АЛМАТЫ
ЭНЕРГЕТИКА
ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС
ИНСТИТУТЫ

**Өнеркәсіптік
жылуэнергетика кафедрасы**

ЖЫЛУЭНЕРГЕТИКАЛЫҚ ЕСЕПТЕУДЕГІ КОМПЬЮТЕРЛІК ТЕХНОЛОГИЯЛАР

Зертханалық жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар
(050717 - Жылуэнергетика мамандығының студенттері үшін)

Алматы 2007

ҚҰРАСТЫРҒАНДАР: Борисова Н.Г., Бергенжанова Г.Р., Қасымов, А.С. Жылуэнергетикалық есептеудегі компьютерлік технологиялар. Зертханалық жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар (050717-Жылуэнергетика мамандығының студенттері үшін) - Алматы: АЭжБИ, 2007. – 35 б.

Әдістемелік нұсқау «Жылуэнергетикалық есептеудегі компьютерлік технологиялар» курсының негізгі бөлімдері бойынша зертханалық жұмыс тапсырмаларының нұсқаларын баяндайды. Жылуэнергетикалық және жылутехнологиялық есептеулерде жиі қолданылатын сандық әдістер жөнінде қысқаша теориялық мәлімдемелер жазылған. Есептеуге, алгоритмдер мен программаларды құрастыруға мысал келтірілген. Әдістемелік нұсқау жұмысты орындау тәртібінен, есептелінген эксперимент қорытындыларын өңдеу және жұмысты рәсімдеу, бақылау сұрақтары мен пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады.

Без. 1, кесте. 3, библиогр. – 5 атау.

ПІКІРШІ: Қазақ КжКА, ЭЭ каф-ң меңгерушісі техникалық ғылым докторы Қойшиев Т.Қ.

Алматы энергетика және байланыс институты 2007ж. жоспары бойынша басылады.

Кіріспе

«Жылуэнергетикалык есептеудегі компьютерлік технологиялар» курсы бойынша өткізілетін зертханалык жұмыстарды орындаудың мақсаты, студенттердің жылуэнергетикалық жүйелерді, кондырғыларды, процестерді есептегенде, дәрістік және практикалық сабактарда алған білімдерін толықтыруға, сондай-ақ:

-жылуэнергетикасы мен жылутехнологиясында қолданылатын жұмыстық денелердің жылуфизикалық касиеттерін есептеу;

- жылутехникалық кестелер есебі мен функцияларын жуыктау;

-жылуалмасу мен гидродинамиканың сызықты емес алгебралық теңдеулерін сандық әдіс бойынша есептеу;

- сандық интегралдау;

- конвективті жылуалмасу есебін шығару;

- жылуэнергетика мен жылутехникадағы тиімділікті есептеу.

әдістерін игере білуі.

Одан басқа, студенттер, зертханалық жұмыстарды орындау кезінде файлдар мен алгоритмдерді құрастыруды және дұрыс жазуды меңгереді, сондай-ақ программа құрастыруды, есептеу экспериментін жасауды, нақты жағдайдағы және есептеу эксперименті арқылы алынған мәндерді теориялық берілгендермен салыстыруды үйренеді. Және де істелінген жұмыстарды өңдей білуді, анализдеуді, есептеу экспериментінің қорытындыларын тапсыра білуге дағдыланады.

Студенттердің осы курстан үйренген білімдері, қалыптасқан дағдылары, икемділігі, бұдан әрі, басқа курстарды оқығанда қажет болады, көбінеки «Жылутехнологиялық қондырғылар мен жүйелердің тиімділігі мен модельдеу әдісі» курсында курстық және дипломдық жұмыстарды орындағанда, бакалаврлар мен магистрлердің диссертациялық жұмыстарында, СГЗЖ өткізгенде қажет етіледі.

Компьютерлік сыныпта зертханалық жұмыстарды орындаудан бұрын, оқу зертханасындағы есептеуіш техникамен жұмыс істеу жөніндегі техника қауінсіздігінің ережелерімен мұқият танысу керек.

Зертханалық жұмыс №1. Жылу энергетикасында қолданылатын жұмыстық денелердің жылуфизикалық қасиеттерін есептеу

1.1 Жұмыстың мақсаты

Жұмыстық денелердің жылуфизикалық қасиеттерін жылдам есептегенде:

-ЭЕМ-ға енгізілетін жылуфизикалық сипаттамалардың жазылу әдістемелерімен танысу;

- есептеулерге программалар құрастыруды үйрену;

- есептеулерге алгоритм құрастыруды үйрену;

- алынған мәндерге талдау жасау әдістерін үйрену;

-алынган мәндер бойынша сызбақтарды тұрғызу әдістемелерімен танысу;

- берілген кысым мен температура аралығында жұмыстык дененің жылуфизикалык шамаларының мәндерін ала білуді игеру.

1.2 Теориялык бөлім

Жылутехнологиялык құбылыстар мен қондырғыларды есептегенде, жұмысшы денелер мен жылутасымалдағыштардың кысым мен температураның үлкен аралығында берілген жылуфизикалық қасиеттері қолданылады. Бұндағы ең маңызды жағдайлардың бірі, акпараттарды алу қаркындылығы мен оны PC жадысында жинақы түрде көрсете білу. Кесте түрінде берілген жұмыстық денелердің қасиеттерін жады шапшаңдылығы шектеулі PC-де есептеу өте қолайсыз яғни ішкі жады бойынша кестенің әрбір бөлігін жеке-жеке бірнеше қайтара есептеуге тура келеді. Осындай тығырықтардан шығатын жолдардың бірі – ол кесте мәндерін қосымша жадыда сактау мүмкіншілігі, ягни барынша дәл мәндердің арасында жаткан шамаларды төменгі ретті интерполяция полиномы арқылы анықтаймыз.

Эксперименттік тұрғыдан алынған мәндерді күй теңдеуі аркылы есептеу ең оңай әдістердің бірі болып табылады, заттардың қасиетін сипаттайтын теңдеулерге қойылатын негізгі талаптар:

- дәлділігі өте жоғары болу керек;
- қасиеттердің мәні үлкен интервалда жату керек;
- коэффициенттер саны минималды болу керек.

Жылуэнергетика қондырғыларында көп тараған жұмыстық дене – су және су буы.

Су мен су буының үлгісін екі бағытта құрастыруға болады. Бірінші бағыт – молекулярлы кинетикалық теория мен статикалық механика бағытында үлгіні теориялық негіздеу – Ван-дер Ваальс, Боголюбов, Майер, идеалды газ теңдеуі және т.б. Екінші бағыт – эмпирикалық, яғни эксперименттік берілгендердің үлкен массивтерін өңдеу негізінде күй теңдеуін алу.

Сұйықтар мен газдардың қасиеттерін сипаттайтын көптеген теңдеулер «түр полиномы» түрінде беріледі

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x^i \ .$$

1.3 Компьютер мен оны құраушы программалардың сипаттамалары

Зертханалық жұмысты орындау үшін жадысы 256 МБ-тан кем емес Pentium 4 типті компьютер қажет етіледі, сондай-ақ орнатылған ОЖ Windows 98 кем емес және ең соңғы үлгідегі Mathcad, Borland Delphi, Pascal және т.б. программалар қолданылады.

1.4 Жұмысты орындау тәртібі

1.4.1 Студент оқытушыдан формула түрінде жазылған тапсырманы алып, оны зертханалық жұмыс бойынша орындалатын есептеуге енгізу керек.

Мысал үшін, су буының энтропиясына арналған теңдеу талап етілетін дәлділікке сәйкес келіп және оның қысымы 0,0024 МПа мен 40 МПа, температурасы қанығу сызығынан бастап 660^{0}C аралығында қолданылады.

$$s = s_0 + A_4 \cdot p + A_5\left(\frac{p}{2}\right) - R\ln(1000 \cdot p), \text{ кДж/кг}, \qquad (1.1)$$

мұндағы

$$s_0 = \frac{a_1 \cdot \ln y + 2a_2 \cdot y - \frac{a_3}{y} + a_4}{1000}, \qquad (1.2)$$

$$A_4 = -b_1 + \frac{2b_2}{y^3} + \frac{2b_3}{(y-b_4)^3}, \qquad (1.3)$$

$$A_5 = \frac{8 \cdot c_1}{y^8} + \frac{14 \cdot c_2}{y^{13}}, \qquad (1.4)$$

$y = \frac{t}{1000}$;

R=0,46151 кДж/кг·К;

t- температура,^{0}С; p-кысым, МПа;

a_i, b_i, c_i -коэффициенттерінің мәні 1 - кестеде келтірілген.

1-кесте

i	a_i	b_i	c_i
1	$1{,}48285\cdot10^3$	$25\cdot10^3$	$-2{,}5993\cdot10^3$
2	$3{,}79026\cdot10^3$	$-1{,}1354\cdot10^3$	$-1{,}2604\cdot10^3$
3	$4{,}6174\cdot10^3$	$-4{,}381\cdot10^3$	-
4	$1{,}08161\cdot10^3$	$0{,}21\cdot10^3$	-

1.4.2 Есептің алгоритмін блок-сұлба немесе мәтіндік үлгі түрінде құрастыру керек.

Мысалы (1.1) формуласы бойынша энтропияны есептеудің алгоритмін құрастыру:

а) a_i, b_i, c_i (i=1,2,3,4) айнымалыларының мәндерін енгіземіз;

б) (1.2) формулаға a_1, a_2,a_3,a_4,y-ң мәндерін қоямыз;

в) (1.3) формулага b_1, b_2, b_3, b_4,y-ң мәндерін қоямыз;

г) (1.4) формулаға c_1, c_2, c_3, c_4,y-ң мәндерін қоямыз;

д) (1.2), (1.3), (1.4) формулаларынан алынған мәндерді (1.1) формулаға қоямыз.

