4
1.22	$\dfrac{\left(1\frac{1}{5}:\left(\frac{17}{40}+0{,}6-0{,}005\right)\right)\cdot 1{,}7}{\frac{5}{6}+1\frac{1}{3}-1\frac{23}{30}}+\dfrac{4{,}75+7\frac{1}{2}}{33:4\frac{5}{7}}:0{,}25$	
1.23	$\dfrac{\left(4{,}5\cdot 1\frac{2}{3}-6{,}75\right)\cdot\frac{2}{3}}{\left(3\frac{1}{3}\cdot 0{,}3+\frac{2}{3}\right):2\frac{2}{3}}+\dfrac{1\frac{4}{11}\cdot 0{,}22:0{,}3-0{,}96}{\left(0{,}2-\frac{3}{40}\right)\cdot 1{,}6}$	
1.24	$\dfrac{\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{3}{16}}{0{,}625-\frac{13}{18}:\frac{26}{9}}+\dfrac{\left(\frac{0{,}216}{0{,}15}+0{,}56\right):0{,}5}{\left(7{,}7:24\frac{3}{4}+\frac{2}{15}\right)\cdot 4{,}5}$	
1.25	$\left(16\frac{1}{2}-13\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{18}{33}+2.2\cdot\left(\frac{8}{33}-\frac{1}{11}\right)+\frac{2}{11}$	

Задание 2. Упростить выражение.

Варианты заданий

№ варианта	Индивидуальные задания
2.1	$\dfrac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}}-\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$
2.2	$\left(\dfrac{1+x+x^2}{2x+x^2}+2-\dfrac{1-x+x^2}{2x-x^2}\right)^{-1}\cdot\left(5-2x^2\right)$
2.3	$\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\dfrac{a-b-c}{2bc}$

Варианты	Индивидуальные задания
2.4	$\dfrac{\frac{a-b}{2a-b}-\frac{a^2+b^2+a}{2a^2+\alpha b-b^2}}{\left(4b^4+4ab^2+a^2\right):\left(2b^2+a\right)}\cdot\left(b^2+b+ab+a\right)$

2.5	$\frac{a^2+2ax+x^2}{(3x+a)(a+x)}-2+10\cdot\frac{ax-3x^2}{a^2-9x^2}$
2.6	$\left(\left(\frac{x}{y-x}\right)^{-2}-\frac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy}\right)^2\cdot\frac{x^4}{x^2y^2-y^4}$
2.7	$\left(\left(\frac{x^2}{y^3}+\frac{1}{x}\right):\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\right):\frac{(x-y)^2+4xy}{1+y/x}$
2.8	$\left(\frac{3}{2x-y}-\frac{2}{2x+y}-\frac{1}{2x-5y}\right):\frac{y^2}{4x^2-y^2}$
2.9	$\left(6a^2+5a-1+\frac{a+4}{a+1}\right):\left(3a-2+\frac{3}{a+1}\right)$
2.10	$\frac{x^{-6}-64}{4+2x^{-1}+x^{-2}}\cdot\frac{x^2}{4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-\frac{4x^2(2x+1)}{1-2x}$
2.11	$\frac{2b+a-\frac{4a^2-b^2}{\alpha}}{b^3+2ab^2-3a^2b}\cdot\frac{a^3b-2a^2b^2+ab^3}{a^2-b^2}$
2.12	$\frac{a^3-2a^2+5a+26}{a^3-5a^2+17a-13}$
2.13	$\frac{2a^4+a^3+4a^2+a+2}{2a^3-a^2+a-2}$
2.14	$\frac{p^3+4p^2+10p+12}{p^3-p^2+2p+16}\cdot\frac{p^3-3p^2+8p}{p^2+2p+6}$
2.15	$\left(\frac{z-2}{6z+(z-2)^2}+\frac{(z+4)^2-12}{z^3-8}-\frac{1}{z-2}\right):\frac{z^3+2z^2+2z+4}{z^3-2z^2+2z-4}$
2.16	$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}+\frac{1}{(a+3)(a+4)}+\frac{1}{(a+4)(a+5)}$
2.17	$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}$

№ варианта	Индивидуальные задания
2.18	$\frac{a^2-3ab+ac+2b^2-2bc}{a^2-b^2+2bc-c^2}$
2.19	$\frac{a^4-16}{a^4-4a^3+8a^2-16a+16}$

2.20	$\dfrac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\dfrac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\dfrac{2}{x^{-0,5}}$
2.21	$\dfrac{d(a-b)(b-c)+b(a-d)(c-d)}{c(a-b)(c-d)+a(b-c)(c-d)}$
2.22	$\dfrac{x-1}{x^{3/4}+x^{1/2}}\cdot\dfrac{x^{1/2}+x^{1/4}}{x^{1/2}+1}\cdot x^{1/4}+1$
2.23	$\dfrac{\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+1\right)\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)^2}{\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}-\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)}$
2.24	$\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{x^2+x-1}{x^3-x^2+x-1}+\dfrac{x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}-\dfrac{2x^3}{x^4-1}$
2.25	$\dfrac{x^6+x^4+x^2+1}{x^3+x^2+x+1}$

Задание 3. Раскрыть скобки и привести подобные члены.

Варианты заданий

№ варианта	Индивидуальные задания
3.1	$(b^3-b^2+b-1)(b+1)$
3.2	$(a^2-ab+2b^2)(a-b)-(a^2+2ab-b^2)(a+2b)$
3.3	$(a^2+4\cdot a\cdot x+x^2)\cdot(a-2\cdot x)-(a^2-5\cdot a\cdot x-2\cdot x^2)\cdot(a+x)$
3.4	$(2x^3+x^2y+3xy^2-y^3)(x+5y)-(x^3-2x^2y+3xy^2+5y^3)(2x-y)$
3.5	$(y^3-3y^2z+2yz^2-6z^3)(2y-z)-(y^3-5y^2z-6yz^2+2z^3)(2y+3z)$
3.6	$2(7a-3x)^2-3(a-14x)^2$
3.7	$3\cdot(5\cdot x+2\cdot y)^2+2\cdot(3\cdot x-5\cdot y)^2$
3.8	$(3a-5b)^2+(2a+9b)^2-(2a+3b)(27b-16a)$
3.9	$(4x-7y)^2-(3x+5y)^2-2(2x+3y)(4y-17x)$
3.10	$\left(\frac{1}{2}x^2+2y-xy\right)\left(\frac{1}{2}x^2-2y+xy\right)$
3.11	$\left(10x-\frac{1}{2}z+xz\right)\left(10x-\frac{1}{2}z-xz\right)$
№ варианта	Индивидуальные задания
3.12	$(3a-2b)(3a+2b)+(a-3b)^2-(5a-b)(2a-5b)$
3.13	$2(5\alpha+6x)(3\alpha+2x)-(4\alpha+7x)^2-(3\alpha-5x)(3\alpha+5x)$
3.14	$(\alpha+b)(\alpha-b+1)-(\alpha-b)(\alpha+b-1)$
3.15	$(\alpha^2-3\alpha+1)(2\alpha+1)^2$

3.16	$(\alpha-1)^3+3(\alpha-1)^2+3(\alpha-1)+1$
3.17	$(b-2)(b^4+2b^3+4b^2+8b+16)$
3.18	$(\alpha^2+\alpha b+b^2)(\alpha^2-\alpha b+b^2)(\alpha^4-\alpha^2b^2+b^4)$
3.19	$(2\alpha-b)(4\alpha^2+2ab+b^2)$
3.20	$(3\alpha-2b)(9\alpha^2+6ab+4b^2)$
3.21	$(5x+3y)(25x^2-15xy+9y^2)$
3.22	$(n+5k)^2(n-k)+(n-5k)^2(n+k)-2n(n+4k)(n-4k)$
3.23	$x^2(3-x)-(2-x^2)(x+1)-4x^2$
3.24	$(\alpha+1)^4+(\alpha-1)^4$
3.25	$(\alpha+3b)(\alpha+b+2)-(\alpha+b)(\alpha+3b+2)$

Задание 4. Разложить на множители данное выражение.

Варианты заданий

№ варианта	Индивидуальные задания
4.1	$x^5-x^4+5x^3-5x^2+9x-9$
4.2	$x^7-x^6-x^5+x^4-x^3+x^2+x-1$
4.3	$27\cdot x^3-27\cdot x^2+18\cdot x-4$
4.4	$x^4-x^3+2x^2+x-3$
4.5	$2x^4+7x^3-2x^2-13x+6$
4.6	$2x^4-x^3-9x^2+13x-5$
4.7	$x^4-2\cdot x^3-3\cdot x^2+4\cdot x+4$
4.8	$x^4-2x^3-11x^2+12x+36$
4.9	$x^4+2x^3-16x^2-2x+15$
4.10	$14x-4+27x^4-9x^2$
4.11	$9x^2+4x^3-1-12x^4$
4.12	$\alpha^5-6\alpha^4+16\alpha^3-32\alpha^2+48\alpha-32$
4.13	$\alpha^6+2\alpha^5+9\alpha^4+16\alpha^3+24\alpha^2+32\alpha+16$
4.14	$x^3+x^2z+xyz+y^2z-y^3$
4.15	$x^4+6x^3y+8x^2y^2-6xy^3-9y^4$
4.16	$18\alpha^2-27ab+14ac-21bc$
4.17	$10x^2+10xy+5x+5y$

№ варианта	Индивидуальные задания
4.18	$35ax+24xy-20ay-42x^2$
4.19	$48xz^2+32xy^2-15yz^2-10y^3$
4.20	$16ab^2-5b^2c-10c^3+32ac^2$
4.21	$6mnk^2+15m^2k-14n^3k-35mn^2$
4.22	$-28ac+35c^2-10cx+8ax$

4.23	$-24bx-15c^2+40bc+9cx$
4.24	$xy^2-by^2-ax+ab+y^2-a$
4.25	$ax^2-ay-bx^2+cy+by-cx^2$

Задание 5. Данное выражение разложить на сумму простейших дробей.

Варианты заданий

№ варианта	Индивидуальные задания	№ варианта	Индивидуальные задания
5.01	$\frac{x}{2x^2-3x-2}$	5.14	$\frac{(x^2-2x+3)}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}$
5.02	$\frac{1}{6x^3-7x^2-3x}$	5.15	$\frac{(7x^3-9)}{x^4-5x^3+6x^2}$
5.03	$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}$	5.16	$\frac{x^3+x^2+x-1}{x^4+5x^2+4}$
5.04	$\frac{x^3-1}{4x^3-x}$	5.17	$\frac{5x^3-x^2+21x-9}{x^4+10x^2+9}$
5.05	$\frac{x}{x^4-3x^2+2}$	5.18	$\frac{x^3+4x-3}{x^4+4x^2}$
5.06	$\frac{(2x^2-5)}{x^4-5x^2+6}$	5.19	$\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}$
5.07	$\frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}$	5.20	$\frac{x^3-x+2}{x^4-x^2}$
5.08	$\frac{x^3+1}{x^3-x^2}$	5.21	$\frac{4x^2-2}{x^4-x^2}$
5.09	$\frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}$	5.22	$\frac{5x}{x^4+3x^2-4}$
5.10	$\frac{1}{x^4-x^2}$	5.23	$\frac{3x^2+2x+1}{x^3-1}$
5.11	$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}$	5.24	$\frac{x^3+x^2-x+3}{x^4-x^2}$
5.12	$\frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^2(x-5)}$	5.25	$\frac{6x}{8-x^3}$
5.13	$\frac{x^5}{(x-1)^2(x^2-1)^2}$		

Задание 6. Решить уравнения.

