

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ  
КАЗАХСТАН

Некоммерческое акционерное общество  
«Алматинский университет энергетики и связи»

**Л.К.Ибраева**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**  
Учебное пособие

Алматы  
АУЭС  
2018

**УДК 681.5.015 (075.8)**

**И15**

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор кафедры «Автоматизация и управление» КазНТУ им. К.И.Сатпаева

**Б.А.Сулейменов,**

доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник  
Института информатизации и вычислительной техники Комитета науки  
МОН РК

**А.А.Ташев,**

кандидат технических наук, доцент АУЭС, заведующий кафедрой  
«Электроники и робототехники» АУЭС

**А.М.Ауэзова**

Рекомендовано к печати Научно-методическим советом Алматинского университета энергетики и связи (10.10.18, протокол №1). Печатается по сводному плану издания ведомственной литературы АУЭС на 2018 г.

**Ибраева Л.К.**

**И15** Моделирование объектов систем управления: Учебное пособие (для студентов специальности «Автоматизация и управление»)/Л.К.Ибраева – Алматы: АУЭС, 2018 – 151 с.: табл. - 5, илл. - 40, список лит-ры – 13.

**ISBN 978–601-7939–04-5**

В учебном пособии рассматриваются общие вопросы математического моделирования объектов систем управления. Описаны аналитический и экспериментальный принципы моделирования объектов управления. Приведены практические примеры. Материал иллюстрирован примерами применения современных программных средств (системы MatLab) для моделирования динамических систем.

Учебное пособие предназначено для студентов специальности «Автоматизация и управление» при изучении теоретических аспектов дисциплины «Моделирование объектов систем управления» и приобретении практических навыков в решении инженерных задач.

**УДК 681.5.015 (075.8)**

**ISBN 978–601-7939–04-5**

©АУЭС, 2018  
Ибраева Л.К., 2018

## Введение

При проектировании, разработке и создании сложных объектов, к которым относятся и объекты управления, требуются знания о количественных и качественных закономерностях, свойственных рассматриваемым объектам. Осуществить практическую проверку тех или иных закономерностей, присущих сложным объектам, не представляется часто возможным по ряду соображений. Кроме того, это потребовало бы больших материальных затрат и затрат времени. В связи с этим приобретает большое значение изучение свойств и закономерностей рассматриваемых сложных объектов на базе методов моделирования. Моделирование можно рассматривать как замещение исследуемого объекта (оригинала) его условным образом, описанием или другим объектом, именуемым моделью и обеспечивающим адекватное с оригиналом поведение в рамках некоторых допущений и приемлемых погрешностей. Моделирование обычно выполняется с целью познания свойств оригинала, путем исследования его модели, а не самого объекта. Разумеется, моделирование оправдано в том случае, когда оно проще создания самого оригинала или когда последний по каким-то причинам лучше вообще не создавать. Чем сложнее проектируемый объект, тем, как правило, важнее роль моделирования в его изучении и создании. Моделирование позволяет определить, сможет ли система, подверженная воздействию внешних или внутренних факторов при достижении системой определенного состояния, которое может быть как задано, так и неизвестно из-за отсутствия информации или по каким-либо иным причинам, функционировать при таких условиях или нет во время этого перехода. Определение качества функционирования сложной системы, выбор оптимальной структуры и алгоритма поведения, построение системы в соответствии с поставленной перед ней целью является главной задачей при проектировании современных сложных систем.

Учебное пособие состоит из 4 глав, в которых рассматриваются следующие вопросы: первая глава посвящена общим вопросам математического моделирования объектов управления; во второй главе рассматриваются принципы аналитического метода моделирования объектов управления и примеры применения этих принципов к конкретным практическим задачам; в третьей главе рассматриваются общие подходы к проблеме идентификации систем управления. Экспериментальные методы идентификации рассмотрены в четвертой главе.

Методы, рассматриваемые в учебном пособии, предполагают использование компьютеров и программного обеспечения MatLab, который в настоящее время является эффективным средством моделирования объектов управления. В учебном пособии приводятся примеры решения практических задач с использованием различных инструментальных средств этой системы.

# 1 Описание свойств объектов управления математическими моделями

## 1.1 Место моделей в структуре системы управления

Объекты и системы представляют собой совокупность материальных тел, находящихся в непрерывном взаимодействии друг с другом и с окружающей средой. В теории автоматического управления объект управления – это устройство, машина или процесс, состояние и поведение которого характеризуется некоторыми физическими величинами. Эти величины могут быть измерены, то есть в принципе поддаются измерению, прямому или косвенному. В общем случае, объект описывается еще и некоторыми физическими величинами, которые не поддаются измерению. Объект управления способен воспринимать внешние воздействия и реагировать на них изменением значений выходных величин. Описание объекта управления состоит в выражении связи реакции объекта как функции времени и ее причин, входных воздействий. Технологические объекты, как правило, имеют несколько входных и несколько выходных величин, которые, в зависимости от поставленной задачи управления, могут быть управляемыми, управляющими и возмущающими.

Управление техническим объектом состоит в выработке команд, реализация которых обеспечивает целенаправленное изменение состояния этого объекта при соблюдении заранее обусловленных требований и ограничений. В отношении выполняемых элементами системы функций всякая система управления в наиболее укрупненном виде должна состоять из двух основных элементов: управляемого объекта (в котором протекает подлежащий управлению процесс) и контроллера (осуществляющего функции управления этим процессом). Простейшая структурная схема представлена на рисунке 1.1. Здесь контроллер  $KH$ , получая информацию о цели управления в виде меняющегося во времени  $t$  сигнала  $x(t)$ , формирует управляющее воздействие  $m(t)$  на объект  $OB$  таким образом, чтобы управляемая величина  $y(t)$  менялась в соответствии с изменением  $x(t)$ , то есть так, чтобы достигалась цель управления  $y(t)=x(t)$ . На схеме  $L(t)$  – возмущающие воздействия, число которых может быть любым (в том числе и неконтролируемые).

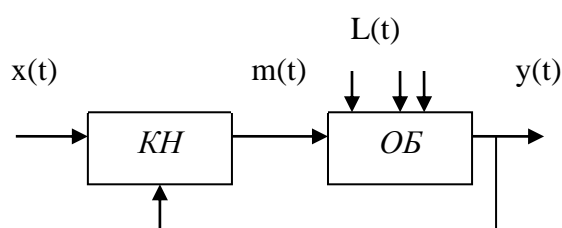


Рисунок 1.1 – Структурная схема системы управления

Подобная система управления может реально функционировать только тогда, когда между изменением  $y(t)$  и вызвавшим его изменением  $m(t)$  в

объекте существует однозначное соответствие. Это соответствие отражается в *математической модели* объекта, которая предполагается заранее известной и может быть использована для определения алгоритма функционирования контроллера (алгоритма управления). Одним из условий функционирования рассмотренной структуры системы управления является то, что математическое описание объекта должно быть известно для любого момента времени с достаточно высокой точностью. То есть необходимо иметь выраженные в виде уравнений основные закономерности, присущие данному объекту и характеризующие статические и динамические связи между его входными и выходными величинами.

Отличительной особенностью процесса проектирования систем управления является его совмещение во времени с разработкой и изготовлением технологических агрегатов. А это означает, что единственной возможностью получения информации о свойствах еще не созданной технической системы является *аналитическое* описание процессов, характерных для элементов такой системы. Привлечение теоретических положений физики (иногда и химии) в приложении к конкретным особенностям изучаемого объекта является основой таких аналитических методов. То есть аналитические методы учитывают структуру и все физико-химические особенности протекающих в объекте управления процессов.

Во многих случаях модель, принятая при проектировании, существенно отличается от реального объекта, что значительно уменьшает эффективность разработанной системы управления. В связи с этим возникло одно из направлений в теории управления, связанное с построением модели на основании наблюдений, полученных в условиях функционирования объекта по его входным и выходным переменным. Это направление известно как *идентификация* систем. В этом направлении разработаны свои принципы, подходы и методы, которые нашли широкое применение в различных областях науки и техники, и, в том числе в биологии, медицине, авиации, экономике.

Ни одна модель не может быть исчерпывающе полной. Она всегда ограничена и должна соответствовать целям моделирования, отражая ровно столько свойств исходного объекта и в такой полноте, сколько необходимо для конкретного исследования. Вместе с тем, полученная модель должна отражать закономерности, действующие в реальном объекте, с точностью, определяемой требованиями решаемой задачи управления. От этого зависит качество управления.

## **1.2 Виды моделирования**

Для автоматизации управления технологией необходимо знать свойства объектов управления – их статические и динамические характеристики и возмущения, которые отклоняют от заданного режима. Наиболее удобно описание свойств объектов управления методами

моделирования. *Моделью* объекта будем называть любой другой объект, отдельные свойства которого полностью или частично совпадают со свойствами исходного, то есть упрощенную систему, которая отражает отдельные, ограниченные в нужном направлении, характеристики изучаемого процесса.

*Модель* - это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе изучения заменяет реальный объект, сохраняя некоторые, важные для данного исследования, типичные его черты.

Модели можно условно разделить на две группы: *материальные* и *знаковые*, и, соответственно, различать *предметное* и *абстрактное* моделирование.

Основными разновидностями предметного моделирования являются *физическое* и *аналоговое* моделирование.

*Физическое* моделирование характеризуется тем, что исследования проводятся на моделях, сохраняющих в определенной степени физическую природу изучаемых явлений и процессов (стенды, установки, макеты). На физических моделях более полно воспроизводятся свойства исследуемого процесса. Основой для создания физических моделей является теория подобия и размерности, что и позволяет утверждать, что в модели сохранились требуемые свойства. При выборе физической модели необходимо исходить прежде всего из того, что работа с моделью должна быть простой, менее трудоемкой и безопасной, допускать использование более мощных методов анализа, чем работа с самой системой.

Недостатком физической модели является то, что при изменении параметров исследуемого процесса или при воспроизведении нового объекта необходимо создавать новую модель, что обычно связано с большими затратами времени и средств. К тому же стоимость моделей сложных объектов относительно высока. То есть эти модели не будут универсальными. Поэтому физическое моделирование имеет ограниченную сферу применения, и основным методом исследования сложных систем является математическое моделирование.

*Аналоговое* моделирование основано на замене исходного объекта объектом другой физической природы, обладающим аналогичным поведением. Например, колебания и резонанс можно изучать и с помощью механических систем, и с помощью электрических цепей. При аналоговом моделировании важно увидеть в объекте-заменителе нужные черты, и правильно их интерпретировать. Наивысшим уровнем аналогии является полная аналогия, имеющая место только для достаточно простых объектов. С усложнением объекта используют аналогии последующих уровней, когда аналоговая модель отображает несколько или только одну сторону функционирования объекта. Обычно для объектов с аналогичным поведением можно использовать одну и ту же модель. В свое время очень широко использовались аналоговые вычислительные машины. Моделирование с их помощью основано на том, что электрические явления

сходны с очень многими явлениями другой физической природы. Например, колебания тока в электрической цепи аналогичны угловым колебаниям ракеты, а экспериментировать с электрической цепью дешевле и безопаснее, чем с летящей ракетой. Электрические колебания, воспроизводимые на аналоговых машинах, можно было наблюдать с помощью специальных приборов – осциллографов и тем самым «видеть» поведение модели.

И физическое, и аналоговое моделирование в качестве основного способа исследования предполагают проведение натурального эксперимента с моделью, но этот эксперимент оказывается в каком-то смысле более привлекательным, чем эксперимент с исходным объектом.

*Знаковым* называется моделирование, использующее в качестве моделей знаки или символы: схемы, графики, чертежи, тексты на различных языках, включая формальные, математические формулы и теории. Обязательным участником знакового моделирования является интерпретатор знаковой модели (чаще всего человек). Чертежи, тексты и формулы сами по себе не имеют никакого смысла без того, кто понимает их и использует в своей повседневной деятельности.

Важнейшим видом знакового моделирования является *математическое* моделирование. Абстрагируясь от физической природы объектов, математика изучает идеальные объекты. Математическое моделирование основано на ограниченности числа фундаментальных законов природы и принципе подобия, означающем, что явления различной физической природы могут описываться одинаковыми математическими зависимостями. Например, с помощью теории дифференциальных уравнений можно изучать уже упомянутые электрические и механические колебания в наиболее общем виде, а затем полученные знания применять для исследования объектов конкретной физической природы.

*Математическое моделирование* – формализованное описание системы с помощью математических соотношений или алгоритмов. Любое математическое выражение, в котором фигурируют физические величины, можно рассматривать как математическую модель процесса. В отличие от физического моделирования, математическая модель позволяет изучать только те параметры оригинала, которые имеют математическое описание и связаны математическими соотношениями в уравнениях, относящихся как к математической модели, так и к оригиналу. При этом физика исследуемого процесса не сохраняется, моделирование здесь основано на способности одних и тех же уравнений описывать различные по своей природе явления и выявлять различные функциональные связи отдельных сторон поведения объекта без полного описания его поведения.

Достоинства математических моделей:

а) возможность быстро провести ряд экспериментов на математической модели с целью поиска оптимального технологического режима или максимально достоверного прогноза при минимальных затратах времени и материальных ресурсов;

б) возможность на модели задать условия эксплуатации, невозможные в реальности, для проверки оптимальных режимов;

в) математическая модель по разработанным методикам позволяет быстро найти оптимальные условия ведения технологического процесса.

Таким образом, математическая модель объекта представляет выраженные в виде уравнений основные закономерности, присущие данному объекту и характеризующие статические и динамические связи между его входными и выходными переменными. Возможности моделирования, то есть перенос результатов, полученных в ходе построения и исследования модели, на оригинал основаны на том, что модель в определенном смысле отображает (воспроизводит, описывает, имитирует) некоторые интересующие исследователя черты объекта.

Важнейшая разновидность математического моделирования – *компьютерное* (имитационное) моделирование. Компьютерная модель – это программная реализация математической модели, дополненная различными служебными программами (например, рисующими и изменяющими графические образы во времени). Компьютерная модель имеет две составляющие – программную и аппаратную. Программная составляющая также является абстрактной знаковой моделью. Это лишь другая форма абстрактной модели, которая, однако, может интерпретироваться не только математиками и программистами, но и техническим устройством – процессором. Имитационная модель задается не в виде системы математических уравнений, а в виде программы на ЭВМ. С помощью имитационной модели с использованием теории математического планирования эксперимента проигрывают на ЭВМ различные варианты опытов для поиска оптимального управления объектом (системой). По сути, имитационная модель – это алгоритм, реализующий модель процесса и воспроизводящий процесс функционирования системы во времени на ЭВМ.

Компьютерная модель проявляет свойства физической модели, когда она интерпретируется физическим устройством, компьютером. Компьютерная модель как физическое устройство может входить в состав испытательных стендов, тренажеров и виртуальных лабораторий. Этот специальный вид моделей, сочетающих в себе и абстрактные, и физические черты, обладает уникальным набором полезных свойств. Главным из них является простота создания и модификации модели. Следует учесть высокую точность получаемых результатов, неограниченную функциональную сложность моделей. Поэтому в настоящее время под моделированием почти всегда понимают компьютерное моделирование.

Развитием имитационных моделей являются *виртуальные модели* объектов и систем, когда на ЭВМ выполняется виртуальное изображение физических параметров объекта и системы, и их поведение во времени можно наблюдать (как наблюдают объекты в компьютерных играх). Например, на кафедре «Автоматизация и управление» Алматинского университета энергетики и связи для разработки виртуальных моделей



объектов, которые применяются при выполнении лабораторных работ, широко используется среда графического программирования LabView фирмы National Instruments.

### **1.3 Классификация объектов управления и их математических моделей**

Создание некоторой универсальной модели, отвечающей различным аспектам ее применения, практически невозможно. Исходя из временного и пространственного признаков, все многообразие *объектов управления* можно разделить на следующие классы:

- детерминированные и стохастические объекты; объект называется детерминированным, если между его входными и выходными переменными имеется однозначное соответствие, то есть если при соблюдении одних и тех же контролируемых условий на вход детерминированного объекта несколько раз подать одно и то же воздействие, то на его выходе всякий раз будет наблюдаться одинаковое изменение выходной переменной. Сигнал, возникающий на выходе детерминированной системы, при подаче на ее вход регулярного сигнала, может быть предопределен.

В стохастическом объекте подача на вход одних и тех же воздействий в одних и тех же условиях может вызывать различные изменения (различные реализации) выходной переменной. В таких объектах появление каждой возможной реализации выходной переменной подчиняется вероятностным законам. Физической причиной такой неопределенности в поведении стохастических объектов обычно является то, что в реальных условиях на объект помимо контролируемых входных переменных действуют также неконтролируемые помехи и возмущения, искажающие реакцию объекта на контролируемые входные воздействия. В стохастическом объекте для различных наблюдений над случайным процессом, производимых при одинаковых условиях эксперимента, получают случайные сигналы выходной величины процесса, которые в каждом отдельном случае не могут быть предопределены. Для случайного процесса могут быть определены лишь функции распределения вероятности значений выходной переменной в различные моменты времени;

- стационарные и нестационарные объекты; объект является стационарным, если закон преобразования входных воздействий не зависит от времени, в противном случае объект – нестационарный.

Свойства стационарных систем не зависят от момента рассмотрения поведения системы. Характерным признаком стационарных систем является то, что при сдвиге во времени входного воздействия без изменения его формы выходная переменная претерпевает такой же сдвиг во времени без изменения формы.

Свойства нестационарных систем зависят от момента времени рассмотрения состояния системы. При сдвиге входного воздействия во

времени без изменения формы в нестационарной системе выходная переменная не только сдвигается во времени, но и изменяет форму;

- статические и динамические объекты; статическими называются объекты, значения выходных переменных которых в любой момент времени определяются лишь значениями входных переменных в тот же момент времени. Объекты, у которых значения выходных переменных в каждый момент времени зависят от того, какие значения принимали входные воздействия не только в текущий, но и предшествующие моменты времени, называются динамическими;

- линейные и нелинейные; линейным называется объект, который подчиняется *принципу суперпозиции*. Согласно этому принципу, если  $y_1$  – выходной сигнал, обусловленный входом  $x_1$ , а  $y_2$  – выходной сигнал, обусловленный входом  $x_2$ , то при подаче на объект сигнала  $\alpha x_1 + \beta x_2$  на выходе наблюдается сигнал  $\alpha y_1 + \beta y_2$ . Принцип суперпозиции выполняется относительно как начальных условий (общее решение), так и входных сигналов (частное решение). Для нелинейных объектов не выполняется принцип суперпозиции.

Кроме того, в линейном объекте должен выполняться фактор масштабирования. Пусть входом системы является переменная  $x$ , а выходом — переменная  $y$ . Тогда необходимо, чтобы при умножении входной переменной на константу  $\beta$  реакция (выходная переменная) системы изменилась в такое же число раз, т. е. оказалась равна  $\beta y$ . Это свойство носит название *гомогенности*, то есть при любом усилении входного сигнала без изменения его формы выходная переменная претерпевает точно такое же усиление также без изменения своей формы.

Линейный объект должен удовлетворять свойствам суперпозиции и гомогенности;

- объекты, параметры которых изменяются в пространстве, и объекты без пространственного изменения параметров. Существуют объекты, для которых некоторые координаты состояния (технологические параметры) требуют ориентации в геометрическом пространстве. Если основные переменные объекта изменяются как во времени, так и в пространстве (или только в пространстве), то объект является объектом с *распределенными* параметрами. Если можно пренебречь пространственной неравномерностью значений координат состояний объекта, то объект будет объектом с *сосредоточенными* параметрами. Для таких объектов масса и энергия как бы сосредоточены в одной точке. Примером такого объекта может быть обогреваемый бак с жидкостью, которая тщательно перемешивается мешалкой. В некоторых объектах даже при естественном перемешивании можно добиться приближенного выполнения последнего условия;

- непрерывные, дискретные и дискретно-непрерывные объекты. Если переменные состояния объекта изменяются относительно времени как непрерывного аргумента, то объект является объектом с непрерывными переменными (по времени). В противном случае объект – дискретный.

Так как математические модели являются отражением соответствующих объектов, то для них характерны те же классы. В зависимости от характера изучаемых процессов в системе, все модели могут быть разделены на следующие виды:

1) *Детерминированные модели* отображают детерминированные процессы, то есть процессы, в которых предполагается отсутствие всяких случайных воздействий.

2) *Стохастические модели* отображают вероятностные процессы и события, то есть переменные модели являются изменяющимися во времени случайными процессами. Эти процессы могут быть стационарными и нестационарными. В последнем случае вероятностные характеристики процесса являются функцией времени.

3) *Стационарные и нестационарные модели.* Модель называется стационарной, если вид оператора модели и его параметры не изменяются во времени.

Если же параметры модели изменяются во времени, то модель следует назвать параметрически нестационарной. Может оказаться зависимым от времени и вид оператора модели. Это самый общий вид нестационарности. Как стационарные, так и нестационарные системы могут быть линейными и нелинейными.

Стационарные объекты описываются дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Коэффициенты дифференциальных уравнений нестационарных моделей являются функциями времени.

*Статические и динамические модели.* В основе такого разделения типов моделей лежат особенности движения исследуемого объекта как материальной системы. Говоря о моделях с позиций задач управления, надо отметить, что понятие пространства, обычно понимаемое в геометрическом смысле и относящееся к механическим системам, становится узким для широкого класса технологических процессов. Более того, для многих объектов управления характерно не взаимное перемещение элементов, а изменение их внутреннего состояния. Поэтому под пространством будем, в отличие от геометрического, понимать именно пространство состояний объекта и его модели. Тогда «положение» объекта или прогноз этого «положения» по модели будем оценивать с помощью координат состояния  $y$ , относящихся к выходным переменным. Элементами вектора  $y$  являются обычно контролируемые технологические параметры (расход, давление, температура, влажность, вязкость и т.д.). Состав элементов вектора  $y$  для самого объекта может быть шире, чем для модели этого объекта, так как при моделировании требуется изучение только части свойств реальной системы. Поэтому, говоря о векторе  $y$ , будем относить его к модели и именно с этой меркой производить оценку прогноза поведения объекта. Таким образом, движение объекта управления в пространстве состояний и во времени оценивается с помощью векторного процесса  $y(t)$ .

Модель системы называется *статической*, если состояние системы не изменяется, то есть система находится в равновесии, но движение связано со статичным состоянием объекта, находящегося в равновесии. Математическое описание в статических моделях не включает время как переменную и состоит из алгебраических или дифференциальных уравнений (в случае объектов с распределенными параметрами). Статические модели обычно являются нелинейными. Они точно отражают состояние равновесия, вызванное переходом объекта от одного режима к другому.

*Динамическая* модель отражает изменение состояния объекта во времени. Математическое описание таких моделей обязательно включает производную во времени. Динамические модели используют дифференциальные уравнения. Точные решения этих уравнений известны только для некоторого класса дифференциальных уравнений. Чаще приходится прибегать к использованию численных методов, являющихся приближенными.

Для целей управления динамическую модель представляют в виде передаточной функции, связывающей входные и выходные переменные.

*Линейные и нелинейные модели.* Согласно определению гомогенности система с уравнением  $y = mx + b$  является линейной. Однако ее можно считать линейной в окрестности рабочей точки  $x_0, y_0$  относительно малых приращений  $\Delta x$  и  $\Delta y$ . Если  $x = x_0 + \Delta x$  и  $y = y_0 + \Delta y$ , то мы получим:

$$y = mx + b,$$

или

$$y + \Delta y = m\Delta x_0 + m\Delta x + b$$

и, следовательно,  $y = m\Delta x$ , что удовлетворяет необходимым условиям.

Поэтому можно принять следующее определение линейности модели: если в выражении для оператора модели есть нелинейные операции, то модель является *нелинейной*, в противном случае модель – *линейная*.

Интерес к линейным моделям, прежде всего, объясняется тем, что их поведение описывается линейными дифференциальными уравнениями, для которых разработаны общие и достаточно простые методы решения. Кроме этого, имеют особое значение следующие два свойства этих моделей:

- входные воздействия реальных объектов обычно могут быть представлены в виде взвешенной суммы соответствующим образом подобранных типовых элементарных воздействий одной и той же формы. Поэтому для вычисления реакции линейного объекта на любое входное воздействие достаточно располагать лишь реакцией этого объекта на указанные типовые воздействия. Иначе говоря, поведение линейного объекта при произвольных входных воздействиях может быть описано не только с помощью дифференциальных уравнений, но также и с помощью характеристики, определяющей ее реакцию на то или иное типовое воздействие (эта реакция называется *динамической характеристикой*). Преимущества математического описания систем с помощью аппарата

динамических характеристик становятся особенно ощутимыми при построении математических моделей сложных объектов, вывод дифференциальных уравнений которых представляет обычно очень сложную задачу. В то же время динамические характеристики могут быть получены постановкой сравнительно простых экспериментов на действующем объекте;

-и линейной стохастической системе, на которую действуют случайные неконтролируемые возмущения, эффект влияния этих возмущений на выходную переменную может быть учтен в виде аддитивной случайной помехи, наложенной непосредственно на детерминированную составляющую выходной переменной. Соответственно описание поведения объекта в этом случае может быть получено в рамках обычного аппарата линейных дифференциальных уравнений (или адекватного ему аппарата динамических характеристик). Конечно, в этом случае необходимо располагать добавочной информацией о вероятностных характеристиках случайной помехи.

Если помеха доступна для контроля, то для получения осциллограммы изменения помехи достаточно зарегистрировать выход объекта при нулевом входном воздействии.

В противном случае часто принимается, что случайная помеха имеет нормальное распределение вероятности. Теоретическим обоснованием роли нормального распределения является *центральная предельная теорема*. Согласно этой теореме, когда есть основание рассматривать исследуемую случайную величину как сумму большого числа независимых случайных воздействий, влияние каждого из которых ничтожно мало, то даже если распределения составляющих произвольны, можно ожидать, что исследуемая случайная величина будет распределена по нормальному закону. Основное ограничение состоит в том, чтобы все слагаемые играли в общей сумме относительно малую роль. Это не значит, конечно, что любая случайная величина, если не доказано противное, подчиняется этому распределению. Нормальное распределение есть один из типов распределений, оно достаточно хорошо описывает многие явления, встречающиеся в природе, и имеет большое практическое приложение. Нормальное распределение обладает тем преимуществом, что оно характеризуется удобными математическими свойствами. Поэтому часто предполагается, что исследуемая величина подчиняется нормальному распределению, хотя на практике это предположение всегда требует специальной проверки.

Не всегда возможно описать поведение объекта линейным уравнением. Поэтому применяется аппроксимация нелинейных связей в заданном диапазоне аргументов линейными соотношениями. Процедура замены действительной функциональной зависимости выходной переменной от входной приближенной линейной зависимостью называется *линеаризацией*. Линеаризация обычно проводится путем разложения нелинейных зависимостей в ряд Тейлора в окрестности исходного стационарного режима с сохранением только линейных частей разложения и последующим вычитанием уравнений статики. С помощью этой процедуры получают

уравнения модели не относительно ее переменных, а отклонений переменных от исходного стационарного режима. Полученная таким образом линейная модель объекта справедлива лишь при малых отклонениях от исходного стационарного режима.

*Модели с сосредоточенными и распределенными параметрами.* Если можно пренебречь пространственной неравномерностью значений координат состояний объекта, то соответствующая модель – модель с *сосредоточенными* параметрами. Если же основные переменные процесса изменяются как во времени, так и в пространстве (или только в пространстве), то модели, описывающие такие процессы, называются моделями с *распределенными* параметрами. Их математическое описание включает обычно дифференциальные уравнения в частных производных, либо обыкновенные дифференциальные уравнения в случае стационарных процессов с одной пространственной координатой.

Следует отметить, что было бы корректнее в названии модели вместо слова «параметры» употреблять понятие «координата состояния». Однако это сложившееся название, которое часто встречается во многих работах по моделированию технологических процессов.

Трехмерность пространства не всегда обязательна. Например, модель змеевика с нагреваемым рабочим телом и с тонкостенной оболочкой обычно исходит из одномерности объекта – учитывается только длина змеевика. В то же время процесс передачи тепла в ограниченный объем рабочего тела через толстую стенку может быть описан одномерной моделью, учитывающей только толщину оболочки и т.п. Для конкретных объектов форма соответствующих уравнений требует обоснований.

*Модели непрерывные и дискретные во времени.* Модели, описывающие состояние объектов относительно времени как непрерывного аргумента, называются *непрерывными* (по времени). В заданном диапазоне изменения переменные непрерывной модели могут принимать произвольные значения в любой момент времени.

*Дискретные* модели служат для описания процессов, которые предполагаются дискретными. В таких моделях переменные квантуются по уровню или по времени. Квантование по уровню соответствует фиксации дискретных уровней переменных в произвольные моменты времени; квантование по времени соответствует фиксации дискретных моментов времени, при которых уровни переменных модели могут принимать произвольные значения. Для динамических объектов управления чаще используется квантования по времени.

*Дискретно-непрерывные модели* используются для случаев, когда хотят выделить наличие как дискретных, так и непрерывных процессов.

Полное наименование модели может включать в себя совокупность перечисленных признаков. Например, классическая теория автоматического регулирования, в основном, оперирует линейными стационарными динамическими моделями с сосредоточенными параметрами.

#### 1.4 Два подхода к построению моделей объектов управления

В общем случае процесс моделирования состоит из следующих этапов:

1) Описание объекта моделирования. На этом этапе определяется моделируемая система и ее компоненты.

2) Выбор структуры математической модели. На этом этапе составляются уравнения математической модели и выдвигаются необходимые допущения.

3) Исследование модели. Уравнения модели решаются относительно желаемых выходных переменных. Выполняется анализ решений.

4) Интерпретация результатов. Рассматривается вопрос о переносе значений, полученных на математической модели, на реальный объект изучения. Возможность такого перевода знаний существует благодаря наличию определенного соответствия элементов и отношений модели элементам и отношениям оригинала, установленного в процессе моделирования.

