Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра
инженерной кибернетики

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

Конспект лекций для студентов
специальности 5В070200 – Автоматизация и управление

Алматы 2016

СОСТАВИТЕЛЬ: Л.К.Ибраева. Моделирование и идентификация объектов управления. Конспект лекций для студентов специальности 5В070200 – Автоматизация и управление. – Алматы: АУЭС, 2016. – 56 с.

Конспект лекций составлен в соответствии с рабочей программой дисциплины «Моделирование и идентификация объектов управления» для студентов специальности 6М070200 – Автоматизация и управление и содержит 15 лекций.

Конспект лекций предназначается в помощь студентам при изучении теоретического материала и для подготовки к экзаменам, практическим и лабораторным занятиям, выполнении курсовой работы.

Библиогр. – 4 наим.

Рецензент: к.ф-м.н., доц.А.А.Аманбаев

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2016 г.

1 Лекция №1. Понятие моделирования объектов управления. Виды моделирования

Содержание лекции: понятие моделирования; виды моделирования.

Цель лекции: изучить основные виды моделирования объектов управления.

1.1 Место моделей в структуре системы управления

Модель - это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе изучения заменяет реальный объект, сохраняя некоторые, важные для данного исследования, типичные его черты.

Метод исследования, базирующийся на разработке и использовании моделей, называется *моделированием*.

Описание объекта управления состоит в выражении связи реакции объекта, как функции времени и ее причин, входных воздействий. Управление техническим объектом состоит в выработке команд, реализация которых обеспечивает целенаправленное изменение состояния этого объекта при соблюдении заранее обусловленных требований и ограничений. В отношении выполняемых элементами системы функций всякая система управления в наиболее укрупненном виде должна состоять из двух основных элементов: управляемого объекта (в котором протекает подлежащий управлению процесс) и контроллера (осуществляющего функции управления этим процессом). Простейшая структурная схема представлена на рисунке 1.1. Здесь контроллер *К*, получая информацию о цели управления в виде меняющегося во времени t сигнала $x(t)$, формирует управляющее воздействие $m(t)$ на объект управления *ОУ* таким образом, чтобы управляемая величина $y(t)$ менялась в соответствии с изменением $x(t)$, то есть так, чтобы достигалась цель управления $y(t)=x(t)$. На схеме $l(t)$ – возмущающие воздействия, число которых может быть любым (в том числе и неконтролируемые).

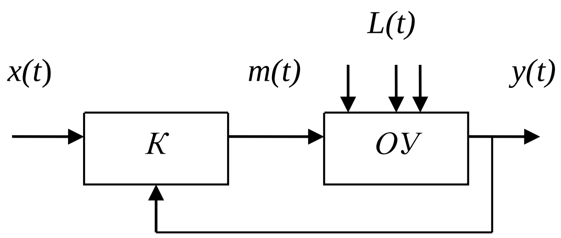


Рисунок 1.1 – Структурная схема системы управления

Подобная система управления может реально функционировать только тогда, когда между изменением $y(t)$ и вызвавшим его изменением $m(t)$ в объекте существует однозначное соответствие. Это соответствие отражается в *математической модели* объекта, которая предполагается заранее известной и может быть использована для определения алгоритма функционирования контроллера (алгоритма управления). Одним из условий функционирования рассмотренной структуры системы управления является то, что математическое описание объекта должно быть известно для любого момента времени с достаточно высокой точностью. То есть необходимо иметь выраженные в виде уравнений основные закономерности, присущие данному объекту и характеризующие статические и динамические связи между его входными и выходными величинами.

Практическое значение моделирования заключается в том, что:

- модели более удобны для исследования, чем исходные объекты. Кроме того, некоторые объекты можно изучить только на моделях;
- моделирование позволяет выявить наиболее существенные факторы изучаемого объекта или явления, поэтому является инструментом для более глубокого изучения реальности.

Отличительной особенностью процесса проектирования систем управления является его совмещение во времени с разработкой и изготовлением технологических агрегатов. А это означает, что единственной возможностью получения информации о свойствах еще не созданной технической системы является *аналитическое* описание процессов, характерных для элементов такой системы.

Во многих случаях модель, принятая при проектировании, существенно отличается от реального объекта, что значительно уменьшает эффективность разработанной системы управления. В связи с этим возникло одно из направлений в теории управления, связанное с построением модели на основании наблюдений, полученных в условиях функционирования объекта по его входным и выходным переменным. Это направление известно как *идентификация* систем.

Ни одна модель не может быть исчерпывающе полной. Она всегда ограничена и должна соответствовать целям моделирования, отражая ровно столько свойств исходного объекта и в такой полноте, сколько необходимо для конкретного исследования. Вместе с тем, полученная модель должна отражать закономерности, действующие в реальном объекте, с точностью, определяемой требованиями решаемой задачи управления. От этого зависит качество управления.

1.2 Виды моделирования

Модели можно условно разделить на две группы: *материальные* и *идеальные*, и, соответственно, различать *предметное* и *абстрактное* моделирование.

К первой группе относятся такие способы, при которых исследования ведутся на основе модели, воспроизводящей основные геометрические, физические, динамические и функциональные характеристики оригинала. Основными разновидностями предметного моделирования являются *физическое* и *аналоговое* моделирование.

Физическое моделирование характеризуется тем, что исследования проводятся на моделях, сохраняющих в определенной степени физическую природу изучаемых явлений и процессов. Физическое моделирование - это моделирование, когда реальному объекту ставится в соответствие увеличенная или уменьшенная «копия», допускающая исследования с последующим переносом свойств процессов и явлений с модели на оригинал на основе теории подобия. Этот метод моделирования широко распространен в технике при проектировании технических систем различного вида. Например, исследование летательных аппаратов на основе экспериментов в аэродинамической трубе.

Недостатком физической модели является то, что при изменении параметров исследуемого процесса или при воспроизведении нового объекта необходимо создавать новую модель, что обычно связано с большими затратами времени и средств. К тому же стоимость моделей сложных объектов относительно высока.

Аналоговое моделирование основано на замене исходного объекта объектом другой физической природы, обладающим аналогичным поведением. При аналоговом моделировании важно увидеть в объекте-заменителе нужные черты, и правильно их интерпретировать.

В обоих типах материального моделирования модель является материальным отражением исходного объекта и связана с ним своими характеристиками, процесс исследования связан с материальным воздействием на модель, т.е. состоит в предметном эксперименте.

Идеальное моделирование отличается от предметного моделирования принципиально и основано на аналогии идеальной, мысленной. Оно носит теоретический характер.

Различают два типа идеального моделирования: *интуитивное* и *знаковое* моделирование.

Интуитивное моделирование - это моделирование, основанное на интуитивном представлении об объекте исследования, не поддающегося формализации, либо не нуждающегося в ней. То есть модель не формируется, а вместо нее используется некоторое точно не зафиксированное мысленное отображение реальной действительности, служащее основой для рассуждения и принятия решения. Таким образом, всякое рассуждение, не использующее формальную модель, можно считать интуитивным моделированием, когда у мыслящего индивидуума имеется некоторый образ объекта исследования, который можно интерпретировать как модель реальности.

Знаковым называется моделирование, использующее в качестве моделей знаки или символы: схемы, графики, чертежи, тексты на различных языках, включая формальные, математические формулы и теории. Обязательным участником знакового моделирования является интерпретатор знаковой модели (чаще всего человек). Чертежи, тексты и формулы сами по себе не имеют никакого смысла без того, кто понимает их и использует в своей повседневной деятельности.

Важнейшим видом знакового моделирования является *математическое моделирование,* при котором исследование объекта осуществляется посредством модели, сформулированной на языке математики с использованием определенных математических методов. Абстрагируясь от физической природы объектов, математика изучает идеальные объекты. Математическое моделирование основано на ограниченности числа фундаментальных законов природы и принципе подобия, означающем, что явления различной физической природы могут описываться одинаковыми математическими зависимостями.

Математическое моделирование – формализованное описание системы с помощью математических соотношений или алгоритмов.

В отличие от физического моделирования, математическая модель позволяет изучать только те параметры оригинала, которые имеют математическое описание и связаны математическими соотношениями в уравнениях, относящихся как к математической модели, так и к оригиналу. При этом физика исследуемого процесса не сохраняется. Моделирование здесь основано на способности одних и тех же уравнений описывать различные по своей природе явления и выявлять различные функциональные связи отдельных сторон поведения объекта без полного описания его поведения.

Достоинства математических моделей:

а) возможность быстро провести ряд экспериментов на математической модели с целью поиска оптимального технологического режима или максимально достоверного прогноза при минимальных затратах времени и материальных ресурсов;

б) возможность на модели задать условия эксплуатации, невозможные в реальности, для проверки оптимальных режимов;

в) математическая модель по разработанным методикам позволяет быстро найти оптимальные условия ведения технологического процесса.

Перенос результатов, полученных в ходе построения и исследования модели, на оригинал основаны на том, что модель в определенном смысле отображает некоторые интересующие исследователя черты объекта.

Важнейшая разновидность математического моделирования – *компьютерное* моделирование. Компьютерная модель – это программная реализация математической модели, дополненная различными служебными программами. Это лишь другая форма абстрактной модели, которая, однако, может интерпретироваться не только математиками и программистами, но и техническим устройством – процессором.

Этот специальный вид моделей, сочетающих в себе и абстрактные, и физические черты, обладает уникальным набором полезных свойств. Поэтому в настоящее время под моделированием почти всегда понимают компьютерное моделирование.

2 Лекция №2. Основные термины в математическом моделировании. Классификация моделей

Содержание лекции: основные термины в математическом моделировании объектов управления; классификация объектов и моделей.

Цель лекции: изучить основные классы моделей объектов управления.

2.1 Основные термины в математическом моделировании ОУ

Математическая модель представляет собой упорядоченную комбинацию таких составляющих, как компоненты, переменные, параметры, операторы (или функциональные зависимости), ограничения.

Под *компонентами* модели понимают составные части, которые при соответствующем объединении образуют систему. Компоненты могут быть либо неделимыми структурными образованиями («элементы» модели), либо составными частями, являющимися «подсистемами».

Обычно входы и выходы системы называют *переменными*, остальные величины – *параметрами.* Эти допущения приняты условно. Без каких-либо дополнительных соглашений ответить невозможно, где переменные, а где параметры. В качестве такого соглашения может быть принят, например, класс функций.

Обычно различаются переменные двух видов – экзогенные (входные) и эндогенные (выходные). Входы системы порождаются вне изучаемой системы и являются результатом действия внешних причин. Выходы возникают в системе в результате действия на нее экзогенных переменных. Деление переменных на входные и выходные тоже не является абсолютным. Это справедливо по отношению к определенной системе. Надо исходить из конкретной характеристики всей изучаемой системы.

Главные составляющие модели – операторы или функциональные зависимости. Обычно они характеризуют зависимость, связывающую изменение во времени выходной величины $y(t)$, с соответствующим изменением входной величины $x(t)$ либо между переменными и зависимыми от них параметрами (p). Совокупность действий, которые нужно произвести, чтобы по данной входной функции $x(t)$ определить соответствующую функцию выходной величины $y(t)$, называется *оператором*[1] системы. Символически соответствие между функцией входной величины $x(t)$ и функцией выходной величины $y(t)$ записывается в виде

$$y(t) = A\{x(t)\},$$

где A – оператор объекта.

Существуют различные способы задания оператора объекта.

[1] В математике оператор является обобщением понятия функции. Функция определяет соответствие между числами, оператор определяет соответствие между функциями.

Последняя составляющая моделей – *ограничения*. В простейшем случае к ограничениям относят область изменения вектора аргументов модели $x \in D_x$. Параметры модели тоже могут задаваться на некотором разрешенном множестве $p \in D_p$.

Чаще всего считается, что моделируемая система не оказывает действия на окружающую среду. Вопрос о допустимости пренебрежения внешней средой должен быть обоснован.

Создание некоторой универсальной модели, отвечающей различным аспектам ее применения, практически невозможно. Построение модели начинается с выяснения *класса*, к которому относится объект.

Исходя из временного и пространственного признаков, все многообразие объектов управления можно разделить на следующие классы: детерминированные и стохастические; стационарные и нестационарные; статические и динамические; линейные и нелинейные; объекты, параметры которых изменяются в пространстве, и объекты без пространственного изменения параметров.

Так как математические модели являются отражением соответствующих объектов, то для них характерны те же классы.

2.2 Классификация моделей

В зависимости от характера изучаемых процессов в системе, все модели могут быть разделены на следующие виды:

1) Детерминированные модели – отображают детерминированные процессы, то есть процессы, в которых предполагается отсутствие всяких случайных воздействий.

2) Стохастические модели – отображают вероятностные процессы и события, то есть переменные модели являются изменяющимися во времени случайными процессами. Эти процессы могут быть стационарными и нестационарными. В последнем случае вероятностные характеристики процесса являются функцией времени.

3) Стационарные и *нестационарные модели.* Модель называется стационарной, если вид оператора модели и его параметры не изменяются во времени.

Если же параметры модели изменяются во времени, то модель следует назвать *параметрически нестационарной*. Может оказаться зависимым от времени и вид оператора модели. Это самый общий вид нестационарности. Как стационарные, так и нестационарные системы могут быть линейными и нелинейными.

Стационарные объекты описываются дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Коэффициенты дифференциальных уравнений нестационарных моделей являются функциями времени.

4) Статические и динамические модели. В основе такого разделения типов моделей лежат особенности движения исследуемого объекта как материальной системы.

Говоря о моделях с позиций задач управления, надо отметить, что понятие пространства, обычно понимаемое в геометрическом смысле и относящееся к механическим системам, становится узким для широкого класса технологических процессов. Более того, для многих объектов управления характерно не взаимное перемещение элементов, а изменение их внутреннего состояния. Поэтому под пространством, в отличие от геометрического, понимается именно пространство состояний объекта и его модели. Тогда «положение» объекта или прогноз этого «положения» по модели оценивается с помощью координат состояния y, относящихся к выходным переменным. Элементами вектора y являются обычно контролируемые технологические параметры (расход, давление, температура, влажность, вязкость и т.д.). Состав элементов вектора y для самого объекта может быть шире, чем для модели этого объекта, так как при моделировании требуется изучение только части свойств реальной системы. Поэтому, говоря о векторе $y(t)$, относят его к модели и именно с этой меркой производят оценку прогноза поведения объекта.

Модель системы называется *статической*, если состояние системы не изменяется, то есть система находится в равновесии, но движение связано со статичным состоянием объекта, находящегося в равновесии. Математическое описание в статических моделях не включает время как переменную и состоит из алгебраических или дифференциальных уравнений (в случае объектов с распределенными параметрами). Статические модели обычно являются нелинейными. Они точно отражают состояние равновесия, вызванное переходом объекта от одного режима к другому.