Варианты заданий

№ варианта	Индивидуальные задания

6.01	$x^{\lg^3 x-5\lg x}=0{,}0001$
6.02	$2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}=0{,}01\cdot\left(10^{x-1}\right)^3$
6.03	$3\left(x+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$
6.04	$\left(8^x+2^x\right):\left(4^x-2\right)=5$
6.05	$(2x+a)^5-(2x-a)^5=242a^5$
6.06	$5^{1+x^2}-5^{1-x^2}=24$
6.07	$ax^4-x^3+ax-a=0$
6.08	$\left(\sqrt[5]{3}\right)^x+\left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10}=84$
6.09	$\frac{x+2}{x+1}+\frac{x+6}{x+3}+\frac{x+10}{x+5}=6$
6.10	$9^x+6^x=2^{2x+1}$
6.11	$(x+1)\left(x^2+2\right)+(x+2)\left(x^2+1\right)=2$
6.12	$\left(1+x^2\right)^2=2x\left(1-x^2\right)$
6.13	$27\cdot 2^{-3x}+9\cdot 2^x-2^{3x}-27\cdot 2^{-x}=8$
6.14	$x\cdot\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x^2}+4=0$
6.15	$(2x+1)^5-(2x-1)^5=242$
6.16	$\lg\left(x^2+8\right)-0{,}5\lg\left(x^2+4x+4\right)=\lg 7$
6.17	$t^2+5t+6=15\frac{t^2+3t+6}{t^2+t}$
6.18	$2u^4+u^2(u+2)-3(u+2)^2=0$
6.19	$\left(x^2+2x\right)^2-(x+2)\left(2x^2-x\right)=6(2x-1)^2$
6.20	$\left(x^2-6x+9\right)^2=x\left(x^2-4x+9\right)$
6.21	$8x^4+6x^3-13x^2-x+3=0$
6.22	$x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$
6.23	$\left(x^2-6x\right)^2-2(x-3)^2=81$
6.24	$\left(x^2+2x\right)^2-(x+1)^2=55$
6.25	$(x-2)(x+1)(x+4)(x+7)=19$

Указания к выполнению лабораторной работы № 1

Внимание!

1. В математическую область документа числа и формулы вводятся с клавиатуры или с помощью панелей математических инструментов. Во время набора формулы надо внимательно следить за синим угловым курсором.
2. Текстовая область документа открывается набором знака " (кавычки).
3. В текстовую область можно вводить и формулы с помощью программы Word, вызываемой командами **Добавить/Объект/Microsoft Word** (Insert/Object/Microsoft Word) или вставкой в текстовую область математической области командами **Добавить/Математическая область** (Insert/Math Region).
4. Расклад клавиатуры должен быть английским.
5. Целая часть десятичного числа отделяется точкой, а не запятой.
6. Смешанная обыкновенная дробь набирается с помощью панели **Калькулятор** или преобразуется в неправильную дробь, а также может быть приведена к сумме целой и дробной части.
7. Успешность выполнения задания зависит от внимательного прочтения и точного исполнения рекомендаций после слова Указание.

Задание 1. Вычислить

$$\left(1\frac{2}{5}+3{,}5:1\frac{1}{4}\right):2\frac{2}{5}+3{,}4:2\frac{1}{8}-0{,}35$$

(набрано в математическом редакторе программы Word, которая вызвана командами **Добавить/Объект/Microsoft Word)**

Выполнение задания (набирается в Mathcad).

$$\left(\frac{1+\frac{2}{5}+\frac{3.5}{1+\frac{1}{4}}}{2+\frac{2}{5}}+\frac{3.4}{2+\frac{1}{8}}\right)-0.35=3$$

Указание. После набора выражения с клавиатуры нажать клавишу = . Результат появится на экране.

Ответ: 3.

Задание 2. Упростить выражение:

$$\frac{\frac{a-b}{2a-b}-\frac{a^2+b^2+a}{2a^2+ab-b^2}}{\left(4b^2 4ab^2+a^2\right):\left(2b^2+a\right)}\cdot\left(b^2+b+ab+a\right)$$

Выполнение задания.

$$\frac{\dfrac{a-b}{2\cdot a-b}-\dfrac{a^2+b^2+a}{2\cdot a^2+a\cdot b-b^2}}{\left[\dfrac{\left(4\cdot b^4\right)+4\cdot a\cdot b^2+a^2}{2\cdot b^2+a}\right]}\cdot\left(b^2+b+a\cdot b+a\right)$$

$$\frac{b+1}{b-2\cdot a}$$

У к а з а н и е. Операция возведения числа в квадрат выполняется одновременным нажатием на клавиатуре кнопок **Shift** и **6**. После набора выражения следует *полностью выделить* его синим угловым курсором, щелкнуть по позиции **Символы** (Simbolics) в главном (верхнем) меню Mathcad, а затем по строчке **Упростить** (Simplify). Результат появится внизу набранного выражения.

Ответ: $\dfrac{-(b+1)}{(2\cdot a-b)}$.

Задание 3. Раскрыть скобки и привести подобные члены:

$$\left(b^3-b^2+b-1\right)\cdot(b+1)$$

Выполнение задания.

$$\left(b^3-b^2+b-1\right)\cdot(b+1)$$

У к а з а н и е. После набора выражения следует выделить его синим угловым курсором, щелкнуть позицию **Символы**, затем строку **Развернуть** (Expand).

Ответ: b^4-1 .

Задание 4. Разложить на множители выражение:

$$a^2\cdot b+a\cdot b^2+2\cdot a\cdot b\cdot c+b^2\cdot c+a^2\cdot c+a\cdot c^2+b\cdot c^2$$

Выполнение задания.

$$a^2\cdot b+a\cdot b^2+2\cdot a\cdot b\cdot c+b^2\cdot c+a^2\cdot c+a\cdot c^2+b\cdot c^2$$

У к а з а н и е. После набора выражения следует выделить его синим угловым курсором, щелкнуть позицию **Символы**, затем строку **Фактор** (Factor).

Ответ: $(b+c)\cdot(c+a)\cdot(a+b)$.

Задание 5. Разложить на простейшие дроби:

$$\frac{x^2 - 3\cdot x + 7}{(x-1)^2\cdot\left(x^2 + x + 1\right)}$$

Выполнение задания.

$$\frac{x^2 - 3\cdot x + 7}{(x-1)^2\cdot\left(x^2 + x + 1\right)}$$

У к а з а н и е. После набора выражения следует выделить синим угловым курсором ТОЛЬКО переменную x, щелкнуть позицию **Символы**, выбрать строку **Переменные** (Variable), затем щелкнуть команду **Преобразовать в элементарные дроби** (Convert to Partial Fractions).

Ответ: $$\frac{5}{\left[3\cdot(x-1)^2\right]} - \frac{2}{(x-1)} + \frac{2}{3}\cdot\frac{(5+3\cdot x)}{\left(x^2+x+1\right)}$$

Задание 6.

П р и м е р ы.

1. Решить уравнение: $x^3 + 4x^2 = 6x + 4$

Выполнение задания.

У к а з а н и е. Щелкнуть по кнопке **Символьная** на панели **Математическая** затем по кнопке **Решить** (Solve) и слева от этого слова ввести *левую часть* уравнения $F(x;y) = 0$, а справа, через запятую, *имя переменной*, относительно которой необходимо решить уравнение. Если переменная одна, то справа можно ничего не указывать. Щелкнуть по свободному месту страницы.

$$x^3 + 4x^2 + 6x + 4 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -1 - i \\ -1 + i \end{pmatrix}$$

Ответ: $$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 + i \\ -1 - i \end{pmatrix}$$

2. Решить уравнение:

$$\cos(3\cdot x) - 2\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{3} \\ \frac{2\cdot\pi}{3} \end{pmatrix}$$

Ответ: $$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot\pi \\ \frac{1}{3}\cdot\pi \\ \frac{2}{3}\cdot\pi \end{pmatrix}$$

П р и м е ч а н и е. В тригонометрическом уравнении вычислены только главные значения корней.

2.2 Лабораторная работа № 2

Тема: задачи векторной и линейной алгебры.

Содержание:
1) операции с векторами;
2) операции с матрицами;
3) решение систем линейных уравнений.

Задание 1. Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и числа *k, m, n*. Найти:
1) $n\vec{a}$;
2) $n\vec{a} - m\vec{b} + k\vec{c}$;
3) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
4) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
5) длину вектора $\vec{a}$ и вектора, полученного в предыдущем пункте;
6) смешанное произведение $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;
7) являются ли заданные три вектора линейно зависимыми или нет? Могут ли они образовать базис пространства?

Варианты заданий

№	Индивидуальные задания					
	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	n	m	k
1.1	(2,-3,1)	(1,4,0)	(5,2,-3)	3	2	-4
1.2	(3,4,1)	(1,-2,7)	(3,-6,21)	5	2	1
1.3	(2,-4,-2)	(7,0,3)	(3,5,-7)	-2	1	3
1.4	(-7,0,2)	(2,-6,4)	(1,-3,2)	-7	2	4
1.5	(-4,2,-1)	(3,5,-2)	(0,1,5)	1	-2	4
1.6	(3,-2,1)	(0,2,-3)	(-3,2,-1)	-5	1	4
1.7	(4,-1,3)	(2,3,-5)	(7,2,4)	2	1	0
1.8	(4,2,-3)	(2,0,3)	(-12,-6,-3)	-1	2	-1
1.9	(-1,0,5)	(-3,2,2)	(-2,-4,1)	2	2	1
1.10	(6,-4,6)	(9,-6,9)	(1,0,8)	3	0	1
1.11	(5,-3,1)	(2,-4,-2)	(3,5,-7)	-1	3	1
1.12	(-4,3,-7)	(4,6,-1)	(6,9,-3)	3	3	2
1.13	(-4,-6,2)	(7,0,5)	(2,3,-2)	2	-3	2
1.14	(-5,2,2)	(2,3,-1)	(-1,5,-3)	3	-7	1
1.15	(-4,2,-3)	(0,-3,5)	(-1,6,-4)	3	1	-2
1.16	(7,-3,2)	(12,4,7)	(0,1,13)	-1	4	-8
1.17	(-4,5,3)	(10,-1,5)	(4,-1,3)	7	0	-3
1.18	(6,2,-1)	(-3,-6,8)	(15,3,0)	-11	3	-5
1.19	(-5,3,2)	(0,1,8)	(-9,6,-9)	1	4	-3

1.20	(2,-4,-1)	(-4,-8,-11)	(-5,10,-1)	5	2	0
№	Индивидуальные задания					
	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	n	m	k
1.21	(5,3,-4)	(12,0,5)	(4,0,-5)	-7	-1	-7
1.22	(3,-4,1)	(-6,1,0)	(9,0,9)	0	3	-2
1.23	(0,-2,5)	(-3,5,4)	(9,5,-4)	7	1	3
1.24	(-3,5,0)	(0,1,-7)	(1,-8,2)	5	0	4
1.25	(2,0,-2)	(15,4,6)	(13,0,13)	-4	-5	8

Задание 2. Даны матрицы A, B, C.

1) Найдите определители матриц A и C;
2) определите матрицу B^T;
3) найдите матрицы, обратные к матрицам A и C, если они существуют;
4) найдите ранги матриц A и C с помощью функции rank(A);
5) найдите значение операции A^2.

Варианты заданий

№	Индивидуальные задания		
	A	B	C
2.1	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
2.2	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -9 \\ -2 & 7 & 6 \\ 5 & 2 & -15 \end{pmatrix}$
2.3	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
2.4	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 3 & 9 \\ 11 & 23 & 35 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \\ 20 & -12 & -8 \end{pmatrix}$
2.5	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 13 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$
2.6	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
2.7	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & 8 \\ 4 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

№	Индивидуальные задания		
	A	B	C
2.8	$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 11 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$
2.9	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
2.10	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
2.11	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 3 & 9 \\ 11 & 23 & 35 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \\ 20 & -12 & -8 \end{pmatrix}$
2.12	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -9 \\ -2 & 7 & 6 \\ 5 & 2 & -15 \end{pmatrix}$
2.13	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 13 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$
2.14	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
2.15	$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 11 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$
2.16	$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 14 & 2 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2.17	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 18 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$
2.18	$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -18 \\ -4 & 7 & 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 9 & 11 & 3 \\ 7 & 6 & 12 \end{pmatrix}$
2.19	$\begin{pmatrix} 20 & 7 & 3 \\ 0 & 35 & -1 \\ 6 & -2 & 14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & -6 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

№	Индивидуальные задания

	A	B	C
2.20	$\begin{pmatrix} 11 & 14 & 0 \\ -3 & 11 & -7 \\ 1 & 4 & 13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 8 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$
2.21	$\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 0 & -8 & 9 \\ -11 & 16 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 15 & 1 & -3 \\ 6 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
2.22	$\begin{pmatrix} 16 & 4 & -3 & -7 \\ 11 & 9 & 5 & -7 \\ 18 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
2.23	$\begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & -7 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 5 & 7 & 11 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$
2.24	$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & 5 \\ 7 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 8 & -5 \end{pmatrix}$
2.25	$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7 & 40 \\ 11 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Задание 3. Задана система уравнений DX = F.