При необходимости проводится повторный анализ или синтез системы. Применение компьютеров в математическом моделировании дает возможность исследования в любых условиях, варьирования параметров и показателей внешних факторов для получения любых условий, в том числе и не реализуемых в натуральных экспериментах.

Жизненный цикл систем управления включает в себя несколько основных периодов таких, как проектирование, эксплуатация, модернизация. Отличительной особенностью процесса *проектирования* систем управления является его совмещение во времени с разработкой и изготовлением технологических агрегатов. А это означает, что единственной возможностью получения информации о свойствах еще не созданной технической системы является аналитическое описание процессов, характерных для элементов такой системы. Привлечение теоретических положений физики (иногда и химии) в приложении к конкретным особенностям изучаемого объекта является основой таких аналитических методов. Это дает основания приписывать аналитическим моделям свойство априорности.

Процесс *эксплуатации* системы управления накладывает свои условия на математические модели объектов. Они по своему назначению необходимы для получения текущей (оперативной) информации:

- о неконтролируемых с помощью измерительных приборов координатах технологических процессов;
- о свойствах некоторых участков технологических процессов, изменяющихся во времени под действием различных режимных факторов.

Оба выделенных класса моделей должны обеспечить прогноз их отклика с необходимой для эксплуатации агрегатов точностью. В первом случае к моделям можно предъявлять такие же метрологические требования, как и к измерительным средствам. Источником информации для получения моделей второго класса в процессе эксплуатации является сам

технологический процесс и установленные на агрегатах датчики координат состояния.

Таким образом, существует два принципиально различных подхода к построению математических моделей.

Первый подход основан на выборе моделей с учетом основных физико-химических закономерностей, определяющих течение исследуемого процесса. Такие модели называются *аналитическими* моделями процесса, при выводе уравнений используются фундаментальные законы сохранения вещества и энергии, уравнения выводятся на основе теоретического анализа физических и химических процессов, происходящих в объекте. Аналитический метод вывода математической модели идентичной (совпадающей) по характеристикам с исследуемым объектом применим тогда, когда физико-химические процессы, происходящие в объекте, хорошо изучены. К таким объектам относятся механические системы, поведение которых в статике и динамике подчиняется законам Ньютона, некоторые химические реакторы с простыми химическими реакциями, протекающими в них и др.

Общая методика составления уравнения объекта заключается в следующем. Составляются уравнения материального и энергетического баланса объекта для некоторого равновесного установившегося состояния. Затем составляется уравнение для неустановившегося состояния, определяющее связь между изменением входной величины (притока тепла или материальной среды, скорости и т.д.), вызванным регулирующим воздействием или внешним возмущением и нарушающим материальный или энергетический баланс объекта, и отклонением выходной величины – регулируемого параметра. Вычитая из последнего уравнения уравнение установившегося состояния, получают уравнение динамики объекта. К достоинством этого метода следует отнести то, что выведенные аналитическим путем уравнения одного объекта применимы для описания свойств других однотипных объектов. Недостатками аналитического метода составления уравнений являются трудность анализа и решения уравнений, большая трудоемкость получения численных значений параметров математического описания.

Если при составлении уравнения принимать во внимание все влияющие на динамику объекта факторы, то получается дифференциальное уравнение с производными высокого порядка, часто нелинейное, а динамические свойства объектов с распределенными параметрами описываются уравнениями в частных производных. Исследование систем регулирования с объектами, свойства которых описываются такими уравнениями, очень сложно. Однако практикой исследования динамики промышленных объектов установлено, что в большинстве случаев экспериментально полученные кривые разгона объектов удовлетворительно аппроксимируются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений невысокого порядка в сочетании с чистым запаздыванием. Поэтому обычно



точное, но очень сложное исходное уравнение заменяют приближенным к нему линейным дифференциальным уравнением первого-третьего порядка (обыкновенным или с запаздывающим аргументом), то есть заменяют объект моделью, представляющей собой последовательное соединение звеньев первого или второго порядка и звена с чистым запаздыванием.

Второй подход базируется на концепции «черного ящика», то есть постулируется, что внутренняя структура объекта неизвестна, да и не должна интересовать исследователя. Вся информация получается только в результате наблюдений за объектом при пассивном и активном эксперименте. При активных методах исследуемый объект подвергается специальным внешним воздействиям, которые приводят к изменениям выходной величины. Эти изменения фиксируются и полученные данные аппроксимируются математическими выражениями. При пассивных методах используют информацию, полученную в результате нормальной эксплуатации объекта без специальных внешних воздействий на него. Эта информация обрабатывается статистическими методами. Полученные таким образом модели называются *эмпирическими* (экспериментальными). Допустимые классы моделей в этом случае обычно выбираются в виде линейных относительно идентифицируемых параметров рядов по какой-либо удобной системе функций. Достоинством экспериментальных методов является их простота и малая трудоемкость при достаточно точном описании свойств объекта в узком диапазоне изменения координат. Основным недостатком экспериментальных методов – невозможность установления функциональной связи между входящими в уравнения численными параметрами и конструктивными характеристиками объекта, режимными показателями процесса и физико-химическими закономерностями изучаемых процессов. Кроме того, эти модели нельзя распространить на другие однотипные объекты.

Аналитические методы являются более общими по сравнению с экспериментальными методами, а результаты, полученные с их помощью, фундаментальными. Однако они гораздо сложнее, причем существенные трудности возникают уже на этапе построения аналитических моделей. Если для описания объекта с помощью экспериментальных методов достаточно знаний из области статистики и теории автоматического управления, то для создания аналитических моделей требуется привлечение более разнообразного математического аппарата и знаний из различных областей физики, химии, гидродинамики и т.д. В то же время все эти трудности полностью окупаются той огромной информационной емкостью, которой обладают аналитические модели.

Для моделирования процессов различных производств перспективным является использование метода статистической имитации на компьютере. Алгоритм, реализованный в среде специальных программных или программно-аппаратных комплексов, называется имитационной моделью. Этот алгоритм в упрощенном виде отражает структуру связей, логику и

последовательность функционирования во времени моделируемой системы. Получение информации от модели получается не путем решения модели аналитически или одним из численных методов, а путем машинного статистического эксперимента с моделью. Имитационное моделирование включает как алгоритм функционирования системы, так и выборочный эксперимент с моделью. Оно может использовать разнообразный математический аппарат для имитации системы.

Имитационное моделирование целесообразно применять, если изучаемая система или не описывается математическими моделями, или это описание недостаточно полное, громоздкое и недоступное анализу, или используемый математический аппарат сложен для исследователя. Имитация дает возможность проводить такие эксперименты, которые физически нереализуемы в натурном эксперименте из-за их дороговизны, трудоемкости, длительности, опасности их проведения.

К недостаткам имитационного моделирования можно отнести частный характер результатов, для получения общей зависимости требуется многократное повторение экспериментов со статистической оценкой результатов.

## **1.5 Математические основы моделирования динамических систем**

В этом разделе рассматриваются некоторые численные методы решения широкого круга математических задач, возникающих при исследовании технических проблем. Материалы раздела носят справочный характер.

1.5.1 Применение преобразования Лапласа для исследования систем автоматического управления.

При изучении явлений природы, решении многих задач физики и техники, химии и биологии, других наук не всегда удается установить прямую зависимость между величинами, описывающими тот или иной эволюционный процесс. Но в большинстве случаев можно установить связь между величинами (функциями) и скоростями их изменения относительно других (независимых) переменных величин, то есть найти уравнения, в которых неизвестные функции входят под знак производной. Такие уравнения называют *дифференциальными* уравнениями. В задачах управления используется теория *обыкновенных* дифференциальных уравнений (зависимость искомой функции только от одной переменной, этой переменной является время).

Дифференциальные уравнения, описывающие динамику физической системы, получаются на основании фундаментальных физических законов. Решение дифференциального уравнения, описывающего динамический процесс, может быть получено классическим методом — путем интегрирования с использованием неопределенных коэффициентов. С целью упрощения методов расчетов и проектирования систем автоматического

регулирования уравнения динамики объектов записывают не через *оригиналы* функций, а в виде *изображений*, получаемых с помощью прямого преобразования Лапласа.

*Преобразование Лапласа* составляет основу операционного исчисления - совокупности методов прикладного математического анализа, позволяющих получать решения линейных дифференциальных уравнений, разностных и интегральных уравнений. Операционное исчисление нашло широкое применение в теории автоматического регулирования, где с его помощью производится анализ переходных и установившихся процессов в автоматических системах.

Рассмотрим вопросы теории автоматического регулирования, для которых применение методов преобразования Лапласа наиболее эффективно.

Пусть задана некоторая функция  $f(t)$  действительной переменной  $t$ .

Преобразованием Лапласа (*L-преобразованием*) называется функция комплексного переменного  $s$ , определяемая следующим соотношением (если интеграл в правой части является сходящимся):

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt, \quad (1.5.1)$$

где  $s = \alpha + j \cdot \omega$  – комплексная переменная.

Функция  $f(t)$  называется *оригиналом*.

Функция  $F(s)$  называется *изображением*.

Операция определения изображения по оригиналу сокращенно записывается  $F(s) = L\{f(t)\}$ , где  $L$  – символ преобразования Лапласа (если функция-оригинал обозначена некоторой строчной буквой, то для обозначения изображения используется та же прописная буква).

Для краткой записи преобразования (1.5.1) используют символ  $\div$ :

$f(t) \div F(s)$  — функция  $f(t)$  имеет своим изображением функцию  $F(s)$  или  $F(s) \div f(t)$  — функция  $F(s)$  имеет своим оригиналом функцию  $f(t)$ .

Оригинулу  $f(t)$  ставится в соответствие функция  $F(s)$  комплексной переменной  $s = \alpha + j \cdot \omega$  (иногда комплексную переменную обозначают  $p$ ).

Для сходимости несобственного интеграла (1.5.1), то есть для того, чтобы  $f(t)$  была оригиналом, необходимо, чтобы она удовлетворяла следующим условиям:

а) функция  $f(t)$  непрерывна со своими производными достаточно высокого порядка на всей оси  $t$  (для всех значений  $f(t) \geq 0$ ). Непрерывность может быть нарушена лишь в отдельных точках, являющихся точками разрыва первого рода (количество разрывов должно быть конечным на интервале  $t$  ограниченной длины);

б) функция  $f(t) = 0$  для значений  $t < 0$ ;

в) функция  $f(t)$  имеет ограниченный порядок возрастания (растет не быстрее показательной функции), то есть существуют такие постоянные числа  $M > 0$  и  $C_0 \geq 0$ , что для всех  $t$  выполняется неравенство:

$$|f(t) \leq Me^{C_0 t}|, (t > 0). \quad (1.5.2)$$

Число  $C_0$  называется показателем роста функции  $f(t)$ .

В реальных технических системах временные функции  $f(t)$ , описывающие взаимодействие с внешней средой, являются функциями-оригиналами. Например, оригиналами будут функции:  $I(t)$ ;  $A \cdot \sin(\omega t) \cdot I(t)$ ;  $A \cdot \cos(\omega t) \cdot I(t)$ ;  $e^{\alpha t}$ ;  $e^{-\alpha t} \cdot I(t)$ , ( $\alpha > 0$ ). Множитель  $I(t)$  — единичная ступенчатая функция, обеспечивает выполнение второго условия: условия технической реализуемости динамической системы или объекта (объект наблюдаем, и может функционировать в «реальном» времени  $t \geq 0$ ).

Функции  $e^{t^2}$ ,  $\frac{1}{t}$ ,  $\operatorname{tg} \omega t$  — не оригиналы (для первой не выполняется третье условие (при  $t$  стремящемся к бесконечности, возрастает быстрее, чем  $e^{C_0 t}$ ), для других не выполняется первое условие).

Преобразование Лапласа обратимо, то есть зная изображение по Лапласу, можно определить оригинал.

*Основные свойства (теоремы) преобразования Лапласа.*

1. Свойство линейности.

Для любых комплексных постоянных  $\alpha$  и  $\beta$ :

если

$$f(t) \div F(s), \quad q(t) \div G(s),$$

то

$$\alpha f(t) + \beta q(t) \div \alpha F(s) + \beta G(s),$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — любые числа (масштабные множители).

2. Теорема подобия.

Для любого постоянного  $\alpha > 0$ :

если

$$f(t) \div F(s),$$

то

$$f(\alpha t) \div (1/\alpha) \cdot F(s/\alpha),$$

где  $\alpha$  — любые числа.

3. Дифференцирование оригинала.

Пусть  $f(t)$  и  $f^n(t)$  являются оригиналами.

Если

$$f(t) \div F(s),$$

то

$$\begin{aligned} f'(t) &\div sF(s) - f(0), \\ f''(t) &\div s^2 F(s) - sf(0) - f'(0), \\ f'''(t) &\div s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0), \\ f^n(t) &\div s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{n-1}(0). \end{aligned}$$

При нулевых начальных условиях те же формулы примут вид:

$$\begin{aligned} f'(t) &\div sF(s), \\ f''(t) &\div s^2 F(s), \\ f'''(t) &\div s^3 F(s), \\ f^{(n)}(t) &\div s^n F(s). \end{aligned}$$

4. Дифференцирование изображения.

Дифференцирование изображения сводится к умножению на  $-t$  оригинала:

$$F^{(n)}(s) \div (-1)^n t^n f(t).$$

5. Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на  $s$ :

если

$$f(t) \div F(s),$$

то

$$\int f(t) dt \div \frac{F(s)}{s}.$$

Свойства 3 и 5 определяют широту использования операционного исчисления — дифференцирование оригинала  $f(t)$  по переменной  $t$  соответствует умножению изображения  $F(s)$  на комплексную переменную  $s$ , а интегрирование оригинала  $f(t)$  соответствует операции деления  $F(s)$  на  $s$ .

Таким образом, операции дифференцирования и интегрирования оригинала заменяются в пространстве изображений оригинала более простыми операциями алгебры. Это позволяет дифференциальные уравнения, записанные относительно искомой функции  $f(t)$ , заменить в пространстве изображений на алгебраическое уравнение относительно изображения  $F(s) \div L\{f(t)\}$ . Решив это алгебраическое уравнение и найдя  $F(s)$ , мы получим изображение решения исходного дифференциального уравнения. Для определения самого решения можно воспользоваться обратным преобразованием Лапласа ( $L^{-1}$ -преобразованием):

$$f(t) \div L^{-1}[F(S)] = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(S) \cdot e^{st} ds, \quad t > 0,$$

где  $c = R_e(s)$ .

б) Интегрирование изображения:

если  $\int_s^\infty F(s) ds$  сходится, то он служит изображением функции  $f(t)/t$ :

$$\frac{f(t)}{t} \div \int_s^\infty F(s) ds.$$

7) Теорема запаздывания.

Для любого положительного  $\tau > 0$ :

$$f(t - \tau) \div e^{-s\tau} F(s)$$

(операция сдвига).

8) Теорема смещения.

Для любого комплексного  $s_0$ :

$$e^{s_0 t} f(t) \div F(s - s_0).$$

9) Теорема умножения.

Произведение двух изображений  $F(s)$  и  $G(s)$  также является изображением, причем:

$$F(s) \cdot G(s) \div \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Интеграл в правой части называется *сверткой* функций  $f(t)$  и  $g(t)$  и обозначается  $(f * g)$ .

На практике для определения прямого и обратного преобразований Лапласа используются таблицы преобразований, которые можно найти в литературе [1].

*Примеры.*

1. Получим изображения по Лапласу:

- для импульсной функции:

$$L\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-st} dt = 1,$$

так как  $\delta(t) = 0$  при  $t \neq 0$ ;

- для единичного скачка:

$$L\{1(t)\} = \int_0^{\infty} 1(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s}(e^{-\infty} - e^{-0}) = \frac{1}{s}.$$

2. Определим оригинал  $x(t)$  по изображению в виде дробно-рациональной функции:

$$X(s) = \frac{5}{s(s+5)}.$$

Представим функцию в виде суммы двух простых дробей (например, методом неопределенных множителей):

$$X(s) = \frac{5}{s} - \frac{5}{s+1}.$$

Используя теорему о линейности и таблицу преобразований к каждому слагаемому, получим:

$$x(t) = 5L^{-1}\left\{\frac{5}{s}\right\} - 5L^{-1}\left\{\frac{5}{s+1}\right\} = 5 - 5e^{-t}.$$

*Операторный метод решения дифференциальных уравнений.* Как уже отмечалось, в области изображений по Лапласу сложные операции дифференцирования и интегрирования сводятся к операциям умножения и деления, что позволяет переходить от дифференциальных и интегральных уравнений к алгебраическим. Это является главным достоинством преобразования Лапласа как математического аппарата теории автоматического управления.

Динамические процессы в САУ описываются дифференциальными уравнениями. Для исследования качества автоматических систем требуется знать решение этих уравнений. Операторный подход значительно упрощает процедуру получения искомого решения дифференциального уравнения.

Алгоритм решения дифференциальных уравнений операторным методом имеет следующий вид:

- преобразуем заданные дифференциальные уравнения по Лапласу, учитывая при этом начальные условия;
- получаем алгебраическое уравнение относительно изображения, решаем его;
- затем переходим от изображения решения к оригиналу.

Поясним применение операторного метода на примере решения дифференциального уравнения 2 порядка в общем виде:

$$a_0 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_2 x(t) = f(t);$$

$$x(0) \neq 0, x^{(1)} \neq 0;$$

$$a_0, a_1, a_2 - const.$$

Применим теорему о дифференцировании для нахождения изображения производных:

$$L\left\{\frac{d^2 x(t)}{dt^2}\right\} = s^2 X(s) - s \cdot x(0) - x^{(1)}(0);$$

$$L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = s \cdot X(s) - x(0).$$

Пусть  $f(t) = I(t)$ , тогда  $F(s) = \frac{1}{s}$ .

Получим операторное уравнение, используя теорему линейности:

$$a_0 L\left\{\frac{d^2 x(t)}{dt^2}\right\} + a_1 L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} + a_2 L\{x(t)\} = L\{f(t)\};$$

$$(a_0 s^2 + a_1 s + a_2) X(s) = \frac{1}{s} + a_0 x(0) \cdot s + a_0 x^{(1)}(0) + a_1 x(0).$$

Решаем уравнение относительно  $X(s)$ :

$$X(s) = \frac{a_0 x(0) \cdot s + a_0 x^{(1)}(0) + a_1 x(0) \cdot s + 1}{s \cdot (a_0 s^2 + a_1 s + a_2)}.$$

Разлагая полученную функцию на простые дроби и используя таблицу преобразования Лапласа, получим  $x(t)$ .

*Примеры.*

1. Решить операторным методом однородное дифференциальное уравнение, описывающее свободное (автономное) движение САУ:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 3 \frac{dx(t)}{dt} + 2 \cdot x(t) = 0;$$

$$x(0) = 0, x'(0) = 1.$$

Преобразуем уравнение по Лапласу:

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + 3sX(s) - 3x(0) + 2X(s) = 0.$$

Отсюда

$$s^2 X(s) - 1 + 3sX(s) + 2X(s) = 0;$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}.$$

Разложим изображение  $X(s)$  на элементарные составляющие:

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}.$$

$A$  и  $B$  – неопределенные множители, которые определяются из условия равенства двух дробно-рациональных дробей (если две дроби равны и равны их знаменатели, то числители будут тоже равны; получаем равенство, содержащее в обеих частях полиномы (при равенстве полиномов, равны и коэффициенты этих полиномов при соответствующих степенях аргумента):

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}.$$

По таблицам преобразования Лапласа имеем:  $e^{\alpha t} \div \frac{1}{s - \alpha}$ .

Решение уравнения:

$$x(t) = e^{-t} - e^{-2t}.$$

2. Решить дифференциальное уравнение, описывающее вынужденное движение САУ:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 7 \frac{dx(t)}{dt} + 12x(t) = 5e^{-3t} + 2;$$

$$x(0) = 1, x'(0) = -1.$$

Применяя к обеим частям уравнения преобразование Лапласа, получим операторную форму дифференциального уравнения:

$$s^2 X(s) - s \cdot x(0) - x'(0) + 7s \cdot X(s) - 7 \cdot x(0) + 2X(s) = 5 \frac{1}{s+3} + \frac{2}{s}.$$

Учитывая начальные условия, разрешаем операторное уравнение относительно  $X(s)$ :

$$X(s) = \frac{s^3 + 9s^2 + 25s + 6}{s \cdot (s+3)^2 \cdot (s+4)}.$$

Знаменатель этого выражения содержит два кратных корня, поэтому разложение на простые дроби будет иметь вид:



$$X(s) = \frac{s^3 + 9s^2 + 25s + 6}{s \cdot (s+3)^2 \cdot (s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{(s+3)^2} + \frac{D}{s+4} = \frac{1}{6s} - \frac{8}{3(s+3)} + \frac{5}{(s+3)^2} + \frac{7}{2(s+4)}.$$

Используя таблицы преобразования Лапласа, от этого выражения переходим к оригиналу:

$$x(t) = \frac{1}{6} - \frac{8}{3} e^{-3t} + 5 \cdot t \cdot e^{-3t} + \frac{7}{2} e^{-4t}.$$

*Определение передаточных функций динамических звеньев и систем.*

Если линейная динамическая система описывается дифференциальным уравнением с нулевыми начальными условиями, то отношение изображения выходного сигнала к изображению входного сигнала (при нулевых начальных условиях) и равных нулю остальных воздействиях, будет являться ее *передаточной функцией*. Передаточная функция для линейных и линеаризованных систем является еще одной формой представления их математических моделей.

Например, пусть звено описывается дифференциальным уравнением следующего вида:

$$T_1 T_2 x^{(3)} + T_1 x^{(2)} + x^{(1)} = k \cdot u.$$

Преобразуя это уравнение по Лапласу при нулевых начальных условиях, получаем операторное уравнение, а из него искомую передаточную функцию:

$$W(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{k}{s \cdot (T_1 T_2 s^2 + T_1 s + 1)}.$$

В общем случае динамическое звено или объект управления описываются системой дифференциальных и алгебраических уравнений. Это усложняет задачу получения передаточной функции, так как приходится выполнять дополнительные преобразования исходной системы уравнений с целью исключения промежуточных координат. Пусть объект описывается следующей системой уравнений с нулевыми начальными условиями:

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} = a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{dz}{dt} + a_3 z + a_4 x(t) \\ \frac{dz}{dt} = b_1 \frac{dy}{dt} + b_2 z + b_3 x(t) \end{cases}.$$

Здесь  $y(t)$ ,  $z(t)$  – выходные сигналы,  $x(t)$  – входной сигнал. Требуется определить передаточные функции по различным каналам. Введем обозначения:

$$X(s) \div x(t), Y(s) \div y(t), Z(s) \div z(t).$$

Применяя операторный метод, преобразуем систему:

$$\begin{cases} s^2 Y(s) = a_1 s Y(s) + a_2 s Z(s) + a_3 Z(s) + a_4 X(s) \\ s Z(s) = s Y(s) + b_1 Z(s) + b_2 X(s) \end{cases}.$$

После подстановки  $Z(s)$  из второго уравнения в первое будем иметь одно операторное уравнение, из которого можно будет получить передаточные функции:

$$\text{- по каналу } x(t) \rightarrow y(t) : W = \frac{k_1(Ts + k_2)}{s(k_3 s^2 + 2k_4 s + 1)};$$

$$\text{- по каналу } x(t) \rightarrow z(t) : W = \frac{k_1(Ts + 1)}{k_2 s^2 + 2k_3 s + 1}.$$

Здесь  $k_1$   $k_2$   $k_3$   $k_4$  – коэффициенты, полученные при преобразовании уравнений.

Аналогично, избавившись от переменной  $Y(s)$ , можно найти передаточную функцию по каналу  $x(t) \rightarrow z(t)$ .

*Пример.* Определение процесса регулирования.

Пусть система автоматического управления описывается передаточной функцией второго порядка:

$$W = \frac{10}{0.1s^2 + s + 10}.$$

Пусть управляющее воздействие единичный сигнал  $u(t) = E(t)$ . Требуется определить переходной процесс  $x(t)$ .

Изображение управляющей величины:  $E(t) \div \frac{1}{s}$ .

Передаточная функция определяется выражением:

$$W(s) = \frac{X(s)}{U(s)}, \text{ тогда } X(s) = W(s) \cdot U(s).$$

Имеем:

$$X(s) = \frac{10}{s(0.1s^2 + s + 10)} = \frac{100}{s(s^2 + 10s + 100)}.$$

Преобразуем:

$$X(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 10s + 100} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 10s + 100} - \frac{10}{s^2 + 10s + 100}.$$

Преобразуем трехчлен в знаменателе дробей:

$$s^2 + 10s + 100 = (s + 5)^2 + 75.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 10s + 100} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 10s + 100} - \frac{10}{s^2 + 10s + 100} = \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s}{(s + 5)^2 + 75} - \frac{10}{(s + 5)^2 + 75}. \end{aligned}$$

Используя таблицы преобразования Лапласа, имеем:

$$\sin(\omega t) \div \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad \cos(\omega t) \div \frac{s}{s^2 + \omega^2};$$

$$e^{-\alpha t} \sin(\omega t) \div \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}, \quad e^{-\alpha t} \cos(\omega t) \div \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}.$$

Тогда

$$\frac{s}{(s+5)^2 + 75} = \frac{s+5}{(s+5)^2 + 75} - \frac{5}{(s+5)^2 + 75} \div e^{-5t} \cos(\sqrt{75}t) - \frac{5}{\sqrt{75}} e^{-5t} \sin(\sqrt{75}t);$$

$$\frac{10}{(s+5)^2 + 75} \div \frac{10}{\sqrt{75}} e^{-5t} \sin(\sqrt{75}t).$$

Окончательно

$$x(t) = 1 - e^{-5t} \left[ \frac{5}{\sqrt{75}} e^{-5t} \sin(\sqrt{75}t) + e^{-5t} \cos(\sqrt{75}t) \right].$$

1.5.2 Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Обычно модель динамической системы задается в виде системы дифференциальных уравнений в нормальной форме:

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = f(t, \bar{y}, \bar{u}). \quad (1.5.3)$$

Здесь  $\bar{y} = \{y_i(t)\}, i = 1, 2, \dots, m$  – выходные переменные (переменные состояния);

$\bar{u} = \{u_j(t)\}, j = 1, 2, \dots, n$  – входные переменные;

$f(t, \bar{y}, \bar{u})$  – вектор-функция правых частей уравнения.

Система дифференциальных уравнений должна быть дополнена начальными условиями для определения единственного решения, которые обычно задаются в виде:

$$\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0. \quad (1.5.4)$$

Уравнения (1.5.3) совместно с начальными условиями (1.5.4) позволяют определить поведение системы для всех  $t > 0$ . Такие уравнения не всегда интегрируются в квадратурах с помощью классических методов решения дифференциальных уравнений. Это обстоятельство является обычным при моделировании динамики сложных систем. В большом количестве практических задач коэффициенты или функции в дифференциальном уравнении могут содержать существенные нелинейности или даже задаваться в виде таблиц экспериментальных данных (этот случай сразу снимает вопрос о возможности решения классическими методами). Общим методом получения решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений является метод численного интегрирования.

*Численное решение дифференциальных уравнений первого порядка.*

Рассмотрим методы численного интегрирования системы дифференциальных уравнений на примере решения дифференциального уравнения первого порядка. Эти методы легко обобщаются для систем уравнений первого порядка. И, как известно, уравнения высших порядков всегда можно свести к системе уравнений первого порядка, то есть рассматриваемые методы имеют широкое приложение. Также примем, что входные переменные (которые могут быть возмущением или управлением) заданы как функции времени, то есть в дальнейших формулах функцию *ив* явном виде не указываем. Тогда уравнение первого порядка с начальным условием запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}y' &= f(t, y); \\ y(t_0) &= y_0\end{aligned}$$

Решением этого уравнения является семейство кривых, из которого выбрать одну, определенную кривую позволяет начальное условие. Если решение найдено аналитически в виде функции  $y=y(t)$  то, чтобы найти численные значения функции, необходимо просто подставить соответствующие значения *ti* и вычислить  $y(t)$ . На этом основано численное решение дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение задает наклон кривой в любой точке как функцию *ti* и *y*. В начальный момент известна только одна точка, через которую проходит кривая. Начиная с этой точки, вычисляем наклон касательной при  $t=t_0$ ,  $y=y_0$  и продвигаемся на некоторое малое расстояние вдоль получившейся касательной. Если шаг по *t* обозначить через *h*, то приходим в точку  $t=t_0 + h$  и получаем новое значение  $y=y_1$ . Продолжая эту процедуру и дальше, получаем последовательность коротких отрезков прямой, которые, как можно надеяться, являются достаточно хорошим приближением к искомой функции. Выведем некоторые формулы.

Предположим, что известна точка  $(t_m, y_m)$  на искомой кривой. Тогда через эту точку можно провести прямую (касательную) с тангенсом угла наклона в этой точке  $y'_m = f(t_m, y_m)$ . Тогда следующей точкой решения можно считать  $t_{m+1}$ , где эта прямая пересечет ординату, проведенную через точку  $t=t_{m+1}=t_m+h$ .

Уравнение касательной (уравнение прямой, проходящей через известную точку с заданным угловым коэффициентом):  $y = y_m + y'_m(t - t_m)$ .

Также имеем (из заданного уравнения)  $y'_m = f(t_m, y_m)$ ,  $t_{m+1} = t_m + h$ .

Отсюда:

$$y_{m+1} = y_m + h \cdot f(t_m, y_m).$$

Этот метод известен как *метод Эйлера*, один из старых и широко известных методов численного интегрирования дифференциальных уравнений. Точки  $(t_m, y_m)$  называются *узлами*. На каждом шаге метода Эйлера

допускается *локальная* погрешность по отношению к точному решению. Этот метод имеет *первый* порядок точности относительно шага  $h$ .