Динамическая модель отражает изменение состояния объекта во времени. Математическое описание таких моделей обязательно включает производную во времени. Динамические модели используют дифференциальные уравнения. Точные решения этих уравнений известны только для некоторого класса дифференциальных уравнений. Чаще приходится прибегать к использованию численных методов, являющихся приближенными.

Для целей управления динамическую модель представляют в виде передаточной функции, связывающей входные и выходные переменные.

5) Линейные и нелинейные модели. Если в выражении для оператора модели есть нелинейные операции, то модель является *нелинейной*, в противном случае модель – *линейная*.

Интерес к линейным моделям, прежде всего, объясняется тем, что их поведение описывается линейными дифференциальными уравнениями, для которых разработаны общие и достаточно простые методы решения. Кроме этого имеют особое значение следующие два свойства этих моделей:

- входные воздействия реальных объектов обычно могут быть представлены в виде взвешенной суммы соответствующим образом подобранных типовых элементарных воздействий одной и той же формы. Поэтому для вычисления реакции линейного объекта на любое входное воздействие достаточно располагать лишь реакцией этого объекта на указанные типовые воздействия. Иначе говоря, поведение линейного объекта при произвольных входных воздействиях может быть описано не только с помощью дифференциальных уравнений, но также и с помощью характеристики, определяющей ее реакцию на то или иное типовое воздействие (эта реакция называется *динамической характеристикой*). Преимущества математического описания систем с помощью аппарата динамических характеристик становятся особенно ощутимыми при построении математических моделей сложных объектов, вывод дифференциальных уравнений которых представляет обычно очень сложную задачу. В то же время динамические характеристики могут быть получены постановкой сравнительно простых экспериментов на действующем объекте;

- в линейной стохастической системе, на которую действуют случайные неконтролируемые возмущения, эффект влияния этих возмущений на выходную переменную может быть учтен в виде аддитивной случайной помехи, наложенной непосредственно на детерминированную составляющую выходной переменной. Соответственно описание поведения объекта в этом случае может быть получено в рамках обычного аппарата линейных дифференциальных уравнений (или адекватного ему аппарата динамических характеристик). Конечно, в этом случае необходимо располагать добавочной информацией о вероятностных характеристиках случайной помехи.

Если помеха доступна для контроля, то для получения осциллограммы изменения помехи достаточно зарегистрировать выход объекта при нулевом входном воздействии. В противном случае часто принимается, что случайная помеха имеет нормальное распределение вероятности. Теоретическим обоснованием роли нормального распределения является *центральная предельная теорема*. Согласно этой теореме, когда есть основание рассматривать исследуемую случайную величину как сумму большого числа независимых случайных воздействий, влияние каждого из которых ничтожно мало, то даже если распределения составляющих произвольны, можно ожидать, что исследуемая случайная величина будет распределена по нормальному закону. Основное ограничение состоит в том, чтобы все слагаемые играли в общей сумме относительно малую роль. Это не значит, конечно, что любая случайная величина, если не доказано противное, подчиняется этому распределению. Нормальное распределение есть один из типов распределений, оно достаточно хорошо описывает многие явления, встречающиеся в природе, и имеет большое практическое приложение. Нормальное распределение обладает тем преимуществом, что оно характеризуется удобными математическими свойствами. Поэтому, часто предполагается, что исследуемая величина подчиняется нормальному распределению, хотя на практике это предположение всегда требует специальной проверки.

Не всегда возможно описать поведение объекта линейным уравнением. Поэтому применяется аппроксимация нелинейных связей в заданном диапазоне аргументов линейными соотношениями. Процедура замены действительной функциональной зависимости выходной переменной от входной приближенной линейной зависимостью называется *линеаризацией*.

6) Модели с сосредоточенными и распределенными параметрами. Если можно пренебречь пространственной неравномерностью значений координат состояний объекта, то соответствующая модель – модель с *сосредоточенными* параметрами. Если же основные переменные процесса изменяются как во времени, так и в пространстве (или только в пространстве), то модели, описывающие такие процессы, называются моделями с *распределенными* параметрами.

В объекте с сосредоточенными параметрами в состоянии равновесия регулируемые величины имеют одинаковые значения по всему объему объекта. В переходном режиме в любой точке объекта характер изменения регулируемых величин одинаков в одно и то же время. Эти объекты описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В объектах с распределенными параметрами регулируемая величина в различных точках объекта неодинакова (давление вещества при его транспортировке в трубопроводе, температура продукта в теплообменниках по его длине и т.д.). Эти объекты описываются дифференциальными уравнениями в частных производных либо обыкновенными дифференциальными уравнениями в случае стационарных процессов с одной пространственной координатой.

7) Модели непрерывные и дискретные во времени. Модели, описывающие состояние объектов относительно времени как непрерывного аргумента, называются *непрерывными* (по времени). В заданном диапазоне изменения переменные непрерывной модели могут принимать произвольные значения в любой момент времени.

Дискретные модели служат для описания процессов, которые предполагаются дискретными. В таких моделях переменные квантуются по уровню или по времени. Квантование по уровню соответствует фиксации дискретных уровней переменных в произвольные моменты времени; квантование по времени соответствует фиксации дискретных моментов времени, при которых уровни переменных модели могут принимать произвольные значения. Для динамических объектов управления чаще используется квантования по времени.

8)Дискретно-непрерывные модели используются для случаев, когда хотят выделить наличие как дискретных, так и непрерывных процессов.

Полное наименование модели может включать в себя совокупность перечисленных признаков.

3 Лекция №3. Основные операторы моделей объектов управления

Содержание лекции: основные этапы процесса моделирования; операторы моделей объектов управления.

Цель лекции: изучить основные этапы моделирования и операторы моделей объектов управления.

3.1 Этапы процессы моделирования

В общем случае процесс моделирования состоит из следующих этапов:

1)Описание объекта моделирования. На этом этапе определяется моделируемая система и ее компоненты. Для этого изучается структура явлений, составляющих реальный процесс. В результате этого изучения появляется содержательное описание процесса, в котором требуется по возможности четко представить все необходимые закономерности. Из этого описания следует *постановка* прикладной задачи. Постановка задачи определяет цели моделирования, перечень искомых величин, требуемую точность. Причем постановка может и не иметь строгой математической формулировки.

Содержательное описание служит основой для построения *формализованной схемы* – промежуточного звена между содержательным описанием и математической моделью. Она разрабатывается не всегда, а когда из-за сложности исследуемого процесса непосредственный переход от содержательного описания к математической модели оказывается невозможным. Форма представления материала может быть тоже словесной, но здесь должна быть точная математическая формулировка задачи исследования, характеристик процесса, системы параметров, зависимостей между характеристиками и параметрами.

2) Выбор модели. На этом этапе составляются уравнения математической модели и выдвигаются необходимые допущения. Преобразование формализованной схемы в математическую модель осуществляется математическими методами без притока дополнительной информации. На этом этапе все соотношения записываются в аналитической форме, логические условия – в виде неравенств, аналитическая форма придается по возможности всем сведениям. При построении математического описания используются уравнения различных видов: алгебраические (стационарные режимы), обыкновенные дифференциальные уравнения (нестационарные объекты), дифференциальные уравнения в частных производных используются для математического описания динамики объектов с распределенными параметрами. Если процесс имеет как детерминированные, так и стохастические свойства – используются интегро-дифференциальные уравнения).

3) Исследование модели. Уравнения модели решаются относительно желаемых выходных переменных. Все действия производятся над моделью и направлены непосредственно на получение знаний об этом объекте, на установление законов его развития. Важным преимуществом исследования модели является наличие возможности повторять многие явления для различных исходных условий и с различным характером их изменения во времени.

4) *Интерпретация результатов.* На этом этапе рассматривается вопрос о переносе значений, полученных на математической модели, на реальный объект изучения. Исследователя интересуют свойства объекта, который замещается моделью. Возможность такого перевода знаний существует благодаря наличию определенного соответствия элементов и отношений модели элементам и отношениям оригинала. Эти связи устанавливаются в процессе моделирования.

При необходимости проводится повторный анализ или синтез системы.

Успешность применения математического моделирования зависит от того, насколько удачно была построена модель, адекватности, степени изученности модели, удобства оперирования с ней. Применение компьютеров в математическом моделировании дает возможность исследования в любых условиях варьирования параметров и показателей внешних факторов для получения любых условий, в том числе и не реализуемых в натурных экспериментах. Отсюда следует возможность получения ответов на многие вопросы, возникающие на стадии разработки и проектирования объектов без применения других, более сложных методов.

3.2 Основные операторы моделей объектов управления

Объект управления способен воспринимать внешние воздействия и реагировать на них изменением значений выходных величин. Описание объекта управления в теории автоматического управления состоит в выражении связи реакции объекта, как функции времени и ее причин, входных воздействий. Как ранее было сказано, эта связь в общем случае может быть представлена следующим операторным уравнением

$$y(t) = A\{x(t)\}.$$

Существуют различные способы задания оператора объекта управления.

Наиболее общей формой представления оператора является определение его системой дифференциальных уравнений, описывающих поведение рассматриваемого объекта. Будем рассматривать только объекты с сосредоточенными параметрами, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Порядок системы дифференциальных уравнений, описывающей модель объекта, непосредственно не определяется количеством входов и выходов, а зависит от операторов, преобразующих входные сигналы в выходные. Наиболее универсальная модель, основанная на дифференциальных уравнениях, описывается выражением

$$\sum_{i=0}^{p} a_i \cdot y^{(i)} = \sum_{j=0}^{l} b_j \cdot x^{(j)}, \tag{3.1}$$

где p - порядок модели ($p > l$); $a_p=1;$

a_i и b_j - постоянные коэффициенты (параметры модели);

$y^{(i)} = \dfrac{d^i y}{dt^i}$, $x^{(i)} = \dfrac{d^j x}{dt^j}$ - производные, соответственно выходного и входного сигналов.

Наиболее полно объект управления описывается в терминах *пространства состояний.* Под состоянием объекта понимается совокупность величин y_i,полностью определяющих его положение в данный момент времени. Запишем уравнение (3.1) в виде системы дифференциальных уравнений. Введя обозначения

$$y_1 = y,\ y_2 = y^{(1)},\ y_3 = y^{(2)}, ...,\ y_k = y^{(k-1)},$$

после некоторых преобразований имеем векторную форму оператора модели (3.1):

$$\frac{dY}{dt} = A \cdot Y + B \cdot X',$$

где

$Y = (y_1, ..., y_p)$ – вектор состояний;

$X' = (x, x^{(1)}, ..., x^{(l)})$ – вектор возмущений;

A – квадратная матрица коэффициентов;

B – прямоугольная матрица коэффициентов.

Эта система представляет собой уравнения для переменных состояния, в которой в качестве переменных состояния объекта выбраны n координат (выходной сигнал $y(t)$ и n-1 его производных). Переменные состояния (фазовые координаты) образуют вектор состояния, переменные управления и возмущения образуют векторы управления и возмущения. Множество этих векторов составляет пространство состояний (фазовое пространство), пространство управлений и возмущений. Надо отметить, что между векторами входа, выхода и состояния существует принципиальное различие. Если все составляющие вектора входа и вектора выхода являются вполне конкретными физическими величинами, то элементами вектора состояния могут быть некоторые абстрактные переменные, физическая природа которых не всегда определена.

Для описания динамики объектов, которые характеризуются дискретными значениями входных и выходных сигналов, то есть функционирование которых представляется для дискретного времени $t_k=kT$ (в данном случае T – интервал дискретизации), вместо дифференциальных уравнений можно воспользоваться разностными уравнениями. Обозначив дискретные значения входного и выходного сигналов соответственно

$$x_{k-j} = x(k-j), y_{k-j} = y(k-j),$$

разностное уравнение (аналог дифференциального уравнения) запишем в виде

$$y_{ê} + a_1 \cdot y_{k-1} + ... + a_p \cdot y_{k-p} =$$
$$= b_1 \cdot x_k + b_2 \cdot x_{k-1} + b_3 \cdot x_{k-2} + ... + b_l \cdot x_{k-l+1}.$$

При анализе стохастических систем исходными данными для анализа являются реализации случайного процесса генерируемого этой системой. Реализации случайного процесса обрабатываются и представляются в виде *временного* ряда, который содержит ординаты реализации случайного процесса, снятые в дискретные и равноотстоящие моменты времени. О свойствах исходной непрерывной системы судят по результатам цифровой обработки временных рядов, формируемых системой. В связи с этим широкое распространение получили цифровые параметрические стохастические модели авторегрессии и скользящего среднего (АРСС-модели). АРСС-модели могут быть использованы как для изучения временных рядов, так и при определении статистических характеристик этих рядов. Несколько распространенных дискретных моделей объектов для временной области, учитывающих действие шума наблюдения приведены в [1, п.5.6].

Применяя преобразование Лапласа к линейным дифференциальным уравнениям при нулевых начальных условиях, получим *передаточные функции* объекта. Передаточная функция для линейных и линеаризованных систем является еще одной формой представления их математических моделей.

Динамические характеристики объекта управления также могут быть определены с помощью *частотных характеристик*, построенных в зависимости от круговой частоты. Подавая на вход объекта синусоидальные сигналы с постоянной амплитудой, находят относительную амплитуду выходного сигнала и сдвиг фазы. Меняя частоту входного сигнала, определяют несколько значений относительных амплитуд (амплитудная частотная характеристика) и сдвигов фаз (фазовая частотная характеристика). Амплитуду и диапазон изменения частоты синусоидального входного сигнала выбирают в зависимости от динамических особенностей объекта.

Переходная (реакция объекта на ступенчатое воздействие*) и импульсная переходная* (реакция объекта на дельта-функцию) *функции* также являются динамическими характеристиками объекта. Зная эти функции можно получить передаточную функцию объекта.

Между перечисленными динамическими характеристиками линейного или линеаризованного объекта управления существует однозначная связь, поэтому различие между ними не делается.

4 Лекция №4. Общие принципы построения моделей объектов управления

Содержание лекции: два подхода к построению моделей объектов управления.

Цель лекции: изучить приниципы аналитического и экспериментального методов моделирования объектов управления.

4.1 Два подхода к построению моделей объектов управления

Существуют два принципиально различных подхода к построению математических моделей: аналитические и экспериментальные методы.

Аналитические методы основаны на рассмотрении протекающих в объекте процессов и его материального и энергетического баланса, в результате чего можно составить уравнения статики и динамики объекта. Общая методика составления уравнения объекта заключается в следующем. Составляются уравнения материального и энергетического баланса объекта для некоторого равновесного установившегося состояния. Затем составляется уравнение для неустановившегося состояния, определяющее связь между изменением входной величины (притока тепла или материальной среды, скорости и т.д.), вызванным регулирующим воздействием или внешним возмущением и нарушающим материальный или энергетический баланс объекта, и отклонением выходной величины – регулируемого параметра. Вычитая из последнего уравнения уравнение установившегося состояния, получают уравнение динамики объекта. К достоинством этого метода следует отнести то, что выведенные аналитическим путем уравнения одного объекта применимы для описания свойств других однотипных объектов. Недостатками аналитического метода составления уравнений являются трудность анализа и решения уравнений, большая трудоемкость получения численных значений параметров математического описания.