1) Решить систему уравнений по формулам Крамера;

2) решить систему уравнений с помощью обратной матрицы по формуле $X = D^{-1}F$;

3) решить систему уравнений с помощью операции (встроенной в Mathcad функции) **lsolve***(D,F)*.

Варианты заданий

№	Индивидуальные задания	
	D	F
3.1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 7 & 6 \\ -4 & 6 & -9 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
3.2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
№	Индивидуальные задания	
	D	F

3.3	$\begin{pmatrix} 1 & 11 & 8 & 7 \\ 4 & 9 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
3.4	$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 6 \\ 2 & 9 & 11 & 4 \\ -2 & 0 & 4 & 7 \\ -3 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$
3.5	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 10 & 5 & -9 \\ 12 & -7 & -4 & 11 \\ 3 & 6 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$
3.6	$\begin{pmatrix} 1 & 11 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 12 \\ 8 & 13 & 9 & -8 \\ 3 & -7 & -6 & 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$
3.7	$\begin{pmatrix} 8 & 11 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & -7 & 1 \\ 3 & -8 & 2 & 4 \\ -4 & 5 & 3 & -9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 21 \\ 2 \end{pmatrix}$
3.8	$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \\ -4 & 2 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$
3.9	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & -3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$
3.10	$\begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 & 4 \\ 9 & 5 & -8 & 11 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 17 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$
3.11	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 7 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & -9 & 1 \\ 2 & 8 & 11 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

№	Индивидуальные задания	
	D	F

3.12	$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -4 & 5 \\ 8 & 11 & 3 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix}$
3.13	$\begin{pmatrix} 8 & 11 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 11 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 11 \\ 3 & -8 & -9 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
3.l4	$\begin{pmatrix} 7 & 6 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$
3.15	$\begin{pmatrix} 7 & 12 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & -5 & 7 \\ 5 & 6 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$
3.16	$\begin{pmatrix} 11 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & -8 & 1 \\ -6 & 5 & 3 & 2 \\ 8 & -13 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
3.17	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
3.18	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$
3.19	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

№	Индивидуальные задания	
	D	F

3.20	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
3.21	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
3.22	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$
3.23	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$
3.24	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
3.25	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

5. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Выполнение задания.

$(a \times b) \cdot c = 0$ - смешанное произведение. Ответ: 0.

6. Являются ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависимыми или нет? Могут ли они образовывать базис линейного пространства?

Выполнение задания.

Составим из координат векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ матрицу и затем вычислим определитель этой матрицы.

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\right| = 0$$

Ответ: Так как определитель равен нулю, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ являются линейно зависимыми. Они не могут образовывать базис линейного пространства.

Задание 2. Даны матрицы A, B, C.

1) найдите определители матриц A и C;

2) определите матрицу B^t;

3) найдите матрицы обратные к матрицам A и C, если они существуют;

4) найдите ранги матриц A и C с помощью операции **rank**(A);

5) найдите произведение матрицы A на матрицу B;

6) найдите значение операции A^2.

Примеры

1. Найти определитель матрицы A (см. пример 6 из задания 1).
2. ДляматрицыВнайтитранспонированнуюматрицу B^T.

Выполнение задания.

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

У к а з а н и е. Задание выполняется с помощью кнопки **Транспонирование матрицы** панели **Матрицы**

Ответ: $B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Найти матрицу, обратную матрице C.

Выполнение задания.

$$C := \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1.1 & -1.9 & 0.7 \\ -0.3 & 0.7 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

У к а з а н и е. Задание выполняется с помощью кнопки **Инверсия** (Inverse) панели **Матрицы.** Обратная матрица не существует, если её определитель равен нулю.

Ответ: $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1.1 & -1.9 & 0.7 \\ -0.3 & 0.7 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$.

4. Найти ранг матрицы C (из предыдущего задания).

Выполнение задания.

$\mathrm{rank}(C) = 3$ (набирается с клавиатуры).

Ответ: 3.

5. Найти произведения матриц AB и A^2.

Выполнение задания

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 11 \\ 9 & 13 & 22 \\ 3 & 5 & 11 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Задана система уравнений DX=F.

1) Эту систему уравнений решите по формулам Крамера;

2) эту же систему уравнений решите с помощью обратной матрицы по формуле $X = D^{-1} F$;

3) решите заданную систему уравнений с помощью операции (встроенной функции) **lsolve**(D,F).

Примеры

1. Решить систему уравнений по формулам Крамера.

Выполнение задания.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 30 \\ -x + 2y - 3z + 4t = 10 \\ y - z + t = 3 \\ x + y + z + t = 10 \end{cases}$$

Матрица системы: $D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Определитель системы: $\Delta := |D|$ $\quad \Delta = -4$

Определитель системы не равен нулю, следовательно, система имеет единственное решение

Первый вспомогательный определитель системы: $\Delta 1 := \left| \begin{pmatrix} 30 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right|$

Второй вспомогательный определитель системы:

$\Delta 1 = -4$

$$\Delta 2 := \left| \begin{pmatrix} 1 & 30 & 3 & 4 \\ -1 & 10 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$\Delta 2 = -8$

Далее::

$$\Delta 3 := \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 30 & 4 \\ -1 & 2 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$\Delta 3 = -12$

$$\Delta 4 := \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 30 \\ -1 & 2 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}\right| \qquad x := \frac{\Delta 1}{\Delta} \quad x = 1 \qquad y := \frac{\Delta 2}{\Delta} \quad y = 2$$

$$z := \frac{\Delta 3}{\Delta} \quad z = 3 \qquad t := \frac{\Delta 4}{\Delta} \quad t = 4$$

$\Delta 4 = -16$

Ответ:
$x = 1$
$y = 2$
$z = 3$
$t = 4$

2. Решить ту же систему матричным способом

Решение X находится по формуле (набор в текстовой области):

$$X = D^{-1} \cdot F, \quad \text{где} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Выполнение задания.

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 3 \\ 0.75 & -1.25 & 4 & -2 \\ 0.5 & -0.5 & 1 & -1 \\ -0.25 & 0.75 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad F := \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} \cdot F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ответ:
$x = 1$
$y = 2$
$z = 3$
$t = 4$

3. Решить ту же систему с помощью встроенной функции **lsolve***(D,F)*

Выполнение задания.

$$\text{lsolve}(D, F) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ответ:
$x = 1$
$y = 2$
$z = 3$
$t = 4$

2.3 Лабораторная работа № 3

Тема: задачи математического анализа

Содержание:
1) вычисление пределов;
2) вычисление производных функций;
3) построение графиков функций.

Задание 1. Дана функция *f(x)* и точка $x = a$.
1) Вычислите двусторонний предел функции в указанной точке;
2) вычислите односторонний предел функции слева в той же точке;
3) вычислите односторонний предел функции справа в той же точке;
4) сделайте вывод о разрывности функции в точке $x = a$ и типе разрыва.

Варианты заданий

Индивидуальные задания					
№	$f(x)$	x	№	$f(x)$	x
1.1	$\frac{x - arctgx}{x^3}$	0	1.16	$\frac{(x^2-1)(x+3)}{(x-1)}$	1
1.2	$\frac{x - \sin x}{x - tgx}$	0	1.17	$\frac{\ln tgx}{\cos 2x}$	$\frac{\pi}{4}$
1.3	$\frac{\ln\cos x}{x}$	0	1.18	$\frac{\sqrt{1+2x}-3}{x-1}$	4
1.4	$\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$	0	1.19	$\frac{(x^3-1)(x+3)}{(x-1)}$	1
1.5	$\frac{\ln x}{\ln\sin x}$	0	1.20	$\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$	-2
1.6	x^2e^{-x}	$+\infty$	1.21	$\frac{2^x-2}{\ln x}$	1
1.7	$\left[\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right]$	1	1.22	$\frac{(x^4-1)(x+5)}{(x-1)}$	1
1.8	$\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}$	1	1.23	$\frac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}$	2π
1.9	$\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}\ln(1-x)}$	1	1.24	$\frac{(x^3+1)(x^2+3)}{(x+1)}$	-1
1.10	$(ctg\,x - 1)/x$	0	1.25	$\frac{\cos 3x-\cos x}{tg^2 2x}$	π
1.11	$x(e^{\frac{1}{x}}-1)$	∞			
1.12	$(tgx)^{2x-\pi}$	$\frac{\pi}{2}$			

№	$f(x)$	x	№	$f(x)$	x
1.13	$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$	∞			
1.14	$\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,x}$	0			
1.15	$\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$	0			

Задание 2. Вычислить для данной функции $y(x)$ производные $y'(x)$, $y'(x_0)$, $y''(x)$, $y''(x_0)$.

Варианты заданий

Индивидуальные задания					
№	$y(x)$	x_0	№	$y(x)$	x_0
2.1	x^2-3x+2	3	2.16	$sin^2 x$	$\frac{\pi}{2}$
2.2	$1-x^2-x^4$	1	2.17	$(2x-1)e^{2(1+x)}$	1
2.3	$(x+10)^6$	2	2.18	$\ln(2+x)$	0
2.4	x^6-4x^3+4	1	2.19	$e^x \cos x$	0
2.5	$(x^2+1)^3$	1	2.20	$e^x \sin 2x$	0
2.6	$\frac{1}{1-x}$	-2	2.21	$\frac{x-3}{x-4}$	2
2.7	$\cos^2 x$	$\frac{\pi}{2}$	2.22	$sin 2x$	π
2.8	$arctg\, x$	$\pi/2$	2.23	$(2x+1)^5$	1
2.9	$x^3 \ln x$	$\frac{1}{3}$	2.24	$\ln(1+x)$	2
2.10	$\frac{1-x}{1+x}$	2	2.25	$\frac{1}{2}x^2e^x$	0
2.11	$e^{4x}+2e^{-x}$	0			
2.12	$e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$	1			
2.13	$\cos e^x+\sin e^x$	0			
2.14	$(x+1)e^{x+2}$	-1			
2.15	$e^{-x}\cos x$	1			

Задание 3. Построить график функции $y = f(x)$ в декартовой прямоугольной системе координат.

Варианты заданий

Индивидуальные задания			
№	$f(x)$	№	$f(x)$
3.1	$\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$	3.16	$\sqrt[3]{(1+x)(x^2+2x-2)}$

№	*f(x)*	№	*f(x)*
3.2	$\sqrt{x^2+1}-x$	3.17	$\sqrt{(x^2-4x+3)^2}$
3.3	$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$	3.18	$\sqrt[3]{x^2(x+3)}$
3.4	$\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}$	3.19	$\sqrt[3]{(x+2)^2(x-4)}$
3.5	$\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$	3.20	$\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x+2)^2}$
3.6	$\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}$	3.21	$\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-3)^2}$
3.7	$\sqrt{4+x^2}-2$	3.22	$\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{(x-2)^2}$
3.8	$\sqrt{1+2x}-1-\sqrt{x}$	3.23	$\sqrt[3]{(x-4)^2(x+2)}$
3.9	$x(\sqrt{x^2+1}-x)$	3.24	$\sqrt{(x^2-2x-3)^2}$
3.10	$x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$	3.25	$\sqrt[3]{(3+x)(x^2+6x+6)}$
3.11	$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$		
3.12	$\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$		
3.13	$\sqrt{1+x}-1$		
3.14	$\sqrt[3]{1+x^2}$		
3.15	$\sqrt{1-x^4-x^8}$		

Задание 4. Построить график параметрически заданной функции *y(x)*.