На практике для решения дифференциальных уравнений широко используются методы Рунге-Кутты. Различные методы этой группы требуют большего или меньшего объема вычислений и соответственно обеспечивают большую или меньшую точность. Методы Рунге-Кутты обладают следующими свойствами:

1) Эти методы являются одноступенчатыми: чтобы найти решение в очередной точке, необходима информация о решении только в предыдущей точке.

2) Они имеют порядок точности  $h^p$ , который называется порядком метода.

3) Они не требуют вычисления производных функции, что удобно для практических вычислений.

В методе Эйлера *кривая* приближается отрезками *прямой*, что с самого начала приводит к большой погрешности. Последовательность отрезков прямых может существенно отклониться от искомой кривой. Этот метод является методом Рунге-Кутты *первого* порядка и часто оказывается неустойчивым – малая ошибка увеличивается с ростом  $t$  (проблема *устойчивости* метода). Метод редко применяется на практике.

Этот метод можно усовершенствовать множеством различных способов. Например, в исправленном методе Эйлера находится средний тангенс угла наклона касательной для двух точек:  $(t_m, y_m)$  и  $(t_m+h, y_m+hy_m)$ . Вторая точка находится методом Эйлера, то есть вначале методом Эйлера нашли точку на касательной. В этой точке опять вычисляем тангенс угла наклона касательной. Усреднение двух тангенсов дает угловой коэффициент третьей прямой. И через начальную точку  $(t_m, y_m)$  проводится прямая линия, параллельная этой третьей прямой. Точка, в которой последняя прямая пересечется с ординатой, восстановленной из точки  $t_{m+1}=t_m+h$ , и будет искомой точкой  $(t_{m+1}, y_{m+1})$ .

Тангенс угла наклона этой прямой:

$$F_1(t_m, y_m, h) = \frac{1}{2}[f(x_m, y_m) + f(x_m + h, y_m + h \cdot y'_m)], \text{ а } y'_m = f(x_m, y_m),$$

а уравнение:

$$y = y_m + h \cdot F_1(t_m, y_m, h).$$

Так что

$$y_{m+1} = y_m + h \cdot F_1(t_m, y_m, h). \quad (1.5.5)$$

Формула (1.5.5) определяет *исправленный метод Эйлера*. Этот метод является методом Рунге-Кутты *второго* порядка точности.

Один из самых распространенных для решения практических задач методов интегрирования дифференциальных уравнений - метод Рунге-Кутты *четвертого* порядка точности. Он описывается системой следующих соотношений:

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4),$$

где

$$k_1 = f(x_m, y_m);$$

$$k_2 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h \cdot k_1}{2}\right);$$

$$k_3 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h \cdot k_2}{2}\right);$$

$$k_4 = f(x_m + h, y_m + h \cdot k_3).$$

В методах Рунге-Кутты второго и выше порядков приходится вычислять значение функции в одной или нескольких промежуточных точках, что представляется нерациональным. Эта та цена, которую приходится платить за возможность не вычислять никаких производных. Существуют и некоторые другие методы решения дифференциальных уравнений [2], но для инженерных расчетов обычно достаточно методов Рунге-Кутты.

*Примеры.*

1. Решить на отрезке  $[1,2]$  с шагом  $h=0.2$  методом Эйлера дифференциальное уравнение:

$$y' = y^2 - t,$$

при начальном условии  $y(1) = 0$ .

Запишем формулу Эйлера для уравнения:

$$y_{m+1} = y_m + 0.2 \cdot (y_m^2 - t_m).$$

Вычисляем значения приближенного решения в узлах равномерной сетки с шагом 0.2:

$$y_1 = y_0 + 0.2 \cdot (y_0^2 - x_0) = 0 + 0.2(0 - 1) = -0.2;$$

$$y_2 = y_1 + 0.2 \cdot (y_1^2 - x_1) = -0.2 + 0.2(0.04 - 1.2) = -0.432;$$

$$y_3 = y_2 - 0.675; y_4 = -0.904; y_5 = -1.1.$$

2. Вычислить на отрезке  $[0,0.5]$  с шагом  $h=0.1$  методом Рунге-Кутты интеграл дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' = y^2 - x, \quad y(0) = 0$$

при начальном условии  $y(0)=0$ .

Вычислим  $y_1$ . Для этого вначале вычисляем  $k_j$ :

$$k_1 = x_0 + y_0 = 0 + 0 = 0;$$

$$k_2 = x_0 + \frac{h}{2} + y_0 + \frac{h \cdot k_1}{2} = (0 + 0.05) + (0 + 0.05) = 0.1;$$

$$k_3 = x_0 + \frac{h}{2} + y_0 + \frac{h \cdot k_2}{2} = (0 + 0.05) + (1 + 0.55) = 1.105;$$

$$k_4 = x_0 + h + y_0 + h \cdot k_3 = (0 + 0.1) + (1 + 0.1105) = 1.2105.$$

Теперь получим:

$$\Delta y_0 = \frac{0.1}{6} \cdot (1 + 2 \cdot 1.1 + 2 \cdot 1.105 + 1.2105) = 0.1103,$$

а значит

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0.1103 = 1.1103.$$

Аналогично вычисляются следующие значения функции.

Точное решение этого дифференциального уравнения  $y = 2 \cdot e^x - x - 1$ .

Отсюда можно получить значение точного решения в соответствующих точках и сравнить с приближенным решением.

*Численное решение дифференциальных уравнений высокого порядка.*

Методы Эйлера и Рунге-Кутты можно использовать не только для решения дифференциальных уравнений первого порядка, но и для решения дифференциальных уравнений более высоких порядков.

Любое дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка:

$$y^{(n)} = f(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}), \quad (1.5.6)$$

можно свести к системе, состоящей из  $n$  уравнений первого порядка с помощью следующих преобразований.

Обозначим:

$$y_1 = y^{(1)},$$

$$y_2 = y^{(2)} = y_1^{(1)},$$

$$y_3 = y^{(3)} = y_2^{(1)},$$

.....

$$y_n = y^{(n)} = y_{n-1}^{(1)}.$$

В результате дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка (1.5.6) сводится к системе  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка:

$$y^{(1)} = y_1;$$

$$y_1^{(1)} = y_2;$$

$$y_2^{(1)} = y_3;$$

.....

$$y_{n-1}^{(1)} = f(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}).$$

Решением системы (1.5.6), а значит, и дифференциального уравнения  $n$ -го порядка (1.5.5) является  $n$  табличных функций  $y, y_1 = y^{(1)}, y_2 = y_1^{(1)}, \dots, y_n = y_{n-1}^{(1)}$ .

### *Решение дифференциальных уравнений второго порядка.*

В задачах моделирования динамических систем наиболее часто приходится решать дифференциальные уравнения второго порядка. Рассмотрим применение численных методов решения дифференциальных уравнений высокого порядка на примере уравнения второго порядка.

Нормальная форма дифференциальных уравнений второго порядка имеет вид:

$$y^{(2)} = F(t, y, y^{(1)}).$$

Пусть это уравнение в результате замены приняло вид системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями:

$$y' = f(t, y, z);$$

$$z' = g(t, y, z);$$

$$y(t_0) = y_0;$$

$$z(t_0) = z_0.$$

Формулы Рунге-Кутта 4-го порядка точности для решения этой системы имеют вид:

$$y_{m+1} = y_m + \Delta y_m;$$

$$z_{m+1} = z_m + \Delta z_m;$$

$$\Delta y_m = \frac{1}{6}(k_1^m + 2k_2^m + 2k_3^m + k_4^m); \quad (1.5.7)$$

$$\Delta z_m = \frac{1}{6}(l_1^m + 2l_2^m + 2l_3^m + l_4^m).$$

Величины  $k_1, k_2, k_3, k_4$  в формуле Рунге-Кутта для второго уравнения обозначены  $l_1, l_2, l_3, l_4$ . Формулы для расчета значений этих величин:

$$k_1^m = h \cdot f(x_m, y_m, z_m);$$

$$l_1^m = h \cdot g(x_m, y_m, z_m);$$

$$k_2^m = h \cdot f(x_m + \frac{1}{2}h, y_m + \frac{1}{2}k_1^m, z_m + \frac{1}{2}l_1^m);$$

$$l_2^m = h \cdot g(x_m + \frac{1}{2}h, y_m + \frac{1}{2}k_1^m, z_m + \frac{1}{2}l_1^m);$$



$$k_3^m = h \cdot f(x_m + \frac{1}{2}h, y_m + \frac{1}{2}k_3^m, z_m + \frac{1}{2}l_3^m);$$

$$l_3^m = h \cdot f(x_m + \frac{1}{2}h, y_m + \frac{1}{2}k_3^m, z_m + \frac{1}{2}l_3^m);$$

$$k_4^m = h \cdot f(x_m + h, y_m + k_1^m, z_m + l_1^m);$$

$$l_4^m = h \cdot f(x_m + h, y_m + k_1^m, z_m + l_1^m).$$

Подставляя эти значения в (1.5.7), получаем численное решение уравнения.

Таким образом, для решения системы дифференциальных уравнений используем те же методы, что и для решения одного дифференциального уравнения первого порядка, с учетом того, что на каждом шаге интегрирования все уравнения системы надо решать параллельно.

*Пример.* Методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом  $h=0.1$  на интервале  $[0, 0.5]$  получить численное решение дифференциального уравнения с нулевым начальным условием:

$$y' = (y + x)^2;$$

$$y(0) = 0.$$

Вычислим значения вспомогательных величин:

$$k_1^0 = h \cdot f(t_0, y_0) = 0.1 \cdot (0 + 0) = 0;$$

$$y_0^1 = y_0 + k_1^0 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0;$$

$$k_2^0 = h \cdot f(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1^0) = 0.1 \cdot (0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 0.1) = 0.00025;$$

$$y_0^2 = y_0 + k_2^0 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 0.00025 = 0.0;$$

$$k_3^0 = h \cdot f(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2^0) = 0.1 \cdot (0 + \frac{1}{2} \cdot 0.00025 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 0.1) = 0.000251251$$

$$y_0^3 = y_0 + k_3^0 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 0.000251251 = 0.000251251$$

$$k_4^0 = h \cdot f(t_0 + h, y_0 + k_3^0) = 0.1 \cdot (0 + \frac{1}{2} \cdot 0.00025 + 0 + 0.1) = 0.001005031$$

Найдем приращение функции:

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1^0 + 2k_2^0 + 2k_3^0 + k_4^0) = \frac{1}{6}(0 + 2 \cdot 0.00025 + 2 \cdot 0.000251251 + 0.001005031) = 0.00033458$$

и значение функции в первой точке:

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0 + 0.000334588 = 0.000334588$$

Аналогично получим решение в остальных точках.

### 1.5.3 Аппроксимация функций.

При моделировании многих процессов и явлений необходимо иметь возможность вычислять значения функций, входящих в описание математической модели рассматриваемого процесса или явления, при произвольном значении аргумента. Используемые в математических моделях функции могут быть заданы как аналитическим способом (в виде формулы), так и табличным, при котором значения функции известны только при определенных дискретных значениях аргумента. В частности, если функциональная зависимость получена в результате расчетов или в процессе измерений, осуществленных в рамках какого-либо эксперимента, то она оказывается заданной именно табличным способом. На практике нам могут понадобиться значения функции и в других точках, отличных от тех, что заданы в таблице. Однако получить эти значения можно только путем сложных расчетов или проведением дорогостоящих экспериментов. Поэтому возникает задача определения аналитического выражения для рассматриваемой функции, что дает возможность использовать ее для проведения расчетов при теоретическом исследовании модели, а также вычислять приближенные значения функции при любом значении аргумента. Эта задача решается путем приближенной замены – *аппроксимацией функции* более простой функцией, которую нетрудно вычислять при любом значении аргумента в заданном интервале его изменения. Задача аппроксимации – это задача приближения функции по какой-либо *системе аппроксимирующих функций* [3]. Аппроксимирующую функцию строят таким образом, чтобы ее отклонения от аппроксимируемой функции в заданной области было наименьшим в некотором смысле. Понятие “малого отклонения” зависит от того, каким способом оценивается близость двух функций. Условие близости функций называется *критерием приближения*.

Пусть рассматривается функция  $f(t)$ , заданная своими числовыми значениями  $f(t_i), i=1, 2, \dots, N$  в точках  $t_i$ . Эта функция представляется в виде разложения в ряд по некоторой системе аппроксимирующих функций  $\{\varphi_i(t)\}$ :

$$f(t) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(t). \quad (1.5.8)$$

Вид системы аппроксимирующих функций выбирается, исходя из априорной информации об *аппроксимируемой* функции. Коэффициенты аппроксимации  $a_i$  выбираются таким образом, чтобы минимизировать некоторый заранее выбранный критерий приближения. Можно воспользоваться одним из следующих видов приближений: равномерным, интерполяционным, квадратичным. Для точного решения задачи с использованием двух первых видов приближения не существует конечного алгоритма вычисления коэффициентов разложения. Это обстоятельство, а также алгоритмическая простота реализации квадратичных приближений,



$$\int_a^b \varphi(t) \cdot \psi(t) dt = 0.$$

Система функций  $\{\varphi_i(t)\}, i=1,2,3,\dots,n,$  определенных на промежутке  $[a,b]$  и интегрируемых на  $[a,b]$  вместе с квадратами, называется *ортogonalной системой*, если функции данной системы попарно ортогональны, то есть

$$\int_a^b \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt = \begin{cases} c_i & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (1.5.10)$$

где  $c_n$  - некоторые постоянные.

Если постоянные  $c_n=1$ , система функций  $\{\varphi_i(t)\}$  является *ортонормированной*, выражения для формул упрощаются до вида широко известных формул Фурье, а сами коэффициенты в этом случае называются коэффициентами Фурье (по аналогии с рядом Фурье, члены которого также представляют собой ортонормированные на  $[0,T]$  функции). Если это условие не выполняется, то можно перейти к системе  $\{\frac{\varphi_n(t)}{\sqrt{c_n}}\}$ , которая будет нормальной.

Иногда выбирают функции, ортогональные с некоторым весом  $w(t)$ :

$$\int_a^b \varphi_i(t) \cdot \varphi_j(t) \cdot w(t) dt = \begin{cases} c_i & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (1.5.11)$$

Функция веса выбирается таким образом, чтобы выделить ошибку на интересующем интервале изменения независимой переменной.

Ортогональные функции широко используются при решении задачи аппроксимации. Если система функций  $\{\varphi_i(t)\}$  ортогональна, определитель системы (1.5.9) становится диагональным и формулы для вычисления коэффициентов упрощаются до вида:

$$a_i = \frac{1}{c_i} \int_a^b f(t) \cdot \varphi_i(t) dt. \quad (1.5.12)$$

То есть нет необходимости решать систему (1.5.9) совместно.

Важнейшим примером ортогональной системы является система тригонометрических функций  $\{1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \dots, \cos(nt), \sin(nt), \dots\}$  на промежутке длиной  $2\pi$ .

Система

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2t)}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

является нормальной системой. Эта система на  $[0, \pi]$  не будет ортогональной.

*Ряд Фурье.* Свойство ортогональности тригонометрической системы широко используется при гармоническом анализе сигналов. Как известно, по отношению к довольно широкому классу функций можно данную *периодическую* функцию  $f(t)$  периода  $T$  представить в виде суммы бесконечного множества синусоидальных величин. Геометрически это означает, что график периодической функции получается путем наложения ряда синусоид. Разложение периодической функции на отдельные гармонические колебания (гармоники) называется *гармоническим анализом*. Такое разложение называется рядом Фурье и имеет вид:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt.$$

Коэффициенты этого ряда находятся из критерия аппроксимации:

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(t) - \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \right] \right\}^2 dt \rightarrow \min.$$

Но поскольку тригонометрическая система функций является ортогональной на промежутке длиной  $2\pi$ , можно, не решая задачу минимизации функционала  $S$ , выписать выражения для коэффициентов ряда:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt, \quad k = 1, 2, 3, \dots;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Если функция  $f(t)$  на интервале длиной  $2\pi$  обладает свойством четности или нечетности, то приведенные формулы упрощаются:

- для четной функции:

$$b_k = 0;$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt; \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos ktdt, \quad k = 1, 2, 3, \dots;$$

- для нечетной функции:

$$a_0 = a_k = 0;$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin ktdt, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

*Пример.* Разложить на сумму гармонических составляющих «прямоугольную волну», определяемую следующей функцией:

$$f(t) = \begin{cases} a, & 0 \leq t \leq \pi, \\ -a, & \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Функция является нечетной, поэтому  $a_0 = a_k = 0$ .

Вычислим коэффициенты  $b_k$ :

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} a \sin kt dt = \frac{2a}{\pi k} [-\cos kt] \Big|_0^{\pi} = \frac{2a}{\pi k} [-\cos \pi k + 1] =$$

$$= \frac{2a}{\pi k} [1 - (-1)^k] = \begin{cases} 0, \text{ при четном } k \\ \frac{4a}{\pi k}, \text{ при нечетном } k. \end{cases}$$

Отсюда, разложение Фурье функции  $f(t)$  будет иметь вид:

$$f(t) = \frac{4a}{\pi} \left[ \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \dots \right].$$

Если построить график этого разложения, то можно убедиться, что сумма ряда сходится к первоначальной функции. На рисунке 1.5.1 представлен результирующий график разложения прямоугольной волны в ряд Фурье; на рисунке 1.5.2 – результирующий график (Ряд 1) и составляющие ряда (восемь гармоник – Ряд 2 – Ряд 9).

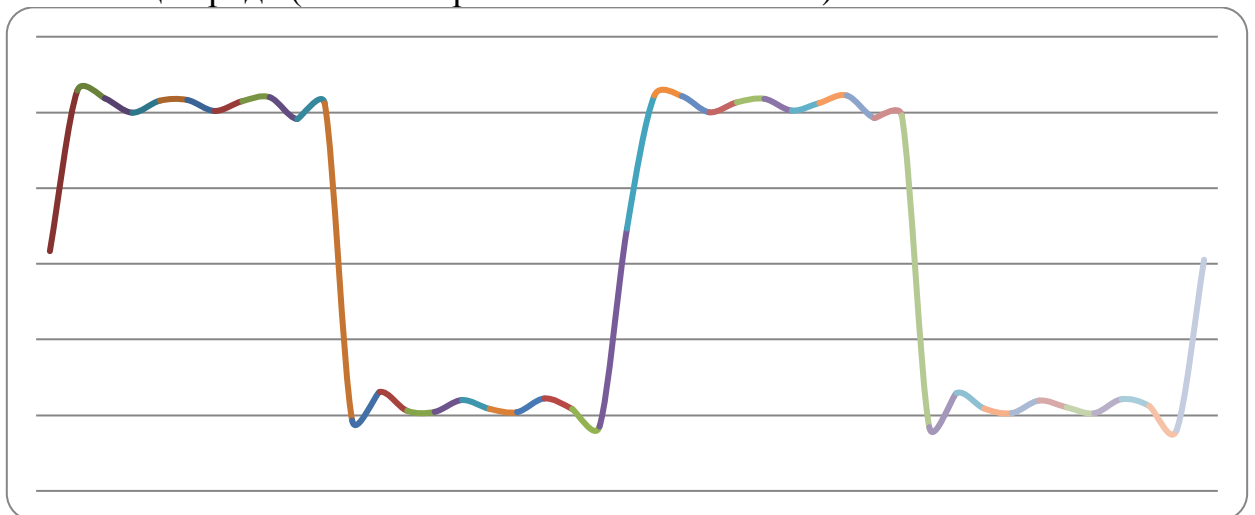


Рисунок 1.5.1– График разложения прямоугольной волны в ряд Фурье

Совокупность коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$  разложения Фурье называют *частотным спектром* периодической функции. Периодические функции однозначно связаны со своими спектрами, то есть имея частотные спектры, можно указать, какой функции они принадлежат. Спектры несут полную информацию о том, какие колебания присутствуют в исследуемом процессе и какова их мощность.

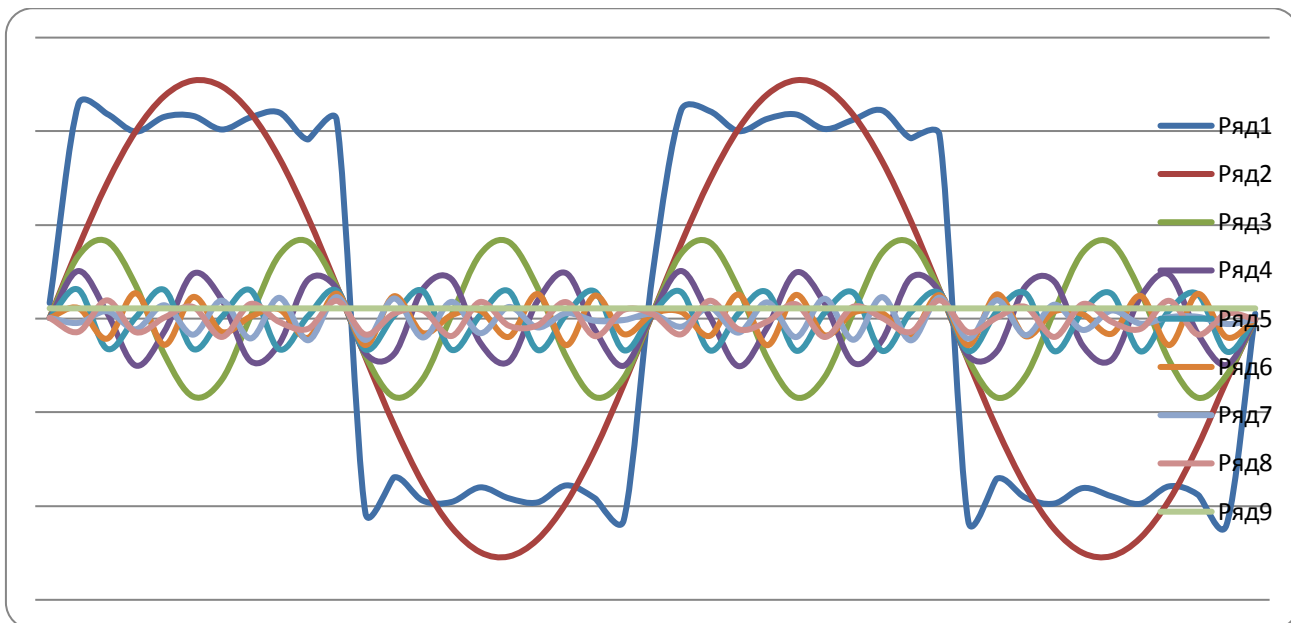


Рисунок 1.5.2– График разложения прямоугольной волны в ряд Фурье и составляющие этого ряда

#### *Разложение в ряд Фурье неперiodической функции.*

В ряд Фурье можно разложить неперiodическую функцию, заданную на интервале длиной  $2\pi$ , и неперiodическую функцию, заданную на интервале  $[0, \pi]$ . Для этого эти функции преобразуются в перiodические путем их соответствующего преобразования вне интервала определения.

В первом случае выполняется перiodическое продолжение функции вне интервала ее определения; к этой функции применяются все соотношения для определения коэффициентов разложения Фурье. В случае задания функции на интервале  $[0, \pi]$  она вначале продолжается четным или нечетным образом на интервал длиной  $2\pi$ , затем выполняется перiodическое продолжение полученной функции и решается задача определения ее ряда Фурье. Надо иметь в виду, что в обоих случаях сумма полученного ряда будет совпадать с заданной функцией только на интервале ее определения; вне этого интервала поведение суммы ряда и заданной функции будет отличаться.

#### 1.5.4 Элементы теории случайных процессов.

Случайная величина  $x$ , изменяющаяся во времени  $t$ , называется *случайным* или *стохастическим* процессом. Случайный процесс не есть определенная кривая  $x(t)$ , а является множеством возможных кривых  $x(t)$ ; так же, как случайная величина не имеет определенного значения, а является совокупностью (множеством) возможных значений. Можно еще сказать, что случайный процесс есть такая функция времени, значение которой в каждый момент времени является случайной величиной.

Итак, в случайном процессе нет определенной зависимости  $x(t)$ . Каждая кривая множества (рисунок 1.5.3) является лишь отдельной

реализацией случайного процесса. Никогда нельзя сказать заранее, по какой кривой пойдет процесс. Однако случайный процесс может быть оценен некоторыми вероятностными характеристиками.

В каждый отдельный момент времени  $t_1, t_2, t_3, \dots$  (рисунок 1.5.3) наблюдаются случайные величины  $x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2)$ , каждая из которых имеет свой закон распределения. Поскольку эти величины являются непрерывными случайными величинами, то надо пользоваться понятием плотности вероятности.

Обозначим  $\omega(x, t)$  закон распределения для всех этих отдельных случайных величин. В общем случае он меняется с течением времени.

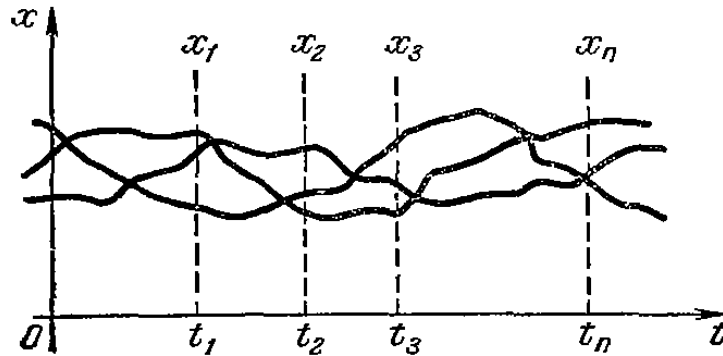


Рисунок 1.5.3 – Реализации случайного процесса

Для каждого данного  $t$  в отдельности ( $t_1, t_2, t_3, \dots$ ) будет свой закон распределения  $\omega(x_1, t_1), \omega(x_2, t_2), \omega(x_3, t_3), \dots$ , причем для каждого из них:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x, t) dx = 1.$$

Для каждого заданного момента времени можно найти характеристики случайных величин. В результате будем иметь среднее по множеству (математическое ожидание):

$$\tilde{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \omega(x, t) dx \quad (1.5.13)$$

и дисперсию

$$D(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \tilde{x}) \cdot \omega(x, t) dx = \overline{x^2(t)} - [\tilde{x}(t)]^2. \quad (1.5.14)$$

Математическое ожидание случайного процесса - неслучайная функция, около которой группируются ее конкретные реализации. Дисперсия случайного процесса - неслучайная функция, характеризующая разброс его реализаций относительно среднего.

Среднее значение случайного процесса представляет собой некоторую среднюю кривую (рисунок 1.5.4), около которой группируются все возможные отдельные реализации этого процесса, а дисперсия  $D(t)$  или



среднеквадратичное отклонение  $\sigma(t)$  характеризуют рассеяние отдельных возможных реализаций процесса около этой средней кривой.

Простейшим типом случайного процесса является чисто случайный процесс. В таком процессе все значения случайной величины в отдельные моменты времени ( $x_1$  в момент  $t_1$ ;  $x_2$  в момент  $t_2$  и т. д.) не зависят друг от друга.

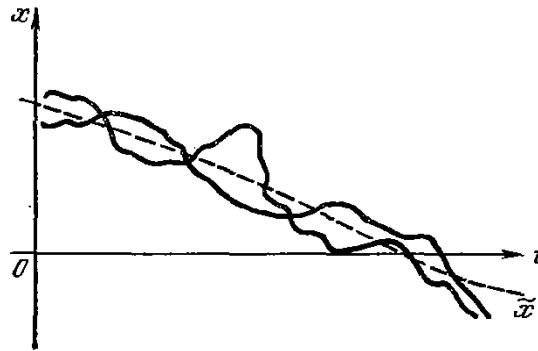


Рисунок 1.5.4 – Среднее значение случайного процесса

*Стационарным случайным процессом* называется такой процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от времени. Все плотности вероятностей  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$  не меняются при любом сдвиге рассматриваемого участка процесса во времени, т.е. при сохранении постоянной разности. Можно сказать, что стационарный случайный процесс в какой-то мере аналогичен обычным стационарным или установившимся процессам в автоматических системах. Например, при рассмотрении обычных установившихся периодических колебаний ничего не изменится, если перенести начало отсчета на какую-либо величину. При этом сохраняют свои значения такие характеристики, как частота, амплитуда, среднеквадратичное значение и т.п.

В стационарном случайном процессе закон распределения один и тот же для каждого момента времени, т. е. плотность вероятности не зависит от времени:  $w(x, t) = \omega(x)$ . Отсюда получаем  $\tilde{x} = const$  и  $\sigma = const$  вдоль всего случайного процесса. Следовательно, в стационарном случайном процессе средняя линия, в отличие от общего случая, будет прямая  $\tilde{x} = const$  (рисунок 1.5.5) подобно постоянному смещению средней линии обычных периодических колебаний. Рассеяние значений переменной  $x$  в стационарном случайном процессе, определяемое  $\sigma = const$ , также будет все время одинаковым, подобно постоянному значению среднеквадратичного отклонения обычных установившихся колебаний от средней линии.

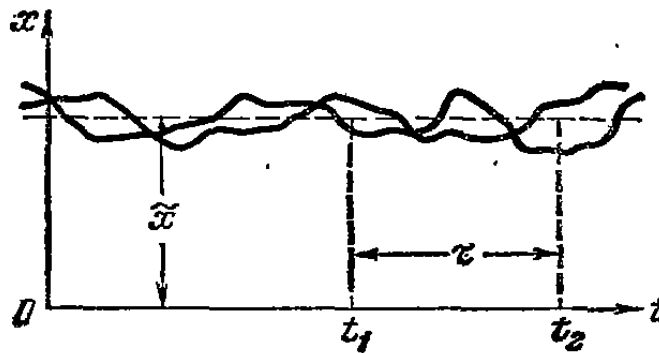


Рисунок 1.5.5 – Среднее значение стационарного случайного процесса

Аналогичным образом и двумерная плотность вероятности также будет одна и та же для одного и того же промежутка времени  $\tau = t_2 - t_1$  между любыми  $t_1$  и  $t_2$ , то есть:

$$\omega_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = \omega_2(x_1, x_2, \tau)$$

и также для  $n$ -мерной плотности вероятности.