Если при составлении уравнения принимать во внимание все влияющие на динамику объекта факторы, то получается дифференциальное уравнение с производными высокого порядка, часто нелинейное, а динамические свойства объектов с распределенными параметрами описываются уравнениями в частных производных.

Второй подход базируется на концепции «черного ящика», то есть постулируется, что внутренняя структура объекта неизвестна, да и не должна интересовать исследователя. Вся информация получается только в результате наблюдений за объектом при пассивном и активном эксперименте.

При активных методах исследуемый объект подвергается специальным внешним воздействиям, которые приводят к изменениям выходной величины. Эти изменения фиксируются и полученные данные аппроксимируются математическими выражениями. При пассивных методах используют информацию, полученную в результате нормальной эксплуатации объекта без специальных внешних воздействий на него. Эта информация обрабатывается статистическими методами.

Достоинством экспериментальных методов является их простота и малая трудоемкость при достаточно точном описании свойств объекта в узком диапазоне изменения координат. Основной недостаток экспериментальных методов – невозможность установления функциональной связи между входящими в уравнения численными параметрами и конструктивными характеристиками объекта, режимными показателями процесса и физико-химическими закономерностями изучаемых процессов. Также полученные экспериментальными методами математические описания нельзя распространить на другие однотипные объекты.

Аналитические методы являются более общими по сравнению с экспериментальными методами, а результаты, полученные с их помощью - фундаментальными. Однако они гораздо сложнее, причем существенные трудности возникают уже на этапе построения аналитических моделей. Если для описания объекта с помощью экспериментальных методов достаточно знаний из области статистики и теории автоматического управления, то для создания аналитических моделей требуется привлечение более разнообразного математического аппарата и знаний из различных областей физики, химии, гидродинамики и т.д. В то же время все эти трудности полностью окупаются той огромной информационной емкостью, которой обладают аналитические модели.

4.2 Линеаризация уравнений

Конечной целью моделирования динамики процессов является использование моделей в системах управления для определения динамических характеристик, следовательно, любым способом надо найти решение уравнений. Поэтому дифференциальные и разностные уравнения, образующие математическую модель объекта управления, выводятся на основе различных упрощающих предположений. Линейные дифференциальные уравнения решаются сравнительно легко. Однако не всегда возможно описать поведение объекта линейным уравнением. Поэтому применяется аппроксимация нелинейных связей в заданном диапазоне аргументов линейными соотношениями. Другими словами, в заданном диапазоне входных аргументов нелинейные уравнения заменяются линейными – *линеаризуются*. В линейных объектах связи входных и выходных сигналов легко описываются с помощью передаточной функции. Такая идеализация значительно упрощает процесс построения модели. Например, *линеаризация* дифференциальных и разностных уравнений приводит к *линейным динамическим* моделям, математический аппарат которых разработан наиболее полно. В результате решения таких уравнений получаются характеристики переходного процесса, зависящие от времени и параметров объекта.

Нелинейные элементы часто удается линеаризовать при условии малых отклонений сигналов от их стационарных значений.

Пусть некоторый элемент характеризуется входными величинами $x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t)$, выходной *y(t)* и внешним воздействием *f(t).* Динамическое уравнение элемента имеет произвольный нелинейный вид:

$$F(x_1, x_2, ..., x_m, x_1^{'}, x_2^{'} ..., x_m^{'}, ..., x_1^{(l)}, x_2^{(l)} ..., x_m^{(l)}, y, y^{'}, ..., y^{(n)}) = \varphi(f, f^{'}, ..., f^{(l)}). \qquad (4.1)$$

Допустим, что установившийся процесс имеет место при некоторых постоянных $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, ..., x_n = x_n^0, y = y_0, f = f_0$. Тогда уравнение установившегося состояния согласно (4.1) будет

$$F(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, 0, 0 ..., 0, y, 0, ..., 0) = \varphi(f^0, 0^{'}, ..., 0). \qquad (4.2)$$

В основе линеаризации нелинейных уравнений лежит предположение о том, что в исследуемом динамическом процессе переменные $x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t), y(t)$ изменяются так, что их отклонения от установившихся значений $(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, y_0)$ остаются все время достаточно малыми. Обозначим указанные отклонения через $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_m, \Delta x_1^{'}, ..., \Delta x_m^{'}, \Delta y, \Delta y^{'}, ...$

Тогда в динамическом процессе

$$x_1(t) = x_1^0 + \Delta x_1(t), x_1^{'} = \Delta x_1^{'}, x_2(t) = x_2^0 + \Delta x_2(t), x_2^{'} = \Delta x_2^{'}, ...,$$
$$y(t) = y^0 + \Delta y(t), y^{'}(t) = \Delta y^{'}, ...)$$

Условие достаточной малости динамических отклонений переменных от некоторых установившихся значений для системы автоматического регулирования обычно выполняется. Этого требует сама идея работы замкнутой автоматической системы.

Внешнее воздействие *f(t)* не зависит от работы автоматической системы, изменение его может быть произвольным, и поэтому правая часть уравнения (4.1) обычно линеаризации не подлежит (в отдельных случаях ее тоже можно линеаризовать).

Линеаризация обычно проводится путем разложения нелинейных зависимостей в ряд Тейлора в окрестности исходного стационарного режима с сохранением только линейных частей разложения и последующим вычитанием уравнений статики. С помощью этой процедуры получаются уравнения модели не относительно ее переменных, а относительно отклонений переменных от исходного стационарного режима.

Разложим функцию F в ряд по степеням указанных выше малых отклонений (в *ряд Тейлора*), рассматривая все производные как самостоятельные переменные и запишем уравнение (4.1) в следующем виде:

$$F(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, 0, \ldots, 0, y, 0, \ldots, 0) + (\frac{\partial F}{\partial x_1})^0 \Delta x_1 + (\frac{\partial F}{\partial x_2})^0 \Delta x_2 +$$
$$\ldots + +(\frac{\partial F}{\partial x_m})^0 \Delta x_m + (\frac{\partial F}{\partial x_1^{'}})^0 \Delta x_1^{'} + \ldots + (\frac{\partial F}{\partial x_m^{'}})^0 \Delta x_m^{'} + \qquad (4.3)$$
$$(\frac{\partial F}{\partial y})^0 \Delta y + +(\frac{\partial F}{\partial y^{'}})^0 \Delta y^{'} + (\frac{\partial F}{\partial y_n^{'}})^0 \Delta y_n^{'} + \ldots +$$
$$+ (\text{÷ëåíû âûñøåãî ïîðÿäêà ìàëîñòè}) = \varphi(f, f^{'}, \ldots, f^{(l)}).$$

Здесь частные производные с индексом «0» обозначают значение соответствующих производных в точке установившегося состояния. Члены высшего порядка малости в уравнении (4.3) состоят из произведений и степеней малых отклонений $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta y, \ldots$ с коэффициентами в виде смешанных частных производных и частных производных второго и высших порядков от функции F по всем переменным.

Вычитая из уравнения (4.3) почленно уравнение установившегося состояния (4.2), и, отбросив члены высшего порядка малости, получим искомое линеаризованное уравнение динамики в виде

$$(\frac{\partial F}{\partial x_1})^0 \Delta x_1 + (\frac{\partial F}{\partial x_2})^0 \Delta x_2 + \ldots + (\frac{\partial F}{\partial x_m})^0 \Delta x_m + (\frac{\partial F}{\partial x_1^{'}})^0 \Delta x_1^{'} + \ldots$$
$$+ (\frac{\partial F}{\partial x_m^{'}})^0 \Delta x_m^{'} + (\frac{\partial F}{\partial y})^0 \Delta y + +(\frac{\partial F}{\partial y^{'}})^0 \Delta y^{'} + (\frac{\partial F}{\partial y_n^{'}})^0 \Delta y_n^{'} + \ldots + \qquad (4.4)$$
$$= \varphi(f, f^{'}, \ldots, f^{(l)}) - \varphi(f^0, 0).$$

Это дифференциальное уравнение, также как и уравнение (4.1), описывает тот же динамический процесс. Отличие этого уравнения от первоначального в следующем:

- неизвестными функциями времени в этом уравнении являются не прежние величины $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t), y(t)$, а их отклонения $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m, \Delta y$ от некоторых установившихся значений $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, y_0)$;

- полученное уравнение является линейным относительно отклонений переменных $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m, \Delta x_1^{'}, \ldots, \Delta x_m^{'}, \Delta y, \Delta y^{'}, \ldots$;

- это уравнение является более приближенным, так как в процессе его вывода были отброшены малые высшего порядка.

Уравнение (4.4) называется дифференциальным уравнением *в отклонениях*.

Всегда надо помнить, что линейные модели объекта, полученные с помощью процедуры линеаризации, справедливы лишь при малых отклонениях от исходного стационарного режима.

5 Лекция №5 Аналитические методы определения динамических характеристик объектов

Содержание лекции: основные уравнения динамики процессов.

Цель лекции: изучить основные законы, используемые при аналитическом методе моделирования объектов управления.

5.1 Основные уравнения динамики

Аналитические модели являются познавательными моделями. Существенной особенностью этих моделей является отражение механизма явления в структуре оператора модели, то есть всех причинно-следственных связей, имеющихся у объекта. Аналитические методы определения характеристик объектов управления основаны на составлении их дифференциальных уравнений. Составление дифференциального уравнения базируется на использовании основных физических законов: сохранения массы, энергии и количества движения.

Построение любой математической модели начинают с физического описания объекта моделирования. При этом выделяют «элементарные» процессы, протекающие в объекте моделирования, которые подлежат отражению в модели, и формулируют основные допущения, принимаемые при их описании. «Элементарные» здесь не означает «простейший», а лишь то, что эти процессы являются составляющими более сложных процессов. Чаще всего под «элементарным» понимается процесс, относящийся к определенному классу явлений, например, массообмен, теплопередача и т.д. Перечень учитываемых элементарных процессов определяет совокупность явлений, описывающих объект, которые включают в математическую модель.

Основная технология теплоэнергетической промышленности базируется на физических процессах, элементарными составляющими которых являются: механические процессы (механическая обработка твердых материалов); гидродинамические процессы (транспорт жидкости и газа); тепловые процессы (нагрев и охлаждение); массообменные процессы (испарение и конденсация). Закономерности протекания всех этих процессов тесно связаны с условиями движения среды, в которой они происходят, и которые определяются законами гидро-, газодинамики. Кроме того, они базируются (кроме первого) на элементарных процессах переноса вещества и энергии между отдельными частями системы. Закономерности такого переноса изучает термодинамика. Общность научных основ элементарных стадий технологических процессов определяет и общность принципов их анализа и последующего построения допустимого класса их моделей.

Первый закон термодинамики имеет единую математическую и физическую формулировку: *изменение во времени субстанции в* *элементарном объеме равно сумме притока и стока субстанции через его поверхность.*

Этот закон формулирует неуничтожимость материи и ее движения и записывается через совокупность законов сохранения массы, энергии, количества движения.

Закон сохранения массы. Это основной закон классической механики: масса любой части материальной системы, находящейся в движении, не зависит от времени и является постоянной величиной.

Закон сохранения количества движения: скорость изменения количества движения любой части материальной системы, находящейся в движении, равна сумме всех внешних сил.

Закон сохранения энергии: при бесконечно малом подводе тепла δQ к изолированной системе и совершении этой системой бесконечно малой работы δA, энергия системы изменяется на величину $de = \delta Q - \delta A$.

Эти уравнения должны быть дополнены еще одним, выражающим второй закон термодинамики, который характеризует возрастание энтропии в системе, в которой происходит движение вещества или энергии. Их рассматривают в виде *законов переноса массы и энергии.*

Система уравнений должна быть дополнена *уравнением состояния*.

Общим для всех математических моделей является то, что число уравнений, включаемых в математическое описание, должно быть равно числу переменных, находимых в результате моделирования.

Важной особенностью математического описания, содержащего обыкновенные дифференциальные уравнения, является необходимость задания начальных условий. Для уравнений в частных производных наряду с начальными нужно также задавать граничные условия, в общем случае являющиеся функциями времени.

В ряде случаев вместо описания объекта дифференциальными уравнениями используют его описание системой конечно-разностных уравнений. При подобных преобразованиях возникает погрешность, которую необходимо учитывать при оценке результатов моделирования.

Системы уравнений динамики, как правило, являются существенно нелинейными, и аналитическое решение их в общем виде невозможно. Поэтому в зависимости от специфики задач проводятся упрощения, направленные на исключение отдельных связей, накладываемых уравнениями и краевыми условиями. При этом должны сохраняться существенные черты процесса.

5.2 Упрощение уравнений динамики

Наиболее простой (в смысле математического решения) является статическая задача. Производные по времени и координатам равны 0, и система дифференциальных уравнений сводится к алгебраической системе.

Одним из способов упрощения системы уравнений является снижение числа пространственных координат. При снижении размерности пространства система будет незамкнута, надо использовать алгебраические зависимости, отражающие реальную трехмерность потока. Это большей частью эмпирические зависимости от параметров потока таких величин, как коэффициенты трения, теплоотдачи, скольжения фаз и т.д.

Следующей по сложности является стационарная задача. Для математического описания нестационарных режимов объектов с сосредоточенными параметрами, а также стационарных режимов объектов с распределенными параметрами по одной пространственной координате обычно используют обыкновенные дифференциальные уравнения. В первом случае независимой координатой является время, во втором – пространственная координата.

Упрощение математической формулировки нестационарных задач достигается также за счет сокращения числа взаимодействующих систем, уменьшения количества уравнений, исключения некоторых связей в отдельных уравнениях. Всякое исключение какого-либо дифференциального уравнения снижает порядок системы, то есть с математической точки зрения система оказывается незамкнутой. Исключенное уравнение необходимо заменить алгебраической зависимостью, приближенно отражающей ход процесса.

Во многих практических случаях закономерности движения реального потока находятся на основе экспериментальных данных: определяются некоторые коэффициенты, так или иначе отражающие реальную структуру потока, то есть распределения скорости, температуры, плотности и другие параметры (коэффициенты трения, теплоотдачи, относительные скорости фаз в двухкомпонентных смесях и т.д.). Все они представляют собой интегральные характеристики потока, которые с определенным приближением отражают обмен количеством движения, теплотой, веществом, существующий в реальном потоке. С помощью указанных коэффициентов и усредненных по сечению потока параметров, выражаются передача теплоты, гидравлическое сопротивление, распределение фаз. Связи между ними также находится из опыта. Использование эмпирических коэффициентов и упомянутых зависимостей позволяет отказаться от учета реальной трехмерности потока и одни уравнения упростить, а другие – исключить совсем. Такие упрощения допустимы, так как эмпирические зависимости в определенной мере отражают реальную трехмерность потока.