Варианты заданий

Индивидуальные задания		
№	$x(t)$	$y(t)$
4.1	t^3+3t+1	t^3-3t+1
4.2	t^3-3t	t^3-t
4.3	$\frac{3t}{1+t^3}$	$\frac{3t^2}{1+t^2}$
4.4	te^t	te^{-t}
4.5	$2\cos t-\cos 2t$	$2\sin t-\sin 2t$
4.6	$\frac{1}{t}$	$\frac{t}{t+1}$
4.7	$\frac{2e^t}{t-1}$	$\frac{te^t}{t-1}$
4.8	$\frac{2t}{1-t^2}$	$\frac{t^2}{1-t^2}$
4.9	$\frac{3t}{1+t^3}$	$\frac{3t^2}{1+t^3}$

№	$x(t)$	$y(t)$
4.10	$\frac{t-8}{t^2+4}$	$\frac{3}{t(t^2+4)}$
4.11	$-\frac{1}{2}t^2$	$2t^3$
4.12	$3t^2$	$3t - t^3$
4.13	$\cos^3 t$	$\sin^3 t$
4.14	$\cos t + t\sin t$	$\sin t - t\cos t$
4.15	$2\cos t - \cos 2t$	$2\sin t - \sin 2t$
4.16	t^2	t^3
4.17	$t^2 - 1$	$t^3 + 1$
4.18	$\frac{t^2}{1+t^3}$	$\frac{t}{1+t^3}$
4.19	$\frac{t^2}{1+t^3}$	$-\frac{t}{1+t^3}$
4.20	$t - \sin t$	$1 - \cos t$
4.21	$\frac{t^2}{1+t^3}$	$-\frac{t}{1+t^3}$
4.22	$\cos^2 t + \cos t$	$\cos t \sin t + \cos t$
4.23	$4\cos^3\frac{t}{4}$	$4\sin^3\frac{t}{4}$
4.24	$\frac{t^2}{1+t^3}$	$\frac{t^3}{1+t^3}$
4.25	t^2	$\frac{1}{2}t^3$

Задание 5. Построить график функции $r(\varphi)$ в полярной системе координат.

Варианты заданий

Индивидуальные задания			
№	$r(\varphi)$	№	$r(\varphi)$
5.1	$\sin 3\varphi$	5.15	$2^{-\varphi}$
5.2	$tg\,\varphi$	5.16	$2\varphi+1$
5.3	$\frac{3}{\varphi^2}$	5.17	$\frac{2}{\sin\varphi}+2$
5.4	$1 + 2\cos\varphi$	5.18	$2\sin 3\varphi$
5.5	$1 + \sin\varphi$	5.19	$2\cos\varphi+3$
5.6	$\sqrt{\frac{\pi}{\varphi}}$	5.20	$\sin 5\varphi$
5.7	$\frac{2}{\pi}arctg\frac{\varphi}{\pi}$	5.21	$2\sqrt{\cos 2\varphi}$

№	$r(\varphi)$	№	$r(\varphi)$
5.8	$2\sin 6\varphi$	5.22	$\sin 4\varphi$
5.9	2^{φ}	5.23	$\frac{2}{\cos(\varphi/3)}$
5.10	$-2ctg\,\varphi$	5.24	$\frac{2}{\sin\varphi}+1$
5.11	$\cos 3\varphi$	5.25	$2(1-\cos\varphi)$
5.12	$\sin^3\frac{\varphi}{3}$		
5.13	$\cos 2\varphi$		
5.14	$\sqrt{\cos\varphi}$		

Задание 6. Построить график функции $y = f(x)$ в декартовой системе координат. Построить на том же графике касательную и нормаль в указанной точке.

Варианты заданий

Индивидуальные задания					
№	$f(x)$	x_0	№	$f(x)$	x_0
6.1	$\frac{1}{x}$	-1	6.14	$\ln\cos x$	1
6.2	xe^x	0	6.15	x^3+1	2
6.3	$\sqrt{x}$	4	6.16	$sh\,x$	1
6.4	$x^3\ln x$	1	6.17	$\ln x$	2
6.5	$\sin^2 x$	0	6.18	$\ln(-3x)$	-1
6.6	$\frac{x}{x-1}$	2	6.19	$1+\frac{1}{x}$	-1
6.7	$tg\,x$	0	6.20	shx	2
6.8	$\arcsin x$	0	6.21	$\frac{x^2+8}{\sqrt{x^2-4}}$	-3
6.9	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	1	6.22	$\frac{x^3-32}{x^2}$	1
6.10	$\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	0	6.23	$\frac{10x^2-9}{\sqrt{4x^2-1}}$	10
6.11	tg^2x	0	6.24	$\sqrt[3]{x(x+6)^2}$	5
6.12	$\cos^2 x$	0	6.25	$ch\,x$	½
6.13	$x^2+\frac{1}{x^2}$	1			

Задание 7. Изобразите график заданной функции, найдите производную, найдите нули производной (стационарные точки), найдите координаты точек экстремумов.

Варианты заданий

Индивидуальные задания			
№	$f(x)$	№	$f(x)$
7.1	$\sqrt[3]{x^3-3x^2+8}$	7.16	$\sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)-1}$
7.2	$-x^2\sqrt{x^2+2}$	7.17	$4-x-\frac{4}{x^2}$
7.3	$\frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$	7.18	$x^2+\frac{16}{x}-16$
7.4	x^4-2x^2+5	7.19	$\frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}-1$
7.5	$x+2\sqrt{x}$	7.20	$2\sqrt{x}-x-0.5$
7.6	$x^5-5x^4+5x^3+1$	7.21	$1+\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$
7.7	x^3-3x^2+6x-2	7.22	$x-4\sqrt{x}+3$
7.8	$\sqrt{100-x^2}$	7.23	$\frac{10}{x^2+1}-3$
7.9	$\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$	7.24	$-2+\sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$
7.10	$\frac{x-1}{x+1}$	7.25	$2x^2+\frac{108}{x^2}-59$
7.11	$\frac{1}{x}+\frac{4}{1-x}$		
7.12	x^x		
7.13	$\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$		
7.14	$arctg\frac{1-x}{1+x}$		
7.15	$\frac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1-x}}$		

Задание 8. Постройте трёхмерный график поверхности.

Варианты заданий

Варианты индивидуальных заданий			
№	Функция	№	Функция
8.1	$z=0.1x^3+y^2$	8.16	$z=x^5$
8.2	$z=\cos\frac{\pi x}{10}\cdot\cos\frac{\pi y}{10}$	8.17	$x(u,v)=v$ $y(u,v)=v\cos(v)$ $z(u,v)=u$

№	Функция	№	Функция
8.3	$x(u,v)=\cos(v)$ $y(u,v)=\sin(v)$ $z(u,v)=u$	8.18	$z=\sin(x+y)$
8.4	$z=\cos\frac{\pi x}{10}\cdot\sin\frac{\pi y}{10}$	8.19	$x(u,v)=v$ $y(u,v)=u\cos(v)$ $z(u,v)=u$
8.5	$x(u,v)=\sin(v)\cos(u)$ $y(u,v)=\sin(v)\sin(u)$ $z(u,v)=\cos(v)$	8.20	$z=e^{x+y}$
8.6	$z=\sqrt{x^2+y^2}$	8.21	$x(u,v)=v$ $y(u,v)=v\cos(u)$ $z(u,v)=u$
8.7	$z=x^2-y^2$	8.22	$z=\left(\sqrt[5]{e}\right)^{x^2-y^2}$
8.8	$x(u,v)=\cos(v)$ $y(u,v)=\sin(v)$ $z(u,v)=v$	8.23	$x(u,v)=v$ $y(u,v)=v\sin(u)$ $z(u,v)=u$
8.9	$x(u,v)=u\cos(v)$ $y(u,v)=u\sin(v)$ $z(u,v)=u$	8.24	$z=\sqrt[3]{x+y}$
8.10	$x(u,v)=\cos(v)$ $y(u,v)=\cos(v)$ $z(u,v)=u$	8.25	$x(u,v)=v$ $y(u,v)=u\sin(u)$ $z(u,v)=u$
8.11	$z=x^2y$		
8.12	$z=x^2$		
8.13	$x(u,v)=\cos(v)$ $y(u,v)=v\cos(v)$ $z(u,v)=u$		
8.14	$z=x^3$		
8.15	$x(u,v)=u\cos(v)$ $y(u,v)=v\cos(v)$ $z(u,v)=u$		

Указания к лабораторной работе № 3

Задание 1. Дана функция f(x) и точка x = a.

1) Вычислить двусторонний предел функции в указанной точке;
2) вычислить односторонний предел слева в указанной точке;
3) вычислить односторонний предел справа в указанной точке;
4) сделать вывод о разрывности функции в точке x = a и типе разрыва.

Выполнение задания.

Дана функция $f(x) := e^{\frac{1}{x}}$ и точка x = 0.

У к а з а н и е. Панель **Математика**, кнопка **Панель исчисления** (Cflculus Toolbar), кнопка **Двухсторонний предел** (Two-sided Limit), набор выражения, кнопка **Символьная панель** на панели **Математика**, щелчок по кнопке **Символьное вычисление** (Simbolic Evaluation(стрелка)), щелчок по свободному месту страницы.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) \to \text{undefined}$ (двусторонний предел в точке x = 0 не существует)

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \to 0$ (предел слева)

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \to \infty$ (предел справа)

Вывод: в точке x = 0 функция имеет разрыв второго рода.

Задание 2. Вычислить для функции f(x):

1) $f'(x)$;
2) $f'(x_0)$;
3) $f''(x)$;
4) $f''(x_0)$.

Выполнение задания.

У к а з а н и е. Задание выполняется аналогично предыдущему с помощью панели **Исчисление.**

$f(x) := x \cdot \cos(x)$ и точка $x = \frac{\pi}{3}$.

$$f1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

$f1(x) \rightarrow \cos(x) - x \cdot \sin(x)$ - производная первого порядка

$f1\left(\frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{6} = -0.407$ - значение производной в точке

$$f2(x) := \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

$f2(t) \rightarrow -2 \cdot \sin(t) - t \cdot \cos(t)$ - производная второго порядка

$f2\left(\frac{\pi}{3}\right) \rightarrow -\frac{\pi}{6} - \sqrt{3} = -2.256$ - значение производной 2-го порядка в точке

Ответ:. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{6} = -0.407$

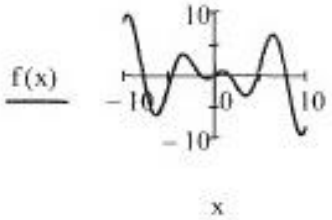
$-\frac{\pi}{6} - \sqrt{3} = -2.256$

Задание 3. Построить график функции f(x)= x sinx в декартовой системе координат.

У к а з а н и е. Присвоим имя f(x) (набор с клавиатуры) данной функции. На панели **Математика** щёлкнем кнопку **Панель графиков** (Graph) и затем кнопку **X-Y график** (X-Y Plot). Заполним чёрную метку (местозаполнитель) возле оси Oy именем функции и метку возле оси Ox именем переменной. Щелкнем по свободному месту страницы вне поля графика.

Выполнение задания.

$f(x) := x \cdot \sin(x)$



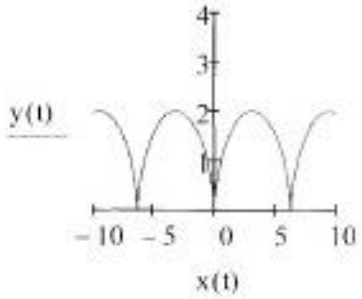
У к а з а н и е. Для лучшей читаемости графика сделаем видимыми координатные оси. Щелкнем *правой* кнопкой мыши по графику, в появившемся окне выберем команду **Формат** и затем в разделе **Стиль осей** (Axis Style) отметим позицию **Пересечение** (Crossed). Щёлкнем кнопку **OK.**

Задание 4. Построить график параметрически заданной функции y(x).

Выполнение задания.

$x(t) := t - \sin(t)$ - циклоида

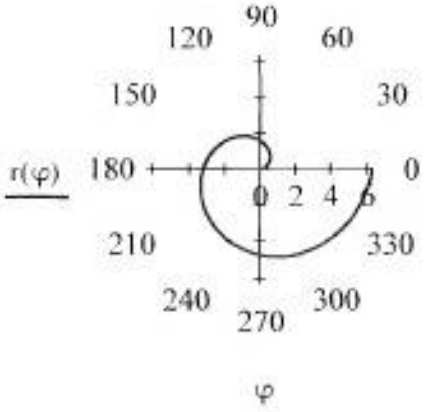
$y(t) := 1 - \cos(t)$



Задание 5. Построить график функции в полярной системе координат.

Выполнение задания.

$r(\varphi) := \varphi$ - спираль Архимеда



Задание 6. Построить график функции y = f(x) в декартовой системе координат. Построить в той же системе координат касательную и нормаль этой функции в указанной точке.

Указание.