Мұнда кысым p=20 МПа, температура t=400^{0}С, $y = \frac{t}{1000}$, R=0,46151 кДж/кг·К тең.

1.4.3 Есепті шығару үшін 1.4.2 бөліміндегі есептің алгоритмі бойынша программа құрастырамыз және рәсімделген жұмыста осы программаға сілтеме жасаймыз.

Мысал үшін (1.1) – формуласы бойынша энтропияны есептегенде Зертханалық жұмыс №1/книга 1.*xls* документіне өту керек (А-косымшасы).

1.4.4 Программа бойынша есептеулерді жүргізу.

1.4.5 Орындалған жұмысты электрондық түрде рәсімдеп, өткізу керек.

1.5 Жұмысты рәсімдеу

Істелінген жұмысты электрондық түрде рәсімдейді. Ол келесідей бөлімшелерден тұрады:

- жұмыстың мақсаты мен қысқаша мазмұны;
- тапсырма;
- блок-сұлба немесе мәтіндік үлгіде жазылған алгоритм;
- программа;
- бастапқы берілгендері енгізілген кесте;
- есептеу экспериментінің қорытындысы;
- заңдылықтар бойынша тұрғызылған сызбақ;
- алынған мәндер талдауы мен қорытынды.

1.6 Бақылау сұрақтары

1.6.1 Көп жағдайда жұмыстық дененің жылуфизикалық қасиеттері қандай түрде кездеседі?

1.6.2 Су мен су буының жылуфизикалық параметрлерінің, қысым мен температураға тәуелділігіне мысал келтір.

1.6.3 Жылуфизикалық параметрлері берілген есептің алгоритмін не үшін құрастырамыз?

1.6.4 Жылуфизикалық шамалардың алынған мәндерінің дәлділігінің шектеулігі неге байланысты?

[1-3]-әдебиеттер

Зертханалық жұмыс № 2. Функцияны интерполяциялау

2.1 Жұмыстың мақсаты:

- торлы (кестелі) функцияларға интерполяция жасай білу әдеттерін қалыптастыру;
- бастапқы нүктесі мен полином мүшелерінің саны өзгертілген полиномиалды интерполяция әдісімен функция мәнін таба білуді үйрену;
- полиномиалды интерполяция әдісімен кестені жиілендіруді орындай білу;
- есептің алгоритмі мен программасын құрастыра білуді игеру;
- компьютерді игеру.

2.2 Теориялық бөлім

Функцияны интерполяциялау есебі сандық анализдің негізгі есебінің бірі болып табылады. Егер $a \leq x \leq b$ кескінінде x-ң кейбір нүктелерінде $f(x)$ функциясының мәндері белгілі болса, онда x-ң барлық мәндері үшін $f(x)$ функциясын қалыптастыру жиі талап етіледі. Бұл мәндер бақылау (өлшеу) қорытындысында қандай-да бір болмыс экспериментте немесе есептеу қорытындысында табылған болуы мүмкін. Бұдан басқа $f(x)$ функциясы формула түрінде берілуі мүмкін және оның мәнін осы формуламен есептеу өте қиын, сондықтан функциялар үшін кестенің кез-келген нүктесінде қажет етілетін дәлділікті функцияның мәніне, жуықтап есептеу оңай болатын өзге қарапайым формулаларды қолданған жөн. Қорытындысында келесідей математикалық есеп туындайды.

$a \leq x \leq b$ кескінінде $\omega_n \{x_0=a<x_1<...<x_n=b\}$ торы берілсін делік және оның түйіндерінде $y(x_0)=y_0,...\ y(x_i)=y_i,...\ y(x_n)=y_n$-ге тең $y(x)$ функциясының мәні болсын тор түйіндеріндегі $y(x)$ функциясына сәйкес келетін $f(x)$ функциясының интерполяциясын тұрғызу керек.

$$f(x_i)=y_i,\ i=0,1,...,n. \qquad (2.1)$$

Интерполяцияның негізгі мақсаты, кестеде берілмеген x мәні үшін $f(x)$ мәнін есептеудің тез әрі үнемді алгоритмін алу.

Негізгі сұрақ: $f(x)$ интерполянтын таңдау жолдары қандай және $y(x)-f(x)$ қателігін қалай бағалауға болады?

$f(x)$ интерполяцияланатын функциясы, негізінде, кейбір қарапайым функциялардың сызбақты комбинациясы түрінде тұрғызылады

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k \cdot \Phi_k(x), \qquad (2.2)$$

мұндағы $\{\Phi_к(x)\}$-тұрақтандырылған сызықты тәуелсіз функция;

$c_0, c_1,..., c_n$ - әзірше анықталмаған коэффициенттер.

(2.1) теңдеуден n+1 жүйесін аламыз

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \cdot \Phi_k(x_i)=y_i, \qquad i=0,1,...,n. \qquad (2.3)$$

$\{\Phi_к(x)\}$ сызықты тәуелсіз функция жүйесі ретінде, көптеген жағдайларда, дәрежелі функциялар $\Phi_к(x)=x^k$ (бұл жағдайда f=$P_n(x)$ – n дәрежесінің полиномы); тригонометриялық функциялар $\{\Phi_к(x)=\cos kx,\ \sin kx\}$($f$-тригонометриялық полином), соңымен қатар рационалды функциялар қолданылады.

$$\frac{\alpha_0+\alpha_1 x+...+\alpha_m x^m}{\beta_0+\beta_1 x+...+\beta_p x^p}.$$

Сонымен қатар интерполяцияланатын фунциялардың баска да түрлері қолданылады.

Интерполяциялық полиномды карастырайық.

2.2.1 Полиномиалды интерполяция

[a,b] кескінінде жатқан кез-келген $f(x)$ үздіксіз функциясы кейбір $P_n(x)$ полиномына жуықталған болуы мүмкін.

Интерполяциялық полиномды келесідей түрде карастырып көрейік

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k x^k\ , \qquad (2.4)$$

мұндағы $C_к$ - әзірше анықталмаған коэффициенттер.

$\{\Phi_к(x)\}$ базисі ретінде біз бір мүшеліктерден тұратын $1, x, x^2, ..., x^n$ базисін алдық. Есептеу жүргізу үшін ең оңтайлы тәсілге, n дәрежелі $\{l_к(x)\}$ Лагранж полиномдар базасы немесе Логранж коэффициенттері жатады

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, & егер \quad i = k \\ 0, & егер \quad i \neq k, i, k = 0, 1, ..., n \end{cases} \tag{2.5}$$

Бұдан n дәрежесінің полиномы келесі шартты қанағаттандыратынын көруге болады

$$l_k(x) = l_k^{(n)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}. \tag{2.6}$$

$l_к(x)$ полиномы $x_к$ нүктесінде $y_к$-ң мәндерін қабылдайды және $j \neq к$ болғанда қалған барлық x_j түйіндерінде нөлге тең.

Бұдан интерполяциялық полином дәрежесі

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) y_k = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i \neq k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \tag{2.7}$$

n-нен жоғары емес және $P_n(x_i) = y_i$ болатыны шығады.

(2.7) формуланы Логранж формуласы деп атайды.

2.2.2 Ньютонның интерполяциялық формуласы

Ньютонның интерполяциялық формуласымен ЭЕМ-да есептеулер жүргізген ыңғайлы. Оны жазу үшін «бөлінген айырмалар» деп аталатын шамаларды енгізу керек.

Бірінші реттік бөлінген айырмашылықтар былай анықталады

$$y(x_i, x_j) = \frac{[y(x_i) - y(x_j)]}{(x_i - x_j)}. \tag{2.8}$$

Екінші реттік бөлінген айырмашылықтар

$$y(x_i, x_j, x_k) = \frac{[y(x_i, x_j) - y(x_j, x_k)]}{(x_i - x_k)}. \tag{2.9}$$

Ендеше интерполянта мынадай болады

$$f(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1}) y(x_0, x_1, ..., x_k). \tag{2.10}$$

(2.10)-теңдеуді Ньютон полиномы деп атайды.

Бөлінген айырмашылықтарды есептегеннен кейін, Ньютон полиномын Горнер сызбасымен есептеу ыңғайлы

$$f(x) = y(x_0) + (x - x_0)\{y(x_0, x_1) + (x - x_1)[y(x_0, x_1, ..., x_k) + ...]\}. \qquad (2.11)$$

Жоғары дәрежелі полиномдарды есептегенде жуықтау қателіктеріне әкеліп соқтыратынын ескеру керек.

2.2.3 Интерполяцияны колдану

Интерполяция жуықтап есептелінетін көптеген есептерде қолданылады.

Физикалық экспериментті өңдеу дегеніміз – эксперимент тұрғысынан алынған кесте түріндегі сипаттамалық шамаларға арналған жуықталынған формулаларды құрастыру.

Есептеулік эксперименттердің берілгендері бойынша жуықталынған формулаларды құрастыру. Бұнда интерполяцияның стандартты емес мәселелері туындайды, яғни әдетте құрылымы өте қарапайым формулалар жазылуы мүмкін.

Субтабуляциялау-кестелерді жиілендіру деген мағына береді, ол эксперимент тұрғысынан берілген шамалар аз болған жағдайда немесе функцияны есептеу қиын болған жағдайда қоланылады. Жадыға кішігірім кесте енгізіледі, ал есептеуге керекті функцияның мәндері қажеттілігіне байланысты интерполяциялық формула бойынша анықталады.