Задание всех этих функций распределения плотности определяет случайный процесс. Однако более удобно иметь дело с некоторыми осредненными характеристиками процесса [4].

Итак, характеристики случайных процессов оцениваются путем усреднения по ансамблю реализаций в определенные моменты времени (по сечениям процессов). Но большинство стационарных случайных процессов обладает замечательным свойством, которое известно под названием *эргодической гипотезы*. Сущность его заключается в том, что по одной достаточно длинной реализации процесса можно судить о всех его статистических свойствах так же, как по любому количеству реализаций. Другими словами, закон распределения случайных величин в таком процессе может быть одним и тем же как по сечению для ансамбля реализаций, так и по координате развития. Такие процессы получили название *эргодических процессов*. На практике вопрос об эргодичности процесса решается путем анализа физической природы изучаемого явления. Если, например, удастся установить, что характеристики каждой реализации случайного процесса зависят от влияния какого-либо фактора, можно сразу сделать заключение о неэргодичности изучаемого случайного процесса. Свойства эргодичности могут проявляться только по отношению к двум первым моментам случайного процесса, что вполне достаточно для исследования процессов.

Таким образом, принимаем, что для стационарного случайного процесса с вероятностью, равной единице (т. е. практически достоверно), всякое среднее по множеству равно соответствующему среднему по времени, в частности,  $\tilde{x} = \bar{x}$ ,  $\tilde{x}^2 = \overline{x^2}$  т. д. В самом деле, поскольку вероятностные характеристики стационарного случайного процесса с течением времени не меняются (например,  $\tilde{x} = \text{const}$ ), то длительное наблюдение случайного процесса на одном объекте (среднее по времени) дает в среднем такую

жекартину, как и большое число наблюдений, сделанное в один и тот же момент времени на большом числе одинаковых объектов (среднее по множеству).

Итак, среднее значение (математическое ожидание) для стационарного процесса будет:

$$\tilde{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \omega(x) dx = \bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt.$$

Аналогичным образом могут быть записаны моменты более высоких порядков – дисперсия, среднеквадратичное отклонение и т.п.

Эргодическая гипотеза позволяет сильно упрощать все расчеты и эксперименты. Она позволяет для определения  $\tilde{x}$ ,  $D$ ,  $\sigma$  и т.п., вместо параллельного испытания многих однотипных систем в один и тот же момент времени, пользоваться одной кривой  $x(t)$ , полученной при испытании одной системы в течение длительного времени.

Таким образом, важное свойство стационарного случайного процесса состоит в том, что отдельная его реализация на бесконечном промежутке времени полностью определяет собой весь случайный процесс со всеми бесчисленными возможными его реализациями. Этим свойством не обладает никакой другой тип случайного процесса.

*Корреляционные функции.* Универсальной характеристикой случайного процесса является корреляционная функция. Она характеризует степень сходства между сечением процесса, взятого в момент  $t_j$  и следующего, удаленного от него на расстояние  $\tau_{ij} = (i-j)\Delta$ ,  $\Delta$  – интервал между сечениями.

Начальный корреляционный момент двух значений случайной функции  $x(t)$  и  $x(t_1)$ , взятых в моменты времени  $t$  и  $t_1$ , носит название *корреляционной (автокорреляционной) функции*. Она может быть найдена из выражения:

$$R(t, t_1) = M[x(t)x(t_1)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t_1)\omega_2(x, t; x_1, t_1) dx dx_1,$$

где  $\omega_2(x, t; x_1, t_1)$  – двумерная плотность вероятности.

Иногда под корреляционной функцией понимают центральный корреляционный момент  $x(t)$  и  $x_1(t)$ , то есть:

$$\begin{aligned} R^0(t, t_1) &= M[\{x(t) - \tilde{x}(t)\}\{x(t_1) - \tilde{x}(t_1)\}] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) - \tilde{x}(t)][x(t_1) - \tilde{x}(t_1)] \cdot \omega_2(x, t; x_1, t_1) dx dx_1. \end{aligned}$$

Итак, корреляционной функцией случайного процесса называется неслучайная функция двух аргументов, выраженная через математическое ожидание произведения центрированных случайных процессов при тех же аргументах. В этом случае корреляционная функция может быть представлена в виде суммы:

$$R(t, t_1) = \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_1) + R^0(t, t_1).$$

Она определяет зависимость случайной величины в последующий момент времени  $x(t_1)$  от предшествующего значения  $x(t)$  в момент времени  $t$ . Это есть мера связи между ними.

Рассмотрим основные свойства корреляционных функций.

1. Из определения корреляционной функции следует свойство симметрии:  $R(t, t_1) = R(t_1, t)$  и  $R^0(t, t_1) = R^0(t_1, t)$ .

2. При  $t_1=t$  корреляционная функция  $R(t, t_1)$  дает средний квадрат случайной величины, а  $R^0(t, t_1)$  – дисперсию:

$$R(t, t) = M[x^2(t)] = \tilde{x}^2(t), \quad R^0(t, t) = M[\{x(t) - \tilde{x}(t)\}^2] = D(t).$$

3. Можно показать, что прибавление к случайным величинам произвольных неслучайных величин не меняет их корреляционных моментов и дисперсии. Поэтому корреляционная функция  $R^0(t, t_1)$  не изменится, если к случайной функции добавить произвольную неслучайную функцию. Это свойство не относится к функции  $R(t, t_1)$ , так как добавление неслучайных величин к случайным величинам изменяет начальные моменты. В этом случае корреляционная функция будет равна сумме корреляционных функций случайной и неслучайной функций.

Иногда в рассмотрение вводится *нормированная* корреляционная функция:

$$\rho(t, t_1) = \frac{R^0(t, t_1)}{\sqrt{D(t)D(t_1)}}.$$

Аналогично корреляционной функции можно ввести понятие *взаимной корреляционной функции* для двух случайных величин  $x(t)$  и  $y(t)$ :

$$R(t, t_1) = M[x(t)y(t_1)];$$

$$R^0(t, t_1) = M[\{x(t) - \tilde{x}(t)\}\{y(t_1) - \tilde{y}(t_1)\}]$$

Она характеризует степень сходства  $i$ -го сечения одного случайного процесса с различными сечениями другого случайного процесса.

В случае тождественного равенства нулю взаимной корреляционной функции случайные функции  $x(t)$  и  $y(t)$  называют некоррелированными. Если взаимная корреляционная функция отлична от нуля, то  $x(t)$  и  $y(t)$  носят название коррелированных случайных функций.

В случае стационарности процесса корреляционные функции  $R(t, t_1)$  и  $R^0(t, t_1)$  не будут зависеть от текущего значения времени  $t$  и будут определяться только временным сдвигом  $\tau = t_1 - t$ .

С учетом эргодичности стационарного процесса корреляционной функцией можно назвать среднее по времени от произведения  $x(t)$  и  $x(t + \tau)$  или  $\overline{x(t) - \bar{x}}$  и  $\overline{x(t + \tau) - \bar{x}}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} R(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt; \\ R^0(\tau) = \overline{[x(t) - \bar{x}][x(t+\tau) - \bar{x}]} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - \bar{x}][x(t+\tau) - \bar{x}] dt. \end{array} \right. \quad (1.5.15)$$

Для стационарного процесса корреляционная функция определяет зависимость случайной величины  $x$  в последующий момент времени  $t + \tau$  от предшествующего значения в момент  $t$ .

Основные свойства корреляционной функции стационарного процесса применительно к величине  $R(\tau)$ .

1. Корреляционная функция является четной функцией, т. е.  $R(-\tau) = R(\tau)$ . Это вытекает из самого определения корреляционной функции.

2. При  $\tau = 0$  корреляционная функция дает средний квадрат случайной величины:

$$R(0) = \overline{x(t)x(t)} = \overline{x^2}.$$

3. При  $\tau \rightarrow \infty$  корреляционная функция дает квадрат среднего значения случайной величины. Действительно, на основании эргодической гипотезы:

$$R(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 \omega_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2.$$

При  $\tau \rightarrow \infty$  величины  $x_1$  и  $x_2$  можно считать независимыми. Отсюда получим:

$$R(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \omega(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 \omega(x_2) dx_2 = (\bar{x})^2 = (\bar{x})^2.$$

4. Значение корреляционной функции при  $\tau = 0$  является ее наибольшим значением, т. е. имеет место неравенство  $R(0) \geq R(\tau)$ . В самом деле, из очевидного неравенства

$$[x(t) - x(t+\tau)]^2 \geq 0$$

имеем

$$[x^2(t) + x^2(t+\tau)]^2 \geq 2x(t)x(t+\tau).$$

Возьмем теперь среднее по времени от правой и левой частей. В результате получим:

$$\overline{x^2(t) + x^2(t+\tau)} = \overline{2x^2} = 2R(0), \quad \overline{2x(t)x(t+\tau)} = 2R(\tau),$$

откуда и вытекает следующее неравенство:  $R(0) \geq R(\tau)$ .

5. Значение корреляционной функции чаще всего будет тем меньше, чем больше промежутки времени  $\tau$ , так как связь между далеко отстоящими друг от друга значениями  $x$  будет обычно слабее.

6. Чем меньше инерция объекта наблюдения (он более подвижен), тем быстрее убывает  $R(\tau)$  с увеличением  $\tau$ .

Корреляционную функцию можно найти на основании экспериментально снятой кривой случайного процесса при наличии достаточно длительной записи. Обработка имеющейся осциллограммы производится следующим образом. Весь интервал записи осциллограммы  $T$  делится на  $N$  равных частей, длительность которых составляет:

$$\Delta t = \frac{T}{N}.$$

Затем для различных значений  $\tau = m \cdot \Delta t$  находятся средние значения произведений ординат:

$$R(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=1}^{N-m} x_n x_{n+m}.$$

По этим значениям строится график корреляционной функции в зависимости от интервала  $m$  и времени  $\tau = m\Delta t$ .

Ввиду того, что объем измерений ограничен вместо выражений для корреляционных функций (1.5.15) и аналогичных выражений для взаимно корреляционных функций используют их оценки:

$$R_{xx} \approx \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot x(t + \tau) dt;$$

$$R_{yx} \approx \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \cdot x(t + \tau) dt,$$

где  $0 \leq \tau \leq T_R$ ,  $T_R$  – период времени, который определяется из условия, что при  $\tau > T_R$  корреляционная функция не выходит из заданного (обычно 5%) коридора:

$$|R(\tau)| \leq 0.05 R_{\max}$$

(корреляцию  $< 5\%$  естественно считать несущественной).

### 1.5.5 Упражнения для самостоятельного выполнения.

1. Получите изображения следующих функций:

–  $x(t) = \sin(\omega t); x(t) = \cos(\omega t);$

–  $x(t) = e^t;$

–  $x(t) = \sin(t - \alpha), \alpha > 0; x(t) = \cos(t - \alpha) / \alpha > 0.$

2. Определите оригиналы следующих функций:

–  $X(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)(s+3)};$

$$-X(s) = \frac{5}{s^2 + s + 1};$$

$$-X(s) = \frac{2}{s^2 + 7s + 12};$$

$$-X(s) = \frac{4}{(s+2)^2(s+5)};$$

$$-X(s) = \frac{2}{s^2 + 7s + 12};$$

$$-X(s) = \frac{2}{(s+2)^2(s+5)}.$$

3. Найдите операторным методом решения  $x(t)$  следующих дифференциальных уравнений:

$$-x'(t) + x(t) = f'(t) + 2f(t), x(0) = 0, f(t) = 1(t);$$

$$-x''(t) + 5x'(t) + 6 \cdot x(t) = f(t), x(0) = 3, x'(0) = 2, f(t) = 1(t);$$

$$-x''(t) + 9x'(t) + 14 \cdot x(t) = 3e^{-4t} + 5, x(0) = -2, x'(0) = 2;$$

$$-x''(t) + 6x'(t) + 5 \cdot x(t) = -3e^{-5t} + 2, x(0) = 3, x'(0) = -1;$$

$$-x''(t) + 4x'(t) + 3 \cdot x(t) = 5e^{-5t}, x(0) = 2, x'(0) = 1;$$

$$-x''(t) + 7x'(t) + 6 \cdot x(t) = 2e^{-t}, x(0) = 3, x'(0) = 1;$$

$$-x''(t) + 10x'(t) + 21 \cdot x(t) = 5e^{-7t}, x(0) = -3, x'(0) = 1.$$

4. Определите реакцию системы с передаточной функцией  $W(s)$  на заданное входное воздействие  $u(t)$ :

$$-W(s) = \frac{100}{s^2 + 7s + 10}, u(t) = 5te^{-3t};$$

$$-W(s) = \frac{5}{s^2 + 9s + 16}, u(t) = 2 \cdot 1(t);$$

$$-W(s) = \frac{10}{s^2 + 10s + 21}, u(t) = 1(t);$$

$$-W(s) = \frac{15}{s^2 + 6s + 8}, u(t) = 3 \cdot 1(t);$$

$$-W(s) = \frac{10}{s^2 + 10s + 24}, u(t) = 2 \cdot e^{-4t} + 5;$$

$$-W(s) = \frac{5}{s \cdot (s^2 + 5s + 4)}, u(t) = 5 \cdot e^{-t}.$$

5. Найти решения следующих дифференциальных уравнений первого порядка и второго порядков при заданных начальных условиях методами Эйлера и Рунге-Кутты; найти аналитическое решение этих уравнений; построить графики аналитического и численных решений и оценить точность приближенных решений:

$$- y' - \frac{2ty}{t^2 + 3} = (t^2 + 3)\cos(t), y(0) = 1;$$

$$- y' - \frac{2ty}{t^2 + 3} = (t^2 + 3)\cos(t), y(0) = 1;$$

$$- \frac{1}{t}y' + y - 1 = 0, y(0) = 1;$$

$$- 3 \cdot y^2 \cdot y' - 2 \cdot t = 0, y(0) = 1;$$

$$- \frac{y'}{y} + 2t = 0, y(0) = 2;$$

$$- y^3 \sqrt{t^2 + 1} dy - t \cdot \sqrt[5]{t^4 + 1} dt = 0, y(0) = 0.$$

6. Найти решения следующих дифференциальных уравнений второго порядков при заданных начальных условиях методами Эйлера и Рунге-Кутты:

$$- y'' - 9y' + 14 = 0, y(0) = 1, y'(0) = -3;$$

$$- y'' + 17y' = 0, y(0) = 0, y'(0) = -17;$$

$$- y'' + 2y' + y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2;$$

$$- y'' + 4y' + 13y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1;$$

$$- y'' + 4y = \cos(t), y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

7. Разложить в ряд Фурье следующие непериодические функции, заданные на указанном интервале:

$$- f(t) = |t|, \text{ на } [-\pi, \pi];$$

$$- f(t) = t \text{ на } [0, \pi];$$

$$- f(t) = t^2 \text{ на } [0, \pi].$$

## 1.6 Математическое описание объектов управления

### 1.6.1 Основные операторы моделей объектов управления.

Объект управления способен воспринимать внешние воздействия и реагировать на них изменением значений выходных величин. Описание объекта управления в теории автоматического управления состоит в выражении связи реакции объекта, как функции времени и ее причин, входных воздействий. Эта связь может быть представлена аналитически или в виде аналоговой виртуальной модели.

Таким образом, математическая модель объекта характеризует зависимость, связывающую изменение во времени выходной величины  $y(t)$  с соответствующим изменением входной величины  $x(t)$ . Совокупность действий, которые нужно произвести, чтобы по данной входной функции  $x(t)$  определить соответствующую функцию выходной величины  $y(t)$ ,



называется оператором<sup>1</sup> системы. Символически соответствие между функцией входной величины  $x(t)$  и функцией выходной величины  $y(t)$  записывается в виде:

$$y(t) = A\{x(t)\},$$

где  $A$  – оператор объекта.

Существуют различные способы задания оператора объекта.

Математическая модель (образ) представляет собой абстрактное отражение реального объекта (оригинала, прообраза). В зависимости от типа объекта и целей, ради которых строится и используется модель, формальное описание может быть различным. Для моделирования объектов могут быть использованы структурные схемы, операторные уравнения, алгебраические уравнения, дифференциальные, интегральные и интегро-дифференциальные уравнения, Марковские цепи, передаточные функции, частотные характеристики, весовые функции, графы и т. д. Все эти методы функционально связывают входные и выходные сигналы объекта. По количеству входов и выходов объекты и соответствующие им модели разделяют на одномерные и многомерные. Одномерными называют объекты, имеющие один вход и один выход, многомерными – объекты, имеющие несколько входов и выходов, причем число входов не обязательно равно числу выходов.

Наиболее общей формой представления оператора является определение его системой дифференциальных уравнений, описывающих поведение рассматриваемого объекта. Будем рассматривать только объекты с сосредоточенными параметрами, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Порядок системы дифференциальных уравнений, описывающей модель объекта, непосредственно не определяется количеством входов и выходов, а зависит от операторов, преобразующих входные сигналы в выходные.

Наиболее универсальная модель, основанная на дифференциальных уравнениях, имеет вид:

$$a_p \frac{d^p y}{dt^p} + a_{p-1} \frac{d^{p-1} y}{dt^{p-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_l \frac{d^l x}{dt^l} + b_{l-1} \frac{d^{l-1} x}{dt^{l-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \quad (1.6.1)$$

где  $p$  - порядок модели ( $p > l$ );  $a_p = 1$ ;

$a_i$  и  $b_j$  - постоянные коэффициенты (параметры модели);

$y(t), x(t)$  - выходной и входной сигналы соответственно.

В линейном случае коэффициенты  $a_i$  и  $b_j$  не зависят от  $x$  и  $y$  и их производных. Если они не зависят также и от времени, то получается уравнение с *постоянными коэффициентами*. Если эти коэффициенты зависят от времени, то уравнение называется *линейным уравнением с переменными коэффициентами*.

<sup>1</sup> В математике оператор является обобщением понятия функции. Функция определяет соответствие между числами, оператор определяет соответствие между функциями.

Для описания динамики объектов, которые характеризуются дискретными значениями входных и выходных сигналов, то есть функционирование которых представляется для дискретного времени  $t_k = kT$  (в данном случае  $T$  – интервал дискретизации), вместо дифференциальных уравнений можно воспользоваться разностными уравнениями. Обозначив дискретные значения входного и выходного сигналов соответственно:

$$x_{k-j} = x(k-j), \quad y_{k-j} = y(k-j),$$

разностное уравнение (аналог дифференциального уравнения) запишем в виде:

$$\begin{aligned} y_k + a_1 \cdot y_{k-1} + \dots + a_p \cdot y_{k-p} = \\ = b_1 \cdot x_k + b_2 \cdot x_{k-1} + b_3 \cdot x_{k-2} + \dots + b_l \cdot x_{k-l+1}. \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

На практике в большинстве случаев измерение непрерывных сигналов производится в дискретные моменты времени, что представляет определенное удобство при последующей обработке данных на компьютере. Непрерывные объекты можно приближенно отображать дискретными моделями. При этом для перехода от непрерывных моделей к дискретным применяется либо Z-преобразование, либо замена производных в дифференциальном уравнении, описывающем непрерывный объект, конечными разностями (этот подход дает приемлемую точность только при малых интервалах дискретизации и небольшом порядке уравнения).

Применяя преобразование Лапласа к линейным дифференциальным уравнениям при нулевых начальных условиях, получим *передаточные функции* объекта. Напомним, что передаточной функцией линейного стационарного динамического объекта называется отношение преобразования Лапласа выходного сигнала (регулируемого) к преобразованию Лапласа входного сигнала (задающего) при нулевых начальных условиях и равных нулю остальных воздействиях. Передаточная функция для линейных и линеаризованных систем является еще одной формой представления их математических моделей.

Динамические характеристики объекта управления могут быть определены с помощью *частотных характеристик* (амплитудной и фазовой), построенных в зависимости от круговой частоты. В отличие от методов, основанных на решении дифференциальных уравнений, частотный метод является не только расчетным, но и экспериментальным. Подавая на вход объекта синусоидальные сигналы с постоянной амплитудой, находят относительную амплитуду выходного сигнала и сдвиг фазы. Меняя частоту входного сигнала, определяют несколько значений относительных амплитуд (амплитудная частотная характеристика) и сдвигов фаз (фазовая частотная характеристика).

Амплитуду и диапазон изменения частоты синусоидального входного сигнала выбирают в зависимости от динамических особенностей объекта. Для того чтобы установить диапазон линейности объекта, необходимо

снимать частотные характеристики при различных амплитудах входного сигнала. Независимость амплитудной и фазовой частотных характеристик от амплитуды входного сигнала указывает на линейность рассматриваемого объекта.

*Переходная* (реакция объекта на ступенчатое воздействие) и *импульсная переходная* (реакция объекта на дельта-функцию) функции также являются динамическими характеристиками объекта. Зная эти функции, можно получить передаточную функцию объекта.

Наиболее полно объект управления описывается в терминах *пространства состояний*. Под состоянием объекта понимается совокупность величин  $x_i$ , полностью определяющих его положение в данный момент времени. Для динамических систем, в которых физические процессы протекают непрерывно во времени, скорости изменения переменной состояния объекта можно также задать вектором:

$$\frac{dx}{dt} = \left( \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right),$$

где  $\frac{dx_i}{dt}$ ,  $i = 1, \dots, n$  – скорости изменения компонент многомерной переменной состояния.

В свою очередь, эти скорости определяются текущими значениями переменной состояния  $\bar{x}$ , управлениями  $\bar{u}$  и возмущениями  $\bar{f}$ , действующими на объект:

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i(\bar{x}, \bar{u}, \bar{f}, t), \quad x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.6.3)$$

где

$\bar{g} = (g_1, \dots, g_n)$  - вектор-функция;

$x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ , - начальные условия.

Если  $\bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{f}, t)$  – нелинейная функция, то решение уравнения (1.6.3) усложняется, так как сводится к интегрированию системы нелинейных дифференциальных уравнений. Так как методы интегрирования систем таких разработаны только для линейных систем, то перед работой с ними необходимо линеаризовать функцию  $\bar{g}$  в окрестности рабочей точки, которой соответствует установившейся режим работы объекта.

Для линеаризованной функции  $\bar{g}$  дифференциальные уравнения вида (1.6.3) с учетом воздействия среды можно представить в векторной форме:

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t) + E(t)\bar{e}(t), \quad (1.6.4)$$

где  $A(t), B(t), E(t)$  – матрицы преобразования, элементы которых в общем случае являются функциями времени.

Элементы  $x_i$  в уравнении (1.6.4) называются *переменными состояниями* объекта или *фазовыми координатами*. Переменные состояния  $\bar{x}$  (фазовые координаты) образуют вектор состояния, переменные управления  $\bar{u}$  и возмущения  $\bar{f}$  образуют векторы управления и возмущения. Множество этих векторов составляет пространство состояний  $\bar{X}$  (фазовое пространство), пространство управлений  $\bar{U}$  и возмущений  $\bar{F}$ .

Во многих физических объектах регулируются, измеряются и передаются по информационным каналам не значения вектора состояния  $\bar{x}$ , а другие значения – функции составляющих вектора фазовых координат, называемые управляемыми или выходными величинами. Обозначим измеряемые величины через  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_s(t)$ , причем, обычно  $s \leq n$ . Тогда уравнение измерения, связывающее регулируемые и фазовые координаты объекта, примет вид:

$$\bar{y}(t) = \Phi[\bar{x}(t)]. \quad (1.6.5)$$

Для линейного объекта это соотношение линейное:

$$\bar{y}(t) = C(t)\bar{x}(t). \quad (1.6.6)$$

Матрица  $C(t)$  называется *матрицей измерения*. Она показывает, как изменяются значения вектора состояний при измерении. При измерениях, описываемых выражениями (1.6.5) и (1.6.6), вектором выходных сигналов (или просто вектором выхода) является вектор  $\bar{y}(t)$ .

Отметим, что между векторами входа, выхода и состояния существует принципиальное различие. Если все составляющие вектора входа и вектора выхода являются вполне конкретными физическими величинами, то элементами вектора состояния могут быть некоторые абстрактные переменные, физическая природа которых не всегда определена. Векторно-матричная запись модели линейного динамического объекта с учетом уравнения измерения принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}(t)}{dt} &= A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t) + E(t)\bar{e}(t); \\ \bar{y}(t) &= C(t)\bar{x}(t). \end{aligned}$$

Если матрицы  $A(t)$ ,  $B(t)$  и  $C(t)$  не зависят от времени, то объект называется объектом с постоянными коэффициентами, или стационарным объектом. В противном случае объект будет нестационарным.

Чтобы перейти от модели в виде дифференциального уравнения к модели в пространстве состояний уравнение (1.6.1) запишем в виде системы дифференциальных уравнений, вводя обозначения:

$$y_1 = y, y_2 = y^{(1)}, y_3 = y^{(2)}, \dots, y_k = y^{(k-1)}.$$

Тогда уравнение в виде системы запишется следующим образом:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots\dots\dots \\ y_{k-1}' = y_k \\ \dots\dots\dots \\ y_p' = -\sum_{i=0}^{p-1} a_i y_{i+1} + \sum_{j=0}^l b_j x^{(j)}. \end{cases} \quad (1.6.7)$$

(1.6.1) сводится к (1.6.7), но (1.6.7) в общем случае не сводится к (1.6.1).

Перепишем систему в обобщенной форме:

$$\begin{cases} y_k' = \sum_i a_{ki} y_i + \sum_j b_{kj} \cdot x^{(j)}, \\ y_p' = \sum_i a_{pi} y_{i+1} + \sum_j b_{pj} \cdot x^{(j)}. \end{cases}$$

Тогда векторная форма оператора модели:

$$\dot{Y} = A \cdot Y + B \cdot X',$$

где

$Y = (y_1, \dots, y_p)$  – вектор состояний,

$X' = (x, x^{(1)}, \dots, x^{(l)})$  – вектор возмущений,

$A$  – квадратная матрица коэффициентов,

$B$  – прямоугольная матрица коэффициентов.

Эта система представляет собой уравнения для переменных состояния, в которой в качестве переменных состояния объекта выбраны  $n$  координат (выходной сигнал  $y(t)$  и  $n-1$  его производных).

### 1.6.2 Линеаризация уравнений.

Многие механические и электрические элементы в достаточно широком диапазоне изменения переменных можно считать линейными. Этого нельзя сказать о тепловых и гидравлических элементах, которые чаще всего по принципу своего действия оказываются нелинейными.

Конечной целью моделирования динамики процессов является использование моделей в системах управления для определения динамических характеристик, следовательно, любым способом надо найти решение уравнений. Поэтому дифференциальные и разностные уравнения, образующие математическую модель объекта управления, выводятся на основе различных упрощающих предположений. Линейные дифференциальные уравнения решаются сравнительно легко. Однако не всегда возможно описать поведение объекта линейным уравнением. Поэтому применяется аппроксимация нелинейных связей в заданном диапазоне аргументов линейными соотношениями. Другими словами, в заданном диапазоне входных аргументов нелинейные уравнения заменяются

линейными – *линеаризуются*. В линейных объектах связи входных и выходных сигналов легко описываются с помощью передаточной функции. Такая идеализация значительно упрощает процесс построения модели. Например, *линеаризация* дифференциальных и разностных уравнений приводит к *линейным динамическим* моделям, математический аппарат которых разработан наиболее полно. В результате решения таких уравнений получаются характеристики переходного процесса, зависящие от времени и параметров объекта.

Нелинейные элементы часто удается линеаризовать при условии малых отклонений сигналов от их стационарных значений. Пусть некоторый элемент характеризуется входными величинами  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$ , выходной  $y(t)$  и внешним воздействием  $f(t)$ . Динамическое уравнение элемента имеет произвольный нелинейный вид:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m, x_1', x_2', \dots, x_m', \dots, x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, \dots, x_m^{(l)}, y, y', \dots, y^{(n)}) = \varphi(f, f', \dots, f^{(l)}). \quad (1.6.8)$$

Допустим, что установившийся процесс имеет место при некоторых постоянных  $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \dots, x_n = x_n^0, y = y_0, f = f_0$ . Тогда уравнение установившегося состояния согласно (1.5.4) будет:

$$F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, 0, 0, \dots, 0, y_0, 0, \dots, 0) = \varphi(f^0, 0', \dots, 0). \quad (1.6.9)$$

В основе линеаризации нелинейных уравнений лежит предположение о том, что в исследуемом динамическом процессе переменные  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t), y(t)$  изменяются так, что их отклонения от установившихся значений  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_0)$  остаются все время достаточно малыми.

Обозначим указанные отклонения:

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m, \Delta x_1', \dots, \Delta x_m', \Delta y, \Delta y', \dots$$

Тогда в динамическом процессе:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1^0 + \Delta x_1(t), x_1' = \Delta x_1', x_2(t) = x_2^0 + \Delta x_2(t), x_2' = \Delta x_2', \dots, \\ y(t) &= y^0 + \Delta y(t), y'(t) = \Delta y', \dots \end{aligned}$$

Условие достаточной малости динамических отклонений переменных от некоторых установившихся значений для системы автоматического регулирования обычно выполняется. Этого требует сама идея работы замкнутой автоматической системы.

Внешнее воздействие  $f(t)$  не зависит от работы автоматической системы, изменение его может быть произвольным, и поэтому правая часть уравнения (1.6.8) обычно линеаризации не подлежит (в отдельных случаях ее тоже можно линеаризовать).

Линеаризация обычно проводится путем разложения нелинейных зависимостей в ряд Тейлора в окрестности исходного стационарного режима с сохранением только линейных частей разложения и последующим вычитанием уравнений статики. С помощью этой процедуры получают

уравнения модели не относительно ее переменных, а отклонений переменных от исходного стационарного режима. Такое преобразование дает возможность легко применить преобразования Лапласа для записи модели объекта в виде передаточных функций.