В моделях с *сосредоточенными* параметрами все параметры системы не зависят от пространственных координат и являются лишь функциями времени. Производные по пространственной координате заменяются отношением разности значений функций между входом и выходом к полной длине канала. Для описания процессов в таких объектах известные законы сохранения обычно записываются в форме *уравнений баланса* (массы, энергии, движения).

6 Лекция №6. Аналитические методы моделирования объектов с сосредоточенными параметрами

Содержание лекции: изучить аналитический подход к моделированию объектов управления.

Цель лекции: изучить на примерах моделирования объектов регулирования уровня в емкости применение основных законов сохранения.

Для описания процессов в объектах с сосредоточенными параметрами законы сохранения обычно записываются в форме *уравнений баланса* (массы, и энергии).

Согласно уравнению материального баланса изменение массы вещества в замкнутом объеме в единицу времени равно алгебраической сумме входных и выходных потоков

$$\frac{dG}{dt}=\sum_{i=1}^{k}D_i-\sum_{j=1}^{r}D_i,$$

здесь D_i ($i=1,k$) – массовый расход входного i-го потока;
D_j ($j=1,r$) – массовый расход выходного j-го потока;
G – масса вещества в рассматриваемом объеме;
t – время.

Аналогично, в соответствии с уравнением теплового баланса, изменение энтальпии какого-либо тела в единицу времени равно алгебраической сумме тепловых потоков, подводящих (или отводящих) тепло к рассматриваемому телу

$$\frac{dI}{dt}=\sum_{i=1}^{k}Q_i-\sum_{j=1}^{r}Q_i,$$

где Q_i ($i=1,k$) – i-ый входной поток тепла;
Q_j ($j=1,r$) – j-ый выходной поток тепла;
I – энтальпия тела.

Дать законченную теорию моделирования всех разновидностей процессов в их различных проявлениях не представляется возможным. Для иллюстрации применения основных естественнонаучных законов сохранения массы, движения, энергии в наиболее характерных процессах рассмотрим несколько примеров. Эти примеры рассматриваются для простейших случаев при пренебрежении рядом несущественных факторов. Суждение об устойчивости объектов для простейших случаев вытекает из рассмотрения дифференциальных уравнений объекта.

В промышленных объектах нередко встречаются емкости, которые в зависимости от особенностей притока, стока и конструкции обладают определенными динамическими свойствами [3, п.5.4].

Пример 1. Рассмотрим емкость, схема которой показана на рисунке 6.1. В этой емкости величина притока не зависит от уровня, так как емкость находится под атмосферным давлением и жидкость притекает из трубы, конец которой находится на уровне жидкости. Сток из емкости происходит через насос, поэтому величина стока также не зависит от уровня. Нарушение равновесия между стоком и притоком $Q_n \neq Q_c$; $\Delta Q = Q_n - Q_c$ вызовет изменение уровня:

$$\Delta h = \frac{Q_n - Q_c}{F} t = \frac{\Delta Q}{F} t .$$

Отсюда определяется дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\Delta h}{dt} = \frac{dh}{dt} = \frac{1}{F} \Delta Q . \qquad (6.1)$$

Преобразовав это уравнение по Лапласу, нетрудно найти передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{1}{F} \cdot \frac{1}{p} \cdot$$

Пример 2. На рисунке 6.2 показана емкость, из которой жидкость вытекает в атмосферу. В этом случае величина притока не зависит от уровня, а величина стока зависит от него. Сток определяется сопротивлением задвижки и величиной перепада давления над ней. Подробный вывод статической, динамической, а также линеаризованной моделей этого объекта приведен в [1, п.3.1].

Пример 3. Рассмотрим схему гидравлического аккумулятора (рисунок 6.3). В емкость, заполненную воздухом, непрерывно подается некоторый расход масла. Из аккумулятора оно поступает неравномерно, в зависимости от необходимости. При этом происходят колебания уровня в емкости, которые вызывают колебания давления, влияющего на приток и сток.

Приток и сток в объект определяются выражениями

$$Q_n = C_n \cdot F_n \cdot \sqrt{P_1 - P_0}, \quad Q_c = C_c \cdot F_c \cdot \sqrt{P_0 - P_2}, \qquad (6.2)$$

где C_n *и* C_c — постоянные коэффициенты;

P_1 — давление в напорном трубопроводе;

P_o — давление в емкости;

P_2 —давление в сливном трубопроводе;

F_n — условный проход задвижки на притоке;

F_c — условный проход задвижки на стоке.

Между уровнем масла в емкости и объемом газовой подушки над маслом существует зависимость следующего вида:

$$V = (1 - \frac{h}{h_{\max}}) \cdot V_{\max}, \qquad (6.3)$$

где V_{max} – объем резервуара;

h_{max} – высота резервуара.

Давление в емкости при условии, что оно создано подъемом уровня, равно

$$P_0 = \frac{V_{\max}}{V}.$$

Подставив в последнее уравнение выражение (6.3), получим

$$P_0 = \frac{h_{\max}}{h_{\max} - h}. \quad (6.4)$$

Из выражений (6.2) и (6.4) определяются зависимости притока и стока от уровня масла в емкости:

$$Q_n = C_n \cdot F_n \cdot \sqrt{P_1 - \frac{h_{\max}}{h_{\max} - h}};$$

$$Q_c = C_c \cdot F_c \cdot \sqrt{\frac{h_{\max}}{h_{\max} - h} - P_2}.$$

Из последних двух уравнений, учитывая уравнение (6.1), нетрудно определить уравнение гидравлического аккумулятора:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{F}[C_n \cdot F_n \cdot \sqrt{P_1 - \frac{h_{\max}}{h_{\max} - h}} - C_c \cdot F_c \cdot \sqrt{\frac{h_{\max}}{h_{\max} - h} - P_2}].$$

Пример 4. При наличии двух сообщающихся резервуаров (рисунок 6.4) объект будет описан системой уравнений

$$\begin{cases} S_1 \dfrac{dH}{dt} = Q_{n1} - Q_{c1} - Q_{12}, \\ S_2 \dfrac{dH}{dt} = Q_{n2} - Q_{c2} + Q_{12}, \end{cases} \quad (6.6)$$

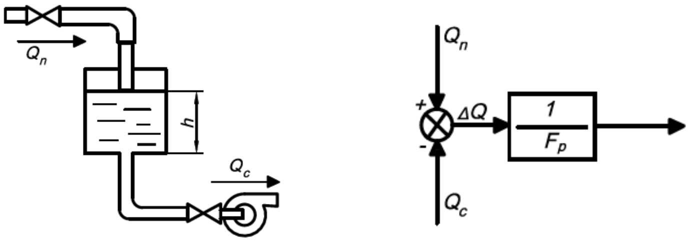
где $Q_{12}=Q_{12}(H_1-H_2)$ - некоторая, в общем случае нелинейная монотонная функция;

S_1, S_2 - площади поперечных сечений резервуаров.

Уравнения (6.6) представляют собой математическое описание объекта, в котором каждый из векторов управляемых величин $\bar{y}$ и воздействий $\bar{u}$ имеет по две координаты

$$\bar{u} = \{ Q_{n1}, Q_{n2} \}, \quad \bar{y} = \{ H_1, H_2 \}$$

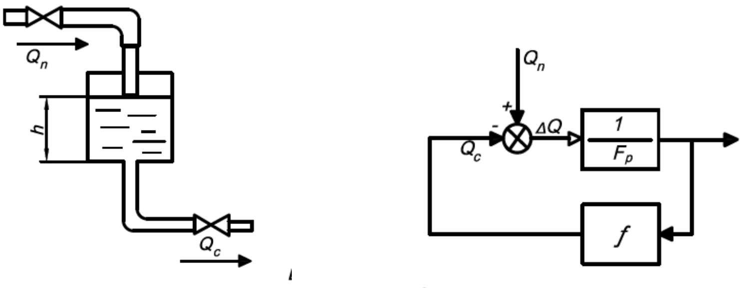
В зависимости от наличия устройств, контролирующих расходы Q_{c1} и Q_{c2}, вектор возмущения $\{Q_{c1}, Q_{c2},\}$ может быть отнесен к контролируемым g или неконтролируемым f возмущениям. Управляемые координаты H_1, H_2 могут быть приняты в качестве вектора состояния объекта $\bar{x} = \{x_1, x_2\} = \bar{y}$. Так как вектор $\bar{y}$ имеет две координаты, связанные между собой и зависящие от обеих координат вектора $\bar{u}$, то объект может быть отнесен к многосвязным.



а) б)

а) физическая схема; б) структурная схема

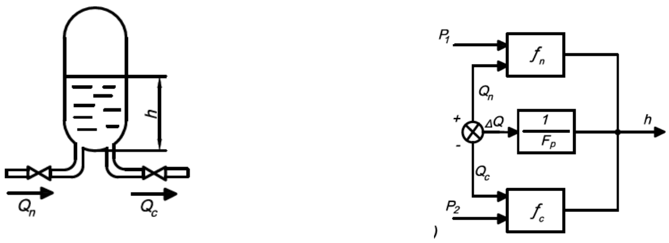
Рисунок 6.1 – Емкость со свободным уровнем (сток происходит через насос)



а) б)

а) физическая схема; б) структурная схема

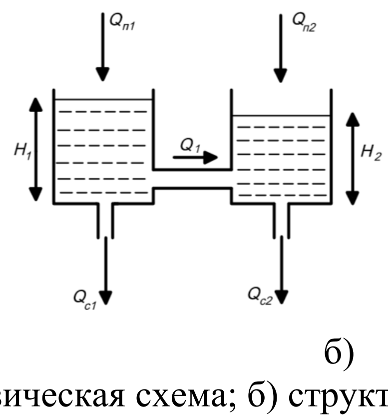
Рисунок 6.2 – Емкость в случае, когда величина стока зависит от уровня



а) б)

а) физическая схема; б) структурная схема

Рисунок 6.3 – Схема гидравлического аккумулятора



а) б)

а) физическая схема; б) структурная схема

Рисунок 6.4 – Каскад резервуаров

7 Лекция №7. Моделирование объекта регулирования уровня

Содержание лекции: аналитический подход к моделированию объектов управления.

Цель лекции: изучить пример моделирования технологического объекта с сосредоточенными параметрами.

Для получения конечного продукта в текстильной промышленности сырье подвергается разнообразной обработке на множестве производств. Одним из технологических процессов является процесс отделки тканей, который включает в себя этап крашения различными красителями. Ткань, с целью облегчения технологического процесса в дальнейшем, сшивается *в виде петель* в одну непрерывную ленту. При периодическом крашении на роликовых красильных машинах ткань перемещается по роликам и многократно проходит через красильный раствор.

К управляющим факторам в отделочном производстве можно отнести: регулирование температуры в ваннах красильных машин и сушильных агрегатах, регулирование уровня и концентрации растворов, влажности, натяжения, ширины и усадки ткани, скоростных режимов и т.д.

К возмущающим факторам можно отнести достаточно большое количество параметров, которые характеризуют не только конкретную технологическую операцию, но и предыдущие этапы обработки материала. Основными из них являются: физико-механические свойства материала (влажность, качество предыдущей химической обработки, вид волокна, смеси и т.д.), качество и стабильность растворов и красителей, натяжение материала, тепловые режимы и т.д.

Выходными координатами многомерного объекта управления являются показатели эффективности технологического процесса отделочного производства, определяемые его производительностью, качеством продукции, затратами материалов и энергии.

Рассмотрим ванну красильной машины, являющейся одним из аппаратов текстильной промышленности, в качестве еще одного примера объекта регулирования уровня [4].

В ванну машины поступает ткань с начальной влажностью m_1. При выходе из машины ткань отжимается до влажности m_2>m_1.(в противном случае ванна будет переполняться). Через ванну проходит G кг/сек сухой ткани. В ванну через регулирующий клапан притекает подкрепляющий раствор красителя в количестве Q_n л/сек.

Расход жидкости является функцией переменных m_1, m_2 :

$$Q_p = f(G, m_1, m_2).$$

Здесь используется следующее соотношение:

$$Q_p = \frac{G(m_2 - m_1)}{\rho}.$$

В установившемся состоянии приток подкрепляющего раствора равен расходу (уносу) Q_p жидкости из ванны:

$$Q_{no} - Q_{p0} = 0$$

где

$$Q_{p0} = \frac{G_0(m_{20} - m_{10})}{\rho}, \qquad (7.1)$$

здесь ρ - плотность раствора, уносимого тканью;

индексом «0» отмечены величины, характеризующие установившееся состояние.

При неустановившемся режиме (изменении притока до величины $Q_{n1} = Q_{n0} + \Delta Q_n$ или изменении расхода до величины $Q_{p1} = Q_{p0} + \Delta Q_p$ в ванне будет изменяться количество жидкости, причем за время dt объем жидкости изменится на величину

$$dV = S_0 \cdot dH,$$

где S_0— площадь сечения ванны, соответствующая заданному уровню жидкости H_0 (объемом ткани в ванне пренебрегаем).

За время dt

$$(Q_{n1} - Q_{p1})dt = S_0 \cdot dH. \qquad (7.2)$$

Делим уравнение (7.2) на dt и вычитаем из полученного уравнения (7.1), в результате получаем

$$S_0 \cdot \frac{dH}{dt} = \Delta Q_n - \Delta Q_p. \qquad (7.3)$$

Для перехода к безразмерным величинам введем обозначения:

$\varphi = \frac{\Delta H}{H_0}$ - относительное изменение регулируемой величины, в данном случае уровня;

H_0 - номинальное (или заданное) значение регулируемой величины);

$\mu = \frac{\Delta Q_n}{Q_{n\max}}$ -относительное изменение притока (регулирующего воздействия);

$f = \frac{\Delta Q_p}{Q_{n\max}}$ - относительное изменение расхода жидкости (возмущение).

При введении этих обозначений уравнение (7.3) примет вид:

$$\frac{S_0 H_0}{Q_{n\max}} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \mu - f$$

или

$$T_a \frac{d\varphi}{dt} = \mu - f,$$

где $T_a = \dfrac{S_0 H_0}{Q_{n\max}}$ - постоянная времени объекта.