Интерполяция, сондай-ақ кері интерполяциялау есептерінде де колданылады: $y_i = y(x_i)$ кестесі берілген, x_i функциясын y_i-ке қатысты табу керек. Кері интерполяциялауға, мысал ретінде, теңдеудің түбірін табатын есептерді атауға болады.

Интегралды есептегенде, интегралдық теңдіктерге негізделетін дифференциалдық теңдеулер үшін аппроксимация айырмашылықтарын жазуда да интерполяциялық формулалар қолданылады.

2.3 Жұмысты орындау тәртібі

2.3.1 Студент оқытушыдан кесте түрінде берілген тапсырманы алу керек.

Мысалы, 2 - кестеде булану жылуының температураға тәуелділігі берілген.

2-кесте

t,^{0}C	r, кДж/кг
10	147,7
20	142,2
30	136,2
40	129,7
50	122,5

2.3.2 Сызықты интерполяция мен (екінші, үшінші реттік) интерполяциялық полином әдістемесі арқылы нақты бір нүктеге сәйкесті берілген шаманың мәнін табу керек.

Бастапқы нүктенің мәнін өзгертіп, есепті қайтадан жүргізу керек.

2.3.3 Есептің алгоритмін блок-сұлба немесе мәтіндік үлгі түрінде құрастыру.

Мысалы булану жылуының (r) есептік алгоритмін сызықты интерполяция әдісімен құрастыру:

- кестеге бастапқы берілгендерді енгіземіз;
- $t=35^0C$ температурадағы r булану жылуының мәнін, сызықты интерполяция формуласы бойынша табамыз

$$r=\frac{(r_2-r_1)\cdot(t-t_1)}{(t_2-t_1)+r_1},$$

мұндағы $t=35^0C$ – r-ді табуға қажетті температураның мәні және бұнда $t_1 \le t \le t_2$ және $r_1 \le r \le r_2$.

Ньютон полиномын қолдану кезінде:

- бірінші реттік бөлінген айырмашылықтарды келесідей анықтаймыз

$$r(t_i,t_j)=\frac{r(t_i)-r(t_j)}{(t_i-t_j)};$$

- екінші реттік бөлінген айырмашылықтарды келесідей анықтаймыз

$$r(t_i,t_j,t_k)=\frac{r(t_i,t_j)-r(t_j,t_k)}{(t_i-t_k)};$$

- үшінші реттік бөлінген айырмашылықтарды келесідей анықтаймыз

$$r(t_i,t_j,t_k,t_l)=\frac{r(t_i,t_j,t_k)-r(t_j,t_k,t_l)}{(t_i-t_l)};$$

- төртінші реттік бөлінген айырмашылықтарды келесідей анықтаймыз

$$r(t_i,t_j,t_k,t_l,t_n)=\frac{r(t_i,t_j,t_k,t_l)-r(t_j,t_k,t_l,t_n)}{(t_i-t_n)} \quad \text{және т.б.}$$

$t=35^0C$-ғы – r-дің мәнін Горнер сұлбасы бойынша табамыз

$$r(t)=r(t_0)+(t-t_0)\cdot\left[r(t_0,t_1)+(t-t_1)\cdot\left\langle r(t_0,t_1,t_2)+(t-t_2)\cdot\{r(t_0,t_1,t_2,t_3)+(t-t_3)\}\cdot\left[r(t_0,t_1,t_2,t_3,t_4)+...\right]\right\rangle\right]. \quad (2.12)$$

2.3.4 Есепті шығару үшін 2.3.3 тармағында берілген алгоритм бойынша программа құрастырып, рәсімделген жұмыста программаға сілтеме жасау керек.

Мысал үшін, (2.12) бойынша есепті шығару үшін зертханалық жұмыс №2/Книга 1.*xls* құжатына (В - қосымшасы) өту керек.

2.3.5 Есепті программа арқылы шығару.

2.3.6 Істелінген жұмысты электрондық тұрғыда өткізу.

2.4 Компьютер мен оны құраушы программалардың сипаттамалары

Зертханалық жұмысты орындау үшін жадысы 256 МБ-тан кем емес Pentium 4 типті компьютер қажет етіледі, сондай-ақ орнатылған ОЖ Windows 98 кем емес және ең соңғы үлгідегі Mathcad, Borland Delphi, Pascal және т.б. программалар қолданылады.

2.5 Алынған мәндерді өңдеу

2.5.1 Бөлінген айырмашылықтар есебінің қорытындысын кесте түрінде көрсету.

2.5.2 Қажеттілігіне байланысты соңғы қорытынды мәндердің сызбағын тұрғызу.

2.5.3 Шыққан мәндерге талдау жасау, белгілі мәндердің орнына шыққан мәндерді қойып дәлділігін бағалау, қорытынды жасау.

2.6 Жұмысты рәсімдеу

Істелінген жұмыс электрондық түрде өткізіледі, оның құрамы:

- жұмыстың мақсаты мен қысқаша мазмұны;
- тапсырма;
- блок-сұлба немесе мәтіндік үлгіде жазылған алгоритм;
- программа;
- бастапқы берілгендері енгізілген кесте;
- есептеу экспериментінің қорытындысы;
- заңдылықтар бойынша тұрғызылған сызбақ;
- алынған мәндер талдауы мен қорытынды.

2.7 Бақылау сұрақтары

2.7.1 Қандай жағдайда функцияны жуықтап есептеу қолданылады?

2.7.2 Базалық функцияларға мысал келтір.

2.7.3 Сызықты және полиномды интерполяцияны қолдану кезіндегі қорытынды мәнінің дәлділігі жөнінде әңгімеле.

2.7.4 Егер бастапқы берілген нүктені өзгертсек, ол ізделініп отырған шаманың дәлділігіне қалай әсер етеді?

2.7.5 Егер полином дәрежесін өзгертсек ше?

2.7.6 Алынған мәнінің дәлділігін бағала.

2.7.7 Интерполяцияның жылутехникалық есептерде қолданылуына мысал келтір.

[1-2]-әдебиеттер

Зертханалық жұмыс №3. Трансценденттік теңдеулердің түбірін табу

3.1Жұмыстың мақсаты

- жылуэнергетикалық және жылутехникалық есептерді шығаруда трансценденттік теңдеулердің түбірін табу әдістемесін қолдануды үйрену;

- әдістердің әмбебаптылығы және дәлдігі, сәйкестілік жылдамдығы жөнінде мағлұматтар алу;
- есептің алгоритмі мен программасын құрастыра білуге машықтану;
- компьютерлік құрылымдарды игеру.

3.2 Теориялық бөлім

Ғылыми және инженерлік тәжірибе жұмыстарын жасағанда алгебралық есептерді шығару жиі кездеседі. Мұндай есептерді шығару әдісі, есептің типіне байланысты.

Алгебралык есептерді шығару әдісі тура және біртіндеп жақындау (итерационды) болып екіге бөлінеді.

Тура әдіс – бұл, мысал үшін квадраттық теңдеулердің түбірін табу.

Итерациялық әдісте процедура кейбір алгоритмдерді бірнеше рет қолдану түрінде беріледі.

Бұндай есептерді шығарғанда, олардың түбірлері накты деп есептелінеді. Теңдеудің түбірін табу әдетте екі этаптан тұрады . Бірінші этапта есепті шығару мүмкіндігін, олардың мөлшерін анықтау және жуық мәні мен функцияның мәнінің өзгергендігін, интервалдардың мәні мен санын бағалау. Екінші этап – берілген интервалда теңдеудің түбірін табу.

$f(x)$=0 түрінде (мұндағы $f(x)$-алгебралық немесе трансцендентік функция) берілген бір үздіксіз функцияның түбірін табатын есепті шығарғанда, теңдеудің түбірін жуықтап есептеу жөнінде ғана айтуға болады, яғни $f(x^*)=0$ теңдігі орнағанға шейін есептелінетін $x=x^*$ аргументінің мәні.

Осы типті есептерді шығарудың бірнеше әдістемесін қарастырайық.

3.2.1 Жартылай бөлу әдісі (дихотомия)

Әдістің алгоритмі:

1. $f(x_n$)-нен $f(x_{n+1}$)-ге өту кезіндегі x тен таңбалының өзгергенге дейінгі бірдей интервал мәндері арқылы функцияның шамасын есептейді.

2. Аргументтің орташа мәнін анықтайды және $f(x_{op}$) табады.

3. Егер $f(x_{op}$)-ң таңбасы $f(x_n$)-ге сәйкес келсе, онда ары қарай есептеулерде $f(x_n$)-ң орнына $f(x_{op}$) қолданылады. Егер $f(x_{op})$ –ша $f(x_{n+1}$)-мен сәйкес келсе, онда соңғысының орнына $f(x_{op})$ алынады.

4. Түбірдің мәндері енгізілген интервал – тарылады. Егер $f(x_{op}$)=0 болса, онда процесс n итерацияда бітеді, бұдан интервалдың ені 2^n есеге азаяды.

3.2.2 Хорда әдісі

Әдістің алгоритмі:

1. $f(x_n$)-нен $f(x_{n+1}$)-ге өту кезіндегі x тең таңбалының өзгергенге дейінгі бірдей интервал мәндері арқылы функцияның шамасын есептейді.