Разложим функцию  $F$  в ряд по степеням указанных выше малых отклонений, рассматривая все производные как самостоятельные переменные (ряд Тейлора), и запишем уравнение (1.6.8) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, 0, \dots, 0, y, 0, \dots, 0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^0 \Delta x_2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_m}\right)^0 \Delta x_m + \\
 & + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1'}\right)^0 \Delta x_1' + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_m'}\right)^0 \Delta x_m' + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^0 \Delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^0 \Delta y' + \left(\frac{\partial F}{\partial y_n'}\right)^0 \Delta y_n' + \dots + \quad (1.6.10) \\
 & + (\text{члены высшего порядка малости}) = \varphi(f, f', \dots, f^{(l)}).
 \end{aligned}$$

Здесь частные производные с индексом «0» обозначают значение соответствующих производных в точке установившегося состояния, то есть в полученном уравнении все частные производные будут некоторыми постоянными коэффициентами (они будут переменными во времени, если функция  $F$  содержит  $t$  в явном виде или если установившийся процесс определяется переменными значениями).

Члены высшего порядка малости в уравнении (1.6.10) состоят из произведений и степеней малых отклонений  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta y, \dots$  с коэффициентами в виде смешанных частных производных и частных производных второго и высших порядков от функции  $F$  по всем переменным.

Вычтя из уравнения (1.6.10) почленно уравнение установившегося состояния (1.6.9) и отбросив члены высшего порядка малости, получим искомое линеаризованное уравнение динамики в виде:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^0 \Delta x_2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_m}\right)^0 \Delta x_m + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1'}\right)^0 \Delta x_1' + \dots \\
 & + \left(\frac{\partial F}{\partial x_m'}\right)^0 \Delta x_m' + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^0 \Delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^0 \Delta y' + \left(\frac{\partial F}{\partial y_n'}\right)^0 \Delta y_n' + \dots + \quad (1.6.11) \\
 & = \varphi(f, f', \dots, f^{(l)}) - \varphi(f^0, 0)
 \end{aligned}$$

Это дифференциальное уравнение также, как и уравнение (1.6.8), описывает тот же динамический процесс. Отличие этого уравнения от первоначального в следующем:

- неизвестными функциями времени в этом уравнении являются не прежние величины  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t), y(t)$ , а их отклонения  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m, \Delta y$  от некоторых установившихся значений  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_0)$ ;

- полученное уравнение является линейным относительно отклонений переменных  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m, \Delta x_1', \dots, \Delta x_m', \Delta y, \Delta y', \dots$ ;

- это уравнение является более приближенным, так как в процессе его вывода были отброшены малые высшего порядка

Уравнение (1.6.11) называется дифференциальным уравнением в отклонениях.

Рассмотрим геометрическую трактовку процедуры линеаризации на примере элемента с одним входом  $x(t)$  и одним выходом  $y(t)$ . Связь между переменными определяется уравнением:

$$y(t) = g[x(t)],$$

где  $g[x(t)]$  показывает, что  $y(t)$  является функцией  $x(t)$ .

Обозначим координату установившегося состояния через  $x_0$ . Раскладываем функцию в окрестности этой точки в ряд Тейлора:

$$y = g(x) = g(x_0) + \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_0} \frac{(x-x_0)}{1!} + \left. \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x=x_0} \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots$$

Значение производной  $\left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_0}$  характеризует наклон касательной к кривой функции  $y = g(x)$  в рабочей точке  $x_0$ . Эта касательная может служить хорошей аппроксимацией исходной кривой в случае малых значений  $(x-x_0)$ , то есть отклонения от рабочей точки. В таком предположении можно записать:

$$y = g(x_0) + \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_0} \frac{(x-x_0)}{1!} = y_0 + m(x-x_0),$$

где  $m$  есть тангенс угла наклона касательной к кривой в рабочей точке.

Окончательно уравнение можно записать в виде:

$$(y - y_0) = m(x - x_0) \quad \text{или} \quad \Delta y = m \Delta x.$$

Таким образом, линеаризация уравнения геометрически может трактоваться как замена первоначальной кривой на касательную к ней прямую. Эта замена тем точнее, чем меньшие величины отклонения  $\Delta x$  возникают в исследуемом динамическом процессе (основная предпосылка для линеаризации). Границы отклонений  $\Delta x$ , для которых допустима линеаризация, тем шире, чем ближе кривая к своей касательной. Последним обстоятельством и определяются практически в каждой задаче те границы, внутри которых отклонениям можно считать «достаточно малыми».

В ряде задач отличие от линейности бывает столь незначительным, что даже в сравнительно большом диапазоне отклонений  $\Delta x$  можно считать систему линейной. В случае же ярко выраженной нелинейной зависимости линеаризация будет справедлива лишь на соответствующем более узком участке отклонений  $\Delta x$ . Линеаризация может быть совершенно недопустимой при скачкообразных зависимостях. Такого рода зависимости называются существенно нелинейными.

Из геометрической трактовки вытекает более упрощенный метод линеаризации, часто используемый на практике: с самого начала все криволинейные зависимости, используемые при составлении уравнений, заменяются прямолинейными (по касательной в соответствующей точке кривой). Тогда уравнение сразу получается линейным.



Итак, всегда надо помнить, что линейные модели объекта, полученные с помощью процедуры линеаризации, справедливы лишь при малых отклонениях от исходного стационарного режима.

1.6.3 Примеры использования системы MatLab для создания и анализа моделей объектов управления.

Система MatLab выделяется среди систем компьютерного моделирования. Она является одной из старейших систем автоматизации математических расчетов и построена на расширенном представлении и применении матричных операций, что нашло отражение в названии системы – MATrix LABoratory (матричная лаборатория). Основные сведения о работе в этой системе можно найти в [5]. Здесь и далее будем рассматривать инструментарию, которые используются для задач моделирования и идентификации объектов управления.

1.6.3.1 Пакет исследования линейных стационарных систем.

Пакет *Control System Toolbox* системы MatLab используется для исследования линейных стационарных систем. Пакет реализует методы исследования динамических систем, основанные на использовании передаточных функций и моделей переменных состояния. Ввод модели в среду пакета возможен в трех формах – в форме матриц пространства состояния, в виде коэффициентов числителей и знаменателей передаточных функций и в форме задания нулей, полюсов и коэффициента передачи системы. Надо отметить, что здесь линейные, инвариантные во времени системы с постоянными параметрами (в русском варианте ЛСС - линейные стационарные системы) названы *LTI-объектами* (Linear Time Invariant).

Некоторые процедуры создания LTI -моделей:

- *tf* - создает модель по заданным передаточным функциям системы;
- *ss* - создает модель пространства состояния по заданным матрицам уравнений состояния системы;
- *dss* - создает аналогичную модель по описанию пространства состояния более общего вида, когда уравнения переменных состояния не разрешены относительно производных;
- *zpk*- создает модель по заданным нулям, полюсам и коэффициентам передачи системы;
- *filt* - создает модель по дискретным передаточным функциям, записанным в форме полиномов от  $z^{-1}$ ;
- *set* - присваивает значения некоторым другим полям объектов (названиям входов и выходов, названиям системы и т.д.).

Указанные процедуры позволяют создавать как непрерывные, так и дискретные модели. Кроме этого, существует инструментарий преобразования моделей из одной указанной формы в другую.

Передаточная функция в командном окне MatLab вводится в виде отношения двух многочленов (полиномов) от комплексной переменной  $s$ . Полиномы хранятся как массивы коэффициентов, записанных по убыванию степеней. Например, передаточная функция

$$F(s) = \frac{2s + 4}{s^3 + 1.5s^2 + 1.5s + 1}$$

вводится следующим образом (команды пользователя вводятся после приглашения системы >>; ниже строки команды – реакция MatLab):

```
>>num = [2 4]
n =
2 4
>>den = [1 1.5 1.5 1]
d =
1.0000 1.5000 1.5000 1.0000
>> model1_tf = tf( n, d )
Transfer function:
      2 s + 4
-----
s^3 + 1.5 s^2 + 1.5 s + 1
```

или сразу, без предварительного построения числителя и знаменателя:

```
>>model_1_tf = tf ( [2 4], [1 1.5 1.5 1] );
```

В памяти создается объект класса *tf*, описывающий передаточную функцию. Точка с запятой в конце команды подавляет вывод на экран.

Для преобразования передаточной функции в модель в пространстве состояний используется команда *ss*:

```
>> model_2_ss = ss (model_1_tf )
a =
x1  x2  x3
x1  -1.5 -0.1875 -0.03125
x2   8    0    0
x3   0    4    0

b =
      u1
x1  0.5
x2  0
x3  0

c =
x1  x2  x3
y1  0  0.5  0.25
d =
      u1
y1  0
```

Это означает, что матрицы модели имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} -1.5 & -0.1875 & -0.03125 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C = [0 \ 0.5 \ 0.25]; D = 0.$$

Модель в пространстве состояний можно построить не для всех передаточных функций, а только для *правильных*, у которых степень числителя не выше, чем степень знаменателя.

Преобразование непрерывной модели в дискретную выполняется командой *c2d* (continuoustodiscrete):

```
>>model_3_disc=c2d(model1_tf, 0.01),
```

здесь 0.01 – шаг дискретизации,

и обратно в непрерывную - командой *d2c*(discretecontinuous):

```
>>model_4_cont=d2c(model1_tf).
```

Удобным средством просмотра временных и частотных характеристик модели является интерактивный обозреватель *LTI-Viewer*.

Для вызова графического интерфейса из командного окна используется функция *ltiview*, при этом на экране появляется рабочее окно обозревателя. Для обмена данными между рабочими средами MatLab и LTI-Viewer используются команды меню окна обозревателя *File/Import* и *File/Export*. После загрузки модели в окне обозревателя отобразится график переходной функции модели. С помощью обозревателя легко вычисляются и отображаются в виде графиков и диаграмм частотные и временные характеристики, нули и полюсы системы.

### 1.6.3.2 Вычисления в командном окне MatLab.

Любые (подчас весьма сложные) вычисления можно выполнять в режиме *прямых вычислений* (в командном режиме), то есть без подготовки программы. Это превращает MatLab в необычайно мощный научный калькулятор, который способен производить не только обычные для калькуляторов вычисления, но и операции с векторами, матрицами, комплексными числами, рядами и полиномами. Причем, работа в этом режиме носит диалоговый характер. Командное окно часто используется и при работе в различных пакетах системы MatLab. Например, данные между отдельными пакетами не передаются напрямую, а только лишь через командное окно.

*Действия с векторами и матрицами.* MatLab предназначен для вычислений с векторами, матрицами и полиномами. Любая заданная переменная, по умолчанию, является вектором или матрицей; имеются функции, которые позволяют формировать векторы и матрицы определенного вида.

Кроме обычных алгебраических действий над векторами и матрицами (сложение, вычитание, транспонирование, умножение на число

или умножение двух матриц одинакового размера, векторное произведение), имеются операции поэлементного преобразования векторов и матриц, например, операции применения элементарных математических функций одного аргумента. Также предусмотрено несколько операций, которые имеются только в MatLab: добавление (вычитание) числа к каждому элементу вектора, поэлементное умножение векторов, поэлементное деление векторов, поэлементное возведение в степень (так называемые, операции с точкой: `.*`, `./`, `.^`). Эти операции позволяют вычислять значения сложных функций, не используя операторы цикла. Еще одна операция, которой нет в математике - прибавление к матрице числа.

Матричные действия с матрицами выполняются с помощью обычных знаков арифметических операций. Помимо этого, существуют процедуры обращения матрицы  $A$  –  $inv(A)$ , вычисление детерминанта матрицы-  $det(A)$ ; действие деления матриц (которого не существует в математике) - `/` (или `\`). Эти действия удобно использовать для решения матричных уравнений  $A*x=b$  или  $x*A=b$  (в этих уравнениях  $x$  – искомый вектор,  $A$  – матрица системы,  $b$  – вектор правой части системы).

*Примеры.* Реализуем в MatLab (ответы системы не приводятся):

- ввести прямоугольную матрицу  $B$  в командное окно:  
`>> B = [1,2,3,4,5; -2,3,1,4,8]`
- найти определитель матрицы  $A$  (напомним, что матрица должна быть квадратная):  
`>> A = [2,3,4; -2,3,1; 0,4,5];`  
`>> det(A)`
- найти транспонированную матрицу:  
`>> A'`
- найти обратную матрицу:  
`>> inv(A)`
- выполнить операцию  $\sin(A)$ :  
`>> sin()'`
- ввести две квадратные матрицы  $C$  и  $D$ ; найти произведение этих матриц:  
`>> C*D`
- выполнить поэлементное умножение этих матриц:  
`>> C.*D`
- задана системы линейных алгебраических уравнений 3-го порядка:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 14; \\2x_1 + x_2 - 5x_3 &= -15; \\x_1 - x_2 - x_3 &= -4.\end{aligned}$$

В матричном виде эта система записывается следующим образом:

$$Ax=b,$$

Где  $A$  - матрица коэффициентов системы;

$b$  - вектор правых частей системы;

$x$ - вектор неизвестных:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 25 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 14 \\ -15 \\ -4 \end{bmatrix}; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x \\ x \end{bmatrix};$$

- найти решение этой системы средствами командного окна:

```
>>A = [1 25 3;2 1 -5;1 -1 -1]
```

```
>> b = [14;-15;-4]
```

```
>>x = inv(A)*b
```

*Аппроксимация данных.* Отметим, что полином хранится в виде вектора, элементами которого являются коэффициенты полинома:

$$P = [a_n \dots a_2 a_1 a_0].$$

Система предоставляет удобные процедуры для аппроксимации данных измерений, а также для вычисления значений полинома, заданного вектором коэффициентов:

- *polyfit* ( $x,y,n$ ) – полиномиальная аппроксимация,  $n$  – порядок аппроксимирующего полинома;  $x,y$  – вектора аргументов и значений функции; результатом будет вектор коэффициентов полинома длиной  $(n + 1)$ ;

-*polyval*( $p,x$ ) -вычисляет значения полинома в точках, заданных вектором  $x$ , коэффициенты полинома передаются в векторе  $p$ [6].

В MatLab имеется пакет подгонки кривых *Curve Fitting Toolbox*, который дает возможность реализации алгоритма аппроксимации кривых в графическом интерактивном режиме. Освоение работы в этой среде описано в [5].

*Пример.*

Заданы результаты измерений на некотором интервале в виде таблицы значений функции  $y(x)$ .

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	0,5111	-1	-1,5	-4.2	-6	-6,57	-3.3	-1.7	1

1. Выполнить аппроксимацию данных с помощью процедуры *polyfit* системы MatLab:

- аппроксимация полиномом первого порядка:

```
>> p1=polyfit(x,y,1)
```

```
p1 =  
-0.3518 -0.4725
```

- аппроксимация полиномом второго порядка:

```
>> p2=polyfit(x,y,2)
```

```
p2 =  
0.1951 -2.4977 3.8193
```

- аппроксимация полиномом третьего порядка:

```
>> p3=polyfit(x,y,3)
      p3 =
      p3 =  0.0566 -0.7381  1.8063 -1.0333
```

- аппроксимация полиномом четвертого порядка:

```
>>p4=polyfit(x,y,4);
      p4 =
      -0.0026  0.1131 -1.1518  2.9368 -1.9151
```

2. Вычислить значения построенного полинома на заданном интервале с помощью процедуры *polyval*:

```
>>x = 1:0.01:10;% шаг вычисления выбран малым (график будет более гладким)
```

```
>> y1=polyval(p1,x);
```

```
>> y2=polyval(p2,x);
```

```
>> y3=polyval(p3,x);
```

```
>> y4=polyval(p4,x);
```

В векторах *y1*, *y2*, *y3*, *y4* находятся значения соответствующих полиномов в точках, заданных вектором *x*.

### 1.6.3.3 Программирование в MatLab.

Работа в MatLab в режиме калькулятора вместе со многими возможностями имеет и недостатки. Альтернативой работе в режиме калькулятора является программирование.

Программа создается в окне установленного редактора: *Файл-Создать-М-файл*.

Программный код Matlab размещают в файлах с расширением *.m* (*m*-файлах). *m*-файлы бывают двух видов: *скрипты (scripts)* и *функции (functions)*.

Скрипты представляют собой последовательности команд Matlab, полезны для автоматизации последовательности действий, которые выполняются многократно. Скрипты не могут принимать аргументы и возвращать значения; хранят значения своих переменных в рабочем пространстве (где переменные доступны для других скриптов и из командной строки).

Скрипт выполняется в режиме *интерпретатора*.

Функция - специальный вид *m*-файлов. В отличие от скриптов могут принимать аргументы и возвращать значения.

Функция имеет собственное имя. Кроме того, с ней связано имя *m*-файла, в котором функция записана.

Необходимо соблюдать правило: *имя функции* и *имя m-файла* должны быть *одинаковы*.

Переменные, определённые внутри функции являются *локальными* (то есть видны только внутри самой функции).

Файл-функция имеет первую строку вида:

```
Function [перечень конечных величин] =
```

<имя процедуры> (<перечень входных величин>)

(Script-файлы такой строки не имеют).

*Оформление M-файлов:*

- каждый оператор записывается в отдельной строке; в конце оператора желательно вводить символ «;» (чтобы результат действия оператора не выводился в командное окно);
- можно размещать несколько операторов в одной строке, разделяя их запятой или точкой с запятой;
- длинный оператор можно записывать в несколько строк, при этом предыдущая строка должна заканчиваться тремя точками (...);
- строка комментариев начинается с символа %;
- строки комментариев, предшествующие первому выполняемому оператору программы (должны заканчиваться пустой строкой), воспринимаются системой как описание программы. Эти строки выводятся в командное окно, если набрать в нем *help<имя файла>*;
- отсутствует оператор окончания текста программы;
- переменные не описываются и не объявляются; их размер устанавливается при вводе значений ее элементов;
- имена переменных могут содержать только буквы латинского алфавита и цифры, начинаются с буквы, число символов в имени – не больше 19-ти, строчные и прописные буквы в именах различаются системой.

*Пример 1.* Оформим текст предыдущего примера как файл-функцию, сопроводив ее необходимыми комментариями. Для этой процедуры нет необходимости передавать переменные из командного окна. Поэтому первую строку этой процедуры можно оформить следующим образом: *functionappr*. Текст *m*-файла:

```
functionappr
x = 1:10;
y = [0 0.5111 -1 -1.5 -4.2 -6 -6.57 -3.3 -1.7 1];%
p1=polyfit(x,y,1);
p2=polyfit(x,y,2);
p3=polyfit(x,y,3);
p4=polyfit(x,y,4);
stem(x,y)
holdon
x1 = 1:0.1:10;
y1=polyval(p1,x1);
y2=polyval(p2,x1);
y3=polyval(p3,x1);
y4=polyval(p4,x1);
plot(x1,y1,'-r',x1,y2,'--b',x1,y3,'-.m',x1,y4,'*g');
gridon
title ('Полиномиальная аппроксимация');
```

```

xlabel('argument');
ylabel('function');
end

```

Здесь процедура  $stem(x,y)$  используется для представления графика дискретной функции в виде отдельных вертикальных линий для каждого из значений аргумента;  $x,y$  – векторы аргументов и значений функций; для отражения графика дискретной функции на той же фигуре, что и полиномы, после обращения к функции  $stem$  записывается функция  $hold on$ .

Сохраните файл под именем *appr.m*. Чтобы получить информацию о созданной процедуре, наберите *helpappr*. Вызовите программу из командного окна. Результат выполнения программы представлен на рисунке 1.6.1. На этом рисунке: сплошная линия - полином 1 порядка, пунктирная – полином 2 порядка, штрих пунктирная – полином 3 порядка и звездочками отмечен полином 4 порядка.

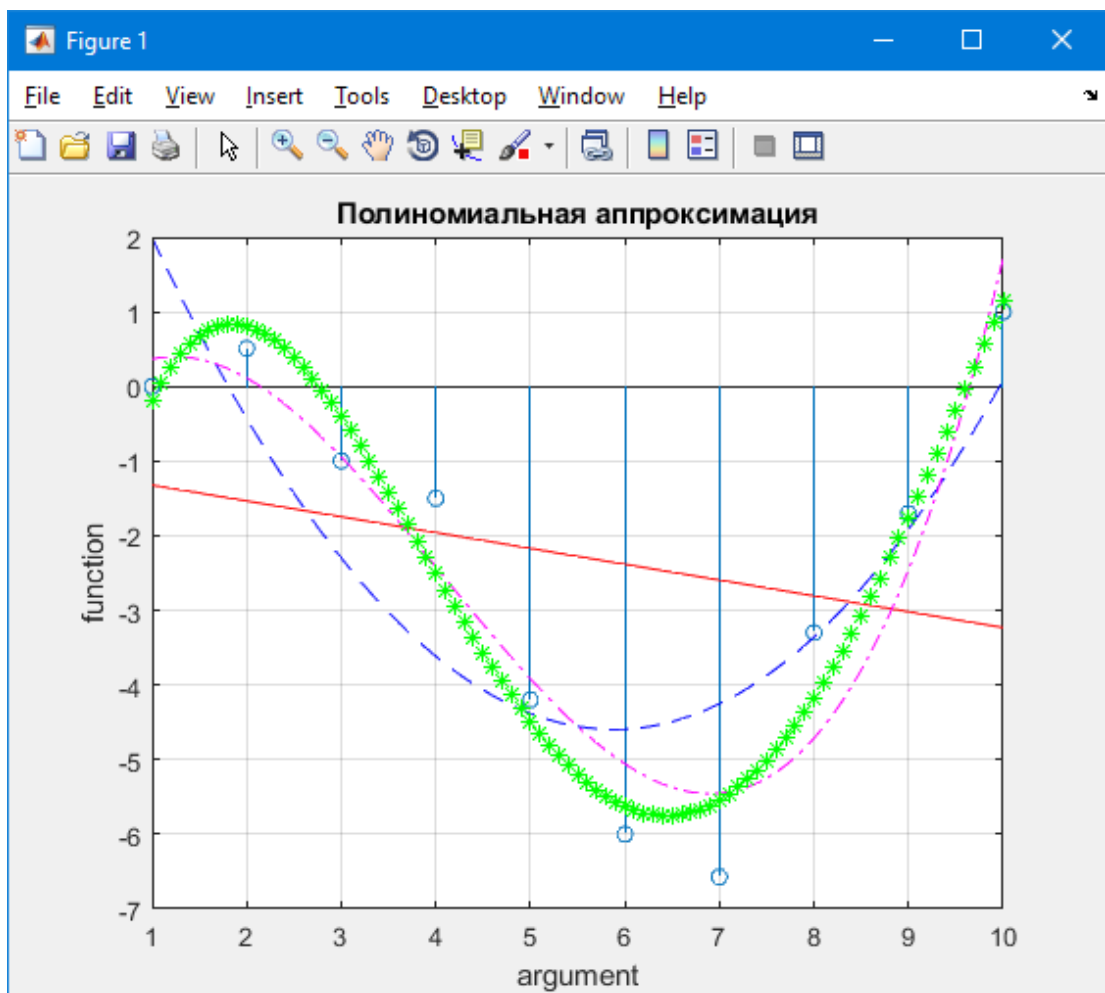


Рисунок 1.6.1 – Графики исходной дискретной функции и аппроксимирующих полиномов

*Пример 2.* Изменим файл-функцию таким образом, чтобы переменные передавались из командного окна:

```
function appr_1(x,y)
```



```

% вызова функции
% appr(x,y)
p1=polyfit(x,y,1);
p2=polyfit(x,y,2);
p3=polyfit(x,y,3);
p4=polyfit(x,y,4);
stem(x,y)
hold on
x1 = 1:0.1:10;
y1=polyval(p1,x1);
y2=polyval(p2,x1);
y3=polyval(p3,x1);
y4=polyval(p4,x1);
plot(x1,y1,'-r',x1,y2,'--b',x1,y3,'-.m',x1,y4,'*g');
grid on
title('Полиномиальная аппроксимация');
xlabel('argument');
ylabel('function');
end

```

Функции *appr* и *appr\_1* отличаются оформлением заголовка функции: во второй функции переменные *x* и *y* передаются извне. При использовании этой функции, в командное окно необходимо ввести вектора значений аргументов и аппроксимируемой функции.

*Функции интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.*

В MatLab имеются стандартные файл-функции для решения обыкновенных дифференциальных уравнений - *ode23*, *ode45* (цифры определяют порядок точности метода); обращение к ним имеет вид;

$$[t, y] = \text{ode23} ('<имя функции>', tspan, y0, options)$$

$$[t, y] = \text{ode45} ('<имя функции>', tspan, y0, options),$$

где *<имя функции>* - строка символов, являющихся именем М-файла, в котором вычисляется вектор-функция правых частей системы обыкновенных дифференциальных уравнений  $f(t,y)$ ;

*y0* – вектор начальных значений переменных состояния;

*t* – массив значений аргумента, соответствующих шагам интегрирования;

*y* – матрица значений переменных, в которой каждый столбец соответствует одной из переменных состояния, а строка содержит значения переменных состояния, соответствующих определенному шагу интегрирования;

*tspan* – вектор-строка  $[t0\ tfinal]$ , содержащая начальное и конечное значение аргумента;

*options* – необязательные параметры, определяющие значения допустимых относительной и абсолютной погрешности интегрирования (по умолчанию соответственно 1.0e-3 и 1.0e-6).

Рассмотрим применение процедур интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений на следующих примерах.

*Пример 3.* Требуется решить дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \sin(t) - 2y(t)$$

с начальным условием  $y(0) = 1$ .

Аналитическое решение этого уравнения при заданном начальном условии:

$$y(t) = 1,2e^{-2t} + \frac{2\sin(t)}{5} - \frac{\cos(t)}{5}.$$

Откроем окно редактора и запишем в нее текст файл-функции:

```
function dy=f1(t,y)
dy=sin(t)-2*y;
```

Сохраним файл с именем *f1*.

В командном окне введем:

```
>>[t,y] = ode45('f1',[0 5],1)
```

Здесь мы установили интервал решения уравнения - [0 5], начальное значение переменной состояния – 1, параметр *options* не указывали.

Система выдаст в командное окно числовые значения переменных.

Рассчитаем значения функции, полученные аналитическим путем:

```
>>y_analitical = 1.2*exp(-2*t) + (2*sin(t))/5 - cos(t)/5;
```

Построим в одном окне 2 графика: график аналитического решения и график рассчитанных численно значений переменной  $y(t)$ :

```
>>plot(t,y,'-b')
```

% параметр '-b' – для отражения численного решения

% голубой сплошной % линией

```
>>hold on
```

```
>>grid on
```

```
>>plot(t,y_analitical,'--g')
```

%параметр '--g' – для отражения аналитического решения

% зеленой пунктирной линией

Графики приведены на рисунке 1.6.2. Как видно из графиков совпадение аналитического и численного решения идеальное (это, конечно, зависит от степени нелинейности правой части дифференциального уравнения).

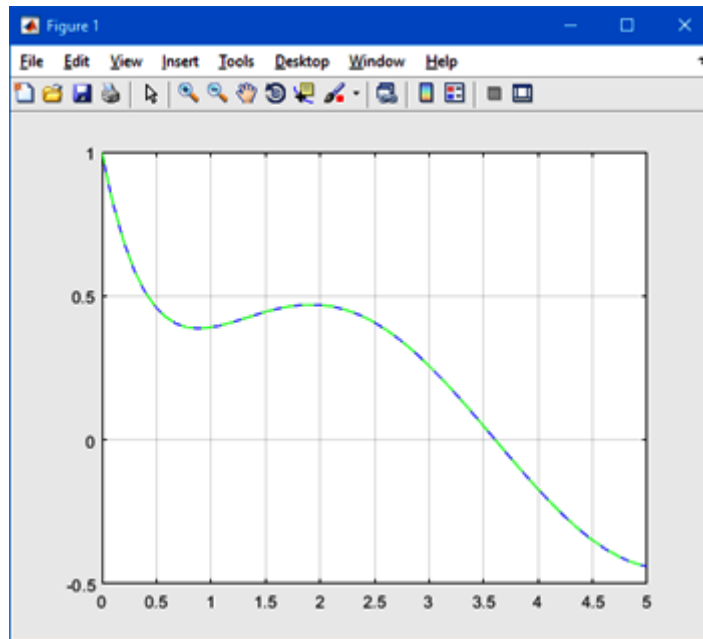


Рисунок 1.6.2 – Графики аналитического и численного решений заданного дифференциального уравнения

*Пример 4.* Рассмотрим применение описанной процедуры к решению дифференциальных уравнений высших порядков. Напомним, что дифференциальные уравнения высших порядков сводятся к системе дифференциальных уравнений первого порядка, порядок системы равен порядку старшей производной в исходном уравнении.

Предположим, в результате преобразований получили следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 y_3 & y_1(0) &= 0 \\ y_2' &= -y_1 y_3 & y_2(0) &= 1 \\ y_3' &= -0.51 y_1 y_2 & y_3(0) &= 1 \end{aligned}$$

Для решения этой системы создадим М-файл со следующим текстом:

```
function dy = rigid(t,y)
dy = zeros(3,1); % вектор-столбец
dy(1) = y(2) * y(3);
dy(2) = -y(1) * y(3);
dy(3) = -0.51 * y(1) * y(2);
```

Сохраним файл. Решаем систему на интервале [0 12] с вектором начальных условий [0 1 1]:

```
>> [t,y] = ode45('rigid',[0 12],[0 1 1]);
```

Отразите решение на графике:

```
>> plot(t,y)
```

#### 1.6.3.4 Упражнения для самостоятельного выполнения.

1. Задайте функцию с помощью таблицы ее числовых значений на некотором интервале с заданным шагом.

Выполните аппроксимацию этой функции с помощью процедур MatLab, а также, используя пакет CurveFittingToolbox.

2. Решите с помощью функций системы MatLab дифференциальные уравнения первого из упражнений к п.1.5.5.

Постройте графики этих решений, сравните с графиками аналитического решения. Справку по построению графиков можно получить в [5,6].

3. Решите с помощью функций системы MatLab дифференциальные уравнения высших порядков из упражнений к п.1.5.5.