1. Определите (присвойте имя) функции y = f(x).
2. Определите угловой коэффициент касательной.
3. Вычислите угловой коэффициент в данной точке.
4. Запишите уравнение касательной в данной точке.
5. Запишите уравнение нормали в данной точке
6. Вызовите декартову систему координат, заполните нужные метки для трёх графиков и постройте график функции, её касательной и нормали.

Выполнение задания.

$f(x) := \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ - цепная линия. Точка касания и нормали (1; ch1)

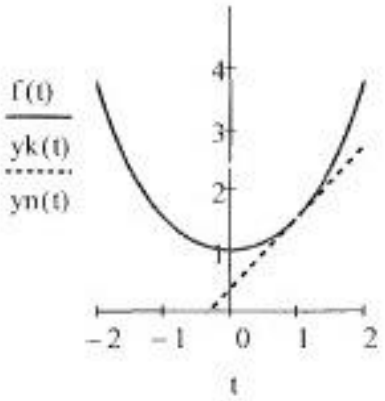
$f1(x) := \dfrac{d}{dx} f(x)$ - угловой коэффициент касательной

$k := f1(1)$ - угловой коэффициент, вычисленный в точке x =1

$yk(x) := f(1) + k\cdot(x - 1)$ - уравнение касательной

$yn(x) := -\dfrac{1}{k}\cdot(x - 1) + f(1)$ - уравнение нормали

Графики:



У к а з а н и е. Введение нескольких функций по оси Оу осуществляется через запятую.

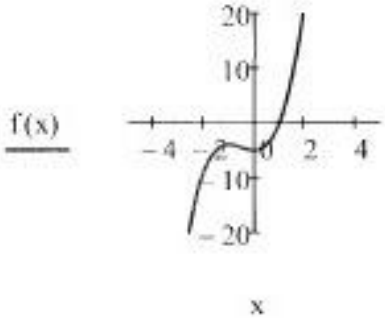
Внимание! В некоторых случаях какое-либо выражение или переменную Mathcad набирает красным шрифтом и не выполняет нужную команду. Иногда это бывает в случае, когда в вышенабранном тексте было выполнено много разных заданий и какие-то обозначения переменных оказываются занятыми.

Для продолжения работы можно открыть новый чистый документ или в прежнем документе переобозначить переменные.

Задание 7. Изобразить график данной функции, найти производную, найти нули производной (стационарные точки), найти координаты точек экстремумов.

$$f(x) := 2\cdot x^3 + 3\cdot x^2 - 5$$

Выполнение задания.



$f1(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 6\cdot x^2 + 6\cdot x$ - вычисление производной

$6\cdot x^2 + 6\cdot x \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ - стационарные точки

$f(0) = -5$

$f(-1) = -4$ - вычисление значений функций в стационарных точках

Ответ: точка максимума (-1, 4)
точка минимума (0,-5) .

Задание 8. Построить трехмерный график поверхности.

Примеры

1. Построить поверхность $z(x,y) := \cos\left(\frac{\pi\cdot x}{10}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot y}{10}\right)$

Указание. Панель **Математика/График/График поверхности** (Surface Plot). Заполнить метку в левом нижнем углу (будьте внимательны!).

Если курсор поместить вблизи графика и перемещать его при нажатой левой кнопки мыши, то график начнёт поворачиваться. Этим способом можно получить наиболее удобное для рассмотрения положение поверхности. Вращением колеса мыши можно изменять масштаб графика.

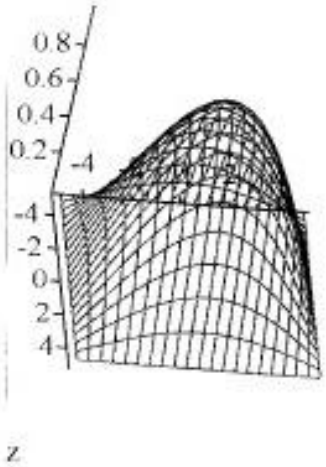


Рисунок 1 - Параболоид

2. Построить поверхность

$$x(u,v) := 3\cdot\sin(u)\cdot\cos(v)$$

$$y(u,v) := 5\cdot\sin(u)\cdot\sin(v)$$

$$z(u,v) := 3\cdot\cos(u)$$

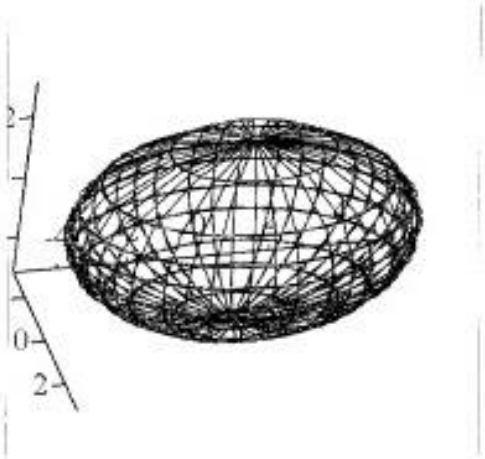


Рисунок 2 - Эллипсоид

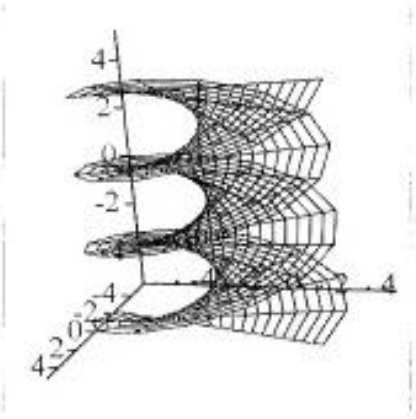
У к а з а н и е. Для получения эллипсоида правильной формы и чтобы он не выглядел как сфера, щелчком правой кнопки мыши вызываем контекстное меню и отмечаем команду **Равные шкалы** (Equal Scales). Эту же процедуру можно пробовать (или отменять) и при построении других поверхностей, добиваясь наилучшего изображения.

3. Построить поверхность

$x(u,v) := u \cdot \cos(v)$

$y(u,v) := u \cdot \sin(v)$

$z(u,v) := v$



(x, y, z)

Рисунок 3 - Геликоид

2.4 Лабораторная работа № 4

Тема: задачи интегрального исчисления, операционного исчисления и дифференциальных уравнений.

Содержание:

1) интегралы;
2) операционное исчисление;
3) решение дифференциальных уравнений с помощью операционного исчисления и численных методов программы Mathcad.

Задание 1. Вычислите неопределённый интеграл $\int f(x)dx$. Постройте три графика из семейства первообразных.

Варианты заданий

Индивидуальные задания			
№	$f(x)$	№	$f(x)$
1.1	$\frac{x^3}{(x-1)^{12}}$	1.13	$\frac{1}{\sin^2 x(1-\cos x)}$
1.2	$x\sqrt[3]{4+x}$	1.14	$\frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x)^2}$
1.3	$\frac{x\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$	1.15	$\frac{1}{\sin x(1-\sin x)}$
1.4	$\frac{1}{1-x^4}$	1.16	$\frac{\cos x}{5+4\cos x}$
1.5	$\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}$	1.17	$\frac{\cos x}{1+\sin x-\cos x}$
1.6	$\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$	1.18	$\frac{\cos x}{2+\sin x}$
1.7	$\frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{x^6}$	1.19	$\frac{\cos x}{(1-\cos x)^2}$
1.8	$\frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}$	1.20	$\frac{1}{\cos x(1-\cos x)}$
1.9	$arctg(1+\sqrt{x})$	1.21	$\frac{\cos x}{(1+\sin x-\cos x)^2}$
1.10	$\frac{1}{1+\cos^2 x}$	1.22	$\frac{1+\sin x}{1+\sin x-\cos x}$
1.11	$x\ln(1+x^3)$	1.23	$\frac{x^4}{x^{15}-1}$
1.12	$\frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}$	1.24	$\frac{x^4}{\sqrt{x^2-1}}$

Задание 2. Вычислите определённый интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$.

Варианты заданий

Индивидуальные задания					
№	$f(x)$	$[a,b]$	№	$f(x)$	$[a,b]$
2.1	$(2x+1)^2$	[1;2,5]	2.13	$\frac{x}{1+x^2}$	$\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$
2.2	$\frac{1}{x^2}$	[1;4]	2.14	$\frac{x^4}{3}$	[1;3]
2.3	$3\sqrt{x}$	[1;9]	2.15	$\left(\frac{x^5}{7}-\frac{x^6}{6}\right)$	[0;1]
2.4	$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$	[1;2]	2.16	$\sqrt{256-x^2}$	[0;5]
2.5	$\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)$	[4;9]	2.17	$x^2\sqrt{1-x}$	[3;5]
2.6	$\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)$	[1;2]	2.18	$\frac{1}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$	$[0,\sqrt{\frac{5}{2}}]$
2.7	$\frac{1}{6x}$	[1;6]	2.19	$\sqrt{\frac{2-x}{x-6}}$	$[0,\sqrt{\frac{2}{2}}]$
2.8	$\sqrt{1+x^4}$	[0;1]	1.20	$\frac{1}{(5-x^2)^{\frac{3}{2}}}$	[0;4]
2.9	$\frac{x^2}{1+x^2}$	[2;3]	2.21	$\frac{x^4}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$	[0;2]
2.10	$\frac{x}{x^3+16}$	[0;10]	2.22	$\frac{\exp(\sqrt{\frac{4-x}{4+x}}}{(4+x)\sqrt{16-x^2}}$	[0;4]
2.11	$\frac{x^2}{x-1}$	[1,5;2,5]	2.23	$\sqrt{4-x^2}$	[0;5]
2.12	$\frac{x^2+5}{x^2+2}$	[0;2]	2.24	$x^2\sqrt{16-x^2}$	[0;4]
			2.25	$x^2\sqrt{25-x^2}$	[0;5]

Задание 3. Найдите изображение функций (изображение Лапласа).

Варианты заданий

Индивидуальные задания			
№	$f(t)$	№	$f(t)$
3.1	$\sin 5t\cos 3t$	3.14	$t\left(e^t+cht)\right)$
3.2	$\sin^2 t$	3.15	$t\sin^3 t$

3.3	$t\sin t$	3.16	$\frac{e^t - e^{-t}}{t}$
3.4	$t^2\cos 8t$	3.17	$\cos 3t\cos t$
3.5	$\cos^4 t$	3.18	$te^t\cos t$
3.6	$(t+1)sht$	3.19	t^2e^{-t}
3.7	$\frac{\sin^2 t}{t}$	3.20	$\sin^4 t$
3.8	$\cos^3 t$	3.21	$(t+4)^2e^{t+4}$
3.9	$ch^3 5t$	3.22	$(t+8)^4$
3.10	$ch2t\cdot\cos t$	3.23	$\cos 8t - 3t^6 + 1$
3.11	$e^{-2t}\cos^2 7t$	3.24	$t(2 - sht)$
3.12	$2+\sin 3t - t^6$	3.25	$t^2\cos 3t$
3.13	$(t-1)^6$		

Задание 4. Найдите оригиналы заданных функций (обратное преобразование Лапласа).

Варианты заданий

№	Задания	№	Задания
4.1	$\frac{1}{s^3(s^2-16)}$	4.14	$\frac{5}{(s-1)(s^2+4s+5)}$
4.2	$\frac{s}{(s^2+1)(s^2-2)}$	4.15	$\frac{5s}{(s+2)(s^2-2s+2)}$
4.3	$\frac{1}{s^3-1}$	4.16	$\frac{1}{(s-2)(s^2+2s+3)}$
4.4	$\frac{e^{-\frac{s}{2}}}{(s^2+1)(s^2+2)}$	4.17	$\frac{s}{(s^2+4s+8)^2}$
4.5	$\frac{2s+1}{(s+1)(s^2+2s+3)}$	4.18	$\frac{1-s}{s(s^2-4s+5)}$
4.6	$\frac{2-s}{(s-2)(s^2-4s+5)}$	4.19	$\frac{2-s}{(s-1)(s^2-6s+10)}$
4.7	$\frac{2s+3}{s^3-2s^2+5s}$	4.20	$\frac{1}{s(s^3+1)}$
4.8	$\frac{2-s}{(s+1)(s^2+2s+2)}$	4.21	$\frac{6}{s^3-8}$
4.9	$\frac{2}{(s+1)(s^2+2s+2)}$	4.22	$\frac{3}{s^4-1}$

4.10	$\dfrac{20}{s^2+2s+2}$	4.23	$\dfrac{1}{s^4+s^3+s^2}$
4.11	$\dfrac{1}{(s+5)(s^2-2s+4)}$	4.24	$\dfrac{2s}{\left(s^2+4s+8\right)^2}$
4.12	$\dfrac{2+s}{(s+1)(s^2+3s-2)}$	4.25	$\dfrac{4}{s^2\left(s^2+4\right)}$
4.13	$\dfrac{2s}{(s^2-1)(s^2+2s+2)}$		

Задание 5. Решите дифференциальное уравнение с помощью операционного исчисления (преобразования Лапласа).