2. Осы екі нүктеден өткен екі түзу, x өсінде келесі нүктеде қиылысады

$$x^* = \frac{x_n - f(x_n)(x_{n+1} - x_n)}{\left(f(x_{n+1}) - f(x_n)\right)}. \tag{3.1}$$

3. $f(x^*)$ функциясының мәнін табады. Белгілі мәндермен салыстырады және оны таңбалары сәйкес мәннің орнына қолданады.

4. $f(x^*)$-тің нөлге жақындығын тексереді.

2.3.3 Ньютон әдісі

[a,b] кескінінде екі рет дифференциалданатын $f(x)$ функциясының түбірі x^* болады. Бұдан $f(x^*)=0$ түбірдің мәні енгізілген интервалды аныктау үшін кері таңбалы функцияның мәнін табу қажет емес.

Әдістің алгоритмі:

1. x өсін қиып өтетін x_n нүктесіндегі қисыққа қатысты нүктеге сәйкес келетін x_{n+1} мәнін табамыз

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{3.2}$$

2. Берілген дәлдікті, нөлге функцияның жақындау шарты орындалғанша процедураны қайталаймыз.

3.3 Жұмысты орындау тәртібі

3.3.1 Студент оқытушыдан алгебралық теңдеу түрінде берілген тапсырманы алып, оны рәсімделген жұмысқа енгізу.

3.3.2 Есептің алгоритмін блок-сұлба немесе текстік үлгіде құрастыру.

3.3.3 Есептеу жүргізу үшін программа құрастырып, оған рәсімделген мәтінде сілтеме жасау.

ε берілген дәлдікті теңдеудің түбірінің мәнін, сипатталынған әдістер (2-н кем емес) арқылы анықтау.

Мысалы, $\varepsilon=0{,}001$ болғанда $[0{,}8;1]$ интервалында $0{,}1\sin x+x^3-1=0$ теңдеуінің түбірін Ньютон және дихотомия әдістері арқылы табу.

Дихотомия әдісінің алгоритмі:

a) $a=0{,}8$; $b=1$; $\varepsilon=10^{-3}$;

b) $f(a)=0{,}1\sin a+a^3-1=0{,}4163$;
$f(b)=0{,}1\sin b+b^3-1=0{,}0841$;

c) $x_{op} = \frac{(a+b)}{2} = 0.9$;

d) $f(x_{op})=0{,}1\sin x_{op}+x_{op}^3-1$;

e) Егер $f(x_{op})>0$ болса, онда a оның алдыңғы мәніне тең болады, $b= x_{op}$;
Егер $f(x_{op})<0$ болса, онда a x_{op} –ң алдыңғы мәніне тең болады, b сол күйінде өзгеріссіз қалады;

f) Егер $f(x_{op})\approx 0$ болса, онда есептеуді аяқтаймыз.

Ньютон әдісі есебінің алгоритмі:

1. $f(x_n)$ функциясынының мәнін анықтаймыз.
2. $f(x_n)$ функциясының бірінші туындысын табамыз.
3. Келесі мәнді анықтаймыз

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

4. x_{n+1} нүктесіндегі функцияның мәнін анықтаймыз.

5. $f(x_{n+1})$ функциясының нөлге жақындығын анықтаймыз

6. Егер $f(x_{n+1}) \approx \varepsilon$ болса, онда есепті аяқтаймыз. Есепті шығару үшін Зертханалық жұмыс №3/Книга 1.*xls* құжатына (Қосымша С) өту керек.

3.3.4 Есепті программа бойынша жүргізу керек.

3.3.5 Істелінген жұмысты электрондық түрде өткізу керек.

3.4 Компьютер мен оны құраушы программалардың сипаттамалары

Зертханалық жұмысты орындау үшін жадысы 256 МБ-тан кем емес Pentium 4 типті компьютер қажет етіледі, сондай-ақ орнатылған ОЖ Windows 98 кем емес және ең соңғы үлгідегі Mathcad, Borland Delphi, Pascal және т.б. программалар колданылады.

3.5 Алынган мәндерді өңдеу

3.5.1 Алынған мәндер бойынша әдістердің сәйкестену жылдамдығын салыстыру.

3.5.2 Есептің қорытындысын сызбақ түрінде көрсету.

3.5.3 Алынған мәндерге анализ жасау, дәлділікті бағалау, қорытынды жасау.

3.6 Жұмысты рәсімдеу.

Істелінген жұмыс электрондық түрде өткізіледі, оның құрамы:

- жұмыстың мақсаты мен қысқаша мазмұны;
- тапсырма;
- блок-сұлба немесе мәтіндік үлгіде жазылған алгоритм;
- программа;
- бастапқы берілгендері енгізілген кесте;
- есептеу экспериментінің қорытындысы;
- заңдылықтар бойынша тұрғызылған сызбақ;
- алынған мәндер талдауы мен қорытынды.

3.7 Бақылау сұрақтары

3.7.1 Жартылай бөлу әдісінің алгоритмін жазыңыз.

3.7.2 Хорда әдісінің алгоритмін жазыңыз.

3.7.3 Ньютон әдісінің алгоритмін жазыңыз.

3.7.4 Әдістердің сәйкестену жылдамдығын, әмбебаптылығын, іске асу жылдамдығын, есептеу қателігінің сезімталдылығын салыстыр.

[1-5]-әдебиеттер

4.1 Жұмыстың мақсаты

- функцияны сандық интегралдай білу әдістерін қалыптастыру;
- сандық интегралдаудың түрлі әдістемелерімен танысу;
- әдістеменің әмбебаптылығы мен дәлділігі жөнінде білу;
- есептің алгоритмі мен программасын құрастыра білу;
- компьютерлік технологияны игеру.

4.2 Теориялық бөлім

Көбінесе инженерлік немесе ғылыми есептеулерге анализ жасағанда сандық интегралдау қолданылады. Мысал үшін, есептеудің сандық әдісі интегралдауды аналитикалық түрде табу мүмкін болмағанда немесе интеграл күрделі болғанда қолданылады. Сондай-ақ, сандық интегралдау эксперименттік тұрғыдан өлшеп алынған интегралды кестелік функция арқылы анықтағанда да қолданылады.

Мысал үшін, жылуалмасу беті арқылы бір жылутасымалдағыштан екінші жылутасымалдағышқа берілетін жылу мөлшерін анықтау үшін келесі теңдеу қолданылады

$$dQ=k<\Delta t>dF. \qquad (4.1)$$

(4.1) теңдеуден жылуалмасу бетінің ауданын келесідей анықтауға болады

$$F=\int\frac{dQ}{k<\Delta t>}=\int_{t_{x1}}^{t_{x2}}\frac{G_x c_{px}dt_x}{k<\Delta t>(t_r,t_x)}.$$

Сандық интегралдың мақсаты келесі түрдегі интегралдың жуық мәнін табудан тұрады

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx,$$

мұндағы $f(x)$ – берілген функция.

[a,b] кескініне $w=\{x_i;\ x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_n=b\}$ торы енгізіледі.

Интегралдың жуық мәнінің сапасы ретінде I саны қарастырылады.

$$I_n(f)=I=\sum_{i=0}^{n}c_i f(x_i), \qquad (4.2)$$

мұндағы x_i –квадраттық формула түйіндері;

$f(x_i)$ – түйіндегі функцияның мәні;

c_i- салмақтық немесе квадраттық (салмақ) көбейткіштер, олар түйіндерге ғана тәуелді, бірақ функция түріне тәуелсіз.

(4.2) теңдеу квадраттық теңдеу деп аталады.

Сандық интегралдаудың міндеті, квадраттық формуланың қателігі минималды болатын түйіндер мен квадраттық көбейткіштерді іздеу

$$\varepsilon=\sum_{i=0}^{n}c_i f(x)-\int_a^b f(x)dx\to\min.$$

[a,b] кесіндісін бөлуге байланысты квадраттық формуланы тұрғызудың екі жолы бар:

1. Интервалдарды бөлу ұзындығы мен жатқан жері алдын-ала таңдалынып алынады. Бұл жағдайда Ньютон-Котестің квадраттык формуласы қолданылады (бұл әдістерге трапеция және Симпсон әдісі жатады).

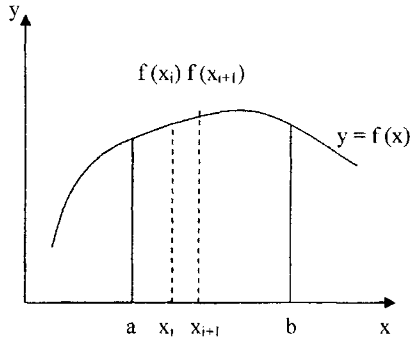
2. Интервалдың ұзындығы мен жатқан жері алдын-ала берілмейді, интервалдың берілген санында жоғары дәлдiлiкке жету үшін таңдалынады. Бұл жағдайда бөліктік-тұрақты интерполяция немесе көп дәрежелі интерполяция қолданылады.

Анықталған интеграл

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

$f(x)$ қисығы, x өсі мен $x=a$, $x=b$ түзулерімен шектелген ауданнан тұрады.

Интервалды a-дан b-ға дейін көптеген кішігірім интервалдарға бөле отырып, шамамен әрбір тілікшелердің ауданын табамыз да I-ң мәнін анықтауға тырысамыз.



1-сурет

4.2.1 Трапеция әдісі

Трапеция формуласы

$$I = \sum_i c_i f(x_i) = \left(\frac{h}{2}\right)\cdot(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + y_n).$$

Мұндағы $h = \dfrac{(b-a)}{n}$;

$y_0=f(x_0)$;

$y_1=f(x_1)$ және т.б.