Постройте графики этих решений, сравните с графиками аналитического решения. Справку по построению графиков можно получить в [5,6].

## **2 Аналитические методы построения моделей объектов управления**

### **2.1 Общие принципы**

Задача построения математической модели объекта в общем случае сводится к определению оператора системы, определяющего изменение выходной величины при произвольном изменении входного воздействия. *Аналитические* методы определения характеристик объектов регулирования основаны на составлении их дифференциальных уравнений. Составление дифференциального уравнения базируется на использовании основных физических законов: сохранения массы, энергии и количества движения. Таким

образом, существенной особенностью аналитических моделей является отражение механизма явления в структуре оператора модели, то есть всех причинно-следственных связей, имеющих у объекта.

При составлении дифференциальных уравнений объектов с *сосредоточенными* параметрами обычно исходят из уравнений материального и теплового баланса.

Согласно первому из них изменение массы вещества в замкнутом объеме в единицу времени равно алгебраической сумме входных и выходных потоков:

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{i=1}^k D_i - \sum_{j=1}^r D_j,$$

здесь  $D_i$  ( $i=1, k$ ) – массовый расход входного  $i$ -го потока;

$D_j$  ( $j=1, r$ ) – массовый расход выходного  $j$ -го потока;

$G$  – масса вещества в рассматриваемом объеме;

$t$  – время.

Аналогично, изменение энтальпии какого-либо тела в единицу времени равно алгебраической сумме тепловых потоков, подводющих (или отводящих) тепло к рассматриваемому телу:

$$\frac{dI}{dt} = \sum_{i=1}^k Q_i - \sum_{j=1}^r Q_j,$$

где  $Q_i$  ( $i=1, k$ ) –  $i$ -ый входной поток тепла;

$Q_j$  ( $j=1, r$ ) –  $j$ -ый выходной поток тепла;

$I$  – энтальпия тела.

Построение любой математической модели начинают с физического описания объекта моделирования. При этом выделяют «элементарные» процессы, протекающие в объекте моделирования, которые подлежат отражению в модели, и формулируют основные допущения, принимаемые при их описании. «Элементарные» здесь не означает «простейший», а лишь то, что эти процессы являются составляющими более сложных процессов. Обычно под «элементарным» понимается процесс, относящийся к определенному классу явлений, например, массообмен, теплопередача и т.д. Обычно принимаются во внимание следующие «элементарные» процессы: движение потоков фаз, массообмен между фазами, теплопередача, изменение агрегатного состояния, химические превращения.

Перечень учитываемых элементарных процессов определяет совокупность явлений, описывающих объект, которые включают в математическую модель.

Приведем уравнения некоторых «элементарных» процессов.

1. Заполнение (опорожнение) сосуда жидкостью:

$$f \frac{dH}{dt} = Q,$$

где  $f$  – площадь уровня;

$H$  – высота уровня;

$Q$  – объемный расход жидкости.

2. Нагревание (охлаждение) тела:

$$F \cdot c \cdot \frac{d\theta}{dt} = q\theta,$$

где  $F$  – масса абсолютно сухого вещества;

$c$  – удельная теплоемкость;

$\theta$  – температура;

$q$  – тепловой поток.

3. Сушка (увлажнение) тела:

$$F \frac{d\eta}{dt} = G$$

где  $\eta$  – относительная влажность вещества на абсолютно сухую массу;

$G$  – масса влаги, поступающей (удаляемой) за единицу времени.

4. Растворение или осаждение из раствора (суспензии):

$$V \frac{dC}{dt} = G,$$

Где  $V$ - объем растворителя;  
 $C$ -концентрация растворенного вещества;  
 $G$ -масса сухого вещества, поступающего (удаляемого) в единицу времени.

5. Выпаривание:

$$F \frac{dE}{dt} = -G = -aQ,$$

где  $\varepsilon$  - отношение масс растворителя и растворенного вещества, т. е. величина, обратная массовой концентрации;

$G$ -количество пара, образующегося в единицу времени;

$a$ - коэффициент пропорциональности;

$Q$ - количество теплоты, проводимой в единицу времени.

Рассмотренные процессы могут быть описаны обобщенным уравнением:

$$A \frac{dH}{dt} = y, \quad (2.1.1)$$

Где  $A$  характеризует динамические свойства объекта и определяет характер изменения  $H$  во времени;

$H$ — показатель режима процесса;

$y$ — материальное или энергетическое воздействие на объект.

В общем случае результирующий поток энергии или вещества  $y$  равен разности потоков при поступлении в объект  $Q_n$  и потреблении (расходе) из него  $Q_p$  (нагрузка объекта):

$$y = Q_i - Q_p.$$

Возмущения в общем случае могут быть приложены как со стороны поступления в объект  $\Delta Q_i$ , так и со стороны расхода  $\Delta Q_p$ . Возмущения  $\Delta Q_i$  и  $\Delta Q_p$  не зависят от выходной координаты процесса, тогда мгновенные (начальные) значения будут равны:

$$Q_{n_n} = Q_{n_0} + \Delta Q_{n_n};$$

$$Q_{p_n} = Q_{p_0} + \Delta Q_{p_n}.$$

В общем случае значения  $Q_n$  и  $Q_p$  зависят от  $H$ :

$$Q_n = Q_n(H), \quad Q_p = Q_p(H)$$

и являются нелинейными. Проводя их линеаризацию с учетом, что в установившемся режиме  $Q_{i_0} = Q_0$ ,  $H = H_0 + \Delta H$  и, подставляя эти значения в уравнение (2.1.1), получим:

$$A \frac{d(\Delta H)}{dt} = \left(\frac{dQ_i}{dH}\right)_0 \cdot \Delta H - \left(\frac{dQ_p}{dH}\right)_0 \cdot \Delta H + (\Delta Q_i - \Delta Q_p). \quad (2.1.2)$$

Введем безразмерные единицы:

$$\varphi = \frac{\Delta H}{H_0}, \quad \mu = \frac{y_n}{Q_0} = \frac{\Delta Q_n - \Delta Q_p}{Q_0} \quad \text{и} \quad Q_0 = Q_{n0} = Q_{p0}.$$

Тогда

$$\frac{AH_0}{Q_0} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{H_0}{Q_0} \left[ \left(\frac{dQ_p}{dH}\right)_0 - \left(\frac{dQ_n}{dH}\right)_0 \right] \cdot \varphi = \mu$$

$$T = \frac{AH_0}{Q_0}$$

Величину  $\frac{AH_0}{Q_0}$  называют временем разгона объекта при полной нагрузке, или просто временем разгона. Величину, обратную  $T$ , т. е.  $s = 1/T$ , называют скоростью разгона.

Коэффициент статизма или самовыравнивания, объекта равен

$$\delta = \frac{H_0}{Q_0} \left[ \left(\frac{dQ_p}{dH}\right)_0 - \left(\frac{dQ_n}{dH}\right)_0 \right],$$

тогда уравнение, описывающее динамику объекта, будет иметь вид:

$$T \frac{d\varphi}{dt} + \delta \varphi = \mu$$

Чаще пользуются другой формой уравнения процесса, полученной делением последнего уравнения на  $|\delta|$  (при  $\delta \neq 0$ ):

$$\frac{T}{|\delta|} \frac{d\varphi}{dt} \pm \varphi = \frac{1}{|\delta|} \mu, \quad (2.1.3)$$

(здесь знак «+» для  $\delta > 0$  и знак «-» для  $\delta < 0$ ). Величину  $T_0 = \frac{T}{|\delta|}$  называют постоянной времени объекта:

$$T_0 = \frac{AH_0}{Q_0} \left[ \frac{Q_0}{\left[ \left(\frac{dQ_p}{dH}\right)_0 - \left(\frac{dQ_i}{dH}\right)_0 \right] H_0} \right] = \frac{A}{\left(\frac{dQ_p}{dH}\right)_0 - \left(\frac{dQ_i}{dH}\right)_0},$$

а величину  $k_0 = \frac{1}{|\delta|}$  - коэффициентом передачи, или усиления, объекта. Тогда уравнение (2.1.3) записывается в виде:

$$T_0 \frac{d\varphi}{dt} \pm \varphi = k_0 \mu$$

Общее решение этого уравнения при нулевых начальных условиях

$$\varphi = \frac{\mu_0}{\delta} (1 - e^{-\frac{\delta}{T}t}). \quad (2.1.4)$$

Уравнение (2.1.4) является кривой разгона объекта первого порядка. При  $\delta > 0$  и  $t \rightarrow \infty$  отклонение  $\varphi$  стремится к значению  $k\mu_0$ . Такой объект имеет самовыравнивание и называется статическим. При  $\delta < 0$  показатель степени уравнения (2.1.4) становится положительным и отклонение непрерывно возрастает. Такие объекты называются неустойчивыми. При  $\delta = 0$  уравнение принимает вид:

$$T \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \mu$$

Отсюда  $\varphi = \frac{\mu_0 \cdot t}{T}$ . Такой объект, лишенный самовыравнивания, называется астатическим, или нейтральным.

Коэффициент самовыравнивания является важной характеристикой объекта. Он определяет динамические и статические свойства объекта. В общем случае коэффициент  $\delta$  складывается из двух коэффициентов самовыравнивания - на стороне потребления и на стороне поступления:

$$\delta = \delta_p + \delta_i; \quad \delta_p = \frac{H_0}{Q_0} \cdot \left( \frac{dQ_p}{dH} \right)_0; \quad \delta_i = \frac{H_0}{Q_0} \cdot \left( \frac{dQ_i}{dH} \right)_0.$$

Иногда изменение схемы процесса может резко влиять на значение  $\delta$ . Например, если жидкость поступает в емкость под уровень жидкости, то  $\frac{dQ_n}{dH}$  - всегда отрицательная величина, а если имеет место свободная подача, т. е.  $Q_n$  не зависит от  $H$ , то  $\delta_n = 0$ . Наиболее распространены объекты с  $\delta \geq 0$ .

Примером процессов с отрицательным самовыравниванием служат каталитические реакции, ускоряющиеся при положительном автокатализе; некоторые процессы имеют область режимов с самовыравниванием не только различной величины, но и с противоположными знаками.

Передаточная функция объектов первого порядка с самовыравниванием и с запаздыванием:

$$W_0(p) = \frac{k_0}{T_0 p + 1} \cdot e^{-p\tau}, \quad (2.1.5)$$

без самовыравнивания:

$$W_0(p) = \frac{1}{T_p} e^{-p\tau}. \quad (2.1.6)$$

Динамические объекты второго порядка описываются уравнением



$$T_1 T_2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{d\varphi}{dt} + \varphi = k_0 \cdot \mu. \quad (2.1.7)$$

Кривая их разгона характеризуется наличием точки перегиба и определяется решением уравнения (2.1.7) при условии, что  $\frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}} \geq 1$  (апериодический процесс):

$$\varphi = k_0 \mu \cdot \left( 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right).$$

Характерным отличием этой кривой от кривой разгона объекта первого порядка является малая скорость изменения регулируемой величины в начале переходного процесса.

Передаточная функция объекта второго порядка с запаздыванием имеет вид:

$$W(p) = \frac{k_0}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1} e^{-p\tau}. \quad (2.1.8)$$

В выражения (2.1.6) и (2.1.8) входит так называемое чистое, или транспортное, запаздывание  $\tau$ . Оно определяется временем от момента возникновения возмущения или регулирующего воздействия до начала изменения регулируемой величины  $\varphi$  в точке измерения. Это время необходимо для того, чтобы поток вещества или энергии прошел расстояние от места внесения воздействия до места измерения регулируемой величины.

При проектировании автоматических систем регулирования надо стремиться к возможному уменьшению чистого запаздывания в объекте за счет рационального выбора мест установки датчиков и осуществления мероприятий, увеличивающих скорость распространения протекающего вещества или энергии от места внесения воздействия до места измерения. С этой целью подают вещество в различных точках по объему объекта, вводят циркуляцию и размешивание растворов, подачу вещества не в одном, а в нескольких местах по объему объекта и т. п.

Объекты, динамические свойства которых описываются дифференциальными уравнениями второго и выше порядка, обычно представляют собой сочетание емкостей (гидравлических, тепловых, электрических и т. п.), разделенных сопротивлениями соответствующей физической природы и поэтому называются многоемкостными. У таких объектов скорость отклонения регулируемой величины после возникновения регулирующего воздействия или возмущения начинает нарастать постепенно и достигает своей наибольшей величины лишь спустя некоторое время. Это объясняется конечной скоростью обмена масс и передачи энергии при прохождении вещества или потока энергии через сопротивления и емкости объекта. Постепенное нарастание скорости отклонения регулируемой величины приводит к появлению в таких объектах переходного

запаздывания. Его величина  $\tau$  определяется отрезком, который отсекает на оси времени касательная, проведенная к кривой разгона в точке, где скорость изменения достигает наибольшего значения.

Исследования промышленных объектов показали, что динамические свойства большинства из них могут быть описаны дифференциальными уравнениями первого или второго порядка с учетом чистого запаздывания. Поэтому большинство регулируемых объектов может быть классифицировано на четыре типовые группы (таблица 2.1).

Таблица 2.1 - Классификация регулируемых объектов

Регулируемый объект	Дифференциальное уравнение	Передаточная функция
С самовыравниванием и запаздыванием первого порядка	$T_0 \frac{d\Delta\sigma}{dt} + \Delta\sigma = k_0 \mu(t - \tau)$	$\frac{k_0}{T_0 p + 1} \cdot e^{-p\tau}$
второго порядка	$T_0^2 \frac{d^2\Delta\sigma}{dt^2} + 2\xi T_0 \frac{d\Delta\sigma}{dt} + \Delta\sigma = k_0 \mu(t - \tau)$	$\frac{k_0}{T_0^2 p^2 + 2\xi T_0 p + 1} \cdot e^{-p\tau}$
Без самовыравнивания с запаздыванием первого порядка	$T_0 \frac{d\Delta\sigma}{dt} = \mu(t - \tau)$	$\frac{1}{T_0 p} \cdot e^{-p\tau}$
второго порядка	$T_0 T_1 \frac{d^2\Delta\sigma}{dt^2} + T_0 \frac{d\Delta\sigma}{dt} = \mu(t - \tau)$	$\frac{1}{T_0 p \cdot (T_1 p + 1)} \cdot e^{-p\tau}$

## 2.2 Объекты регулирования уровня

Рассмотрим некоторые наиболее простые примеры объектов управления. Эти примеры рассматриваются для простейших случаев при пренебрежении рядом несущественных факторов. Суждение об устойчивости объектов для простейших случаев вытекает из рассмотрения дифференциальных уравнений объекта.

В промышленных объектах нередко встречаются емкости, которые, в зависимости от особенностей притока, стока и конструкции, обладают определенными динамическими свойствами.

Если сток  $Q_c$  из емкости равен притоку  $Q_n$  в нее, то в емкости может находиться любое количество жидкости: от нуля до некоторого максимума, определяемого конструкцией, а уровень  $h$  будет оставаться постоянным, то есть если

$$Q_n = Q_c = Q_0,$$

то

$$V = Sh = \text{const}, h = \text{const},$$

где  $F$  - площадь горизонтального сечения емкости;  
 $V$  - объем жидкости в емкости.

Вышесказанное справедливо для любых емкостей в установившемся режиме.

Допустим, что в течение некоторого отрезка времени  $\Delta t$  приток и сток жидкости сохраняются на неизменном значении, но нарушилось равновесие между ними  $Q_n \neq Q_c$ ;  $V = F(h + \Delta h) = \text{var}$ . Это вызовет изменения уровня, и уравнение материального баланса для указанного отрезка времени будет иметь вид :

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{Q_n - Q_c}{F} = \frac{\Delta Q}{F}.$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$  получим уравнение материального баланса при непрерывно меняющихся расходах жидкости на притоке и стоке:

$$\frac{d\Delta h}{dt} = \frac{dh}{dt} = \frac{Q_n - Q_c}{F} = \frac{\Delta Q}{F}. \quad (2.2.1)$$

При изменении только стока  $\Delta Q$  равно:

$$\Delta Q = Q_0 - Q_c.$$

При изменении только притока  $\Delta Q$  равно:

$$\Delta Q = Q_n - Q_0.$$

При одновременном изменении притока и стока  $\Delta Q$  равно:

$$\Delta Q = Q_n - Q_c.$$

Рассмотрим емкость, из которой жидкость вытекает в атмосферу (рисунки 2.2.1а). Управляющим воздействием является расход воды  $Q_n$ , притекающей в резервуар, управляемой величиной – уровень воды в резервуаре  $H$ , а внешним возмущением – расход воды  $Q_c$ , вытекающей из резервуара. Между переменными емкости может быть записана следующая зависимость

$$S \frac{dH}{dt} = Q_n - Q_c, \quad (2.2.2)$$

где  $S$  - площадь поперечного сечения резервуара.

Легко заметить, что рассматриваемый объект нейтрален, так как при  $Q_n=0$ ,  $Q_c=0$  и  $H=H_0$  кратковременное увеличение расхода  $Q$  после снижения его до нуля приведет к повышению уровня  $H$  и переходу к новому состоянию  $H_0' > H_0$ . Так как возрастание  $Q_n$  приводит к увеличению  $dH/dt$ , то характеристика объекта является монотонной.

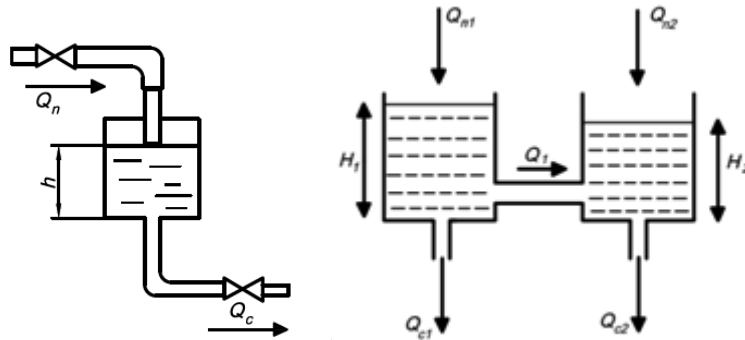
При наличии двух сообщающихся резервуаров (рисунки 2.2.1б) объект будет описан системой уравнений:

$$S_1 \frac{dH}{dt} = Q_{n1} - Q_{c1} - Q_{12};$$

$$S_2 \frac{dH}{dt} = Q_{n2} - Q_{c2} + Q_{12}, \quad (2.2.3)$$

где  $Q_{12} = Q_{12}(H_1 - H_2)$  - некоторая, в общем случае нелинейная монотонная функция;

$S_1, S_2$  - площади поперечных сечений резервуаров.



а)б)

Рисунок 2.2.1 – Объекты регулирования уровня

Уравнения (2.2.3) представляют собой математическое описание объекта, в котором каждый из векторов управляемых величин  $\bar{y}$  и воздействий  $\bar{u}$  имеет по две координаты:

$$\bar{u} = \{Q_{n1}, Q_{n2}\}, \bar{y} = \{H_1, H_2\}.$$

В зависимости от наличия устройств, контролирующих расходы  $Q_{c1}$  и  $Q_{c2}$ , вектор возмущения  $\{Q_{c1}, Q_{c2}\}$  может быть отнесен к контролируемым  $g$  или неконтролируемым  $f$  возмущениям.

Управляемые координаты  $H_1, H_2$  могут быть приняты в качестве вектора состояния объекта  $\bar{x} = \{x_1, x_2\} = \bar{y}$ . Так как вектор  $\bar{y}$  имеет две координаты, связанные между собой и зависящие от обеих координат вектора  $\bar{u}$ , то объект может быть отнесен к многосвязным.

В примере с одним резервуаром уравнение переходного процесса запишем в отклонениях переменных:

$$S \cdot \frac{d(\Delta H)}{dt} = \Delta Q = \Delta Q_n - \Delta Q_c. \quad (2.2.4)$$

Расход  $Q_n$  зависит в общем случае от степени открытия клапана на линии притока или, что то же самое, от коэффициента расхода  $\eta_n$ , высоты уровня  $H$  и давления  $p$  в аппарате, то есть:

$$Q_n = \phi(H, \eta_n, p). \quad (2.2.5)$$

Расход жидкости

$$Q_p = \varphi(H, \eta_p, p). \quad (2.2.6)$$

Линеаризуем нелинейные зависимости (2.2.5) и (2.2.6) разложением их в ряд:

$$\begin{aligned}\Delta Q_n &= \left(\frac{\partial Q_n}{\partial \eta_n}\right)_0 \Delta \eta_n + \left(\frac{\partial Q_n}{\partial p}\right)_0 \Delta p + \left(\frac{\partial Q_n}{\partial H}\right)_0 \Delta H; \\ \Delta Q_p &= \left(\frac{\partial Q_p}{\partial \eta_p}\right)_0 \Delta \eta_p + \left(\frac{\partial Q_p}{\partial p}\right)_0 \Delta p + \left(\frac{\partial Q_p}{\partial H}\right)_0 \Delta H.\end{aligned}$$

Подставив выражения в уравнение (2.2.2), найдем:

$$\begin{aligned}S \cdot \frac{d(\Delta H)}{dt} + \left[ \left(\frac{\partial Q_p}{\partial H}\right)_0 - \left(\frac{\partial Q_n}{\partial H}\right)_0 \right] \cdot \Delta H = \left(\frac{\partial Q_n}{\partial \eta_n}\right)_0 \cdot \Delta \eta_n - \\ - \left(\frac{\partial Q_p}{\partial \eta_p}\right)_0 \cdot \Delta \eta_p + \left[ \left(\frac{\partial Q_n}{\partial p}\right)_0 - \left(\frac{\partial Q_p}{\partial p}\right)_0 \right] \cdot \Delta p.\end{aligned}\quad (2.2.7)$$

В уравнении (2.2.7) коэффициент при  $\Delta H$  характеризует самовыравнивание объекта, правая же его часть в обозначениях уравнения (2.1.2) есть  $\Delta Q_n - \Delta Q_p$ . Кривая разгона соответствует решению уравнения (2.2.7) при скачкообразном изменении в момент  $t = 0$  одного из параметров  $\Delta \eta_i, \Delta \eta_\delta$  или  $\Delta p$  ( $\Delta \eta_n$  является регулирующим воздействием, а  $\Delta \eta_p$  и  $\Delta p$  - возмущающими).

Преобразуем уравнение (2.2.7):

$$T \frac{d(\Delta H)}{dt} + \Delta H = k_1 \Delta \eta_n - k_2 \Delta \eta_p + k_3 \Delta p,\quad (2.2.8)$$

где

$$\begin{aligned}T = \frac{S}{k}, \quad k = \left(\frac{\partial Q_p}{\partial H}\right)_0 - \left(\frac{\partial Q_n}{\partial H}\right)_0, \quad k_1 = \left(\frac{\partial Q_n}{\partial \eta_n}\right)_0 \cdot \frac{1}{k}, \\ k_2 = \left(\frac{\partial Q_p}{\partial \eta_p}\right)_0 \cdot \frac{1}{k}, \quad k_3 = \left[ \left(\frac{\partial Q_n}{\partial p}\right)_0 - \left(\frac{\partial Q_p}{\partial p}\right)_0 \right] \cdot \frac{1}{k}.\end{aligned}$$

Если изменение давления  $p$  в аппарате мало сказывается на изменении уровня, то при постоянном давлении уравнение (2.2.8) имеет вид:

$$T \frac{d(\Delta H)}{dt} = \Delta H = k_1 \Delta \eta_n - k_2 \Delta \eta_p.$$

Значения коэффициентов  $k$ ,  $k_1$  и  $k_2$  можно определить аналитически из уравнений объемного расхода. Коэффициент  $k$ , например, можно найти также из статических характеристик объекта, построенных для фиксированных значений  $\eta_{n_0}$  и  $\eta_{p_0}$ . Наклон касательных, проведенных к  $Q_p$  и

$Q_n$  в точке  $H_0$ , соответствует значениям  $\left(\frac{\partial Q_n}{\partial \eta_n}\right)_0$  и  $\left(\frac{\partial Q_p}{\partial H}\right)_0$ .

В рассмотренном объекте сток жидкости происходил при свободном сливе или за счет перепада давлений в этом аппарате и последующем, куда может перетекать жидкость. В ряде случаев жидкость откачивается из

аппарата насосом с постоянной подачей. Тогда  $Q_p$  практически не зависит от  $H$ , при  $\Delta\eta_p$ , т. е.  $\Delta Q_p = 0$ . В таких аппаратах имеет место свободный приток, т. е.  $\Delta Q_n$  не зависит от  $H$ . В этом случае уравнение (2.2.7) имеет вид:

$$T \frac{d(\Delta H)}{dt} = \left( \frac{\partial Q_n}{\partial \eta_n} \right)_0 \cdot \Delta \eta_n$$

или

$$T \frac{d(\Delta H)}{dt} = \Delta \eta_n,$$

то есть объект становится астатическим.

### 2.3 Объект регулирования уровня раствора

В текстильной промышленности для получения конечного продукта сырье подвергается разнообразной обработке на множестве производств. Одним из технологических процессов является процесс отделки тканей, который включает в себя этап крашения различными красителями. Ткань, с целью облегчения технологического процесса в дальнейшем, сшивается в виде петель в одну непрерывную ленту. При периодическом крашении на роликовых красильных машинах ткань перемещается по роликам и многократно проходит через красильный раствор. К управляющим факторам в отделочном производстве можно отнести: регулирование температуры в ваннах красильных машин и сушильных агрегатах, регулирование уровня и концентрации растворов, влажности, натяжения, ширины и усадки ткани, скоростных режимов и т.д. К возмущающим факторам можно отнести достаточно большое количество параметров, которые характеризуют не только конкретную технологическую операцию, но и предыдущие этапы обработки материала. Основными из них являются: физико-механические свойства материала (влажность, качество предыдущей химической обработки, вид волокна, смеси и т.д.), качество и стабильность растворов и красителей, натяжение материала, тепловые режимы и т.д. Выходными координатами многомерного объекта управления являются показатели эффективности технологического процесса отделочного производства. Определяемые его производительностью, качеством продукции, затратами материалов и энергии.

Рассмотрим ванну красильной машины, являющейся одним из аппаратов текстильной промышленности, в качестве еще одного примера объекта регулирования уровня.

Пусть в ванну с площадью сечения  $S$ , соответствующей уровню жидкости  $H_0$ , поступает ткань с массой  $G$  (кг), скоростью движения  $v$  (м/с) и с начальной влажностью  $m_1$ , выраженной в процентах или долях от массы сухой ткани. Ткань при выходе из ванны отжимается до влажности  $m_2$ . Обычно, необходимо выполнение условия  $m_2 > m_1$  (чтобы ванна не

переполнялась). В ванну через регулирующий клапан поступает подкрепляющий раствор красителя, с расходом  $Q_n$  (рисунок 2.3.1).

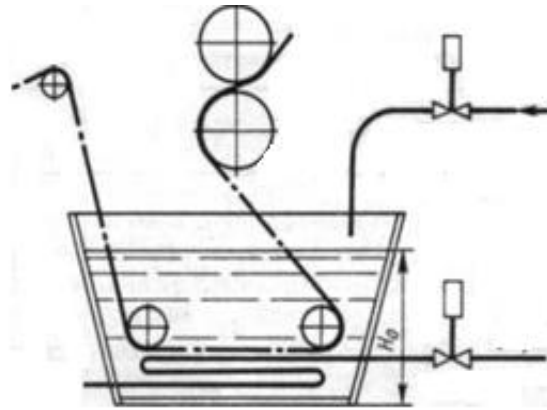


Рисунок 2.3.1 – Ванна красильной машины как объект регулирования уровня

Расход жидкости является функцией переменных  $m_1, m_2$  :

$$Q_p = f(G, m_1, m_2).$$

Здесь используется следующее соотношение:

$$Q_p = \frac{G(m_2 - m_1)}{\rho},$$

Где  $\rho$  - плотность раствора, уносимого тканью.

В установившемся состоянии приток подкрепляющего раствора равен расходу  $Q_p$  жидкости из ванны:

$$Q_{no} - Q_{p0} = 0$$

$$\text{где } Q_{p0} = \frac{G_0(m_{20} - m_{10})}{\rho}. \quad (2.3.1)$$

Индексом «0» отмечены величины, характеризующие установившееся состояние.

Неустановившийся режим возникает:

- при изменении притока до величины  $Q_{n1} = Q_{n0} + \Delta Q_n$  ;

- или при изменении расхода до величины  $Q_{p1} = Q_{p0} + \Delta Q_p$  ; в этих случаях в ванне будет изменяться количество жидкости, причем за время  $dt$  объем жидкости изменится на величину:

$$dV = S_0 \cdot dH,$$

где  $S_0$ — площадь сечения ванны, соответствующая заданному уровню жидкости  $H_0$ (объемом ткани в ванне пренебрегаем).