Варианты заданий

№	Задания	№	Задания
5.1	$y''-2y'-3y=2t$, $y(0)=1,\ y'(0)=1$	5.14	$y''+2y'+10y=2e^{-t}\cos 3t$, $y(0)=5,\ y'(0)=1$
5.2	$y''+4y=\sin 2t$, $y(0)=0,\ y'(0)=1$	5.15	$y''+4y=8\sin 2t$, $y(0)=3,\ y'(0)=-1$
5.3	$y''+5y'=29\cos t$, $y(0)=-1,\ y'(0)=0$	5.16	$y''-y'-6y=2t$, $y(0)=1,\ y'(0)=0$
5.4	$y''+y'+y=t^2+t$, $y(0)=1,\ y'(0)=-3$	5.17	$y''+4y=4e^{2t}+4t^2$, $y(0)=1,\ y'(0)=2$
5.5	$y''+y'-2y=e^t$, $y(0)=-1,\ y'(0)=0$	5.18	$y''+2y'+10y=12e^{3t}$, $y(0)=2,\ y'(0)=1$
5.6	$y''+y=2\cos t$, $y(0)=0,\ y'(0)=1$	5.19	$y''+y=sht$, $y(0)=2,\ y'(0)=1$
5.7	$y''-2y'-3y=2t$, $y(0)=2,\ y'(0)=1$	5.20	$y''+4y'+29y=e^{-2t}$, $y(0)=0,\ y'(0)=1$
5.8	$y''+2y'=\sin\dfrac{t}{2}$, $y(0)=-2,\ y'(0)=4$	5.21	$2y''+3y'+y=3e^t$, $y(0)=0,\ y'(0)=1$
5.9	$y''-y'=4\sin t$, $y(0)=-1,\ y'(0)=-2$	5.22	$y''-y=\cos 3t$, $y(0)=1,\ y'(0)=1$

5.10	$y''+2y'+y=t^2+t-3$, $y(0)=2,\ y'(0)=2$	5.23	$y''+4y'+4y=\sin 2t$, $y(0)=0,\ y'(0)=1$

5.11	$y''+3y'-10y=\cos 3t-\sin 3t$, $y(0)=3$, $y'(0)=-1$	5.24	$y''+2y'-2y=3t+1$, $y(0)=1$, $y'(0)=4$
5.12	$2y''+3y'+y=t-\sin t$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$	5.25	$y''-3y'+2y=4t^2$, $y(0)=-1$, $y'(0)=2$
5.13	$y''-3y'+2y=t$, $y(0)=-1$, $y'(0)=1$	5.25	

Задание 6. Решите систему дифференциальных уравнений с помощью операционного исчисления.

Варианты заданий

№	Задания	№	Задания
6.1	$\begin{cases} x'=x+3y+2, & x(0)=-1 \\ y'=x-y+1 & y(0)=2 \end{cases}$	6.14	$\begin{cases} x'=-x+3y+1, & x(0)=1 \\ y'=x+y & y(0)=2 \end{cases}$
6.2	$\begin{cases} x'=x+4y, & x(0)=1 \\ y'=2x-y+9 & y(0)=0 \end{cases}$	6.15	$\begin{cases} x'=x+2y, & x(0)=0 \\ y'=4x-y & y(0)=1 \end{cases}$
6.3	$\begin{cases} x'=2x+5y, & x(0)=1 \\ y'=x-2y+2 & y(0)=1 \end{cases}$	6.16	$\begin{cases} x'=-2x+5y, & x(0)=0 \\ y'=x+2y+1 & y(0)=2 \end{cases}$
6.4	$\begin{cases} x'=3x+y, & x(0)=2 \\ y'=-5x-3y+2 & y(0)=0 \end{cases}$	6.17	$\begin{cases} x'=-3x-4y+1, & x(0)=0 \\ y'=2x+3y & y(0)=2 \end{cases}$
6.5	$\begin{cases} x'=-2x+6y+1, & x(0)=0 \\ y'=2x+2y & y)0=1 \end{cases}$	6.18	$\begin{cases} y'=2x+3y+1, & x(0)=-1 \\ y'=4x-2y & y(0)=0 \end{cases}$
6.6	$\begin{cases} x'=x+2y, & x(0)=0 \\ y'=2x+y+1 & y(0)=5 \end{cases}$	6.19	$\begin{cases} x'=2x-2y, & x(0)=3 \\ y'=-4x & y(0)=1 \end{cases}$

6.7	$\begin{cases} x' = -x - 2y + 1, & x(0) = 1 \\ y' = -1.5x + y & y(0) = 0 \end{cases}$	6.20	$\begin{cases} x' = 3x + 5y + 2, & x(0) = 0 \\ y' = 3x + y + 1 & y(0) = 2 \end{cases}$
6.8	$\begin{cases} x' = 3x + 2y, & x(0) = 0 \\ y' = 2.5x - y + 2 & y(0) = 1 \end{cases}$	6.21	$\begin{cases} x' = 2y + 1, & x(0) = -1 \\ y' = 2x + 3 & y(0) = 0 \end{cases}$
6.9	$\begin{cases} y' = 2x + 8y + 1, & x(0) = 2 \\ y' = 3x + 4y & y(0) = 1 \end{cases}$	6.22	$\begin{cases} x' = 2x + 2y + 2, & x(0) = 0 \\ y' = 4y + 1 & y(0) = 1 \end{cases}$
6.10	$\begin{cases} x' = x + y, & x(0) = 1 \\ y' = 4x + y + 1 & y(0) = 0 \end{cases}$	6.23	$\begin{cases} x' = x - 2y + 1, & x(0) = 0 \\ y' = -3x & y(0) = 1 \end{cases}$
6.11	$\begin{cases} x' = 3y + 2, & x(0) = -1 \\ y' = x + 2y & y(0) = 1 \end{cases}$	6.24	$\begin{cases} x' = x + 4y + 1, & x(0) = 0 \\ y' = 2x + 3y & y(0) = 1 \end{cases}$
6.12	$\begin{cases} x' = 2y, & x(0) = 2 \\ y' = 2x + 3y + 1 & y(0) = 1 \end{cases}$	6.25	$\begin{cases} x' = -2x + y + 2, & x(0) = 1 \\ y' = 3x & y(0) = 0 \end{cases}$
6.13	$\begin{cases} x' = 4x + 3, & x(0) = -1 \\ y' = x + 2y & y(0) = 0 \end{cases}$		

Замечания
к заданиям 7-11 по численному решению дифференциальных уравнений.

Решить дифференциальное уравнение F(t,y,y´) = 0 – это значит найти явную или неявную функцию y=y(t), удовлетворяющую исходному уравнению. Ранее мы функцию находили и записывали в аналитическом (формульном) виде.

Кроме аналитических существуют *численные методы* решения дифференциальных уравнений, в которых искомую функцию получают в табличном виде (методы Эйлера, Рунге-Кутта, Адамса и др.). Однако эти методы требуют трудоёмких и однообразных ручных вычислений. Программа Mathcad взяла на себя эти вычисления. В результате получен простой и наглядный процесс решения дифференциальных уравнений (впрочем, в полной мере оценить эту простоту может лишь пользователь, применявший ручные вычисления).

В программе Mathcad более десятка способов решения ДУ и их систем. Мы применим достаточно универсальные процедуры **Odesolve** и **rkfixed**, ос-

нованные на методе Рунге-Кутта (**Ode** – английская аббревиатура слов «обыкновенные дифференциальные уравнения», **solve** - решить, **rk** - Рунге-Кутта, **fixed** – фиксированный шаг на отрезке решения). Результат решения легко выводится в числовой и графической формах.

Напоминаем, что комментарии к действиям записываются в текстовой области документа Mathcad, которая вызывается клавишами **Shift** + **“**.

Задание 7.

1) Решите дифференциальное уравнение первого порядка численным методом с помощью процедур **Given/Odesolve** программы Mathcad.
2) Постройте график полученного решения.
3) Найдите значение полученного решения (функции) в точке $x = 2.8$.

Варианты заданий

№	Варианты заданий	№	Варианты заданий
7.1	$y' = -\frac{e^x}{e^x+1}, \quad y(0) = 0.5$	7.2	$y' = -\frac{y\ln y}{x}, \quad y(1) = e$
7.3	$y' = -\frac{xy^2+x}{\sqrt{4-x^2}}, \quad y(0) = tg2$	7.4	$y' = \frac{3e^x tg\, y \cos^2 x}{2-e^x}, \quad y(1) = arctg(2-e)$
7.5	$y' = \frac{e^x}{(1+e^x)y}, \quad y(0) = 1$	7.6	$y' = \frac{y\ln y}{\sin x}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$
7.7	$y' = \frac{x(1+x)}{y(1+y)}, \quad y(1) = 1$	7.8	$y' = \frac{1+y^2}{x}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
7.9	$y' = 2\sqrt{y}, \quad y(0) = 1$	7.10	$y' = -\frac{2e^x}{e^x+2}, \quad y(0) = \frac{1}{9}$
7.11	$y' = -\frac{xy^2+x}{\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-x^2}}, \quad y(0) = -1$	7.12	$y' = \frac{y}{3x-y^2}, \quad y(0) = 1$
7.13	$y' = -\frac{2y\ln y}{x}, \quad y(1) = e$	7.14	$y' = \frac{6x+3xy^2}{2x^2y+6y}, \quad y(1) = 2$
7.15	$y' = \frac{x+xy^2}{y^2x+y}, \quad y(1) = 1$	7.16	$y' = \frac{\sin y}{\sin x}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$
7.17	$y' = \frac{1}{3y^2}, \quad y(1) = 1$	7.18	$y' = \frac{1}{2e^y-x}, \quad y(0) = 0$
7.19	$y' = \frac{y}{x+y^2}, \quad y(0) = 0$	7.20	$y' = \frac{2y-x^2}{x}, \quad y(1) = 0$

7.21	$y' = y + e^x, \quad y(0) = 1$	7.22	$y' = \frac{2y}{x} + 2x^3, \quad y(1) = 0$
7.23	$y' = \frac{1}{\cos x} - y\,tg\,x, \quad y(0) = 0$	7.24	$y' = \frac{2y}{x} + \frac{3}{x^2}, \quad y(1) = -1$
7.25	$y' = 2x\left(x^2 - y\right), \quad y(0) = 0$		

Задание 8.

1) Решите дифференциальное уравнение второго порядка.
2) Постройте график полученного решения (функции).
3) Создайте таблицу аргументов и значений функции.
4) Найдите значение полученного решения в точке $t = 2{,}1$ или выберите точку самостоятельно

Варианты заданий

№	Варианты заданий
8.1	$y'' - 2y' - 3y = 2t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$
8.2	$y'' + 4y = \sin 2t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
8.3	$y'' + 5y' = 29\cos t,\ y(0) = -1, y'(0) = 0$
8.4	$y'' + y' + y = t^2 + t,\ y(0) = 1, y'(0) = -3$
8.5	$y'' + y' - 2y = e^t,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0$
8.6	$y'' + y = 2\cos t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
8.7	$2y'' - y' = \sin 3t,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1$
8.8	$y'' + 2y' = \sin\frac{t}{2},\ y(0) = -2,\ y'(0) = 4$
8.9	$y'' + 4y = 8\sin 2t,\ y(0) = 3,\ y'(0) = -1$
8.10	$y'' - y' - 6y = 2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
8.11	$y'' + 4y = 4e^{2t} + 4t^2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$
8.12	$y'' + 2y' + 10y = 12e^{3t}\, y(0) = 2, y'(0) = 6$
8.13	$y'' + y = sht,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1$
8.14	$y'' + 4y' + 29y = e^{-2t},\ y(0) = 0, y'(0) = 1$
8.15	$2y'' + 3y' + y = 3e^t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
8.16	$y'' - y = \cos 3t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$
8.17	$y'' + 2y' + 8y = e^t,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1$
8.18	$y'' + y = e^{2t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
8.19	$y'' + 4y = e^t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
8.20	$y'' - y' + 7y = t^2,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$

8.21	$3y'' + 2y' - y = 5e^t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3$
8.22	$y'' + 4y' + 8y = e^t + t,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2$
8.23	$y'' - 7y' + y = t^3,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

8.24	$y'' - 8y' + y = e^t + 1,\ \ y(0) = 0.5,\ \ y'(0) = 1$
8.25	$y'' + 6y = \sin t,\ \ y(0) = 1.2,\ \ y'(0) = 1$

Задание 9.