Таким образом, ванна как объект регулирования уровня раствора имеет свойства интегрирующего (астатического) звена, к входу которого, кроме регулирующего воздействия μ, приложено возмущение

$$\begin{aligned} f &= \frac{\Delta Q_p}{Q_{n\max}} = \frac{1}{Q_{n\max}}[(\frac{\partial Q_p}{\partial G})_0 \Delta G + (\frac{\partial Q_p}{\partial m_1})_0 \Delta m_1 + (\frac{\partial Q_p}{\partial m_2})_0 m_2] = \\ &= \frac{1}{Q_{n\max}}(\frac{m_{20} - m_{10}}{\rho}\Delta G - \frac{\Delta m_1}{\rho} G_0 + \frac{\Delta m_2}{\rho} G_0). \end{aligned} \tag{7.4}$$

Максимальный приток

$$Q_{n\max} = \frac{G_{\max}(m_{2\max} - m_{1\max})}{\rho}.$$

После подстановки $Q_{n\max}$ в уравнение (7.4) и преобразований получим

$$f = k_1 f_1 - k_2 f_2 + k_3 f_3,$$

где

$f_1 = \dfrac{\Delta G}{G_{\max}}$; $f_2 = \dfrac{\Delta m_1}{m_{2\max} - m_{1\max}}$; $f_3 = \dfrac{\Delta m_2}{m_{2\max} - m_{1\max}}$ - отдельные виды возмущений;

$k_1 = \dfrac{m_{20} - m_{10}}{m_{2\max} - m_{1\min}}$; $k_2 = k_3 = \dfrac{G_0}{G_{\max}}$ - соответствующие им коэффициенты.

Таким образом, возмущения вызываются как изменением скорости прохождения ткани или ее массы, так и изменениями значений влажности входящей и выходящей из ванны ткани.

С учетом этих возмущений уравнение объекта имеет вид

$$T_a \frac{d\varphi}{dt} = \mu - k_1 f, + k_2 f_2 - k_3 f_3.$$

Передаточная функция объекта по отношению к регулирующему воздействию

$$W(p) = \frac{1}{T_0 p}.$$

Передаточные функции объекта по отношению к каждому из возмущений

$$W_1(p) = -\frac{k_1}{T_0 p}, \quad W_2(p) = \frac{k_2}{T_0 p}, \quad W_3(p) = -\frac{k_3}{T_0 p}.$$

8 Лекция №8. Моделирование теплообменных процессов

Содержание лекции: применение уравнений теплового баланса при аналитическом моделировании теплообменных процессов.

Цель лекции: изучить примеры моделирования процесса теплообмена.

При исследовании процесса передачи тепла от одного теплоносителя к другому через стенку можно выделить несколько элементарных этапов: переход тепла от горячего теплоносителя к более холодной стенке, поглощение тепла материалом стенки и её нагрев, распределение тепла по объёму стенки, переход тепла от стенки к холодному теплоносителю.

Если процесс теплообмена протекает стационарно, то температура в каждой точке материала (теплоносителей и стенки) не изменяется во времени. Применение модели с сосредоточенными параметрами (т.е. когда пространственные координаты не входят в математическое описание) приводит к алгебраическим соотношениям между температурами в системе. Если температуры меняются во времени, математическое описание получается в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (аргументом является время).

Зависимость температур от геометрических координат обуславливает математическое описание статики в виде обыкновенных дифференциальных уравнений (если пространственная координата одна) или дифференциальных уравнений в частных производных. Независимыми переменными при этом являются пространственные координаты. Динамическая модель при наличии пространственно-распределённых эффектов описывается уравнениями в частных производных, причём одной из независимых переменных является время.

Интенсивность перехода тепла от одного теплоносителя (например, горячего потока жидкости или газа) к другому (стенке) зависит от разности температур между ними, а также от теплового сопротивления. В расчётные уравнения, однако, обычно включают не сопротивление, а обратную величину α – коэффициент теплоотдачи, q – тепловой поток. Полный тепловой поток q определяется произведением коэффициента теплоотдачи α, площади поверхности F и температурного напора ΔT:

$$q = \alpha \cdot F \cdot \Delta T.$$

Это уравнение применимо как к нагреванию стенки от горячей жидкости, так и, наоборот, к нагреванию холодной жидкости горячей стенкой; при этом ΔT будет иметь разные знаки.

Если пренебречь распространением тепла в стенке, то теплопередачу от горячего потока жидкости к холодному, находящемуся по другую сторону стенки, можно представить как процесс преодоления тепловым потоком двух последовательных сопротивлений теплоотдачи – от горячего потока к стенке и от нагревшейся стенки к холодному потоку.

Используя вместо сопротивлений коэффициенты теплоотдачи (α_1 и α_2), получаем выражение, определяющее коэффициент теплопередачи (K):

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}.$$

В практических расчётах часто используют коэффициент теплопередачи как характеристику интенсивности теплообмена между потоками:

$$q = K \cdot F \cdot \Delta T.$$

В тех случаях, когда коэффициенты теплоотдачи учитываются порознь, принимают усреднённую температуру стенки, разделяющей потоки. Иными словами, считают, что теплопроводность материала стенки настолько велика, что перепад температуры отсутствует.

Коэффициенты теплоотдачи зависят от многих параметров, но наиболее сильно – от скорости потока, характера набегания жидкости на стенку, плотности и теплопроводности жидкости. При выполнении точных расчётов зависимость коэффициента теплоотдачи от параметров потока следует учитывать. Однако для большинства инженерных расчётов теплообменной аппаратуры достаточны упрощённые представления.

Для вывода уравнений математического описания процесса теплообмена через стенку следует рассмотреть тепловой баланс каждой среды, имеющей запас тепла. Он складывается из прихода и расхода тепла, которые определяют накопление тепла в объёме.

Накопление связано с изменением температуры:

$$\rho \cdot c_p \cdot V \cdot \Delta T$$

или для элементарного объёма

$$\rho \cdot c_p \cdot S \cdot dT \cdot dl,$$

где ρ – плотность;

c_p – удельная теплоёмкость;

V – объём;

S – сечение потока;

dl – элементарный участок потока.

Приход и расход тепла могут определяться теплоотдачей (теплопередачей), а в случае проточной системы с распределёнными параметрами – притоком и уносом тепла с конвективным потоком.

Количество тепла, поступающее в аппарат с конвективным потоком, определяется как $G \cdot \rho \cdot c_p \cdot T \cdot \tau$ или для элементарного объёма за элементарное время $d\tau$ – $G \cdot \rho \cdot c_p \cdot T \cdot d\tau$, где G – объёмный расход потока.

Количество тепла, уходящее из рассматриваемого объёма с конвективным потоком, определяется выражением

$$G \cdot \rho \cdot c_p \cdot (T + \Delta T) \cdot \tau$$

или для элементарного объёма

$$G \cdot \rho \cdot c_p \cdot (T + \Delta T) \cdot d\tau.$$

Приход тепла, определяемый теплопередачей:

$$K \cdot \frac{F}{V}(T_{вн} - T) \cdot V\tau$$

или для элементарного объёма за элементарное время

$$K \cdot \frac{F}{V}(T_{вн} - T) \cdot Vd\tau\,,$$

где $T_{вн}$– температура внешнего теплоносителя.

С учётом полученных соотношений накопление тепла в системе составит:

$$\rho \cdot c_p \cdot V \cdot \Delta T = G\rho c_p T\tau - G\rho c_p (T + \Delta T)\tau + KF(T_{вн} - T)\tau,$$

или в элементарном объёме за элементарное время

$$\rho \cdot c_p \cdot S \cdot dT \cdot dl = G\rho c_p T\tau - G\rho c_p (T + dT)d\tau + K\frac{F}{V}(T_{вн} - T)dld\tau,$$

Проведя несложные преобразования, получим уравнение теплового баланса, описывающее динамику теплообменников, во всём объёме которых происходит полное (идеальное) смешение частиц потока:

$$\rho \cdot c_p \cdot S \cdot \frac{dT}{d\tau} = G\rho c_p (T_0 - T) + KF(T_{вн} - T),$$

где T_0, T– температура потока на входе и в зоне идеального смешения.

Соответственно для трубчатых теплообменников, работающих по принципу вытеснения, уравнение динамики будет выглядеть следующим образом:

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{G\rho c_p}{S} \cdot \frac{\partial T}{\partial l} + \frac{KF}{V}(T_{вн} - T),$$

Ввиду того, что в статическом режиме накопление тепла в системе равно нулю, модель статики теплообменников смешения будет иметь вид:

$$G\rho c_p (T_0 - T) + KF(T_{вн} - T) = 0,$$

статика трубчатых теплообменников описывается уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \frac{KF}{u\rho c_p V}(T_{вн} - T),$$

где u - скорость движения потока.

На основе этих уравнений можно составить математическое описание различных вариантов теплообменных аппаратов.

Пример 1. Теплообменник представляет собой тонкостенный змеевик, по которому в режиме идеального вытеснения движется охлаждаемый поток жидкости. Змеевик погружён в воду, непрерывно протекающую через сосуд, так что температура охлаждающей воды $T_{вн}$ практически постоянна.

Требуется определить температуру на выходе потока, идущего по змеевику со скоростью *u*, если заданы его температура на входе, длина трубки змеевика, его сечение, коэффициент теплопередачи *K;* также известны теплоёмкость охлаждаемой жидкости и её плотность. Параметры считать не зависящими от температуры; изменение объёма не учитывать. Режим работы считать стационарным.

Пример 2. Жидкость охлаждается в теплообменнике типа «труба в трубе». Охлаждаемая жидкость и хладагент движутся параллельно (прямотоком). Заданы: начальная температура и плотности охлаждаемой жидкости и хладагента, диаметры труб теплообменника: внутренней и наружной (для хладагента), длина теплообменника, теплоёмкости жидкости и хладагента, объёмные расходы охлаждаемой жидкости и хладагента, коэффициент теплопередачи *K*. Требуется определить температуры потоков на выходе теплообменника.

Пример 3. Рассмотрим теплообменник с интенсивным смешиванием, в который поступает поток жидкости с известной температурой.

В общем случае процесс проходит при следующих условиях: есть теплообмен с окружающей средой и необходимо учитывать теплоемкость стенок. Принимая во внимание эти моменты, можно вывести уравнения модели теплообменника в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных.

На практике часто закономерности движения реального потока находятся на основе экспериментальных данных. Использование этих зависимостей позволяет отказаться от учета реальной трехмерности потока и одни уравнения упростить, а другие – исключить совсем. Такие упрощения допустимы, так как эмпирические зависимости в определенной мере отражают реальную трехмерность потока.

Для рассматриваемого примера можно принять следующие упрощающие допущения:

- не учитывать теплообмен с окружающей средой;
- уравнение, отражающее теплообмен с окружающей средой, можно заменить известной из физики экспериментальной зависимостью. В этих случаях модели процесса представляются дифференциальными уравнениями первого порядка;
- для учета теплоемкости стенок также использовать аналогичные экспериментальные зависимости. В этом случае имеем модель в виде обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Подробный вывод уравнений приведен в [1, п.3.4].

9 Лекция №9. Общие подходы к проблеме идентификации

Содержание лекции: основные сведения об идентификации объектов управления.

Цель лекции: изучить основные определения теории идентификации; классификацию экспериментальных методов моделирования объектов управления.

Рассмотренные ранее аналитические методы предусматривают получение математического описания объекта на основе законов физики, механики, химии и т.д. Эти модели являются познавательными. Существенной особенностью этих моделей является отражение механизма объекта или явления в структуре оператора модели, то есть всех причинно-следственных связей, имеющихся у объекта. При неучете этих связей познавательная сторона модели существенно пострадала бы, так как для познания необходимо знать не только как, но и почему.

Такой подход дает положительный результат, если рассматриваемый объект достаточно прост по структуре и хорошо изучен. К тому же функционирующие системы подвергаются различным внешним и внутренним возмущениям, вследствие чего меняются их характеристики. Поэтому практически невозможно построить достаточно точную математическую модель сложной системы только на основе теоретических исследований протекающих в ней физических процессов. В связи с этим, если объект изучен недостаточно изучен или же настолько сложен, что аналитическое описание его математической моделью практически невозможно, прибегают к экспериментальным методам, суть которых сводится к статистической обработке технологических данных.

Определением характеристик объекта по результатам измерений входных и выходных сигналов занимается одно из важнейших направлений теории автоматического управления, которое называют *идентификацией*. Этот класс моделей строится с единственной целью – с целью использования их для решения задач управления. Модели, построенные с помощью методов теории идентификации, могут и не отражать внутренних механизмов явления, что необходимо для познавательной модели. Им достаточно лишь констатировать наличие определенных формальных связей между входами и выходами объекта. Характер и особенности этой связи и составляют основу модели, полученной в процессе идентификации объекта управления. Итак, идентификация изучает методы построения математических моделей функционирующих систем по априорной и экспериментальной информации и является одним из основных методов в теории и практике управления сложными объектами различной физической природы.

В общем виде задача идентификации заключается в определении оператора объекта, преобразующего входные воздействия в выходные. Математически соответствие между входной и выходной функциями можно записать в виде выражения

$$y(t) = A(f)u(t),$$

где $A(f)$ – математический оператор, который заранее неизвестен и подлежит определению;

$y(t)$ – вектор выходных координат объекта;

$u(t)$ – вектор управления (входа);

u и y – соответственно входная и выходная векторные переменные идентифицируемой системы, которые могут быть как детерминированными, так и случайными. Необходимо иметь в виду, что величины u и y измеряются под действием случайных помех. В задаче идентификации требуется оценить неизвестный оператор A.

Все экспериментальные методы исследования динамики процесса основаны на обработке информации, содержащейся в его входных и выходных координатах. *Априорная* информация – информация, имеющаяся еще до наблюдения входов и выходов объекта. *Апостериорная* информация имеет количественный характер, то есть это результат (протокол) наблюдений входа и выхода объекта. Для непрерывных объектов имеются записи непрерывных функций (измерений входов и выходов за период наблюдений). В дискретном случае протокол представляет собой таблицу измерений.

Предполагается провести эксперименты с целью накопления необходимых данных о работе системы, а затем, используя их и соответствующие методы, получить в явном виде необходимую информацию о математической модели системы.

По методу проведения эксперимента на объекте можно выделить активные, пассивные и смешанные методы идентификации.

Активные методы идентификации характерны тем, что на входы исследуемого объекта подают заранее заданные пробные воздействия и исследуют выходной сигнал, причем эти пробные воздействия могут являться импульсными, периодическими или случайными функциями времени.

Во многих случаях нарушение нормального функционирования объекта искусственными пробными воздействиями недопустимо. В этих случаях применяются *пассивные* методы идентификации, как правило, статистические, в которых используются случайные естественные колебания входного сигнала. Для эффективного использования этих методов необходим большой интервал наблюдения. Отсутствие пробного воздействия устраняет нежелательное влияние аппаратуры идентификации на процесс управления, но точность идентификации уменьшается, особенно при малом уровне управляющей величины. Вопрос, что является более приемлемым, непростой и зависит от свойств конкретного объекта, требуемой точности идентификации и вида пробного сигнала.