Әдістің қателігін бағалау үшін функциямызды Тейлор қатарына жіктеп, h-тың үш дәрежеден үлкен болған мүшелерін ескермейміз.

Локалді кателіктер келесідей анықталады

$$e_i = -\frac{h^3}{12 \cdot f''(x_i)}.$$

Интегралдық қателік

$$\varepsilon = \sum_i e_i = -\frac{h^3}{12 \cdot (b-a) f''(\xi)}, \qquad (4.4)$$

мұндағы ξЄ[a,b].

4.2.2 Симпсон әдісі

Бұл әдіс трапеция әдісіне ұқсас. Айырмашылығы жалпы интегралды бірнеше ұсақ кескіндерге бөлу ғана.

Кескіндер саны жұп болсын делік

$$n = \frac{b-a}{h}.$$

Трапеция әдісін қолданамыз

$$I_h = \left(\frac{h}{2}\right) \cdot (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + y_n).$$

Адымды екі есе үлкейтейік

k=2h

$$I_k = \left(\frac{k}{2}\right) \cdot (y_0 + 2y_2 + 2y_4 + \ldots + y_n).$$

Бұдан Симпсон формуласын аламыз

$$I = \left(\frac{h}{3}\right) \cdot (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + y_n). \qquad (4.5)$$

Симпсон әдісінде жіберілген қателік шегі

$$e_i = -\frac{h^4}{180 \cdot f''(x_i)},$$

$$\varepsilon = \sum_i e_i = -\frac{h^3}{180 \cdot (b-a) \cdot f''(\zeta)}, \qquad (4.6)$$

мұндағы ζЄ[a,b].

Симпсон әдісі көбінесе сандық интегралдауда қолданылады, өйткені ол h^4 дәлділігінен анықтауға мүмкіндік туғызады.

4.3 Жұмысты орындау тәртібі

4.3.1 Оқытушыдан кейбір интеграл түрінде берілген тапсырманы алу.

4.3.2 Берілген ε дәлділікті сандық интегралдың мәнін сипатталған әдіс бойынша анықтау.

4.3.3 Есептің алгоритмін блок-сұлба немесе текстік үлгі түрінде құрастыру.

4.3.4 Есептеу жүргізу үшін 4.3.3 бөліміндегі алгоритм бойынша программа құрастырып, оған рәсімделген жұмыста сілтеме жасау. Мысалы

$$J = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2+0.25}} dx.$$

Интегралын трапеция және Симпсон әдістері арқылы есептеу.

Есептің дәлділігі берілген ε=10^{3}.

Есептің алгоритмін трапеция әдісі бойынша:

1. h=0,1(0,01;0,001) адамын таңдап аламыз.

2. $y(x_i)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+0.25}}$ функциясының мәнін x=1 бастапқы нүктеден бастап әрбір h адымы бойынша x=2 соңғы нүктеге шейін есептейміз.

3. Алынған мәндерді (4.3) трапеция формуласына қоямыз және интегралдың сандық мәнін табамыз.

Симпсон әдісі бойынша есептің алгоритмін құрастыру:

1. h=0,1(0,01;0,001) адамын таңдап аламыз.

2. Есептеу жүргізу үшін 4.3.3 бөліміндегі алгоритм бойынша программа құрастырып, оған рәсімделген жұмыста сілтеме жасау керек. Мысалы

$$J=\int_1^2\frac{1}{x\sqrt{x^2+0.25}}dx.$$

Интегралын трапеция және Симпсон әдістері арқылы есептеу керек.

Есептің дәлділігі берілген ε=10^{3}.

3. Алынған мәндерді (4.4) Симпсон формуласына қоямыз және интегралдың сандық мәнін табамыз.

Бірінші тәсіл бойынша табылған табылған интегралдың сандық мәні: J=0,467491.

4. Программадағы адымның мәнін өзгерту арқылы есептеу жүргіземіз де алынган мәндерге анализ жасаймыз (3-кесте).

3-кесте

Интегралдау адымы, h	Әдіс бойынша алынған I интегралының мәні	
	трапеция	Симпсон
0,1	0,441876	0,431780
0,01	0,465053	0,464225
0,001	0,467248	0,467167

Алынған мәндерден көріп отырғанымыздай, адымның мәні неғұрлым аз болса, соғұрлым интегралды есептеудің нақты формуласы бойынша табылған мәндерге жуық, Симпсон мен трапеция әдісі арқылы алынған, мәндердің дәлділігі жоғары болады.

Жоғары ретті туындыны анықтайтын әдістердің қателік есебі, қосымша күрделі есептеу жүргізуді қажет етеді. Тәжірибеде қажетті дәлділікке қол жеткізу үшін адымдар санын тізбектеп екі еселендіру әдісі қолданылады.

Трапеция әдісі үшін

$$\Delta=\frac{I_h-I_{\frac{h}{2}}}{3}, \qquad (4.7)$$

h=0,0001 болғанда J=0,467491;

h=0,00005 болғанда J=0,467479;

$$\Delta = \frac{0,467491 - 0,467479}{3} = 0,000004.$$

Егер $\Delta<\varepsilon(0,000004<10^{-3})$ болса, онда адым мәні қанағаттанарлық, есептеу аяқталды.

Трапеция әдісі үшін h=0,001 минималды адымы жеткілікті.

Симпсон әдісі үшін

$$\Delta = \frac{I_h - I_{\frac{h}{2}}}{15}, \tag{4.8}$$

h=0,0001 болғанда J=0,467475;

h=0,00005 болғанда J=0,467167;

$$\Delta = \frac{0,467475 - 0,467167}{2} = 0,000002.$$

Егер $\Delta<\varepsilon(0,000002<10^{-3})$ болса, онда адым мәні қанағаттанарлық, есептеу аяқталды.

Трапеция әдісі үшін h=0,001 минималды адымын алса жеткілікті.

4.3.5 Сандық интегралдау үшін Borland Pascal (Д-қосымшасы) программасын қолдану.

4.3.6 Программа бойынша интегралдау адымының мәнін өзгерте отырып есептеу жүргізу.

4.3.7 Істелінген жұмысты электрондық түрде өткізу.

4.4 Компьютер мен оны құраушы программалардың сипаттамалары

Зертханалық жұмысты орындау үшін жадысы 256 МБ-тан кем емес Pentium 4 типті компьютер қажет етіледі, сондай-ақ орнатылған ОЖ Windows 98 кем емес және ең соңғы үлгідегі Mathcad, Borland Delphi, Pascal және т.б. программалар қолданылады.

4.5 Алынған мәндерді өңдеу

4.5.1 Интегралдың нақты мәнін алу.

4.5.2 Интегралдың сандық мәнін трапеция және Симпсон әдістері арқылы есептеу. Адымның мәнін бір-екі ретке төмендете отырып, есептеуді қайталау.

4.5.3 Интегралдың нақты мәнін есертелінген мәндердің орнына қоя отырып, алынған мәнге анализ жасау, әдістердің дәлділігін бағалау, қорытынды жасау.

4.6 Жұмысты рәсімдеу

Істелінген жұмыс электрондық түрде өткізіледі, оның құрамы келесідей бөлімшелерден:

- жұмыстың мақсаты мен қысқаша мазмұны;
- тапсырма;
- блок-сұлба немесе мәтіндік үлгіде жазылған алгоритм;
- программа;
- бастапқы берілгендері енгізілген кесте;
- есептеу экспериментінің қорытындысы;

- заңдылықтар бойынша тұрғызылған сызбақ;
- алынған мәндер талдауы мен қорытынды.

4.7 Бақылау сұрақтары

4.7.1 Трапеция әдісінің алгоритмін жаз.

4.7.2 Симпсон әдісінің алгоритмін жаз.

4.7.3 Әдістердің дәлділігін, әмбебаптылығын, іске асу жылдамдығын, есептеу қателігі мен адым мәніне сезімталдылығын салыстыр.

[1-5]-әдебиеттер

Зертханалық жұмыс №5. Сызықты теңдеулер жүйесін шешудің сандық әдісі

5.1 Жұмыстың мақсаты

- сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін Гаусс әдісімен шешуді үйрену;
- есептің алгортмі мен программасын MathCad-та құрастыруды үйрену;
- компьютерді игеру.

5.2 Теориялық бөлім

x- тің бүтін дәрежесінің қосындысынан тұратын теңдеу - алгебралық деп аталады. Әртүрлі тұрғыда кездесетін көптеген синтез бен анализ есептері алгебралық теңдеулер жүйесі арқылы есептелінеді.

Сызықты теңдеулер жүйесінің жалпылама түрі

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\}. \qquad (5.1)$$

(5.1) жүйесін вектор-матрица түрінде көрсетуге болады, онда коэффициенттер матрицасы былай сипатталады

$$A = \left|\begin{array}{l} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{array}\right|.$$

Бос мүшелер бағанының векторы

$$b = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{vmatrix}.$$

Белгісіздер жазылған бағанның векторы

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{vmatrix}. \qquad (5.2)$$

Бұдан

$$A \cdot x = B. \qquad (5.3)$$

(5.3) теңдеуде сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешу үшін көп жағдайда тура (нақты) және итерациялық жуықтау деп екіге бөлінетін сандық әдістер қолданылады. Нақты әдіске Гаусс әдісі, ал жуықшаға – Зейдель әдісі жатады.

Көптеген есептеулер n-белгісізден тұратын n-сызықты емес алгебралық трансценденттік теңдеулер жүйесін шешуден тұрады, n-белгісіз жалпы түрде былай жазылады

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (5.4)$$

Жүйенің әрбір теңдеуін бірмезгілде қанағаттандыратын $x_1, x_2, \dots x_n$-ң көптеген мәні, осындай жүйенің шешімі деп аталады.