1) Решите систему $\begin{cases} x_1' = a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 + d_1 e^{-t} \\ y_1' = a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 + d_2 e^{-t} \end{cases}$ дифференциальных уравнений с помощью процедур **Given/Odesolve** . Начальные условия одинаковы для всех вариантов заданий: $x_1(0) = 2,\ \ x_2(0) = 1.$

2) Создайте таблицу аргументов и значений функций.

3) Найдите значение полученных функций в точке $t = 3{,}4$ или выберите точку самостоятельно.

4) Постройте графики полученных функций.

5) Постройте фазовый портрет системы.

Варианты заданий

N	a_1	b_1	c_1	d_1	a_2	b_2	c_2	d_2
9.1	4	2	3	-1	-7	-5	-3	2
9.2	4	2	3	-1	-9	-5	-3	2
9.3	4	2	3	-1	-6	-5	-3	2
9.4	4	2	3	-1	-6	-4	-3	2
9.5	4	2	3	-1	-6	-3	-3	2
9.6	4	2	3	-1	-6	-5	-3	2
9.7	4	2	3	-1	-6	-6	-3	2
9.8	4	2	3	-1	-4	-6	-3	2
9.9	4	2	3	-1	-5	-5	-3	2
9.10	4	2	3	-1	-7	-4	-3	2
9.11	3	2	3	-2	-9	-4	-3	1
9.12	3	3	3	-2	-9	-4	-3	1
9.13	-9	3	3	-2	-9	-4	-3	1
9.14	-4	2	3	-2	-9	-4	-3	1
9.15	-5	2	3	-2	-9	-4	-3	1
9.16	-6	-2	3	-2	-9	-4	-3	1
9.17	5	3	3	-2	-9	-4	-3	1
9.18	5	4	3	-2	-9	-4	-3	1
9.19	5	5	3	-2	-9	-4	-3	1
9.20	6	5	3	-2	-9	-4	-3	1

Задание 10.

1) Решите систему $\begin{cases} x_1' = (a - bx_2)x_1 \\ y_1' = (-c + dx_1)x_2 \end{cases}$ дифференциальных уравнений (автономную) с помощью функции **rkfixed** программы Mathcad. Начальные условия одинаковы для всех вариантов заданий: $x_1(0) = 3,\ \ x_2(0) = 1.$

2) Создайте таблицу аргументов и значений функций.

3) Найдите значение полученных функций в точке $t = 4,2$.
4) Постройте графики полученных функций.
5) Постройте фазовый портрет системы.

Варианты заданий

N	a	b	c	d	N	a	b	c	d
10.1	4	3	2	1	10.11	5	4	2	1
10.2	4	3	2	2	10.12	5	4	3	1
10.3	4	3,5	2	1	10.13	5	4	2	2
10.4	4	3,5	2	2	10.14	5	4	2	3
10.5	4	3,5	3	1	10.15	5	4,5	2	1
10.6	4	3,5	3	2	10.16	4	3	2	3
10.7	4	3,5	4	4	10.17	4	3	2	4
10.8	4	3,5	4	3	10.18	4	3,5	2	3
10.9	5	3	2	1	10.19	4	3,5	2	4
10.10	5	3	3	1	10.20	4	3,5	3	3

Указания к выполнению лабораторной работы № 4

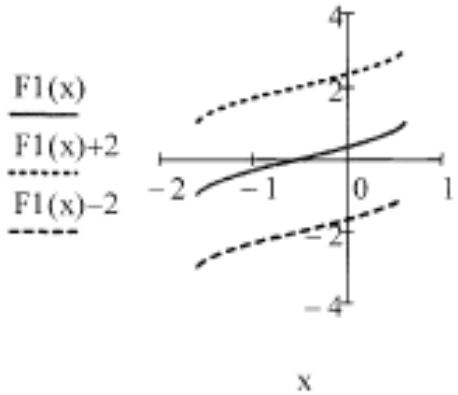
Задание 1. Вычислить неопределённый интеграл и построить три графика из семейства первообразных.

$$\int \frac{1}{\sqrt{-2\cdot x^2 - x + 2}}\,dx$$

Выполнение задания.

$$\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2 - x + 2}}\,dx \rightarrow \frac{\sqrt{2}\cdot \operatorname{asin}\left[\frac{\sqrt{5}\cdot(2\cdot x + 1)}{5}\right]}{2}$$ - вычисление интеграла

$$F1(x) := \frac{\sqrt{2}\cdot \operatorname{asin}\left[\frac{\sqrt{5}\cdot(2\cdot x + 1)}{5}\right]}{2}$$ - обозначение первообразной через F1(x)



- построение графиков первообразных

Ответ: :

$$\frac{\sqrt{2}\cdot \operatorname{asin}\left[\frac{\sqrt{5}\cdot(4\cdot x + 1)}{5}\right]}{2}.$$

Задание 2. Вычислить определённый интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)\cdot(1 - \cos(x))}\,dx.$$

Выполнение задания.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)\cdot(1+\cos(x))}\,dx \rightarrow \ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\sqrt{2}+1$$

$\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\sqrt{2}+1 = 0.467$ - точное(слева) и приближённое значение интеграла

Ответ: 0.467.

Задание 3. Найдите изображение заданной функции (изображение Лапласа).

Выполнение задания.

$$f1(t) := (\cos(t))^2$$

$$f1(t)\ \text{laplace} \rightarrow \frac{s^2+2}{s^3+4\cdot s}$$

Указание. Панель **Символьная,** команда **Laplase**

Ответ: $\dfrac{s^2+2}{s^3+4\cdot s}$.

Задание 4. Найдите оригинал заданной функции (обратное преобразование Лапласа).

Выполнение задания.

$$F(s) := \frac{s+4}{s^2+4s+5}$$

$$F(s)\ \text{invlaplace} \rightarrow e^{-2\cdot t}\cdot(\cos(t)+2\cdot\sin(t))$$

Указание. Панель **Символьная,** команда **Invlaplase**

Ответ: $e^{-2\cdot t}\cdot(\cos(t)+2\cdot\sin(t))$.

Задание 5. Решите дифференциальное уравнение с помощью операционного исчисления (преобразования Лапласа).

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t)+4y = 8\sin 2t, \quad y(0) = 3, \quad \frac{d}{dt}y(0)= -1$$

Выполнение задания.

Известно, что изображения функций и их производных находятся по формулам (запись в текстовой области):

$y(t) \div Y(s)$

$y'(t) \div sY(s) - y(0)$

$y''(t) \div s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$

Изображение левой части заданного уравнения будет иметь вид:

$s^2 \cdot Y(s) - s \cdot 3 - (-1) + 4 \cdot Y(s)$ (находится традиционным ручным способом)

Изображение правой части найдём с помощью команды **Laplase**:

$8 \cdot \sin(2 \cdot t)$ laplace $\rightarrow \frac{16}{s^2 + 4}$ (математическая область)

Общий вид операторного уравнения (в изображениях):

$$s^2 \cdot Y(s) - s \cdot 3 - (-1) + 4 \cdot Y(s) = \frac{16}{\left(s^2 + 4\right)}$$

Это уравнение является алгебраическим первого порядка. Решим его относительно Y(s):

$$s^2 \cdot Y(s) - s \cdot 3 - (-1) + 4 \cdot Y(s) = \frac{16}{\left(s^2 + 4\right)} \text{ solve}, Y(s) \rightarrow \frac{3 \cdot s + \frac{16}{s^2 + 4} - 1}{s^2 + 4}$$

Применим к полученному выражению обратное преобразование Лапласа, т.е. найдём оригинал для Y(s):

$$\frac{\left(3 \cdot s^3 + 12 \cdot s - s^2 + 12\right)}{\left(s^4 + 8 \cdot s^2 + 16\right)} \text{ invlaplace}, s \rightarrow 3 \cdot \cos(2 \cdot t) + \frac{\sin(2 \cdot t)}{2} - 2 \cdot t \cdot \cos(2 \cdot t)$$

Ответ:

$$y(t) = -2\cdot t\cdot\cos(2\cdot t) + \frac{1}{2}\cdot\sin(2\cdot t) + 3\cdot\cos(2\cdot t).$$

Задание 6. Решить систему дифференциальных уравнений с помощью операционного исчисления.

Выполнение задания.

Внимание! При записи задания в Mathcad в нужных местах ставится жирный знак равенства.

$$\frac{d}{dt}x(t) = 4x(t) + 2\cdot y(t) + 3 - e^{-t}$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = -9x(t) - 5y(t) - 3 + 2e^{-t}$$

- решаемая система (в Mathcad фигурная скобка системы не ставится)

$x(0) = 2 \quad y(0) = 1$ начальные условия

Ручным способом дифференциальную систему переведём в операторный вид (в изображениях Лапласа):

$$\begin{cases} sX(s) = 4X(s) + 2Y(s) + \dfrac{3}{s} - \dfrac{1}{s+1} \\ sY(s) = -9X(s) + 2Y(s) - \dfrac{3}{s} + \dfrac{1}{s+1} \end{cases}$$

(В Word скобку системы можно ставить)

Получили алгебраическую систему двух уравнений с двумя неизвестными X(s), Y(s).

Запишем её в стандартном виде и решим с помощью функции **solve**.

$$A := \begin{bmatrix} (4-s)X + 2Y = \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{3}{s} - 2 \\ -9X - (5+s)Y = \dfrac{3}{s} - \dfrac{2}{s+1} - 1 \end{bmatrix}$$

- матрица размером 2x1

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} := A \text{ solve}, X, Y \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{2\cdot s^2 + 14\cdot s + 9}{s^3 + s^2 - 2\cdot s} & \dfrac{22\cdot s^2 - s^3 + 39\cdot s + 15}{s^2 - 2\cdot s^3 - s^4 + 2\cdot s} \end{pmatrix}$$

$$X := \frac{2\cdot s^2 + 14\cdot s + 9}{s^3 + s^2 - 2\cdot s} \qquad Y := \frac{22\cdot s^2 - s^3 + 39\cdot s + 15}{s^2 - 2\cdot s^3 - s^4 + 2\cdot s}$$

- операторное решение системы

Вычислим оригиналы для X и У:

$$\frac{2\cdot s^2+14\cdot s+9}{s^3+s^2-2\cdot s}\ \text{invlaplace}\ \rightarrow \frac{25\cdot\sqrt{e^{2\cdot t}}}{3}-\frac{11\cdot e^{-2\cdot t}}{6}-\frac{9}{2}$$

$$\frac{22\cdot s^2-s^3+39\cdot s+15}{s^2-2\cdot s^3-s^4+2\cdot s}\ \text{invlaplace}\ \rightarrow \frac{e^{-t}}{2}+\frac{11\cdot e^{-2\cdot t}}{2}-\frac{25\cdot\sqrt{e^{2\cdot t}}}{2}+\frac{15}{2}$$

Ответ: $\begin{cases} x(t)=\frac{25}{3}e^{t}-\frac{11}{6}e^{-2t}-\frac{9}{2} \\ y(t)=\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{11}{2}e^{-2t}-\frac{25}{2}e^{t}+\frac{15}{2} \end{cases}$ - решение исходной системы.

Задание 7.

1) Решите дифференциальное уравнение первого порядка численным методом с помощью процедур **Given/Odesolve** программы Mathcad.
2) Постройте график полученного решения.
3) Найдите значение полученного решения (функции) в точке $x=3{,}6$.

Дифференциальное уравнение первого порядка должно быть записано в виде, разрешённом относительно производной, т.е. в виде $y' = f(t,y)$ и содержать одно начальное условие – значение функции $y(t_0)$ в некоторой точке t_0 (задача Коши).