В самом широком плане идентификация может рассматриваться как задача последовательного решения, охватывающая планирование эксперимента, определение, к какому классу принадлежит неизвестный оператор A, и оценивание неизвестных параметров (детерминированных или случайных величин или функций). Такой подход к проблеме идентификации приводит к трудно решаемой задаче. Однако такая постановка задачи обращает внимание на необходимость совмещать планирование эксперимента, оценивание класса неизвестного оператора и оценивание параметров оператора известного класса.

Известна и другая постановка проблемы идентификации, охватывающая только планирование эксперимента и оценивание неизвестного векторного или скалярного параметра оператора известного класса. В этой формулировке принимается, что класс оператора A известен с точностью до некоторого векторного или скалярного параметра c (предполагается, что класс оператора определен на основании имеющейся априорной информации об идентифицируемой системе). Тогда операторное уравнение (9.1) принимает следующий вид:

$$y(t) = A(c)u(t),$$

где $A(c)$ – оператор, действующий на u и известным образом зависящий от неизвестного векторного параметра c.

В данном случае требуется разработать такой план наблюдения над u и y и подобрать такой метод вычисления оценок, которые позволили бы получить в каком-то смысле оптимальную оценку неизвестного параметра c.

В некоторых случаях задача идентификации рассматривается просто как задача оценивания параметров оператора известного класса. При этом считается, что некоторые результаты наблюдения уже имеются и оценку параметров следует искать только из имеющихся наблюдений.

В зависимости от объема априорной информации о системе различают: идентификацию *в широком смысле* (*структурная* идентификация) и идентификацию *в узком смысле (параметрическая и непараметрическая* идентификация*)*.

При структурной идентификации определяют структуру и вид оператора объекта, или другими словами вид математической модели объекта. Определение структуры модели является одной из основных проблем теории идентификации. Как правило, структура постулируется априори с точностью до некоторого множества неизвестных параметров. В дальнейшем это множество является основным объектом исследования. Решение принимается на заданном классе моделей-претендентов. Но какие-либо формализованные подходы и методы, позволяющие выбрать структуру модели на основе доступного для наблюдения информационного множества объекта, отсутствуют. Это объясняется тем, что некоторые элементы структуры модели не поддаются адекватной математической трактовке. Поэтому структурное множество часто сужают до таких математических категорий и объектов, которые можно описать на существующем математическом языке и, следовательно, задать на классе функций из заданного множества. Конкретный выбор математической модели зависит от типа объекта. В качестве математических моделей технических систем применяются дифференциальные уравнения в обыкновенных и частных производных. Причем при решении задач управления предпочтение отдается моделям в пространстве состояний и структурированным моделям, описываемым дифференциальными уравнениями в обыкновенных производных.

После того как математическая модель объекта определена (определена структура оператора), необходимо определить конкретный вид модели объекта управления. Как ранее оговаривалось, любую динамическую характеристику объекта управления можно принимать за его модель.

Экспериментальные методы определения динамических характеристик можно классифицировать различными способами. Чаще всего принято деление всех методов на следующие три основные группы:

- *прямые методы*, которые позволяют определить последовательности дискретных значений оператора связи в конечном числе точек путем подачи пробных сигналов специальной формы. Методами этой группы определяются следующие характеристики: в частотной области – амплитудные $|W(j\omega)|$ и $\varphi(\omega)$ фазовые характеристики, годографы $W(j\omega)$ и т.д.; во временной области – импульсная переходная $g(t)$ и переходная функции $h(t)$. Например, формируя на входе системы ступенчатый сигнал, на выходе системы получаем переходной процесс. По графику переходного процесса оцениваются важнейшие динамические характеристики объекта управления: чистое транспортное запаздывание, самовыравнивание, инерционность. Определяются коэффициенты передаточной функции и соответствующего дифференциального уравнения;

- *параметрическая идентификация* или *методы восстановления параметров модели* с известной структурой. В общем случае оценивание параметров модели заданной структуры проводится путем минимизации выбранного критерия качества модели – функции потерь (чаще всего – среднего квадрата рассогласования выходов объекта и его постулируемой модели). В результате применения методов этой группы можно определить коэффициенты дифференциального уравнения линейного одномерного объекта, а, следовательно, и коэффициенты передаточной функции;

- *непараметрическая идентификация* или методы, базирующиеся на определении неизвестных динамических характеристик объекта и аппроксимации их аналитическими выражениями, которые выбираются на основе априорной информации об объекте, имеющейся в распоряжении исследователя. Здесь применяются методы статистики, которые позволяют в качестве источника информации использовать случайные естественные сигналы идентифицируемого объекта.

10 Лекция №10. Аппроксимация модели объекта типовыми динамическими звеньями

Содержание лекции: математическое описание объектов управления в виде типовых динамических звеньев.

Цель лекции: изучить методы идентификации с помощью экспериментальных кривых разгона.

В соответствии с рассмотренной выше классификацией экспериментальных методов моделирования объектов управления рассмотрим первую группу методов – *прямые* методы. Суть метода заключается в следующем. На действующем объекте по входному каналу подается одно из трех типовых возмущающих воздействий: единичный скачок, единичный импульс, синусоидальные колебания различной частоты. Чаще всего используется возмущение типа «единичного скачка». Реакция объекта на такое возмущение – график изменения во времени выходного сигнала объекта называется *экспериментальной кривой разгона.* Далее применяется специальный математический аппарат – совокупность шести типовых динамических звеньев. Если рассматривать объект как «черный ящик», то оказывается, что различные по природе технологического процесса, объему и конфигурации объекты управления в динамическом режиме работы математически описываются в виде одного и того же типового уравнения. В теории автоматического управления были подобраны всего 6 типов уравнений взаимосвязи выходного сигнала объекта с входным сигналом, которые назвали *типовыми динамическими звеньями.* Большинство типовых уравнений взаимосвязи типовых динамических звеньев являются дифференциальными.

Методика использования совокупности типовых динамических звеньев заключается в следующем: каждое типовое динамическое звено имеет свою *типовую кривую разгона* и ряд других типовых характеристик. Полученную на действующем объекте экспериментальную кривую разгона сравнивают с набором шести типовых кривых разгона типовых динамических звеньев и по совпадению характера изменения во времени экспериментальной и какой-либо типовой кривой разгона проводят аппроксимацию исследуемого объекта данным типовым динамическим звеном. Тогда уравнение взаимосвязи этого типового динамического звена становится уравнением взаимосвязи выходного сигнала объекта с входным сигналом, или искомой математической моделью объекта. Величину коэффициентов, входящих в данное типовое уравнение типового динамического звена находят по экспериментальной кривой разгона объекта. Например, пусть на объекте в результате подачи на его вход единичного скачка получена экспериментальная кривая разгона, которая по характеру изменения во времени совпадает с типовой кривой разгона апериодического (инерционного, статического) типового динамического звена. Значит, такой объект можно аппроксимировать апериодическим типовым динамическим звеном. Его типовое дифференциальное уравнение и передаточная функция имеют вид [2]:

$$T_0 \frac{dx_{вых}}{d\tau} + x_{вых} = k \cdot x_{вх}, \; W(p) = \frac{x_{вых}(p)}{x_{вх}(p)} = \frac{k}{T_0 p + 1}.$$

Коэффициенты уравнения *k* и *T₀* находятся из графика экспериментальной кривой разгона [1, п.6.2].

Если на объекте получена экспериментальная кривая разгона, похожая на типовую кривую разгона астатического (интегрирующего) типового динамического звена, то дифференциальное уравнение и передаточная функция имеют вид:

$$T \frac{dx_{вых}}{d\tau} = x_{вх}, \; W(p) = \frac{x_{вых}(p)}{x_{вх}(p)} = \frac{1}{Tp}.$$

Коэффициент T определяется по экспериментальной кривой разгона по углу наклона α: $tg\alpha = \frac{1}{T}$.

Аналогично легко провести идентификацию динамического объекта по совпадению экспериментальной и типовой кривых разгона для аппроксимации объекта усилительным, реальным дифференцирующим и запаздывающим типовыми динамическими звеньями. Типовые кривые разгона этих звеньев приведены в [2]. Передаточные функции этих звеньев имеют вид:

$$W(p)_{\text{óñèëèò}} = \frac{x_{\text{âûõ}}(p)}{x_{\text{âõ}}(p)} = k; \; W(p)_{\text{äèôô}.} = \frac{k \cdot p}{T_0 \cdot p + 1}; \; W(p)_{\text{çàï}} = \frac{x_{\text{âûõ}}(p)}{x_{\text{âõ}}(p)} = e^{-p\tau_{\text{çàï}}}.$$

Величину коэффициентов в этих типовых передаточных функциях также легко найти по графикам экспериментальных кривых разгона.

Сложнее найти математическую модель идентифицируемого объекта, если получена экспериментальная кривая разгона, похожая на типовую кривую разгона апериодического звена 2-го порядка с передаточной функцией:

$$\frac{x_{вых}(p)}{x_{вх}(p)} = W(p) = \frac{k}{T_1 p^2 + T_2 p + 1}.$$

Точное определение коэффициентов T_1 и T_2 в этой передаточной функции затруднено. Один из методов описан в [1, п.6.3]. Для более точной идентификации такого объекта используют метод Симою, или «метод площадей».

Надо отметить, что дифференциальные уравнения линейных динамических звеньев являются идеализированным описанием динамики элементов, то есть представляют собой всего лишь аппроксимацию их реального поведения.

11 Лекция №11. Идентификация объекта управления прямыми методами

Содержание лекции: идентификации объектов управления с помощью пробных сигналов специального вида.

Цель лекции: изучить методы идентификации линейных объектов с помощью импульсной переходной функции и частотной характеристики.

11.1 Графическая идентификация с помощью импульсной переходной функции

Иногда по технологическим условиям нельзя длительное время держать единичный скачок на входе объекта. Тогда подается возмущение типа единичного импульса, длительность которого достаточна для заметного изменения выходного сигнала. Практически единичный импульс рассматривается как два последовательных единичных скачка, только первый имеет значение амплитуды (+1), а второй – (-1). На выходе объекта получаем экспериментальную импульсную характеристику – график изменения во времени выходного сигнала объекта. Как известно,

$$W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)},$$

где *Y(p)* и *X(p)* – изображения выходного и входного сигналов.

Если входной сигнал является единичным импульсом, то преобразование Лапласа для него равно *1*: *X(p) = 1*. Тогда преобразование Лапласа для выхода *Y(p) = W(p)* и импульсная переходная функция *g(t)* линейной системы идентична обратному преобразованию Лапласа ее передаточной функции.

$$y(t)=L^{-1}\{Y(p)\}=L^{-1}\{W(p)\}=g(t).$$

Системы первого порядка можно описать передаточной функцией

$$W(p)=\frac{k}{T\cdot p+1}.$$

Тогда импульсная переходная функция записывается в виде

$$g(t)=L^{-1}[W(s)]=\frac{k}{T}\cdot e^{-\frac{t}{T}}.$$

На выходе объекта имеем график импульсной переходной функции. Функция (11.1) при , $t\to 0$ возрастая, асимптотически приближается к оси y, а при $t\to\infty$ стремится к нулю, оставаясь положительной. Принимая это во внимание, из (11.1) в начальной точке можем записать

$$y_0=\frac{k}{T}\cdot e^{-\frac{0}{T}}=\frac{k}{T},$$

а при $t=T$

$$y=\frac{k}{T}\cdot e^{-\frac{T}{T}}=\frac{k}{T}\cdot e^{-1}=0.37\cdot\frac{k}{T},$$

то есть за время *T*, *g(t)* достигает 0,37% своего установившегося значения. Из этих выражений определяем искомые параметры передаточной функции.

Можно применить следующий метод. По геометрическому смыслу производная функции в некоторой точке – это тангенс угла наклона касательной в этой точке. Для функции

$$g(t)=L^{-1}[W(s)]=\frac{k}{T}\cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

имеем

$$\frac{dg}{dt}=-\frac{k}{T^2}\cdot e^{-\frac{t}{T}}.$$

Уравнение касательной – это уравнение прямой, проходящей через начальную точку $t=0$ с угловым коэффициентом (11.2). Уравнение этой касательной *l(t)* (уравнение прямой с известным угловым коэффициентом, проходящей через заданную точку) имеет вид

$$l(t)=\frac{k}{T}-\frac{k}{T^2}\cdot t$$

и при $t=T$, $l(t)=\frac{k}{T}-\frac{k}{T^2}\cdot t=0$, то есть постоянная *T* – это точка пересечения касательной в начальной точке графика *g(t)* с осью времени

11.2 Идентификация с помощью частотной характеристики

Идентификация с помощью частотной характеристики основана на применении синусоидальных сигналов или сигналов, аппроксимирующих синусоидальные, частота которых изменяется в рассматриваемом интервале.

Если на вход объекта подается синусоидальное воздействие $A_0\cdot\sin(\omega t)$ на различных частотах, то установившееся измеренное значение выходного сигнала

$$y(t)=A_1\cdot\sin[\omega t+\varphi(\omega)]+n(t),$$

где $n(t)$ - ошибка измерения.

Частотная характеристика $W(j\omega)$ определяется путем подачи синусоидальных входных сигналов $A_0\cdot sin(\omega t)$ на различных частотах ω и записи соответствующих выходных сигналов $A_1\cdot sin[\omega t+\varphi]$. С целью получения необходимой частотной характеристики, величины $\frac{A_1}{A_0}$ и φ определяются для каждой рассматриваемой частоты ω. То есть по записям входного и выходного сигналов определяют отношение амплитуд на частоте ω_i и получают $|W(j\omega_i)|$. Фазовый сдвиг $\varphi(\omega_i)$ получают из сравнения положения максимумов кривых $x(t)$ и $y(t)$.

В результате проведенных экспериментов, измерив входные и выходные сигналы, а затем определив, как описано выше амплитудные $A(\omega)$ и фазовые $\varphi(\omega)$ характеристики объекта, можем записать

$$P(\omega_i) = A(\omega_i) \cdot \cos\varphi(\omega_i),$$
$$Q(\omega_i) = A(\omega_i) \cdot \sin(\omega_i)$$

для каждой рассматриваемой частоты, где $P(\omega_i)$, $Q(\omega_i)$ – коэффициенты соответственно при действительной и мнимых частях комплексной передаточной функции.

Напомним, что структурные параметры модели (в данном случае порядок уравнения) определяются на стадии структурной идентификации. Задаемся некоторым (предполагаемым) порядком уравнения. Для определенности предположим, что объект третьего порядка.