За время  $dt$ :

$$(Q_{n1} - Q_{p1})dt = S_0 \cdot dH. \quad (2.3.2)$$

Делим уравнение (2.3.2) на  $dt$  и вычитаем из него уравнение (2.2.1), в результате получаем:

$$S_0 \cdot \frac{dH}{dt} = \Delta Q_n - \Delta Q_p. \quad (2.3.3)$$

Для перехода к безразмерным величинам введем обозначения:

$$\varphi = \frac{\Delta H}{H_0}$$

- относительное изменение регулируемой величины, в данном случае уровня;

$H_0$  - номинальное (или заданное) значение регулируемой величины);

$$\mu = \frac{\Delta Q_n}{Q_{n \max}} - \text{относительное изменение притока (регулирующего}$$

воздействия);

$$f = \frac{\Delta Q_p}{Q_{n \max}} - \text{относительное изменение расхода жидкости (возмущение).}$$

При введении этих обозначений уравнение (2.3.3) примет вид:

$$\frac{S_0 H_0}{Q_{n \max}} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \mu - f$$

или

$$T_a \frac{d\varphi}{dt} = \mu - f,$$

$$T_a = \frac{S_0 H_0}{Q_{n \max}} - \text{постоянная времени объекта.}$$

Таким образом, ванна как объект регулирования уровня раствора имеет свойства интегрирующего (астатического) звена, к входу которого, кроме регулирующего воздействия  $\mu$ , приложено возмущение:

$$\begin{aligned} f &= \frac{\Delta Q_p}{Q_{n \max}} = \frac{1}{Q_{n \max}} \left[ \left( \frac{\partial Q_p}{\partial G} \right)_0 \Delta G + \left( \frac{\partial Q_p}{\partial m_1} \right)_0 \Delta m_1 + \left( \frac{\partial Q_p}{\partial m_2} \right)_0 \Delta m_2 \right] = \\ &= \frac{1}{Q_{n \max}} \left( \frac{m_{20} - m_{10}}{\rho} \Delta G - \frac{\Delta m_1}{\rho} G_0 + \frac{\Delta m_2}{\rho} G_0 \right) \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Максимальный приток

$$Q_{n \max} = \frac{G_{\max} (m_{2 \max} - m_{1 \max})}{\rho}.$$

После подстановки  $Q_{n \max}$  в уравнение (2.3.4) и преобразований получим:

$$f = k_1 f_1 - k_2 f_2 + k_3 f_3,$$

$$\text{где } f_1 = \frac{\Delta G}{G_{\max}}; f_2 = \frac{\Delta m_1}{m_{2 \max} - m_{1 \max}}; f_3 = \frac{\Delta m_2}{m_{2 \max} - m_{1 \max}} - \text{отдельные виды}$$

возмущений;



$$k_1 = \frac{m_{20} - m_{10}}{m_{2\max} - m_{1\min}}; \quad k_2 = k_3 = \frac{G_0}{G_{\max}} - \text{соответствующие им коэффициенты.}$$

Таким образом, возмущения вызываются как изменением скорости прохождения ткани или ее массы, так и изменениями значений влажности входящей и выходящей из ванны ткани.

С учетом этих возмущений уравнение объекта имеет вид:

$$T_a \frac{d\varphi}{dt} = \mu - k_1 f_1 + k_2 f_2 - k_3 f_3.$$

Передаточная функция объекта по отношению к регулирующему воздействию:

$$W(p) = \frac{1}{T_0 p}.$$

Передаточные функции объекта по отношению к каждому из возмущений:

$$W(p) = -\frac{k_1}{T_0 p}, \quad W(p) = \frac{k_2}{T_0 p}, \quad W(p) = -\frac{k_3}{T_0 p}.$$

## 2.4 Применение уравнений теплового баланса для аналитического моделирования объектов управления

### 2.4.1 Моделирование теплообменных процессов.

При исследовании процесса передачи тепла от одного теплоносителя к другому через стенку можно выделить несколько элементарных этапов: переход тепла от горячего теплоносителя к более холодной стенке, поглощение тепла материалом стенки и её нагрев, распределение тепла по объёму стенки, переход тепла от стенки к холодному теплоносителю.

Если процесс теплообмена протекает стационарно, то температура в каждой точке материала (теплоносителей и стенки) не изменяется во времени. Применение модели с сосредоточенными параметрами (т.е. когда пространственные координаты не входят в математическое описание) приводит к алгебраическим соотношениям между температурами в системе. Если температуры меняются во времени, математическое описание получается в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (аргументом является время).

Зависимость температур от геометрических координат обуславливает математическое описание статики в виде обыкновенных дифференциальных уравнений (если пространственная координата одна) или дифференциальных уравнений в частных производных. Независимыми переменными при этом являются пространственные координаты. Динамическая модель при наличии пространственно-распределённых эффектов описывается уравнениями в

частных производных, причём одной из независимых переменных является время.

Интенсивность перехода тепла от одного теплоносителя (например, горячего потока жидкости или газа) к другому (стенке) зависит от разности температур между ними, а также от теплового сопротивления. В расчётные уравнения, однако, обычно включают не сопротивление, а обратную величину  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи,  $q$  – тепловой поток.

Полный тепловой поток  $q$  определяется произведением коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ , площади поверхности  $F$  и температурного напора  $\Delta T$ :  $q = \alpha \cdot F \cdot \Delta T$ . Это уравнение применимо как к нагреванию стенки от горячей жидкости, так и, наоборот, к нагреванию холодной жидкости горячей стенкой; при этом  $\Delta T$  будет иметь разные знаки. Если пренебречь распространением тепла в стенке, то теплопередачу от горячего потока жидкости к холодному, находящемуся по другую сторону стенки, можно представить как процесс преодоления тепловым потоком двух последовательных сопротивлений теплоотдачи – от горячего потока к стенке и от нагретой стенки к холодному потоку. Используя вместо сопротивлений коэффициенты теплоотдачи ( $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ), получаем выражение,

определяющее коэффициент теплопередачи ( $K$ ):  $\frac{1}{K} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}$ .

В практических расчётах часто используют коэффициент теплопередачи как характеристику интенсивности теплообмена между потоками:  $q = K \cdot F \cdot \Delta T$ . В тех случаях, когда коэффициенты теплоотдачи учитываются порознь, принимают усреднённую температуру стенки, разделяющей потоки. Иными словами, считают, что теплопроводность материала стенки настолько велика, что перепад температуры отсутствует.

Коэффициенты теплоотдачи зависят от многих параметров, но наиболее сильно – от скорости потока, характера набегания жидкости на стенку, плотности и теплопроводности жидкости. При выполнении точных расчётов зависимость коэффициента теплоотдачи от параметров потока следует учитывать. Однако для большинства инженерных расчётов теплообменной аппаратуры достаточны упрощённые представления.

Для вывода уравнений математического описания процесса теплообмена через стенку следует рассмотреть тепловой баланс каждой среды, имеющей запас тепла. Он складывается из прихода и расхода тепла, которые определяют накопление тепла в объёме.

Накопление связано с изменением температуры:  $\rho \cdot c_p \cdot V \cdot \Delta T$  или для элементарного объёма

$$\rho \cdot c_p \cdot S \cdot dT \cdot dl,$$

где  $\rho$  – плотность;

$c_p$  – удельная теплоёмкость;

$V$  – объём;

$S$  – сечение потока;

$dl$  – элементарный участок потока.

Приход и расход тепла могут определяться теплоотдачей (теплопередачей), а в случае проточной системы с распределёнными параметрами – притоком и уносом тепла с конвективным потоком.

Количество тепла, поступающее в аппарат с конвективным потоком, определяется как  $G \cdot \rho \cdot c_p \cdot T \cdot \tau$  или для элементарного объёма за элементарное время  $d\tau - G \cdot \rho \cdot c_p \cdot T \cdot d\tau$ , где  $G$  – объёмный расход потока.

Количество тепла, уходящее из рассматриваемого объёма с конвективным потоком, определяется выражением:

$$G \cdot \rho \cdot c_p \cdot (T + \Delta T) \cdot \tau$$

или для элементарного объёма

$$G \cdot \rho \cdot c_p \cdot (T + \Delta T) \cdot d\tau.$$

Приход тепла, определяемый теплопередачей:

$$K \cdot \frac{F}{V} (T_{\text{вн}} - T) \cdot V\tau$$

или для элементарного объёма за элементарное время

$$K \cdot \frac{F}{V} (T_{\text{вн}} - T) \cdot Vd\tau,$$

где  $T_{\text{вн}}$  – температура внешнего теплоносителя.

С учётом полученных соотношений накопление тепла в системе составит:

$$\rho \cdot c_p \cdot V \cdot \Delta T = G\rho c_p T\tau - G\rho c_p (T + \Delta T)\tau + KF(T_{\text{вн}} - T)\tau,$$

или в элементарном объёме за элементарное время

$$\rho \cdot c_p \cdot S \cdot dT \cdot dl = G\rho c_p T\tau - G\rho c_p (T + dT)d\tau + K \frac{F}{V} (T_{\text{вн}} - T)dld\tau.$$

Проведя несложные преобразования, получим уравнение теплового баланса, описывающее динамику теплообменников, во всём объёме которых происходит полное (идеальное) смешение частиц потока:

$$\rho \cdot c_p \cdot S \cdot \frac{dT}{d\tau} = G\rho c_p (T_0 - T) + KF(T_{\text{вн}} - T),$$

где  $T_0, T$  температура потока на входе и в зоне идеального смешения.

Соответственно для трубчатых теплообменников, работающих по принципу вытеснения, уравнение динамики будет выглядеть следующим образом:

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{G\rho c_p}{S} \cdot \frac{\partial T}{\partial l} + \frac{KF}{V} (T_{\text{вн}} - T).$$

Ввиду того, что в статическом режиме накопление тепла в системе равно нулю, модель статики теплообменников смешения будет иметь вид:

$$G\rho_p(T_0 - T) + KF(T_{\text{вн}} - T) = 0,$$

статика трубчатых теплообменников описывается уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \frac{KF}{u\rho_p V}(T_{\text{вн}} - T),$$

где  $u$ - скорость движения потока.

На основе этих уравнений можно составить математическое описание различных вариантов теплообменных аппаратов.

*Пример 1.* Теплообменник представляет собой тонкостенный змеевик, по которому в режиме идеального вытеснения движется охлаждаемый поток жидкости. Змеевик погружён в воду, непрерывно протекающую через сосуд, так что температура охлаждающей воды  $T_{\text{вн}}$  практически постоянна.

Требуется определить температуру на выходе потока, идущего по змеевику со скоростью  $u$ , если заданы его температура на входе, длина трубки змеевика, его сечение, коэффициент теплопередачи  $K$ ; также известны теплоёмкость охлаждаемой жидкости и её плотность. Параметры считать не зависящими от температуры; изменение объёма не учитывать. Режим работы считать стационарным.

*Пример 2.* Жидкость охлаждается в теплообменнике типа «труба в трубе». Охлаждаемая жидкость и хладагент движутся параллельно (прямотоком). Заданы: начальная температура и плотности охлаждаемой жидкости и хладагента, диаметры труб теплообменника: внутренней и наружной (для хладагента), длина теплообменника, теплоёмкости жидкости и хладагента, объёмные расходы охлаждаемой жидкости и хладагента, коэффициент теплопередачи  $K$ . Требуется определить температуры потоков на выходе теплообменника.

*Пример 3.* Рассмотрим теплообменник с интенсивным смешиванием, в который поступает поток жидкости с известной температурой.

В общем случае процесс проходит при следующих условиях: есть теплообмен с окружающей средой и необходимо учитывать теплоёмкость стенок. Принимая во внимание эти моменты, можно вывести уравнения модели теплообменника в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных.

На практике часто закономерности движения реального потока находятся на основе экспериментальных данных. Использование этих зависимостей позволяет отказаться от учета реальной трехмерности потока и одни уравнения упростить, а другие – исключить совсем. Такие упрощения допустимы, так как эмпирические зависимости в определенной мере отражают реальную трехмерность потока.

Для рассматриваемого примера можно принять следующие упрощающие допущения:

- не учитывать теплообмен с окружающей средой;
- уравнение, отражающее теплообмен с окружающей средой, можно заменить известной из физики экспериментальной зависимостью. В этих

случаях модели процесса представляются дифференциальными уравнениями первого порядка;

-для учета теплоемкости стенок также использовать аналогичные экспериментальные зависимости. В этом случае имеем модель в виде обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Подробный вывод уравнений приведен в [5, п.3.4].

#### 2.4.2 Моделирование объекта регулирования температуры.

Рассмотрим задачу регулирования температуры в помещении. Количество тепла, подаваемого в помещение, регулируется с помощью клапана. Положение клапана устанавливается на основе измерений, выполняемых термометром (ртутный термометр). Температура в помещении также зависит от температуры окружающей среды. Измерения, проводимые таким образом, не дают напрямую значения температуры в комнате, а только высоту столбика ртути, которая, конечно, связана с температурой в комнате.

Составим уравнения динамики. Определим основные переменные процесса, которые будут включены в модель:

$u$  – положение клапана (управляющая переменная);

$T_a$  – температура окружающей среды (возмущение);

$T_c$  – температура в помещении (управляемая переменная);

$h$  – высота столбика ртути (измеряемая величина);

$q$  – количество тепла, поступающего в помещение через клапан;

$q_a$  – количество тепла, поступающего в помещение из окружающей среды;

$q_g$  – количество тепла, отдаваемого на стенки термометра из помещения;

$q_{Hg}$  – количество тепла от стенок помещения на ртуть;

$T_g$  – температура стенок термометра;

$T_{Hg}$  – температура ртути;

$A_g$  – внутреннее сечение стенок термометра;

$V_g$  – внутренний объем стенок термометра;

$V_{Hg}$  – объем ртути.

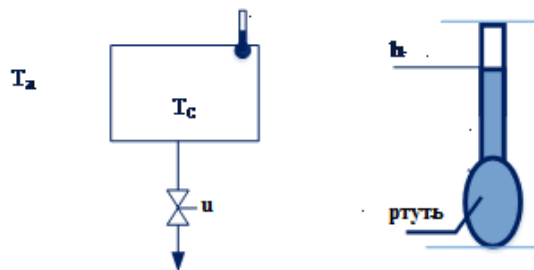


Рисунок 2.4.1 – Объект регулирования температуры в помещении

Разумно предположить, что поток тепла через границу пропорционален разности температур по обе стороны границы и что изменение температуры среды пропорционально поставляемой в нее тепловой энергии. Учитывая это

и уравнения теплового баланса, запишем следующие уравнения модели:

$$\begin{aligned}
 q &= a_0 u; \\
 q_a &= a_1 (T_a - T_c); \\
 q_g &= a_2 (T_c - T_g); \\
 q_{H_g} &= a_3 (T_g - T_{H_g}); \\
 \frac{dT_c}{dt} &= b_1 \cdot (q_a + q - q_g); \\
 \frac{dT_g}{dt} &= b_2 \cdot (q_g + q_{H_g}); \\
 \frac{dT_{H_g}}{dt} &= b_3 \cdot q_{H_g}.
 \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Предположим, что материалы расширяются пропорционально своей температуре, то:

$$\begin{aligned}
 A_g &= c_1 T_g^2; \\
 V_g &= c_2 T_g^3; \\
 V_{H_g} &= c_3 T_{H_g}^3; \\
 h &= \frac{V_{H_g} - V_g}{A_g}.
 \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Параметры  $a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$  – положительные константы, зависящие от геометрии и свойств материала. В нормально работающем термометре должно выполняться следующее условие:  $c_3 > c_2 c_3$  (когда  $T_{H_g}$  и  $T_g$  стремятся к более высокому стационарному значению,  $h$  увеличивается. Именно поэтому такие материалы, как ртуть, используется в термометрах: их температурный коэффициент расширения большой).

Выберем  $T_a$  в качестве входных переменных,  $h$  и  $T_c$  в качестве выходных переменных, переменные  $T_c, T_g,$  и  $T_{H_g}$  в качестве переменных состояния.

Заметим, что при  $u^* = 0$ , значение  $h^*$  по (2.4.2) является точкой равновесия. Линеаризация в окрестности этой точки равновесия приводит к системе уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned}
 \frac{dT_c}{dt} &= a_1 \cdot (T_a - T_c) + \beta_1 u; \\
 \frac{dT_g}{dt} &= a_2 \cdot (T_c - T_g) + a_3 \cdot (T_{H_g} - T_g); \\
 \frac{dT_{H_g}}{dt} &= a_4 \cdot (T_g - T_{H_g}); \\
 h &= \gamma_1 T_{H_g} - \gamma_2 T_g.
 \end{aligned}$$

В приведенных выше уравнениях все параметры являются положительными  $\gamma_1 > \gamma_2$ .

#### 2.4.3 Объект регулирования температуры красильного раствора.

Рассмотрим ванну красильной машины как объект регулирования температуры красильного. Ванна обогревается с помощью змеевика (рисунок 2.3.1), в который через регулирующий клапан подается пар с расходом  $g$  (кг/сек), с удельной энтальпией  $i_0$  (кДж/кг). В ванну поступает красильный раствор, уровень которого поддерживается на заданном значении  $H_0$  регулятором уровня, подающим  $G_n$  кг/сек подкрепляющего раствора с плотностью  $\rho_n$ , температурой  $\theta_n$  и удельной теплоемкостью  $c_n$ . Соответствующий этому уровню объем рабочего раствора в ванне, имеющего температуру  $\theta_p$ , плотность  $\rho_p$  и удельную теплоемкость  $c_p$ , обозначим через  $V$ . Концентрация раствора регулируется регулятором концентрации или дозирующим устройством. В ванну поступает также отжатая в предыдущей машине влажная ткань с массовой скоростью  $u_T$  (кг/с).

Уравнение установившегося состояния (уравнение теплового баланса ванны) имеет вид:

$$Q_{10} + Q_{20} + Q_{30} + Q_{40} - Q_{50} - Q_{60} = 0,$$

где  $Q_1 = \alpha \cdot S \cdot (\theta_{cm} - \theta_p)$  - тепло, вносимое паром;

$Q_2 = G_n \cdot c_n \cdot \theta_n$  - тепло, вносимое подкрепляющим раствором;

$Q_3 = G_e \cdot c_e \cdot \theta_e$  - тепло, вносимое водой;

$Q_4 = u_m \cdot (c_r + c_{p1} m_1) \cdot \theta_r$  - тепло, вносимое тканью;

$Q_5 = u_m (c_r + c_p m_2) \cdot \theta_p$  - потеря тепла с уходящей тканью;

$Q_6 = Q'_6 + Q''_6$  - потеря тепла ванной в окружающую среду  $Q'_6$  (теплопередача) и на испарение  $Q''_6$  с поверхности жидкости; здесь  $Q'_6 = A_1 \cdot (\theta_p - \theta_{oc})$ ,  $A_1$  - площадь поверхности ванны (для упрощения принимается пропорциональной разности температур, что практически допустимо при  $\theta_p < 80^\circ$ ); потеря  $Q''_6$  нелинейно зависит от температуры, но в определенном интервале температур в линейном приближении  $Q''_6 \approx A \cdot \theta$ ,  $A$  - эквивалентный коэффициент теплопередачи ванны;

$\theta_{cm}, \theta_b, \theta_r, \theta_{oc}$  - температура соответственно стенок змеевика, подливаемой воды, входящей ткани и окружающей среды;

$c_r, c_e, c_{p1}$  - удельные теплоемкости сухой ткани, воды и раствора, которым пропитана поступающая ткань (в дальнейшем для упрощения принимается  $c_{p1} \approx c_p \approx c_e = 4,19$  кДж/(кгС<sup>0</sup>);

$\alpha$  - коэффициент теплопередачи от стенок змеевика к жидкости, кВт/(м<sup>2</sup>С<sup>0</sup>);

$S$  - наружная поверхность трубок, м<sup>2</sup>.

При неустановившемся состоянии будет изменяться приток или расход тепла, в результате чего в ванне тепло будет накапливаться или убывать. Рассмотрим схему приращения тепловых потоков в ванну при изменении

количества вносимого с паром тепла на величину  $\Delta Q$  и при изменении температуры подкрепляющего раствора на величину  $\Delta\theta_1$ .

Примем за регулируемую величину температуру раствора -  $\theta_p$ , регулируемое воздействие – расход пара  $g$ . За возмущение примем изменение массовой скорости ткани  $u_m$ .

Тепловой поток, вносимый паром  $Q = g(i_o - i_k)$ , где  $i_k$  – энтальпия конденсата, удаляемого из змеевика. При изменении подачи греющего пара  $\Delta Q$  изменится температура стенок змеевика  $\theta_{cm}$ , тепловой поток  $\Delta Q_1$  и температура  $\theta_p$ . Заполненный пароводяной смесью змеевик обладает теплоемкостью  $C_1$ . Процесс изменения температуры стенок  $\theta_{cm}$  можно описать уравнением (из уравнения материального баланса жидкости в ванне):

$$C_1 \frac{d(\Delta\theta_{cm})}{dt} = \Delta Q - \Delta Q_1 = \Delta Q - \frac{\Delta Q_{cm} - \Delta Q_p}{R_1},$$

где  $R_1 = \frac{1}{\alpha \cdot S}$  - термическое сопротивление змеевика.

Изменение теплового потока  $\Delta Q_1$  и массовой скорости входящей ткани  $\Delta u_m$  приведет к изменению  $\theta_p$  и тепловых потоков  $\Delta Q_4$  и  $\Delta Q_3$ , вносимых поступающей и уносимых выходящей тканью, а также к изменению потери тепла ванной в окружающую среду  $\Delta Q_6$ . Тогда имеем:

$$C_2 \frac{d(\Delta Q_p)}{dt} = \Delta Q_1 + \Delta Q_4 - \Delta Q_5 - \Delta Q_6, \quad (2.4.3)$$

где  $c_2 = V\rho_p c_p$  - теплоемкость ванны;

$$\Delta Q_1 = \frac{1}{R_1} (\Delta Q_{cm} - \Delta Q_p); \quad \Delta Q_4 = (c_p + c_{p1}m_1)\theta_{r0} \Delta U_m$$

$$\Delta Q_5 = U_{m0} (c_r + c_p m_2) \Delta\theta_p + (c_r + c_p m_2) \Delta U_m;$$

$$\Delta Q_6 = (A_1 + A_2) \Delta\theta.$$

Представив  $Q_4 - Q_5 - Q_6$  в форме слагаемых, зависящих от  $\Delta\theta_p$  и  $\Delta u_m$ , получим:

$$C_2 \frac{d(\Delta\theta_p)}{dt} = \frac{\Delta\theta_{cm} - \Delta\theta_p}{R_1} - \frac{\Delta\theta_p}{R_2} + F \Delta U_m, \quad (2.4.4)$$

где  $R_2 = \frac{1}{U_{m0} (c_r + c_p m_2) + (A_1 + A_2)}$  имеет размерность термического сопротивления  $^{\circ}\text{C}/\text{кВт}$ ,

$$F = (c_r + c_{p1}m_1)\theta_{r0} - (c_r + c_p m_2)\theta_{p0}.$$

Запишем уравнения (2.4.3) и (2.4.4) в операторной форме при нулевых начальных условиях (оператор  $p = \frac{d}{dt}$ ):



$$C_1 p \Delta \theta_{cm} = \Delta Q - \frac{\Delta \theta_{cm} - \Delta \theta_p}{R_1}; \quad (2.4.5)$$

$$C_2 p \Delta \theta_p = \frac{\Delta \theta_{cm} - \Delta \theta_p}{R_1} - \frac{\Delta \theta_p}{R_2} + F \Delta U_m. \quad (2.4.6)$$

Как известно из операционного исчисления, с такими уравнениями можно обращаться, как с обычными алгебраическими уравнениями. Решая эту систему уравнений, получим:

$$R_1 C_1 R_2 C_2 p^2 \Delta \theta_p + (R_1 C_1 + C_2 R_2 + C_1 R_2) \cdot p \cdot \Delta \theta_p + \Delta \theta_p = \\ + R_2 \Delta Q + R_2 (R_1 C_1 p + 1) \cdot F \cdot \Delta U_m.$$

Обозначим  $T_1 = C_1 R_1$ ,  $T_2 = C_2 R_2$ ,  $T_3 = C_1 R_2$ .

Тогда

$$T_1 T_2 \frac{d^2 \Delta \theta_p}{dt^2} + (T_1 + T_2 + T_3) \frac{d \Delta \theta_p}{dt} + \Delta \theta_p = R_2 \Delta Q + R_2 (T_1 p) F \Delta U_m. \quad (2.4.7)$$

Введем безразмерные величины:

$$\varphi = \frac{\Delta \theta_p}{\theta_{p_0}}, \quad \mu = \frac{\Delta Q}{Q_{\max}}, \quad f = \frac{\Delta U_m}{U_{m_0}},$$

где  $Q_{\max}$  – максимальный приток тепла при полностью открытом клапане.

Подставляя выражения для  $\Delta \theta_p$ ,  $\Delta Q$  и  $\Delta U_m$  в уравнение (2.4.7), получим после преобразований:

$$T_1 T_2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + (T_1 + T_2 + T_3) \frac{d \varphi}{dt} + \varphi = k_0 \mu + k_1 (T_1 p + 1) f, \quad (2.4.8)$$

где  $T_1, T_2, T_3$  – постоянные времени:

$$T_1 = C_1 R_1 = \frac{C_1}{\alpha S}, \quad T_2 = C_2 R_2 = \frac{C_2}{U_{m_0} (C_r + C_p m_2) + (A_1 + A_2)},$$

$$T_3 = C_1 R_2 = \frac{C_1}{U_{m_0} (C_r + C_p m_2) + (A_1 + A_2)},$$

а коэффициенты передачи

$$k_0 = \frac{Q_{\max} R_2}{\theta_{p_0}} = \frac{Q_{\max}}{[U_{m_0} (C_r + C_p m_2) + (A_1 + A_2)] \cdot \theta_{p_0}} - \text{коэффициент передачи по}$$

управляющему воздействию;

$$k_1 = \frac{U_{m_0} [(C_r + C_{p_1} m_1) - (C_r + C_p m_1)] \cdot \frac{\theta_{r_0}}{\theta_{p_0}}}{U_{m_0} (C_r + C_p m_0) + (A_1 + A_2)} - \text{коэффициент передачи по каналу}$$

возмущения.

Следовательно, динамические свойства нагреваемой пропиточной ванны соответствуют динамическим свойствам звена второго порядка, на

входе которого действует эквивалентное возмущение  $(T_1 p + 1)f$ . Звено это характеризуется тремя постоянными времени и коэффициентом передачи  $k_0$ . При учете других возмущений, вызванных изменением влажности  $m_1$  и  $m_2$ , температуры входящей ткани  $\theta_p$  и другими факторами, в правую часть уравнения (2.4.8) вошли бы дополнительные члены.

Передаточная функция по отношению к регулирующему воздействию:

$$W_0(p) = \frac{k_0}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2 + T_3) \cdot p + 1},$$

а по отношению к возмущению:

$$W_1(p) = \frac{k_1(T_1 p + 1)}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2 + T_3) \cdot p + 1}.$$

Рассматривая коэффициенты уравнения (2.4.8), можно прийти к некоторым выводам, справедливым и для многих других объектов регулирования. Значения постоянных времени  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$  зависят от величин теплоемкостей  $C_1$  и  $C_2$  и тепловых сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$ . Если можно говорить о постоянстве величин  $C_1$  и  $C_2$  (по крайней мере, для фиксированного значения уровня раствора  $H_0$ ), то тепловые сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  в процессе эксплуатации могут значительно изменяться. Изменение коэффициента теплопередачи змеевика, например, при образовании на его поверхности загрязнений, обусловленных отложением красителя или солей, приводит к увеличению теплового сопротивления  $R_1$ . При изменении отжима ткани, ее плотности и скорости движения меняется и тепловое сопротивление  $R_2$ . Это сопротивление изменяется также с изменением температуры раствора  $\theta_p$  (при увеличении температуры увеличивается коэффициент  $A$  из-за нелинейной зависимости между  $\theta_p$  и потерей тепла на испарение зеркала жидкости раствора). Эти же факторы приводят и к изменению величины коэффициента передачи  $k_0$ . Указанное обстоятельство необходимо учитывать как при выборе регуляторов для таких объектов, предусматривая возможность изменения настройки регулятора при изменении параметров объекта в процессе эксплуатации, так и при экспериментальном определении параметров объекта (при разных режимах работы объекта эти параметры могут сильно изменяться).

Рассмотрим структурную схему математической модели процесса регулирования температуры раствора. Уравнения (2.4.5) и (2.4.65) можно представить в операторном виде:

$$\Delta\theta_p = W_1(p) \cdot \Delta\theta_{cm} + W_2(p) \cdot \Delta U_m, \quad (2.4.9)$$

$$\Delta\theta_{cm} = W_3(p) \cdot \Delta Q + W_4(p) \cdot \Delta\theta_p, \quad (2.4.10)$$

$$\text{где } W_1(p) = \frac{1}{R_1 [C_2 p + (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})]};$$

$$W_2(p) = \frac{F}{C_2 p + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)};$$

$$W_3(p) = \frac{R_1}{R_1 C_1 p + 1};$$

$$W_4(p) = \frac{1}{R_1 C_1 p + 1}.$$

Системе уравнений (2.4.9) и (2.4.10) соответствует структурная схема (рисунок 2.4.2), в которой имеется контур с положительной обратной связью по параметру  $\Delta\theta_p$ .

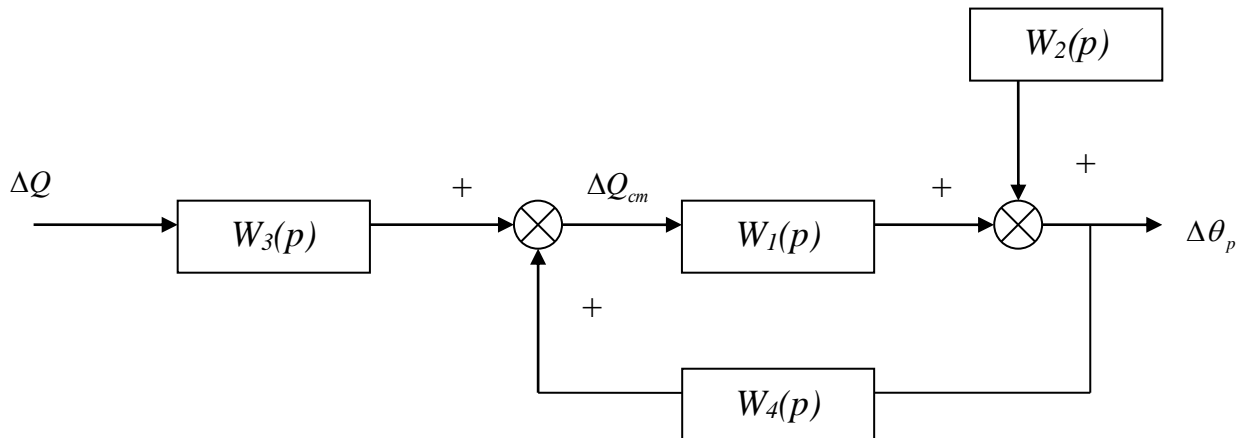


Рисунок 2.4.2 - Структурная схема математической модели процесса регулирования температуры раствора

Передаточная функция по отношению к управляющему воздействию  $\Delta Q$ :

$$W_0(p) = \frac{\Delta\theta_p}{\Delta\theta_1} = \frac{W_1(p) \cdot W_3(p)}{1 - W_1(p) \cdot W_4(p)}.$$

После подстановки значений  $W_1(p)$ ,  $W_3(p)$  и  $W_4(p)$  найдем значение  $W_0(p)$ , соответствующее его значению, получаемому из уравнения (2.4.9).