Баған векторларын енгізейік

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{vmatrix}, \qquad f = \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{vmatrix}.$$

Ендеше (5.4) теңдеуіміз былай өзгереді:

$$f(x) = 0. \qquad (5.5)$$

Бұндай жүйелер тек қана Ньютон немесе Зейдельдің итерациялық әдісі арқылы анықталады.

5.2.1 Таңдап алынған негізгі элементті сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін Гаусс әдісімен шешу.

Процессті Гаусс әдісімен шешу 2 этапқа бөлінеді. Бірінші этапта (тура жүріс) өзгертілген (түрленген), эквивалентті, басты диагоналдағы барлық элементтері нөлге тең үшбұрышты матрицалы теңдеулер жүйесі жатады. Бұдан жүйедегі бір теңдеуде бір белгісіз болады, ал келесі әрбір теңдеуге бір-бірден белгісіздер қосылып отырады. Екінші этапта (кері жүріс) теңдеудің өзгертілген жүйесі шешіледі. Гаусс әдісі сенімді, қарапайым және ЭЕМ-да шығарғанда өте қолайлы.

5.2.2 Зейдель әдісі

Бұл әдістің есептеу алгоритмін құру үшін алдымен А матрицасын А=М+Д+N түрінде жіктеледі.

Мұндағы

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & 0 \end{bmatrix}, \qquad N=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ал Д=($a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$)-диагонал матрица. Бұл жерде $a_{ii} \neq 0$деп қабылданады.

Содан кейін Зейдель әдісінің есептеу алгоритмі

$$M\varphi^{(k+1)} + Д\varphi^{(k+1)} + N\varphi^{(k)} = f$$

яғни

$$\varphi^{(k+1)} = -(Д+M)^{-1}N\varphi^{(k)} + (N+Д)^{-1} f = T\varphi^{k} + F$$

түрінде анықталады. Ол-стационар итерациялық әдіс (H=(M+Д)), ал оның көшу матрицасы Т=-(М+Д)$^{-1}$N-ге тең.

Зейдель әдісі координаталар арқылы

$$\varphi_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \varphi_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \varphi_j^{(k)} + \frac{f_i}{a_{ii}} \qquad (i=1,2,\dots,n),\ k=0,1,\dots,.$$

түрінде өрнектеледі.

Жинақталу шарттары:

1. $|\lambda_s(T)| = \left|\lambda_s\left(-(M+Д)^{-1}N\right)\right| < 1$ (S=1,2,...,n) шартының орындалуы қажетті және жеткілікті. Алайда $|T-\lambda E| = \left|\lambda_s\left(-(M+Д)^{-1} - \lambda E\right)\right| = -|M+Д|\cdot|N+\lambda(M+Д)|$ болғандықтан, бұл шарт

$$|N+\lambda(M+Д)| = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\lambda & a_{n1}\lambda & \dots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Алгебралық теңдеуінің түбірлері модульдері бойынша бірден кіші болуы қажетті және жеткілікті деген шартпен алмастырылады.

2. Жеткілікті шарт: жай итерациялық әдістегі немесе жеткілікті шарттардың тым болмаса біреуі орындалса, онда Зейдель әдісіде жинақты

болады. Сонымен катар ол жай итерациялық әдіске қарағанда едәуір жылдам жинақталады.

Бұл шарттар орындалмаған жағдайда, Зейдель әдісінің жинақталуына көз жеткізу үшін мынадай жеткілікті шарт пайдаланылады:

Зейдель әдісінің жинакты болуы үшін А-ның оң және симметриялы матрица болуы жеткілікті. Ал бұл шартта орындалмаса, онда Аφ=f жүйесі солдан А' матрицаға көбейтіледі де, оған пара-нар жана жүйесі алынады.

$$\overline{A}\varphi = \overline{f} \qquad \left(\overline{A} = A'A, \overline{f} = A'f\right).$$

Жаңа жүйе үшін соңғы жеткілікті шарт орындалады, өйткені $\overline{A} = A'A$ - оң анықталған симметриялы матрица. Енді $\overline{A}\varphi = \overline{f}$ жүйеге Зейдель әдісін қолдануға болады.

5.2.3 Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешуге арналған Зейдель мен Гаусс әдістерін салыстыру.

Әрбір әдістердегі шешудің нақты әдісін таңдау келесідей факторлар бойынша анықталады:

- А жүйесі коэффициенттерінің матрицаларының ерекшеліктерімен;
- жүйе ретімен;
- компьютер жадысының көлемі мен шапшаңдығы.

Гаусс әдісі анағұрлым әмбебапты және тиімді, оны А коэффициенттерінің матрицасымен тығыз толтырылған жалпы түрдегі жүйелер үшін қолдану өте ыңғайлы.

Коэффециенттердің сиретілген матрицалары берілген жоғары ретті $n \approx 10^3 - 10^6$ теңдеулер жүйесін шешкенде Зейдельдің итерациялық әдісін қолданған дұрыс. Тура әдіспен салыстырғанда итерациялық әдісте жуықтау қателігі аз байқалады. Зейдель әдісі өздігінен түзетуші болып табылады, яғни есептеу кезінде жіберілген қателіктер соңғылық есептеуде байқалмайды, яғни қате жуықталынған шама бастапқы жаңа вектор ретінде қарастырылады. Итерациялық әдістің негізгі жетістігі оларды программалау оңай.

5.3 Жұмысты орындау тәртібі

5.3.1 Оқытушыдан тапсырманы алу

5.3.2 Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешудегі Гаусс (Зейдель) әдісінің сұлбасының алгоритмін құрастыру.

5.3.3 Сызықты теңдеулер жүйесін шешудің программасын құрастыру.

5.3.4 Программа бойынша есептеу жүргізу.

5.3.5 Есептеу жүргізу үшін Math CAD программасын қолдану

5.3.6 Істелген жұмысты электрондық түрде тапсыру.

5.4 Компьютер мен оны құраушы программалардың сипаттамалары

Зертханалық жұмысты орындау үшін жадысы 256 МБ-тан кем емес Pentium 4 типті компьютер қажет етіледі, сондай-ақ орнатылған ОЖ Windows 98 кем емес және ең соңғы үлгідегі Mathcad, Borland Delphi, Pascal және т.б. программалар қолданылады.

5.5 Жұмысты өңдеу

5.5.1 Алынған дәл мәндерді теңдеуге қойып тексеру

5.5.2 Алынған мәндерге анализ жасау, оның дәлділігін тексеру, қортынды жасау.

5.6 Жұмысты рәсімдеу

Жұмысты электрондық түрде рәсімдейді. Оның құрамы:

- жұмыстың мақсаты мен қысқаша мазмұны;
- тапсырма;
- блок-сұлба немесе мәтіндік үлгіде жазылған алгоритм;
- программа;
- бастапқы берілгендері енгізілген кесте;
- есептеу экспериментінің қорытындысы;
- заңдылықтар бойынша тұрғызылған сызбақ;
- алынған мәндер талдауы мен қорытынды.

5.7 Бақылау сұрақтары

5.7.1 Сызықты алғебралық теңдеулер түрінде кездесетін жылутехникалық есептерге мысал келтір.

5.7.2 Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешудің тура және итерациялық әдісін сипаттаңыз.

5.7.3 Гаусс әдісінің алгоритмін жаз.

5.7.4 Зейдель әдісінің алгоритмін жаз.

5.7.5 Есептеу қателігі, қажет етілетін оперативті жады, орындалатын операция саны бойынша Зейдель мен Гаусс әдістерін салыстырыңыз.

Әдебиеттер [1-5].

Зертханалық жұмыс №6. Қарапайым дифференциалдық теңдеуді сандық әдіспен шешу

6.1 Жұмыстың мақсаты:

- қарапайым дифференциалдық теңдеулерге сандық әдісті қолдануды үйрену;
- қарапайым дифференциалдық теңдеулерде қолданатын Рунге-Кутта әдісін білу;
- есептің програмасы мен алгоритмін құрастыруды үйрену;
- компьютер жөнінде түсініктер қалыптастыру.

6.2 Теориялық бөлім

Бір немесе бірнеше туындыдан тұратын теңдеулер дифференциалдық теңдеулер деп аталады. Ғылым мен техниканың көптеген заңдылықтары дифференциалдық теңдеулер түрінде берілгендіктен оларды шығару күнделікті кажеттіліктердің бірі болып табылады. Масса қозғалысы мен энергияға тәуелді модельдеу есептері де дифференциалдық теңдеулер арқылы есептелінеді. Өкінішке орай, аналитикалық әдістің көмегімен тез шығаруға болатын теңдеулер өте аз, сондықтан ғылыми немесе инженерлік есептерді қарастырғанда дифференциалдық теңдеулерді компьютердің көмегімен есептеу өте маңызды болып табылады.

Қарапайым дифференциалдық теңдеулерді шешу үшін тәуелді айнымалының мәнін және тәуелсіз айнымалының кейбір мәндеріндегі оның туындысының мәнін білу қажет. Егер осы қосымша шарттар тәуелсіз айнымалының бір мәнінде берілген болса, онда мұндай есептерді *бастапқы шартты* немесе *Коши* есебі деп атайды. Егер шарттар айнымалының екі мәнінде берілген болса есеп *шеттік* деп аталады. Коши есебіндегі қосымша шарттарды - *бастапқы* деп атайды, ал шеттік есептерде - *шектік* деп атайды.