Тогда

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_1 \cdot p^2 + b_2 \cdot p + b_3}{p^3 + a_1 \cdot p^2 + a_2 \cdot p + a_3}.$$

Необходимо определить коэффициенты передаточной функции a_i, b_j. Заменим p на $j\omega$ и запишем передаточную функцию в виде суммы действительной и мнимой частей:

$$W(j \cdot \omega) = \frac{-b_1 \cdot \omega^2 + j \cdot b_2 \cdot \omega + b_3}{-j \cdot \omega^3 - a_1 \cdot \omega^2 + j \cdot a_2 \cdot \omega + a_3} = P(\omega) + j \cdot Q(\omega).$$

Отсюда

$$-b_1 \cdot \omega^2 + j \cdot b_2 \cdot \omega + b_3 = (-j \cdot \omega^3 - a_1 \cdot \omega^2 + j \cdot a_2 \cdot \omega + a_3) \cdot \left[P(\omega) + j \cdot Q(\omega)\right].$$

Приравнивая коэффициенты при мнимых и действительных частях этих комплексных выражений, получим систему уравнений, справедливую для всех значений ω. Подставляя в эти уравнения различные значения частот ω_i и соответствующие им $P(\omega_i)$, $Q(\omega_i)$, получим систему алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов передаточной функции.

Для уточнения значений коэффициентов, вычисления повторяются несколько раз для других частот, и берется среднее из этих вычислений.

Если порядок объекта выше предполагаемого, то в повторных вычислениях значения коэффициентов будут сильно отличаться от первых. То есть сильная разница коэффициентов указывает на то, что порядок объекта занижен (но не указывает на ошибку эксперимента).

12 Лекция №12. Параметрическая идентификация

Содержание лекции: постановка задачи и методы параметрической идентификация линейных динамических объектов.

Цель лекции:изучить процедуру минимизации функционала невязки для линейной динамической модели.

12.1 Постановка задачи

Параметрическая идентификация моделей объектов позволяет находить значения коэффициентов модели объекта по измеряемым значениям управляемого y и управляющего u сигналов объекта. При этом предполагается, что структура и порядок модели объекта уже известны.

При идентификации ставится задача определения не самого оператора модели, а его приближенного значения, его *оценки*. То есть, строится оператор модели, который в определенном смысле близок к оператору объекта. Говорить о соответствии между моделью и объектом можно только в том случае, если оценка оператора модели близка в некотором смысле его истинному значению. Близость операторов объекта и модели оценить трудно, а то и невозможно, так как оператор объекта нам неизвестен. В связи с этим близость операторов оценивается по их реакции на одно и то же входное воздействие $x(t)$, то есть по выходам объекта $y(t)$ и модели $y_м(t)$в соответствии с некоторым принятым критерием. Схема процедуры параметрической идентификации представлена на рисунке 12.1.

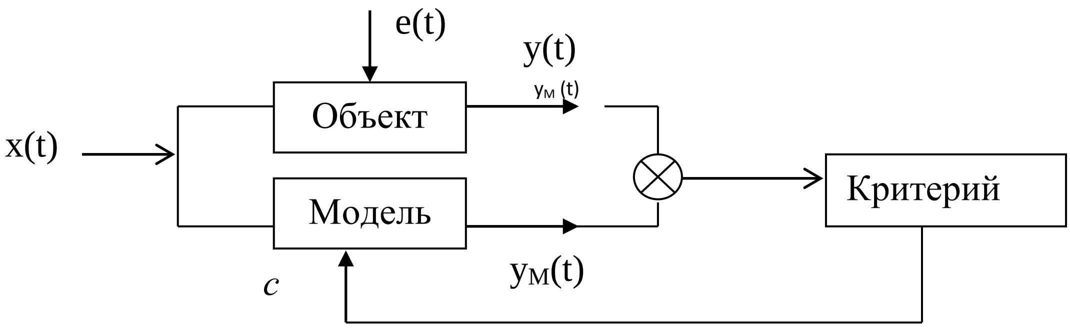


Рисунок 12.1 - Схема процедуры идентификации

В данном случае требуется разработать такой план наблюдения над u и y и подобрать такой метод вычисления оценок, которые позволили бы получить в каком-то смысле оптимальную оценку неизвестных параметров модели – вектор c.

В общем случае вводится функция $\rho(y,y_м)$, которая зависит от y, $y_м$, не зависит от A и называется *функцией потерь* или *функцией невязки* (несоответствия). Единой мерой близости на всем интервале наблюдения может быть следующий функционал:

$$Q = \int_0^T \rho(y, y_м) dt .$$

Функционал Q называется *невязкой*, этот функционал зависит от оператора A. Таким образом, степень невязки (степень несоответствия) операторов модели и объекта можно выразить в виде функционала, зависящего явно от оператора модели A. Естественно процесс идентификации строить так, чтобы минимизировать невязку, то есть решать задачу минимизации функционала Q по оператору A:

$$Q(A) = \min_{A \in \Omega} .$$

Этот функционал минимизируем, варьируя оператором A не произвольно, а в некотором определенном классе операторов Ω.

Чаще всего в качестве метода оценивания параметров используется среднеквадратичный критерий. Выбор критерия оценки параметров зависит от характера помех, то есть от их статистических свойств. При нормальном распределении помех наибольшую точность дает среднеквадратичный критерий. Нормальное распределение используется наиболее часто для описания свойств различных случайных величин. Теоретическим обоснованием роли нормального распределения является центральная предельная теорема. Согласно этой теореме, когда есть основание рассматривать исследуемую случайную величину как сумму большого числа независимых случайных воздействий, влияние каждого из которых ничтожно мало, то даже если распределения составляющих произвольны, можно ожидать, что исследуемая случайная величина будет распределена по нормальному закону. Это не значит, конечно, что любая случайная величина, если не доказано противное, подчиняется этому распределению. Нормальное распределение обладает тем преимуществом, что оно характеризуется удобными математическими свойствами. Поэтому, большинство статистических методов построено в предположении, что исследуемая величина подчиняется нормальному распределению, хотя на практике это предположение всегда требует специальной проверки.

12.2 Идентификация динамической детерминированной модели

В одномерном случае связь между входной величиной $x = x(t)$ и выходом $y = y(t)$ представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\sum_{i=0}^{p} a_i \cdot y^{(i)} = \sum_{j=0}^{l} b_j \cdot x^{(j)}, \qquad (12.1)$$

где $y^{(i)} = \dfrac{d^i y}{dt^i}$, $x^{(i)} = \dfrac{d^j x}{dt^j}$, $a_p = 1,\ l \le p$

вместе с начальными условиями для $\frac{d^i y}{dt^i}$, $i = 0,1,..., n-1$.

Модель определяется ($p+l+1$) параметрами $c = (a_0, ..., a_{p-1}, b_0, ..., b_l)$.

Для описания динамики объектов, которые характеризуются дискретными значениями входных и выходных сигналов, вместо дифференциальных уравнений можно воспользоваться разностными уравнениями. Обозначив дискретные значения входного и выходного сигналов соответственно $x_{k-j} = x[(k-j)]$ и $y_{k-j} = y[(k-j)]$, разностное уравнение (аналог дифференциального) запишем в виде

$$y_к + a_1 y_{k-1} + ... + a_p y_{k-p} = b_1 x_k + b_2 x_{k-1} + b_3 x_{k-2} + ... + b_l x_{kl+1}. \qquad (12.2)$$

Необходимо также задать начальные условия.

Структурными параметрами модели являются p и l, которые должны быть выбраны в процессе структурной идентификации.

Исходной информацией для построения процедуры идентификации является вид идентифицируемой модели и наблюдения $\{x_t, y_t\}$ в промежутке [0,T]. Надо определить коэффициенты уравнений a_i, b_j.

В общем случае при подстановке наблюдений в уравнение модели (12.1) (или (12.2)) равенство в этом уравнении не выполняется. Надо подобрать a_i, b_j таким образом, чтобы в уравнении (12.1) (или (12.2)) правая и левая части отличались друг от друга наименьшим образом.

Строим функцию невязки в виде среднего квадрата разности правой и левой части уравнения (12.1) при подстановке туда функций x_t, y_t – наблюдений объекта

$$Q(c) = \int_o^T [\sum_{i=0}^{p} a_i \cdot y_t^{(i)} - \sum_{j=0}^{l} b_j \cdot x_t^j]^2 dt. \qquad (12.3)$$

Минимизируем этот функционал по a_i *и* b_j:

$$Q(c) \to \min.$$

Результат минимизации – вектор c^* дает значения идентифицируемых параметров.

Приравнивая нулю производные функции (12.3) по всем неизвестным параметрам, получим систему линейных уравнений, решение которой является решением задачи минимизации.

Для вычисления коэффициентов полученных алгебраических систем уравнений, системы необходимо знать производные входного x_t и выходного y_t сигналов объекта. Некоторые подходы к решению этой проблемы рассмотрены в [1, п.7.3].

13 Лекция №13. Непараметрическая идентификация линейных динамических объектов

Содержание лекции: задача непараметрической идентификации линейных динамических объектов.

Цель лекции: ознакомиться с задачей непараметрической идентификации линейных объектов.

13.1 Общий подход к определению непараметрической модели

Методы определения динамических характеристик исследуемого объекта при помощи подачи на вход искусственного возмущения определенного типа (импульсного, ступенчатого, гармонического) и замера реакции часто неприменимы по следующим причинам:

- нежелательность или невозможность подать на вход объекта возмущающего воздействия специального вида, так как это ведет к нарушению нормального хода процессов в объекте;
- очень часто на эти воздействия накладываются неконтролируемые возмущения, поэтому невозможно определить динамические характеристики по типовым входным сигналам.

Поэтому используется метод, основанный на статистических представлениях – непараметрическая идентификация. Статистический метод позволяет в качестве источника информации использовать случайные естественные сигналы идентифицируемого объекта.

Если оператор модели содержит неизвестные функции, которые требуется определить в процессе процедуры идентификации, то идентификация называется *непараметрической*. Будем характеризовать непараметрическую модель, импульсной (весовой) переходной функцией. Это связано с тем, что специфика линейного динамического объекта однозначно определяется его реакцией на единичное импульсное воздействие.

В стационарном случае (рассматриваемом нами) импульсная переходная функция зависит только от одного переменного – времени:

$$g = g(t), \quad 0 <= t < \infty.$$

Для линейного объекта с одним входом и одним выходом, входное воздействие $x(t)$ и реакция $y(t)$ связаны *уравнением свертки*

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\theta) \cdot x(t-\theta) d\theta \,. \qquad (13.1)$$

Весовая функция устойчивых систем обладает следующим очевидным свойством:

$$\lim g(t) = 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Физически это означает, что устойчивая система после импульсного воздействия всегда возвращается в исходное состояние. Поэтому нет необходимости интегрировать в (13.1) до бесконечности, достаточно до некоторого *T***,** для которого выполняется

$$|g(t)| \le \alpha \cdot g_{\max} \text{ при } t>T,$$

то есть весовая функция, начиная с момента *T***,** не выходит из 100α-процентного коридора (обычно α = 0.05).

Теперь интеграл свертки можно записать в виде

$$y(t) = \int_0^T g(\theta) \cdot x(t-\theta) d\theta. \tag{13.2}$$

Будем рассматривать это уравнение (13.2) как предполагаемую модель, которая дает возможность определить искомую динамическую характеристику объекта - импульсную переходную функцию.

13.2 Уравнение Винера-Хопфа

Определение искомой импульсной переходной функции из уравнения (13.2) сопряжено со значительными погрешностями вследствие неточности регистрируемых сигналов, обусловленных помехами и измерительными ошибками. Для повышения качества восстановления импульсной переходной функции необходима предварительная обработка сигналов. Чтобы минимизировать влияние помех используются корреляционные функции сигналов.

Пусть случайные сигналы на входе и выходе объекта идентификации центрированы. Тогда, умножая левую и правую части уравнения (13.2) на $x(t-\theta)$ и усредняя результат, получаем

$$M[x(t-\theta)y(t) = M[\int_0^\infty g(\theta)x(t-\tau)d\theta] + M[x(t-\tau)n(t)],$$

где M — оператор математического ожидания;

n(t) — приведенная к выходу помеха, не коррелированная с входным сигналом.

Учитывая коммутативность операции определения математического ожидания и интегрирования, получаем

$$M[x(t-\tau)y(t)] = \int_0^\infty g(\tau)M[x(t-\theta)x(t-\theta)]d\theta$$

или

$$R_{yx}(\tau) = \int_0^\infty g(\theta) \cdot R_{xx}(\tau-\theta) d\theta. \tag{13.3}$$

Уравнение (13.3) представляет собой запись *уравнения Винера—Хопфа* и связывает искомую импульсную переходную функцию с корреляционной функцией входного сигнала $R_{xx}(\tau)$ и взаимной корреляционной функцией входного и выходного сигналов $R_{xy}(\tau)$ идентифицируемого объекта. Это уравнение можно интерпретировать как уравнение (13.2), если рассматривать $R_{xx}(\tau)$ как входное воздействие, а $R_{xy}(\tau)$ - как реакцию.

Определяемая путем решения уравнения Винера—Хопфа импульсная переходная функция оптимальна по критерию минимума среднеквадратической ошибки.

При реализации случайных сигналов автокорреляционная функция входного сигнала $R_{xx}(\tau)$ и взаимно-корреляционная функция входного и выходного сигналов $R_{xy}(\Theta)$ регистрируются на конечных интервалах наблюдения, а линейная система с бесконечной памятью аппроксимируется системой с конечной памятью. Поэтому, исходя из физических соображений, бесконечный верхний предел в (13.3), заменяют на такой конечный T_g, что для всех $\tau > T_g$ имеем $g(\tau) \approx 0$. Это утверждение справедливо для физически реализуемых систем, у которых

$$\left| \int_{T_\omega}^{\infty} g(\tau) R_{xx}(\tau - \theta) d\tau \right| \langle \varepsilon \text{ при } \tau > T_g.$$

С учетом сказанного основное уравнение статистической идентификации принимает вид

$$R_{xy}(\theta) = \int_{0}^{T_g} g(\tau) R_{xx}(\tau - \theta) d\tau. \tag{13.4}$$

Обычно параметр T_g определяют до идентификации. Например, можно определить время T_R, начиная с которого $|R(\tau)| <= 0.05 R_{max}$. Значение T_R различно для $R_{xx}(t)$ и $R_{yx}(t)$. Но так как нас интересуют динамические свойства объекта, а они отражаются в $R_{yx}(t)$, то T_R определяют по $R_{yx}(t)$. Определения автокорреляционной и взаимно-корреляционной функций, формулы для их вычисления, а также вывод уравнения (13.4) приведены в [1, п.8.2].

Таким образом, задача определения импульсной переходной функции разбивается на следующие этапы:

1) Запись случайных процессов на входе и выходе объекта.
2) Вычисление корреляционной функции входного сигнала и взаимно-корреляционной функции входного и выходного сигналов.
3) Определение параметра T_R.
4) Решение интегрального уравнения (13.4).