Решение заданий будет выполняться с помощью команды **Odesolve(t, t_1)**. Здесь t – аргумент искомой функции y=y(t), которая ищется на отрезке $[0; t_1]$. Левая нулевая граница этого отрезка задана по умолчанию. В других случаях она задаётся начальными условиями.

Внимание! При записи задания в нужных местах ставится жирный знак равенства.

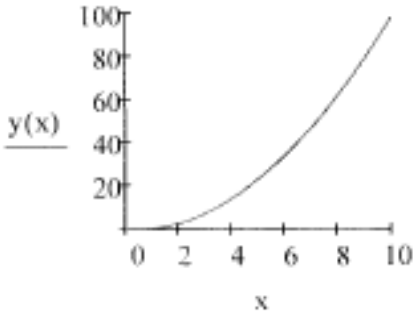
Выполнение задания.

Given - начало выполнения задания

$\frac{d}{dx}y(x) = x^3 - x\,y(x)$ - решаемое уравнение

$y(0) = 0$ - начальное условие

$y := \mathrm{Odesolve}(x, 10)$ - решение уравнения на отрезке [0;10]



- график функции y(x)

$y(3.6) = 10.963$ - значение функции в точке $x = 3.6$

Ответ: $y(3.6) = 10.963$, график см. выше.

Задание 8.

1) Решите дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + 2y' = \sin 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

2) Постройте график полученного решения (функции).
3) Создайте таблицу аргументов и значений функции.
4) Найдите значение полученного решения в точке $t = 2{,}1$ или выберите точку самостоятельно.

Напоминание! Не рекомендуется выполнять слишком много заданий в одном документе Mathcad, т.к. могут встретиться одинаковые обозначения разных функций и программа их не сможет использовать. Можно открыть новый документ или в старом переобозначить функции.

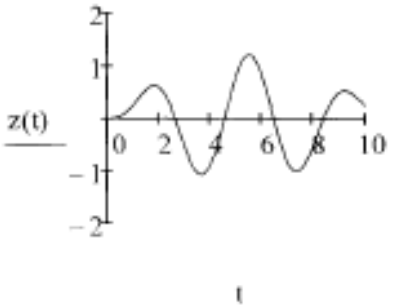
В решении данного уравнения функция y обозначена через z.

Выполнение задания.

Given

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t) + 2z(t) = \sin(2t) \qquad z(0) = 0 \qquad z'(0) = 0$$

z := Odesolve(t ,20)



t := 1 .. 100 - задание значений t для построения таблиц выполняется с помощью панели Матрица

t =	z(0.1t) =
1	$3.323\cdot10^{-4}$
2	$2.635\cdot10^{-3}$
3	$8.759\cdot10^{-3}$
4	0.02
5	0.039
6	0.065
7	0.098
8	0.14
9	0.189
10	0.244
11	0.303
12	0.364
13	0.424
14	0.481
15	0.532
...	...

- для создания таблицы вводится аргумент или функция и нажимается знак обычного равенства. Ниже функции появляется таблица. В данной таблице шаг вычислений равен 0,1

z(2.1) = 0.557

Ответ: z(2.1) = 0.557. График и таблица см. выше.

Задание 9.

1) Решите систему $\begin{cases} x_1' = a_1x_1 + b_1x_2 + c_1 + d_1e^{-t} \\ y_1' = a_2x_1 + b_2x_2 + c_2 + d_2e^{-t} \end{cases}$ дифференциальных уравнений с помощью процедур **Given/Odesolve** . Начальные условия одинаковы для всех вариантов заданий: $x_1(0) = 2,\ \ x_2(0) = 1.$

2) Создайте таблицу аргументов и значений функций.

3) Найдите значение полученных функций в точке $t = 3,4$ или выберите точку самостоятельно.
4) Постройте графики полученных функций.
5) Постройте фазовый портрет системы.

Выполнение задания.

Given

$$\frac{d}{dt}y1(t) = y2(t)$$

$$\frac{d}{dt}y2(t) = -y1(t) - 0.1\,y2(t)$$

- система уравнений

$y1(0) = 0.1 \qquad y2(0) = 0$ - начальные условия

$$\begin{pmatrix} y1 \\ y2 \end{pmatrix} := \text{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} y1 \\ y2 \end{pmatrix}, t, 10\right]$$

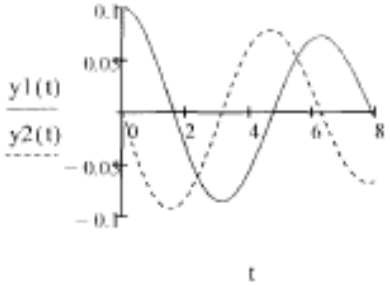
- решение системы

$t := 0, 0.1 .. 8$ - шаг аргумента равен 0.1

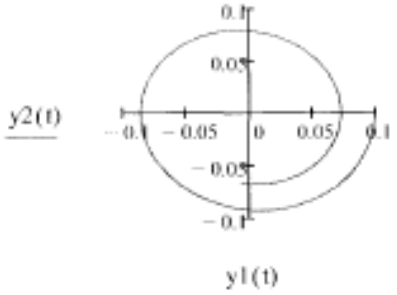
t =	y1(t) =	y2(t) =
0	0.1	0
0.1	0.1	$-9.934 \cdot 10^{-3}$
0.2	0.098	-0.02
0.3	0.096	-0.029
0.4	0.092	-0.038
0.5	0.088	-0.047
0.6	0.083	-0.055
0.7	0.077	-0.062
0.8	0.07	-0.069
0.9	0.063	-0.075
1	0.055	-0.08
1.1	0.047	-0.084
1.2	0.039	-0.088
1.3	0.03	-0.09
1.4	0.021	-0.092
...	...	...

$y1(3.7) = -0.073$

$y2(3.7) = 0.044$ - значения функций в точке



- графики функций



- фазовый портрет системы

Ответ: y1(3.7) = -0.073,
y2(3.7) = 0.044 ,
таблицу и графики см. выше.

Задание 10.

1) Решите систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = (4 - 2.5x_2)x_1 \\ y_1' = (-2 + x_1)x_2 \end{cases}$$ с начальными условиями $x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = 1$.

с помощью функции **rkfixed** программы Mathcad.

2) Создайте таблицу аргументов и значений функций.

3) Найдите значение полученных функций в точке 2.7 или выберите точку самостоятельно.

4) Постройте графики полученных функций.

5) Постройте фазовый портрет системы.

Компоненты функции **rkfixed**(y0,t0,t1,M,D) :

y0 – матрица (вектор) начальных значений системы;
t0 – начальная точка расчёта;
t1 – конечная точка расчёта;
M – число шагов, на которых находится решение;
D – векторная функция двух аргументов: скалярного и векторного.

Выполнение задания.

$ORIGIN := 1$ - задаёт нумерацию строк и столбцов с № 1 в таблице (матрице) решений

$x := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ - матрица-столбец размером (2 x 1) из начальных условий

$D(t,x) := \begin{bmatrix} (4 - 2.5 \cdot x_2)x_1 \\ (-2 + 1 \cdot x_1)x_2 \end{bmatrix}$ - матрица-столбец размером (2 x 1) из правых частей системы

Внимание! Будьте внимательны при наборе матрицы D. Переменные **x** записываются с нижними индексами.Нижние индексы вставляются с помощью кнопки **[** (квадратная скобка) или с помощью панели **Матрицы**

$M := 400$ - число точек деления интервала [0;10]

$u := rkfixed(x, 0, 10, M, D)$ - нахождение функций x1 и x2

Функция **rkfixed** создаёт матрицу чисел, где столбцами являются значения аргумента и значения искомых функций. В Mathcad эти столбцы обозначаются через заданную выше функцию u в виде $u^{\langle 1 \rangle}, u^{\langle 2 \rangle}, u^{\langle 3 \rangle}$. Для сходства с исходными функциями переобозначим их в виде:

$t := u^{\langle 1 \rangle}$ - столбец аргументов

$x1 := u^{\langle 2 \rangle}$ - столбец значений функции x1

$x2 := u^{\langle 3 \rangle}$ - столбец значений функции x2

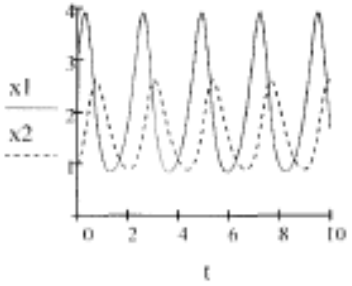
Внизу изображена часть таблицы аргументов и значений функций. Для того, чтобы увидеть её скрытые части, нужно щёлкнуть таблицу левой кнопкой мыши и с помощью появившегося движка таблицы найти необходимые

значения.

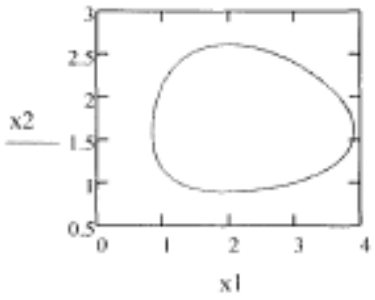
Например, x1(2.7) = 3.759
x2(2.7) = 1.923.

u =

	1	2	3
1	0	3	1
2	0.025	3.112	1.027
3	0.05	3.223	1.057
4	0.075	3.33	1.091
5	0.1	3.434	1.13
6	0.125	3.532	1.173
7	0.15	3.622	1.22
8	0.175	3.703	1.271
9	0.2	3.773	1.328
10	0.225	3.831	1.389
11	0.25	3.874	1.455
12	0.275	3.901	1.525
13	0.3	3.91	1.6
14	0.325	3.9	1.678
15	0.35	3.872	1.759
16	0.375	3.823	...



- графики функций x1 и x2:



- фазовый портрет ситемы

Ответ: x1(2.7) = 3.759
x2(2.7) = 1.923, таблицу и графики см. выше.

Список литературы

1. Васильев А.Н. Mathcad 13 на примерах. – Спб.: БХВ-Петербург, 2006. – 528 с.
2. Дьяконов В.П., Абраменкова И.В. MathCAD 7.0 в математике, физике и в Internet. - М.: "Нолидж", 1998. – 352 с.
3. Кирьянов Д.В. Mathcad 14. – Спб.: БХВ-Петербург, 2007. – 704 с.
4. Макаров Е.Г. Mathcad: Учебный курс. – СПб.: Питер, 2009. – 384с.
5. Плис А.И., Сливина Н.А. Mathcad: математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб.пособие. - М.: Финансы и статистика,1999. - 656 с.

Содержание

1 Знакомство с основами компьютерной системы Mathcad ……. 3
Введение …….. 3
1.1 Основные характеристики Mathcad ……. 4
1.2 Начало работы с Mathcad …….. 4
1.3 Математические панели Mathcad …… …… 6
1.4 Виды курсоров в Mathcad …… 9
1.5 Ввод формул ……. 10
1.6 Ввод текста …….. 10
1.7 Простейшие арифметические вычисления…… …….. . 10
1.8 Определение переменной и её значение. Вычисление значений выражений, содержащих переменные …….. 11
1.9 Определение и вычисление значения функции в точке. Построение таблицы значений функций …….. 12
1.10 Построение декартова графика функции …… 13

2 Лабораторные работы …… 14
2.1 Лабораторная работа № 1 ……. 16
Указания к выполнению лабораторной работы № 1 …… 24
2.2 Лабораторная работа № 2 …….. 27
Указания к выполнению лабораторной работы № 2 …… 34
2.3 Лабораторная работа № 3 ……. 40
Указания к выполнению лабораторной работы № 3 …….. 47
2.4 Лабораторная работа № 4 ……. 54
Указания к выполнению лабораторной работы № 4 …….. 64

Сводный план 2014 г., поз. 220

Вячеслав Михайлович Дулэпо

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Методические указания и задания по выполнению лабораторных работ для студентов специальности 5В071800 - Электроэнергетика

Редактор Н.М. Голева
Специалист по стандартизации Н.К.Молдабекова

Подписано в печать _____ Формат 60х84 1/16
Тираж 300 экз. Бумага типографская №1
Объём 4,8 уч.-изд.л. Заказ ____ Цена 2400 тг.

Копировально-множительное бюро
НАО Алматинский университет энергетики и связи
050013, Алматы, Байтурсынова, 126.