Дифференциалдық теңдеулер белгісіз $y = f(x)$ формуласынан, x-тәуелсіз айнымалысынан турады. Белгісіз функцияның туындысы

$$F(x, y, y', y'' ..., y^{(n)}) = 0 . \qquad (6.1.)$$

Дифференциалдық теңдеуді шешу дегеніміз - бұл $y_1, y_2, y_3 ... y_n$ жуық мәндерінің кестесін тұрғызу, $x_1, x_2, x_3 ... x_n$ нүктелерінде $y = f(x)$ теңдеуінің мәнін табу.

Көбінесе $x_i = x_0 + ih$ теңдеуі жиі қолданылады, мұндағы $i = 0,1,2,...n$. x_i нүктелері ***тор түйіндері***, ал h - ***тор адымы*** деп аталады.

Сандық әдістер бір адымды және көп адымды болып екіге бөлінеді. Бір адымдыға – Эйлер әдісі мен Рунге-Кутта әдісі, ал көп адымдыға - болжау мен түзету әдістері жатады.

6.2.1 Рунге-Кутта әдісі

Төртінші ретті дәлдікті Рунге-Кутта әдісін қарастырайық. Бұл әдісте y_{i+1} шамасының мәні мынадай формуламен анықталады.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} \cdot (r_1 + r_2 + r_3 + r_4),$$

мұндағы $k_1 = f(x_i, y_i)$;

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h \cdot k_1}{2});$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h \cdot k_2}{2});$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + h \cdot k_3).$$

Тордың бір адымындағы әдістің қателігі $м \cdot h^5$, бірақ $м$-нің мәнін тәжірбиелік тұрғыдан табу өте күрделі болғандықтан Рунгенің адымды екі еселеу заңдылығын қолданамыз.

Рунге-Кутта әдісін бірінші реттік теңдеулер жүйесіне қолдануға болады

$$y_1' = f(x, x_1, y_2, ..., y_n),$$
$$y_2' = f(x, y_1, y_2, ..., y_n).$$
$$y_n' = f(x, y_1, y_2, ..., y_n).$$

Екінші реттік теңдеулерге қолданылатын Рунге Кутта әдісіне алгоритм қосылады.

Коши есебінің бастапқы теңдеуі

$$y'' = f(x, y, y').$$

бастапқы шарттары $y_0 = y(x_0)$ немесе $y_0' = y'(x_0)$

Екі теңдеулі жүйеге түрлендірсек

$$y' = z = g(x, y, y') \text{ бұдан } y_0' = y'(x_0) = z(x_0) = z_0, \tag{6.4}$$
$$z' = f(x, y, y') \text{ бұдан } y_0 = y(x_0).$$

Ары қарай

$$y_{n+1} = y_n + K, \tag{6.5}$$

мұндағы $K = \dfrac{h(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)}{6}$;

$$K_1 = g(x_n, y_n z_n);$$

$$K_2 = g\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1 h}{2}, z_n + \frac{L_1 h}{2}\right);$$

$$K_3 = g\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2 h}{2}, z_n + \frac{L_2 h}{2}\right);$$

$$K_4 = g(x_n + h, y_n + K_3 h, z_n + L_3 h).$$

$$z_{n+1} = z_n + L. \tag{6.6}$$

мұндағы $L = \dfrac{h(L_1 + 2L_2 + L_3 + L_4)}{6}$;

$$L_1 = f(x_n, y_n z_n);$$

$$L_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1 h}{2}, z_n + \frac{L_1 h}{2}\right);$$

$$L_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2 h}{2}, z_n + \frac{L_2 h}{2}\right);$$

$$L_4 = f(x_n + h, y_n + K_3 h, z_n + L_3 h).$$

6.3 Жұмысты орындау тәртібі

6.3.1 Оқытушыдан бастапқы шарттары екінші ретті берілген Қ.Д.Т. тапсырма алып, оны рәсімдеуге енгізу.

6.3.2 Рунге-Кутта әдісінің алгоритмінің сызбасын құрастыру.

6.3.3 Есепті шығару үшін Borland.Pascal прграммасын қолдану және рәсімдеуде сілтеме жасау керек.

6.3.4 Программа бойынша есептеу жүргізу.

6.3.5 Жұмысты электрондық түрде өткізу.

6.4 Компьютер құрамаларының сипаттамасы

Зертханалық жұмысты орындау үшін жадысы 256 МБ-тан кем емес Pentium 4 типті компьютер қажет етіледі, сондай-ақ орнатылған ОЖ Windows

98 кем емес және ең соңғы үлгідегі Mathcad, Borland Delphi, Pascal және т.б. программалар колданылады.

6.5 Алынған мәндерді өңдеу

6.5.1 Есептің қортындысын функцияның мәні мен оның туындысы енгізілген кесте түрінде көрсету.

6.5.2 Қорытынды мәннің сызбағын тұрғызу.

6.5.3 Алынған мәндерді орнына қойып есептің дәлділігін тексеру, қорытынды жасау.

6.6 Жұмысты рәсімдеу

Істелінген жұмыс электрондық түрде рәсімделеді. Оның құрамы келесідей бөлімшелерден тұрады:

- жұмыстың мақсаты мен қысқаша мазмұны;
- тапсырма;
- блок-сұлба немесе мәтіндік үлгіде жазылған алгоритм;
- программа;
- бастапқы берілгендері енгізілген кесте;
- есептеу экспериментінің қорытындысы;
- заңдылықтар бойынша тұрғызылған сызбақ;
- алынған мәндер талдауы мен қорытынды.

6.7 Бақылау сұрақтары

6.7.1 Қарапайым дифференциалдық теңдеулер түрінде берілетін жылутехникалық есептерге мысал келтір.

6.7.2 Қ.Д.Т. шешудің бір адымды әдісінің мәні неде?

6.7.3 Бірінші және одан да жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер үшін төртінші ретті Рунге-кутта әдісінің алгоритмін жаз.

[1-5 әдибиет].

$$S = S0+A4*p+ A5*p*p/2 - R*\ln(1000*p)$$
$$S0 = (a1\cdot\ln y + 2\cdot a2\cdot y - a3/y + a4) / 1000$$
$$A4 = - b1 + 2\cdot b2/y3 + 2\cdot b3/(y-b4)3$$
$$A5 = 8\cdot c1/y8 + 14\cdot c2/y13$$

Y = T/1000

R = 0,46151 кДж/кг К

a1=	**1482,85**		S0 =	**10,96054**
a2=	**379,026**		A4 =	**-0,01102**
a3=	**46,174**		A5 =	**-0,00017**
a4=	**10816,1**			
			S =	6,972556
b1=	**0,00025**			
b2=	**-0,001354**			
b3=	**-0,0004381**			
b4=	**0,21**			
c1=	**-2,5993E-06**			
c2=	**-1,2604E-08**			
T=	**773**			
P=	**5**			
Y=	**0,773**			
R=	**0,46151**			

В косымшасы

x t, °C		y(x) r, кДж/кг	
x0=	10	y(x0)=	147,7
x1=	20	y(x1)=	142,2
x2=	30	y(x2)=	136,2
x3=	40	y(x3)=	129,7
x4=	50	y(x4)=	122,5
x=	35		

r (t=35°C) - ?

Сызықтық интерполяция:

y(x=35) 132,9500

Полиномдар интерполяциясы:

1 -нұсқа

x0=	10	y(x0)=	147,7
x1=	20	y(x1)=	142,2
x2=	30	y(x2)=	136,2
x3=	40	y(x3)=	129,7
x4=	50	y(x4)=	122,5

Бөлінген айырмашылықтар:

y(x0,x1)=	-0,55
y(x1,x2)=	-0,6
y(x0,x1,x2)=	-0,0025
y(x2,x3)=	-0,65
y(x1,x2,x3)=	-0,0025
y(x0,x1,x2,x3)=	-1,87928E-19
y(x3,x4)=	-0,72
y(x2,x3,x4)=	-0,0035
y(x1,x2,x3,x4)=	-3,33333E-05
y(x0,x1,x2,x3,x4)=	-8,33333E-07

y(x=35)= 133,0109

В қосымшасының жалғасы

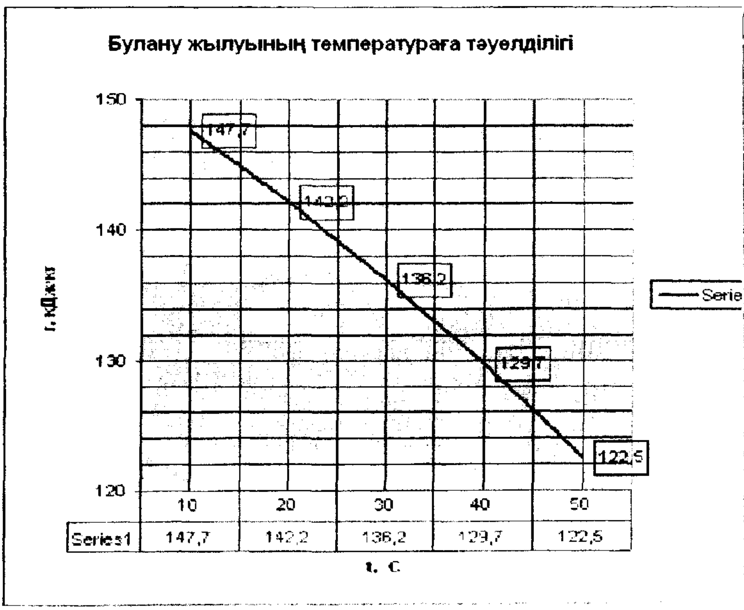
Полиномдар интерполяциясы :