Таким образом, задача определения импульсной переходной функции – задача непараметрической идентификации, приведена к решению уравнения Винера-Хопфа.

14 Лекция №14. Использование процедуры аппроксимации для непараметрической идентификации линейных динамических объектов

Содержание лекции: методы определения сглаженной импульсной переходной функции.

Цель лекции: изучение методов решения задачи непараметрической идентификации объектов.

Для определения динамической характеристики объекта - импульсной переходной функции *g(t)* в качестве предполагаемой модели рассматриваем уравнение свертки

$$y(t) = \int_0^T g(\theta) \cdot x(t-\theta) d\theta, \tag{14.1}$$

где *x(t)* и *y(t)* – входные и выходные сигналы объекта.

Рассмотрим несколько методов по использованию аппроксимирующих полиномов при решении задачи непараметрической идентификации.

1. Применим общий подход к построению модели линейного объекта – метод минимизации среднеквадратичного критерия. Критерий идентификации можно записать в виде

$$Q = \int_0^T [y(t) - y^*(t)]^2 dt \to \min .$$

Здесь *y(t)* - выходной сигнал объекта, $y^*(t)$ - выходной сигнал модели, который определяется из уравнения свертки

$$y^*(t) = \int_0^T g^*(\theta) \cdot x(t-\theta) d\theta . \tag{14.2}$$

Используем процедуру аппроксимации функций. Аппроксимирующие функции обычно выбираются в классе ортогональных функций.

Аппроксимируем импульсную переходную функцию с помощью полинома

$$g(\tau) = \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot \varphi_k(\tau), \tag{14.3}$$

где $\{\varphi_k(\tau)\}$- система аппроксимирующих ортогональных функций;

N - порядок полинома.

Коэффициенты a_k разложения (14.3) пока неизвестны.

Подставив в уравнение (14.2) выражение для импульсной переходной функции (14.3), имеем

$$y^*(t) = \int_0^T g^*(\theta) \cdot x(t-\theta) d\theta = \int_0^T \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot \varphi_k(\theta) \cdot x(t-\theta) d\theta = \sum_{k=0}^{N} a_k \int_0^T \varphi_k(\theta) \cdot x(t-\theta) d\theta.$$

Тогда критерий идентификации примет вид

$$Q=\int_0^T [y(t)-y^*(t)]^2\,dt=\int_0^T [y(t)-\sum_{k=0}^{N} a_k \int_0^T \varphi_k(\theta)x(t-\theta)d\theta]^2 \rightarrow \min .$$

Для решения задачи минимизации необходимо определить производные $\frac{\partial Q}{\partial a_i}$ по всем неизвестным параметрам. Наилучший выбор имеет место при $\frac{\partial Q}{\partial a_i}=0$. В итоге получим систему линейных алгебраических уравнения для определения неизвестных коэффициентов разложения (14.3). Как правило, на практике значение N не очень большое, то есть полученная система имеет невысокий порядок и хорошо обусловлена в силу гладкости системы функций $\{\varphi_k(\tau)\}$.

Возникает вопрос о выборе степени N аппроксимирующего полинома. Можно предложить различные подходы к решению этой проблемы [1, п.8.4]. Однако, этот вопрос очень сложен и в настоящее время не решен до конца.

2. Исходной моделью является уравнение Винера-Хопфа

$$R_{yx}(\tau)=\int_0^T g(t)\cdot R_{xx}(\tau-\theta)d\theta \tag{14.4}$$

Импульсная переходная функция аппроксимируется выражением (14.3), где коэффициенты аппроксимации определяются как

$$a_k=\sum_{\tau=0}^{m} g(\tau)\cdot\varphi_k(\tau), \tag{14.5}$$

где m - количество точек, на которые разбивается интервал моделирования.

Представим корреляционные функции входных и выходных сигналов объекта с помощью аппроксимирующих полиномов по той же системе функций:

$$R_{yx}(\tau)=\sum_{j=0}^{N} b_j\cdot\varphi_j(\tau),\; R_{xx}(\tau)=\sum_{j=0}^{N} c_j\cdot\varphi_j(\tau),$$

причем в последних выражениях коэффициенты

$$b_j=\sum_{t=0}^{m} R_{yx}(t)\cdot\varphi_j(t),\; c_j=\sum_{t=0}^{m} R_{xx}(t)\cdot\varphi_j(t)$$

можно считать заданными, так как значения корреляционных функций в узлах заданы, а ортогональные функции $\{\varphi(\tau)\}$ известны.

Подставим в уравнение Винера-Хопфа аппроксимирующие полиномы. В силу ортогональности функций $\{\varphi_j(\tau)\}$ получим систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов разложения (14.5), которая также имеет невысокий порядок и хорошо обусловлена в силу гладкости $\{\varphi_j(\tau)\}$. Это позволяет получать достаточно точные оценки импульсных переходных функций путем простых вычислений.

В процессе решения возникают трудности, связанные с выбором количества аппроксимирующих функций, о которых упоминалось и ранее.

3. Исходной моделью является уравнение Винера-Хопфа (14.4).

Один из методов решения этого уравнения – алгебраический. Перейдя к дискретному времени и записав интеграл (14.4) в виде суммы, можно это уравнение представить в виде системы линейных алгебраических уравнений. Решение этой системы позволяет определить дискретные значения $g_0, g_1, \ldots, g_m$ импульсной переходной функции $g(t)$ в равноотстоящих точках $0, 1, \ldots, m$ [1].

Однако это решение уравнения Винера-Хопфа получается с большими погрешностями. Хотя полученные таким образом импульсные переходные функции имеют малую среднеквадратичную ошибку, близкую к минимуму, ценность их невелика, так как эти функции не соответствуют физическому смыслу процессов в объекте. Физический смысл имеют гладкие решения. Наиболее простой формой сглаживания является аппроксимация полученного численного решения системы алгебраических уравнений, эквивалентных уравнению Винера-Хопфа.

Полученную последовательность дискретных величин представим с помощью какого-либо аппроксимирующего полинома

$$g(\tau) = \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot \varphi_k(\tau),$$

где $\{\varphi_k(\tau)\}$- какая-либо система аппроксимирующих ортогональных функций.

В случае ортогональности аппроксимирующих функций коэффициенты аппроксимации определяются по формуле (14.5). Надо отметить, что полученная система линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложения будет иметь существенно больший порядок, чем в предыдущих двух случаях, так как на практике обычно $m \gg N$. Остается проблема выбора степени N аппроксимирующего полинома.

4. Входные и выходные сигналы объекта представляются в виде степенных рядов

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot \frac{t^i}{i!}, \quad y(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{t^i}{i!},$$

здесь x_i y_i – известные коэффициенты (так как нам известны измерения входных и выходных сигналов).

Импульсную переходную функцию тоже ищем в виде степенного ряда

$$g(t) = \sum_{i=0}^{n} g_i \cdot \frac{t^i}{i!},$$

где коэффициенты ряда g_i требуется определить.

Подставляя эти выражения в интеграл свертки, и приравнивая коэффициенты при равных степенях переменных, получим систему алгебраических уравнений для определения искомых коэффициентов ряда g_i.

15 Лекция №15. Идентификация нелинейных объектов

Содержание лекции: особенности и методы идентификации нелинейных объектов.

Цель лекции: изучить методы идентификации нелинейных объектов.

Идентификация нелинейных динамических объектов представляет собой весьма сложную задачу, так как существует бесконечное разнообразие типов нелинейных операторов, описывающих объекты. Кроме того, переходной процесс нелинейного объекта зависит не только от формы, но и от амплитуды входного сигнала, что выдвигает сложные и противоречивые требования к выбору пробного сигнала при активной идентификации.

Как и в линейном случае, задача идентификации заключается в аппроксимации поведения объекта таким оператором *F(x)*, который минимизировал бы функционал невязки. Обычно *F(x)* представляется в виде $F(x,\bar{c})$, то есть в виде известного оператора с неизвестными параметрами $\bar{c}$, которые и подлежат оценке в процессе идентификации. Таким образом, для непрерывного случая решается задача:

$$Q(\bar{c}) = \int_0^T [F(x(t),c) - y(t)]^2 dt \to \min,$$

для дискретного случая:

$$Q(\bar{c}) = \sum_{i=1}^{N} [F(x_i,\bar{c}) - y_i]^2 \to \min.$$

Решением являются значения вектора неизвестных параметров $\bar{c}$.

Существуют различные способы представления функции $F(x,\bar{c})$: в виде кусочно-линейной или линейной функций, в виде разложения по заданной системе функций и др.

Модель в простейшем одномерном случае выражается нелинейным дифференциальным уравнением:

$$y^{(p)} = f(y^{(p-1)},..., y, x^{(l)},..., x),$$

где f - нелинейная скалярная функция $p+l+1$ аргумента, которую необходимо идентифицировать по наблюдениям $< x_t, y_t >, 0 \le t \le T$.

В векторной форме это уравнение имеет вид:

$$\dot{y} = F(y, x'),$$

где $y = (y_1,..., y_p),\ x' = (x, x^{(l)},..., x^{(l)})$ - векторные функции векторных аргументов.

Наблюдения $< x_t, y_t >$ сведем к $x_t^{'} = (x_{t,} x_t^{'},..., x_t^{(l)}), y_t = (y_t, y_t^{'},..., y_t^{(P-1)})$

(дифференцируя исходные функции и используя аппарат сглаживания).

Для практического применения рекомендуются следующие методы:

1) Функциональные модели. Пусть F является известной функцией с неизвестными параметрами. В этом случае система уравнений

$$y'(t) = F(y, x', \bar{c})$$

интегрируется численно (например, методами Рунге-Кутта) при заданных начальных условиях и фиксированных значениях идентифицируемых параметров $\bar{c}(c_1, \ldots, c_k)$.

Полученное решение $y = y(t, \bar{c})$ сопоставляется с наблюдениями y_t и получается функция невязки

$$Q(c) = \int_0^T [y(t, \bar{c}) - y_t]^2 \, dt,$$

минимизация которой решает задачу идентификации.

Если структура модели выбрана в классе дифференцируемых функций, то эту задачу решает система трансцендентных уравнений (решение которой тоже непростая задача):

$$\frac{\partial Q}{\partial C_j} = 2 \cdot [F - Y_t, \frac{\partial F}{\partial C_j}] = 0, \; j = 1, \ldots, k,$$

где [,] – скалярное произведение.

В противном случае можно использовать поисковые методы минимизации, которые реализуются рекуррентными выражениями, определяющими переход от (*i-1*)-го приближения к *i*-му:

$$c_i = c_{i-1} + \Delta c_i,$$

где шаг Δc_i зависит от c_{i-1} и алгоритма поиска.

Наиболее часто используемый алгоритм – метод наискорейшего спуска:

$$c_i = c_{i-1} - \alpha \cdot grad q_i^2 (c_{i-1}),$$

где q_i – невязка на *i*-ом шаге при значениях параметров на (*i-1*)-ом шаге.

Шаг Δc_i делается в антиградиентном направлении локальной невязки с коэффициентом α, уменьшающемся со временем. Иногда α выбирается из условия минимума текущей невязки

$$q_i^2(c_i) \to \min_{\alpha_i} \Rightarrow \alpha_i^*.$$

Для реализации поиска необходимо лишь значение функции F при различных c_j, поэтому есть возможность создавать модель не только в классе аналитических описаний (в связи с этим такой подход называется функциональным).

2) *Модели, линейные относительно оцениваемых параметров*. Они являются частным случаем функциональных моделей и образуются в результате разложения искомой функции по заданной системе функций:

$$F(x,\bar{c}) = \sum_{j=1}^{k} c_j \varphi_j(x),$$

где $\varphi_j(x) = \{\varphi_1(x),...,\varphi_k(x)\}$ - заданная система функций, которая определяется на стадии структурной идентификации. Аппроксимацию можно провести, например, с помощью полиномов.

Задача поиска коэффициентов разложения решается известными методами.

3) *Методы линеаризации*, то есть аппроксимации нелинейных связей в заданном диапазоне аргументов линейными соотношениями, представляют наиболее развитую группу методов идентификации нелинейных систем. Мы неоднократно встречались с такими задачами. В основе линеаризации нелинейных уравнений лежит предположение о том, что в исследуемом динамическом процессе переменные изменяются так, что их отклонения от установившихся значений остаются все время достаточно малыми. Условие достаточной малости динамических отклонений переменных от некоторых установившихся значений для системы автоматического регулирования обычно выполняется. Линеаризация проводится путем разложения нелинейных зависимостей в ряд Тейлора в окрестности исходного стационарного режима с сохранением только линейных частей разложения и последующим вычитанием уравнений статики. С помощью этой процедуры получаются уравнения модели не относительно ее переменных, а относительно отклонений переменных от исходного стационарного режима.

4) *Кусочно-линейные модели*. В этом случае определяется *опорная* последовательность (x_i,y_i) $i=1,...,d$ для определения значений функций. Затем решается задача минимизации, где F – кусочно-линейная функция, задаваемая своей опорной последовательностью. Эта задача решается одним из поисковых методов

5) *Идентификация нелинейных функций априорно известного вида*. Если имеется априорная информация о типе нелинейности, то параметры нелинейных функций могут быть идентифицированы с применением замены переменных в исходном аналитическом выражении или путем преобразования исходных выражений к более простым соотношениям [1, гл.9].

Во всех случаях идентификацию можно проводить *только* в предположении некоторого специфического типа нелинейной аппроксимирующей функции, параметры которой подлежат идентификации.

Список литературы

1 Ибраева Л.К., Хисаров Б.Д. Моделирование и идентификация объектов управления: Учебное пособие. - Алматы: АИЭС, 2009.

2 Воронов А.А. Теория автоматического управления. Ч.1. – М.: Высшая школа, 1986 г.

3. Фешин Б.Н., Булатбаева Ю.Ф., Нурмагамбетова Г.С., Паршина Г.И., Телбаева Ш.З. Компьютерное моделирование и идентификация электротехнических комплексов: Учебное пособие. - Караганда: Изд. КарГТУ, 2010.

4 Хаджива Л.А. Нелинейные модели динамических систем.- Алматы: «Қазақ университеті», 2009.

Содержание

Сводный план 2016 г., поз.

Лида Куандыковна Ибраева

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

Конспект лекций для студентов
специальности 5В070200 – Автоматизация и управление

Редактор Н.М.Голева
Специалист по стандартизации Н.К.Молдабекова

Подписано в печать __.__.__.
Тираж экз.
Объем уч.-изд. л.

Формат 60х84 1/16
Бумага типографская №1
Заказ . Цена тг.

Копировально-множительное бюро
некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013 Алматы, Байтурсынова, 126