2-нұсқа	x0=	50	y(x0)=	122,5
	x1=	40	y(x1)=	129,7
	x2=	30	y(x2)=	136,2
	x3=	20	y(x3)=	142,2
	x4=	10	y(x4)=	147,7

Бөлінген айырмашылықтар:

y(x0,x1)=	-0,72
y(x1,x2)=	-0,65
y(x0,x1,x2)=	-0,0035
y(x2,x3)=	-0,6
y(x1,x2,x3)=	-0,0025
y(x0,x1,x2,x3)=	-3,33333E-05
y(x3,x4)=	-0,55
y(x2,x3,x4)=	-0,0025
y(x1,x2,x3,x4)=	-1,87928E-19
y(x0,x1,x2,x3,x4)=	0

y(x=35)= 133,0400



Теңдеудің түбірін табу

$$0{,}1\cdot\sin x + x^{3} - 1 = 0$$

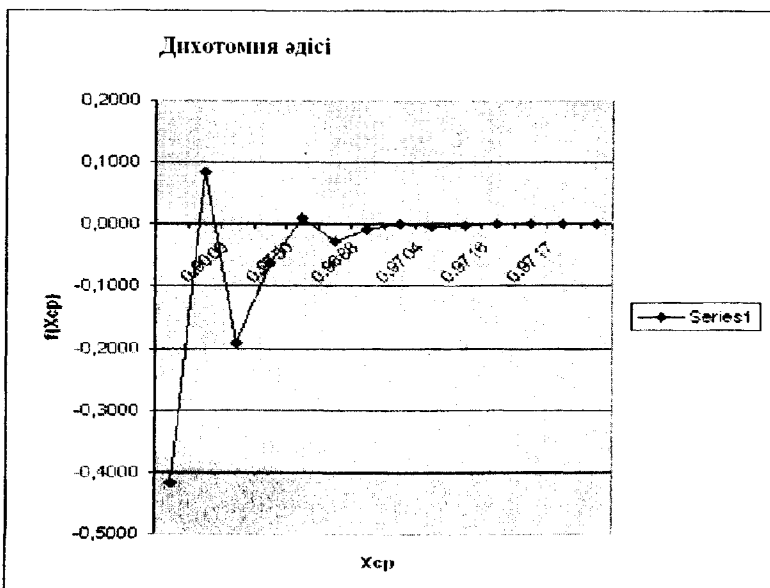
[0,8;1] аралығында

Дәлділігі

$\varepsilon = 0{,}001$

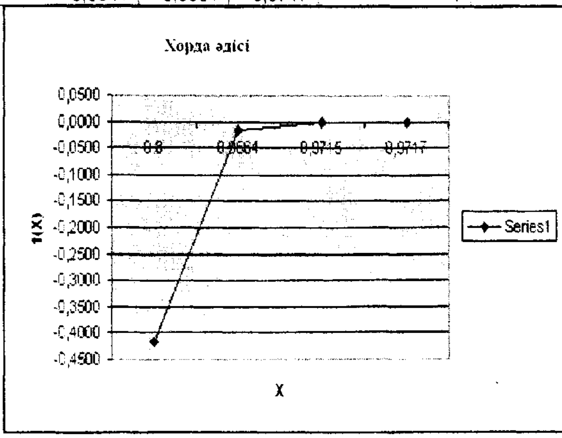
Дихотомия әдісі

	Xn	Xn+1	Xcp	f(Xcp)
	0.8			-0,4163
	1			0,0841
	0,8	1	0,9000	-0,1927
	0,9	1	0,9500	-0,0613
	0,95	1	0,9750	0,0096
	0,95	0,975	0,9625	-0,0263
	0,9625	0,975	0,9688	-0,0084
	0,9688	0,975	0,9719	0,0006
	0,9688	0,9719	0,9704	-0,0038
0	0,9704	0,9719	0,9712	-0,0015
1	**0,9712**	**0,9719**	**0,9716**	**-0,0004**
2	0,9716	0,9719	0,9718	0,0002
3	0,9716	0,9718	0,9717	0,0001
4	0,9716	0,9717	**0,9717**	**-0,0001**

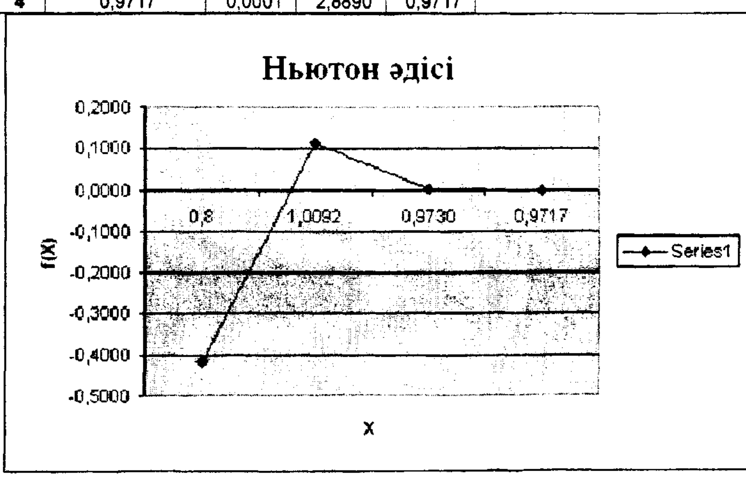


С косымшасының жалғасы

	Хорда әдісі				
	f (Xn+1)	f (Xn)	Xn	Xn+1	X*
1	0,0841	-0,4163	0,8	1	0,9664
2	0,0841	-0,0153	0,9664	1	0,9715
3	0,0841	-0,0004	0,9715	1	0,9717
4	0,0841	0,0001	0,9717	1	0,9717



	Ньютон әдісі			
	Xn	f(Xn)	f ' (Xn)	Xn+1
1	0,8	-0,4163	1,9897	1,0092
2	1,0092	0,1125	3,1087	0,9730
3	0,9730	0,0038	2,8965	0,9717
4	0,9717	0,0001	2,8890	0,9717



$\varepsilon = 0{,}001$ берілген дәлдіктегі теңдеудің түбірі $x^* = 0{,}9717$

```
program ktvtr;
uses crt;
var a,b,h,x,y,n,I,Io,y1,i1:real;
k,l:integer;

function f1 (x:real):real;
begin
f1:=1/(x*(sqrt(sqr(x)+0.25)));
end;

begin
clrscr;
write('enter a=');
readln(a);
write('enter b=');
readln(b);
write('enter h=');
readln(h);
writeln(a,b,h);
readln(l);
Io:=(-2*ln((0.5+sqrt(sqr(b)+0.25))/b))-(-2*ln((0.5+sqrt(sqr(a)+0.25))/a));
writeln('Io=',Io:l:l);
x:=a+h;
n:=b-h;
k:=0;
y:=0;
while (x<=n) do
          begin k:=k+1;
             if (k mod 2 = 0) then y:=y+2*f1(x) else  y:=y+4*f1(x);
              x:=x+h;
          end;
y:=y+f1(a)+f1(b);
I:=(h/3)*(y);
writeln('I=',I:l:l);
y1:=0;
x:=a+h;
n:=b-h;
begin
   while (x<=n) do
    begin
         y1:=y1+2*f1(x);
         x:=x+h;
    end;
y1:=y1+f1(a)+f1(b);
I1:=(h/2)*y1;
writeln('I1=',I1:l:l);
end;
readln;
end.
```

Әдебиеттер тізімі

1. Атанбаев С. Сандық әдістердің алгоритмдері.- Алматы: «Білім», 1998.- 148б.

2.Богатырев А.Ф., Панченко С.В., Стояк В.В., Шистер А.Г. Моделирование и оптимизация теплотехнологических процессов. – Алма-Ата.: КазПТИ, 1989. – 90б.

3. Борисова Н.Г. Компьютерные технологии в теплоэнергетических расчетах: Методические указания к лабораторным работам (для студентов теплоэнергетических специальностей и бакалавриата по направлению «Теплоэнергетика»).- Алматы:АИЭС, 2005. - 37б.

4.Щуп Г.Е. Прикладные численные методы в физике и технике. – М.: ВШ, 1990. – 255с.

5.Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. - М.: МАИ, 2000.-374с.

6.Фурунжиев Р.И., Бабушкин Ф.М., Варавко В.В. Применение математических методов и ЭВМ: Практикум.-Мн.:ВШ,1988.-191с.

7.Теплоэнергетика и теплотехника. Общие вопросы: Справочник /Под. ред. А.В.Клименко и В.М.Зорина.-М.:МЭИ,1999.-528с.

Мазмұны

2007ж. негізгі жоспары, реті 6

Борисова Нина Гавриловна,
Бергенжанова Гүлім Рысказыевна,
Қасымов Арман Сәлемович.

ЖЫЛУЭНЕРГЕТИКАЛЫҚ ЕСЕПТЕУДЕГІ КОМПЬЮТЕРЛІК ТЕХНОЛОГИЯЛАР

Зертханалық жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар
(050717-Жылуэнергетика мамандығының студенттері үшін)

Редакторы Ж.А. Байбураева

Басуға қол қойылды 14.02.07
Таралымы 100 кз.
Көлемі 2,2 оқу есепті баспа табақ.
Бағасы 220 тг.

Қалпы 60х84 1/16
Баспаханалық қағаз №1
Тапсырма 61.

Алматы энергетика және байланыс институтының
көшірмелі-көбейткіш бюросы
050013 Алматы, А. Байтұрсынұлы көшесі, 126 үй