Передаточная функция по отношению к возмущению

$$W_1(p) = \frac{\Delta\theta_p}{\Delta U_m} = \frac{W_2(p)}{1 - W_1(p) \cdot W_4(p)}.$$

Подстановка значений передаточных функций дает  $W(p)$ , соответствующее его значению, получаемому из уравнения (2.4.10).

### 3 Идентификация объектов управления

#### 3.1 Общие подходы к проблеме идентификации сведения

Построение математической модели объекта может производиться аналитическими и экспериментальными методами. Рассматривавшиеся ранее аналитические методы предусматривают получение математического описания объекта на основе законов физики, механики, химии и т. д.

Существенной особенностью этих моделей является отражение механизма объекта или явления в структуре оператора модели, то есть всех причинно-следственных связей, имеющих у объекта. Такой подход дает положительный результат, если рассматриваемый объект достаточно прост по структуре и хорошо изучен. К тому же функционирующие системы подвергаются различным внешним и внутренним возмущениям, вследствие чего меняются их характеристики. Поэтому практически невозможно построить достаточно точную математическую модель сложной системы только на основе теоретических исследований протекающих в ней физических процессов. В связи с этим, если объект изучен недостаточно или же настолько сложен, что аналитическое описание его математической моделью практически невозможно, прибегают к экспериментальным методам, суть которых сводится к статистической обработке технологических данных.

Для решения задач управления необходимо знать характеристики объекта управления, чтобы правильно построенный сигнал управления мог перевести объект из некоторого начального состояния в требуемое состояние.

Определением характеристик объекта по результатам измерений входных и выходных сигналов занимается одно из важнейших направлений теории автоматического управления, которое называют *идентификацией*. Модели, построенные с помощью методов теории идентификации, могут и не отражать внутренних механизмов явления, что необходимо для познавательной модели. Им достаточно лишь констатировать наличие определенных формальных связей между входами и выходами объекта. Характер и особенности этой связи и составляют основу модели, полученной в процессе идентификации объекта управления. Итак, идентификация изучает методы построения математических моделей функционирующих систем по априорной и экспериментальной информации и является одним из основных методов в теории и практике управления сложными объектами различной физической природы.

В общем виде задача идентификации заключается в определении оператора объекта, преобразующего входные воздействия в выходные. Математически соответствие между входной и выходной функциями можно записать в виде выражения

$$y(t) = A(f)u(t),$$

Модели, построенные с помощью методов теории идентификации, могут и не отражать внутренних механизмов явления, что необходимо для познавательной модели. Им достаточно лишь констатировать наличие определенных формальных связей теории и практике управления сложными объектами различной физической природы.

В общем виде задача идентификации заключается в определении оператора объекта, преобразующего входные воздействия в выходные.

Математическое соответствие между входной и выходной функциями можно записать в виде выражения:

$$y(t) = A(f)u(t), \quad (3.1)$$

где  $A(f)$  – математический оператор, зависящий от возмущений (операторных воздействий, которые заранее неизвестны и подлежат определению;

$y(t)$  – вектор выходных координат объекта;

$u(t)$  – вектор управления (входа).

$u$  и  $y$  – соответственно входная и выходная векторные переменные идентифицируемой системы, которые могут быть как детерминированными, так и случайными. Необходимо иметь в виду, что величины  $u$  и  $y$  измеряются при воздействии случайных помех. В задаче идентификации требуется оценить неизвестный оператор  $A$ .

При решении этой задачи предполагается провести соответствующий активный или пассивный эксперимент с целью накопления необходимых данных о работе системы (наблюдений за некоторыми переменными системы), а затем, используя их и соответствующие методы, получить в явном виде необходимую информацию о математической модели системы. Считается, что в общем случае имеется и некоторая априорная информация о математической модели рассматриваемой динамической системы.

В самом широком плане идентификация может рассматриваться как задача последовательного решения, охватывающая планирование эксперимента, определение, к какому классу принадлежит неизвестный оператор  $A$ , и оценивание неизвестных параметров (детерминированных или случайных величин или функций). Такой подход к проблеме идентификации приводит к трудно решаемой задаче. Однако такая постановка задачи обращает внимание на необходимость совмещать планирование эксперимента, оценивание класса неизвестного оператора и оценивание параметров оператора известного класса.

Известна и другая постановка проблемы идентификации, охватывающая только планирование эксперимента и оценивание неизвестного векторного или скалярного параметра оператора известного класса. В этой формулировке принимается, что класс оператора  $A$  известен с точностью до некоторого векторного или скалярного параметра  $c$  (предполагается, что класс оператора определен на основании имеющейся априорной информации об идентифицируемой системе). Тогда операторное уравнение (3.1) принимает следующий вид:

$$y(t) = A(c)u(t), \quad (3.2)$$

где  $A(c)$  – оператор, действующий на  $u$  и известным образом зависящий от неизвестного векторного параметра  $c$ .

В данном случае требуется разработать такой план наблюдения над  $u$  и  $y$  и подобрать такой метод вычисления оценок, которые позволили бы получить в каком-то смысле оптимальную оценку неизвестного параметра  $s$ .

Чаще всего в качестве метода оценивания параметров используется метод наименьших квадратов, то есть используется среднеквадратичный критерий. Здесь необходимо отметить следующее. Выбор критерия оценки параметров зависит от *характера помех*, то есть от их статистических свойств. При нормальном распределении помех наибольшую точность дает среднеквадратичный критерий. Нормальное распределение используется наиболее часто для описания свойств различных случайных величин. Теоретическим обоснованием роли нормального распределения является центральная предельная теорема. Согласно этой теореме, когда есть основание рассматривать исследуемую случайную величину как сумму большого числа независимых случайных воздействий, влияние каждого из которых ничтожно мало, то даже если распределения составляющих произвольны, можно ожидать, что исследуемая случайная величина будет распределена по нормальному закону. Множество событий происходит случайно вследствие воздействия на них большого числа независимых (или слабо зависимых) возмущений. У таких явлений закон распределения близок к нормальному. Нормальный закон является предельным законом для суммы большого числа  $n$  независимых случайных величин, каждая из которых подчинена какому угодно закону (теорема Ляпунова). Основное ограничение состоит в том, чтобы все слагаемые играли в общей сумме относительно малую роль. Это не значит, конечно, что любая случайная величина, если не доказано противное, подчиняется этому распределению. Нормальное распределение есть один из типов распределений, оно достаточно хорошо описывает многие явления, встречающиеся в природе, и имеет большое практическое приложение. Нормальное распределение обладает тем преимуществом, что оно характеризуется удобными математическими свойствами. Поэтому, большинство статистических методов построено в предположении, что исследуемая величина подчиняется нормальному распределению, хотя на практике это предположение всегда требует специальной проверки.

### 3.2 Виды идентификации

Оператор модели объекта является его математической характеристикой. Математическая модель объекта представляет собой совокупность уравнений и ограничивающих условий, которые в количественной форме описывают связи между переменными объекта. Поведение динамических систем в пространственно-временной области описывается дифференциальными, разностными, интегральными уравнениями. В частотной области примером математической модели линейной системы является частотная характеристика, в области изображений – передаточная функция. Когда поведение системы

описывается через обобщенные координаты в фазовом пространстве, то соответствующие математические уравнения представляют модели в пространстве состояний. Во многих случаях существует однозначный переход от модели одного типа к другому [9].

Математически операторы определяются в соответствующих пространствах, т. е. на множествах элементов, над которыми совершаются преобразования. Примерами таких пространств являются пространства: непрерывных функций; непрерывных функций, имеющих непрерывные производные до  $n$ -го порядка ( $n > 0$ ); функций с суммируемым квадратом и т. д. Формально оператор характеризуется структурой и параметрами. Так, структура дифференциального оператора определяется его порядком  $n$ , а параметрами служат коэффициенты уравнения.

Полное математическое описание сложной системы почти всегда представляет собой нереальную задачу, так как невозможно учесть все действующие возмущения в процессе функционирования. Математическая модель отражает только те основные закономерности реальной системы, которые необходимы для решения конкретной задачи познания, проектирования, контроля или управления.

Одной из основных проблем теории идентификации является определение структуры модели. На этом этапе требуется найти математическую модель, адекватно описывающую физическую ситуацию. Во-первых, должны быть определены границы системы и системные переменные. Затем на основе предварительных сведений должны быть определены отношения между этими переменными и предположения о неопределенностях в модели. Все это вместе определяет *структуру модели*.

Процесс определения структуры оператора модели называется *структурной идентификацией*. Задачей структурной идентификации является представление реального объекта управления в виде математической модели. Как правило, в большинстве работ по синтезу математических моделей структура постулируется априори с точностью до некоторого множества неизвестных параметров. В дальнейшем это множество является основным объектом исследования. Это не означает, что методам идентификации структурной идентификации не уделялось внимания. Доминирующим подходом при выборе структуры является статистический подход, и решение принимается на заданном классе моделей-претендентов. Но какие-либо формализованные подходы и методы, позволяющие выбрать структуру модели на основе доступного для наблюдения информационного множества объекта, отсутствуют. Это объясняется тем, что некоторые элементы структуры модели не поддаются адекватной математической трактовке. Поэтому структурное множество часто сужают до таких математических категорий и объектов, которые можно описать на существующем математическом языке и, следовательно, задать на классе функций из заданного множества. Конкретный выбор математической модели зависит от типа объекта. В качестве математических

моделей технических систем применяются дифференциальные уравнения в обыкновенных и частных производных. Причем при решении задач управления предпочтение отдается моделям в пространстве состояний и структурированным моделям, описываемым дифференциальными уравнениями в обыкновенных производных.

Надо отметить, что понятие «структура» не имеет четкого определения и понимается разными авторами по-разному. Будем понимать под структурой модели вид оператора модели с точностью до его коэффициентов.

Следующим шагом является решение задачи оценки неизвестных параметров на основе экспериментальных данных. Обычно различают *оценку состояния* и *оценку параметров*.

При решении проблемы оценки состояния стараются оценить состояние системы  $y$  в предположении, что модель идеальна и поэтому параметры точно известны. Аналогично, идентификация параметров решает задачу оценки параметров на основе измеренных значений входных и выходных переменных объекта. В начале 1960-х годов, когда были введены современные концепции теории систем, было также признано, что задачи оценки состояния и оценка параметров являются схожими. Поэтому задача идентификации параметров также рассматривалась как задача оценки состояния. Помимо задач оценки состояния и параметров, в некоторых приложениях существует также необходимость в оценке или восстановлении возмущений системы.

Кроме того, для дальнейшего анализа неопределенностей (погрешностей) в оценках, необходимо сделать вывод о статистических свойствах возмущений  $v$ ,  $w$  на основе наблюдаемых данных.

В случае, когда оператор модели задается с точностью до вектора параметров, мы имеем задачу *параметрической* идентификации. Она формулируется таким образом: на основе экспериментальных данных указать значения вектора параметров, при которых модель наилучшим образом (или достаточно точно) в определенном смысле аппроксимирует оператор объекта. После того как математическая модель объекта определена (определена структура оператора), проводят параметрическую идентификацию, заключающуюся в определении числовых параметров математической модели. При использовании методов параметрической идентификации сразу определяются коэффициенты передаточной функции или уравнения объекта.

Если оператор модели содержит неизвестные функции, идентификация в терминах таких операторов называется *непараметрической*. Методы этой группы используются для определения временных или частотных характеристик объектов, а также характеристик случайных процессов генерируемых объектами. По полученным характеристикам затем определяется уравнение модели.



В дальнейшем предполагается, что структура модели известна, может быть, и не самая подходящая.

Таким образом, чтобы начать процедуру идентификации, нужно иметь некоторые сведения об объекте, которые подразделяются на два вида: априорные и апостериорные.

*Априорная информация*, которой необходимо располагать еще до наблюдения входов и выходов объекта, определяет структуру идентифицируемого объекта. Например, можно выделить четыре признака (хотя структура не исчерпывается ими): динамичность, стохастичность, нелинейность, дискретность. Естественно, представления о виде модели могут измениться после анализа апостериорной информации, то есть после наблюдения за поведением входа и выхода объекта.

*Апостериорная информация* имеет количественный характер, то есть это результат (протокол) наблюдений входа и выхода объекта. Для непрерывных объектов имеем записи непрерывных функций:  $x(t)$  – результаты всех измерений входов объекта и  $y(t)$  – результаты измерений его выходов за тот же период наблюдений (интервал  $0 < t \leq T$ ). Протокол записывается в виде:  $\langle x(t), y(t) \rangle, 0 < t \leq T$ . Это означает, что поведение объекта зарегистрировано в виде  $n+m$  различных кривых:  $x_1(t), \dots, x_n(t); y_1(t), \dots, y_m(t)$  в этом интервале.

В дискретном случае имеем  $x = (x_1, \dots, x_N), y = (y_1, \dots, y_N)$ , и протокол записывается в виде  $\langle x_i y_j \rangle, i=1, \dots, N; j=1, \dots, N$ , где  $x = (x_{1i}, \dots, x_{ni}), y_i = (y_{1i}, \dots, y_{mi})$ . Этот протокол представляет собой таблицу из  $n+m$  столбцов и  $N$  строк.

### 3.3 Процедура идентификации системы

Математическая модель всегда является приближением к реально существующей модели. На практике сложность системы, ограниченность предварительных знаний о системе, и неполнота экспериментальных данных обуславливают то, что нет смысла строить точные теоретические модели. Даже если есть достаточно полное знание о системе, доступен многообразный экспериментальный материал, точное математическое описание чаще всего не желательно, потому что модель станет слишком сложной для использования. Следовательно, *идентификация системы* рассматривается как *приближенное моделирование* для конкретного применения на основе наблюдаемых данных и предварительных знаний о системе.

Как упоминалось выше, основными компонентами процедуры идентификации являются априорные сведения, цели и экспериментальные данные, причем предварительные знания о системе играют ключевую роль. Следует понимать, что эти компоненты не являются независимыми. Часто данные собираются на основе знаний о системе и целей моделирования, ведущих к соответствующей организации эксперимента. В то же время наблюдаемые данные могут также привести к корректировке априорных знаний или даже цели идентификации.

В дальнейшем процедура идентификации, которая проводится с целью получения соответствующей математической модели системы, представляется в виде следующего алгоритма (рисунок 3.1). Как видно из рисунка 3.1, выбор набора моделей полностью определяется нашими априорными знаниями о системе. Этот выбор из множества моделей-кандидатов без сомнения самый важный и самый трудный шаг в процедуре идентификации.

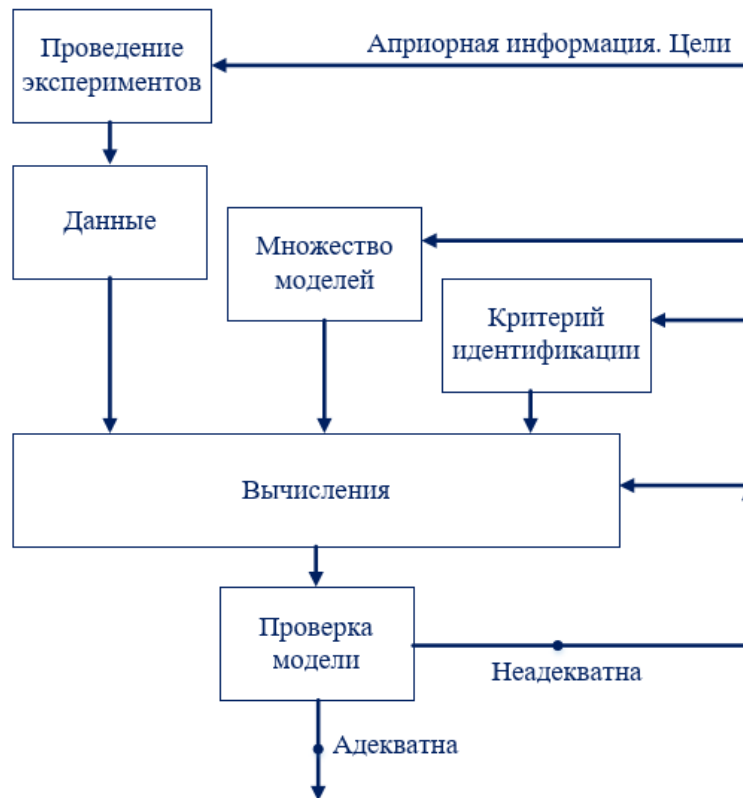


Рисунок 3.1 – Алгоритм идентификации

Например, в некоторых приложениях требуется очень подробная и точная модель. В этом случае естественный выбор заключается в том, чтобы основывать модель на физических законах и дополнительных взаимосвязях с соответствующими физическими параметрами, что приводит к структуре модели, которая называется «белый ящик». Если, однако, некоторые из упомянутых параметров являются неопределенными или недостаточно изученными и, например, должны быть получены реалистичные сведения о поведении системы, параметры могут быть оценены с использованием экспериментальных данных о системе. Модели такого вида составляют так называемые модели «серого ящика».

В других случаях, как, например, в системах управления и контроля, обычно достаточно использовать линейные модели, которые не обязательно разрабатываются с привлечением физических законов и взаимосвязей параметров процесса. Эти модели, как правило, называются моделями «черного ящика». В дополнение к выбору структуры, необходимо выбрать вид представления модели, например, модель пространства состояний,

импульсная характеристика или модель в виде дифференциального уравнения.

Для того чтобы определить соответствие между выходом модели и экспериментальными данными, должен быть определен критерий идентификации и метод идентификации, которые позволяют численно решить задачу оценки параметров.

Следующим шагом после определения структуры модели с соответствующими значениями параметров является *анализ* поведения выхода системы путем реализации модели. Здесь выясняется, достаточно ли хороша модель для ее предполагаемого использования. Если модель считается подходящей, то она может быть использована, в противном случае процедура идентификации должна повториться, что чаще всего и происходит на практике. Однако необходимо заметить, что из-за большого количества возможных выборов (модели), процедура идентификации системы представляет собой циклический процесс, чтобы получить адекватную работоспособную модель (рисунок 3.1).

### 3.4 Структурное представление динамической системы

Основная задача при решении задачи идентификации - определение соответствующей математической модели динамической системы на основе наблюдаемых временных рядов и предварительных знаний о системе. В теории управления система рассматривается как объект, в котором различные переменные взаимодействуют во времени и пространстве, и производят наблюдаемые сигналы. Системы такого типа также называются открытыми системами. Графическое представление открытой системы, подходящей для решения проблемы идентификации системы, представлено на рисунке 3.2.

Датчик, который рассматривается как статический элемент, добавлен, чтобы подчеркнуть необходимость мониторинга системы для получения наблюдаемых сигналов. В дальнейшем датчик рассматривается как часть динамической системы.

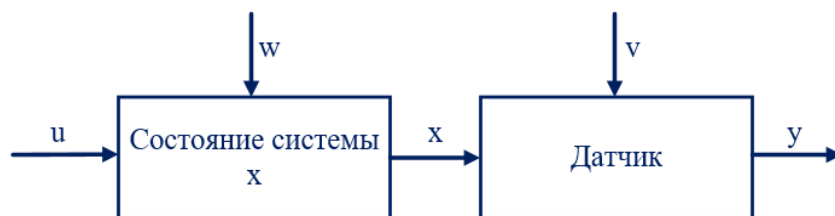


Рисунок 3.2 - Представление идентифицируемой системы

Системные переменные могут быть скалярными или векторными, непрерывными или дискретными функциями времени. На рисунке 3.2 можно выделить следующие системные переменные:

- входной сигнал  $u$ : вход  $u$  является экзогенным, измеряемым, контролируемым сигналом;

- возмущение  $w$ : возмущение  $w$  является экзогенным, возможно, измеряемым сигналом, который не контролируется. Это влияние на поведение системы окружающей среды. Если возмущение не поддается измерению, оно рассматривается как системный шум - возможна структурированная неопределенность во входных сигналах  $u$  или во взаимоотношениях между  $u$  и  $x$ ;

- состояние  $x$ : состояние системы  $x$  отражает все эффекты прошлых входов  $u$  и возмущения  $w$  в системе. В целом динамика состояний описывается дифференциальными или разностными уравнениями. Следовательно, динамическое поведение системы зависит от изменения внешних сигналов  $u$  и  $w$  и законов, описывающих внутренние механизмы системы. В дальнейшем статические системы рассматриваются как особые случаи динамических систем и описываются алгебраическими отношениями между  $u$ ,  $w$  и  $x$ .

- возмущение  $v$ : как и  $w$ , возмущение  $v$  является экзогенным сигналом, который не контролируется. Он представляет собой погрешность (шум), введенную датчиком.

- выход  $y$ : выход  $y$  - выход датчика. Он представляет собой все наблюдаемое сигналы, представляющие интерес для идентификации, то есть  $y$  моделируется как функция остальных сигналов. Ввиду того, что динамикой датчика пренебрегают, статическое отношение между  $y$  и  $x$ ,  $v$  выражается в алгебраическими соотношениями.

Для иллюстрации введенных понятий рассмотрим несколько примеров.

*Пример 3.1 Система обработки сигналов.* Во многих приложениях обработки речи или изображений имеется только выходной сигнал: временной ряд звуковых колебаний или набор изображений. Цель заключается в том, чтобы найти компактное описание этого сигнала, который после передачи или хранения можно использовать для того, чтобы реконструировать первоначальный сигнал. Проблема заключается в наличии помехи в выходном сигнале. Система может быть представлена как на рисунке 3.3.

*Пример 3.2 Биореактор.* Моделирование таких объектов обычно применяется на стадии проектирования. На начальном этапе реактор заполняется небольшим количеством питательного субстрата и биомассы.

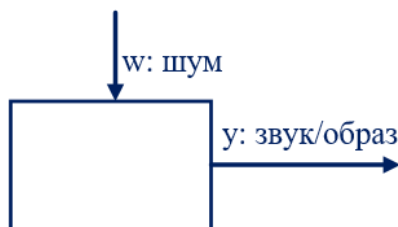


Рисунок 3.3 – Система обработки сигналов

Затем реактор постепенно заполняется исходным субстратом, концентрации субстрата и биомассы определяют состояние системы. Так как

напрямую измерить количество субстрата и биомассы затруднительно, обычно используется растворенный кислород для того, чтобы определять степень поглощения кислорода, которую можно рассматривать как выход системы. Сигнал  $w$  представляет неопределенности (погрешности) во влиянии скорости потока и концентрации субстрата, а также значительные ошибки модели из-за ограниченного знания биохимических процессов (рисунок 3.4).

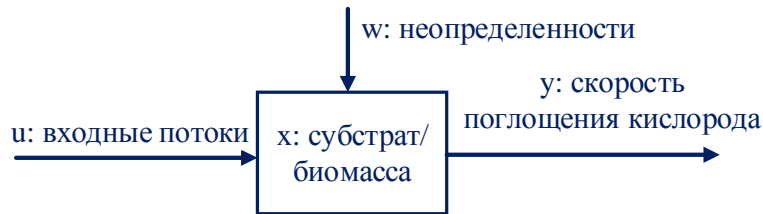


Рисунок 3.4 – Структура системы биохимических процессов

*Пример 3.3. Климат-контроль парника* является одним из сложных вопросов проблемы взаимодействия сельского хозяйства и теории управления. Обычная практика: ограничивать моделирование парника определением температуры и влажности в парнике. Характерной особенностью таких систем является большое влияние возмущений, таких, как ветер, температура окружающей среды, солнечная радиация, и т.д. на состояние системы. Отопление и вентиляция являются единственными управляемыми переменными, которые непосредственно влияют на условия в парнике. При условии постоянного проема окна, систему можно изобразить, как на рисунке 3.5.

Проиллюстрируем процесс математического моделирования на некоторых простых примерах. В дальнейшем вместо 3.1 будем рассматривать структуру модели, представленную на рисунке 3.6.

На рисунке 3.6  $v(\cdot)$  представляет собой аддитивный шум датчика, который отражает ошибки, возникающие в процессе измерения. Ошибки моделирования в результате упрощения модели (так как реальная система слишком сложна) и входные помехи представляются вектором  $w(\cdot)$ .

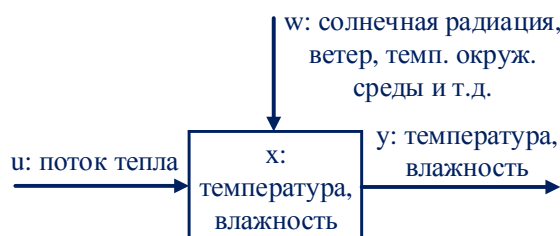


Рисунок 3.5 – Система климат-контроля

Часто предполагается, что  $v(\cdot)$ , а также  $w(\cdot)$ , представляют собой *белый шум*. В самом общем случае, белый шум описывается как сигнал, не зависящий от времени, то есть значение в некоторый момент времени не

связано ни с каким прошлым или будущим значением этого сигнала. Так как непрерывный белый шум физически не реализуем, то будем рассматривать дискретный белый сигнал.

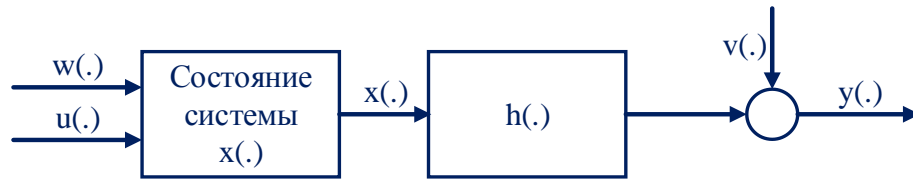


Рисунок 3.6 – Классическая структура математической модели объекта управления

Общее описание системы с сосредоточенными параметрами, представленной системой обыкновенных дифференциальных или разностных уравнений с аддитивным шумом датчика, основанное на базовых (физических, химических или биологических) принципах имеет вид:

- в дискретной области:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(t, x(t), u(t), w(t); \mathcal{G}), \quad x(0) = x_0; \\ y(t) &= h(t, x(t), u(t); \mathcal{G}) = v(t), \quad t \in \mathbb{Z}^+; \end{aligned} \quad (3.3)$$

- в непрерывной области:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= f(t, x(t), u(t), w(t); \mathcal{G}), \quad x(0) = x_0; \\ y(t) &= h(t, x(t), u(t); \mathcal{G}) = v(t), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где переменные и вектор-функции имеют соответствующие размерности (рисунок 3.6).

Здесь мы не рассматриваем системы с распределенными параметрами, описываемые системами уравнений в частных производных. Один из способов решения таких систем заключается в дискретизации пространственных переменных, что, в конечном счете, приведет к системе обыкновенных дифференциальных или разностных уравнений.

Система, представленная уравнениями (3.1) или (3.2), является очень общей и охватывает все упомянутые в предыдущих разделах классы модели. Рассмотрим примеры.

*Пример 3.4.* Рассмотрим резервуар с жидкостью с контролем уровня жидкости (рисунок 3.7). Начнем с уточнения наших знаний о внутренних механизмах системы.

Введем следующие переменные:

$V$ - объем жидкости в резервуаре;

$u(t)$ -приток жидкости;

$y(t)$ -выходной поток из резервуара. Тогда можем записать следующее уравнение баланса массы:

$$\frac{dV(t)}{dt} = u(t) - y(t),$$

с пропорциональным законом регулирования:

$$y(t) = k \cdot V(t),$$

где  $k$  – вещественная константа.

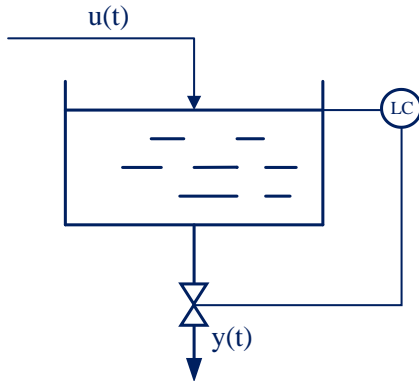


Рисунок 3.7 – Графическая схема резервуара

Тогда представление детерминированной модели (без учета помех) в пространстве состояний с  $x(t) = V(t)$  будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -k \cdot x(t) + u(t); \\ y(t) &= k \cdot x(t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Соответственно, в этом случае, когда  $w(t) = v(t) = 0$ , имеем:

$$\begin{aligned} f(t, x(t), u(t), w(t); \mathcal{G}) &= -k \cdot x(t) + u(t); \\ y_h(t, x(t), u(t); \mathcal{G}(t)) &= k \cdot x(t), \end{aligned}$$

с параметром  $\mathcal{G} = k$ .

Определенные свойства системы иллюстрируются на следующем примере, где используется другое представление.

*Пример 3.5.* Используя второе уравнение в системе (3.5), можно получить предыдущую модель в виде обыкновенного дифференциального уравнения, определяющего зависимость между  $u$  and  $y$ :

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t),$$

Которая дает единственное решение при использовании следующих начальных условий:  $y(0) = 0$  и  $u(t) = 0, t < 0$ .

Вначале решим однородное уравнение при  $u(t) = 0$  при  $\forall t$  с начальным условием  $y(0) = 0$ , а затем, применяя принцип вариации констант, мы получаем следующий результат:

$$y(t) = y(0) \cdot e^{-kt} + \int_0^t k \cdot e^{-k(t-\tau)} u(\tau) d\tau;$$

$$y(t) = \int_0^t k \cdot e^{-k(t-\tau)} u(\tau) d\tau,$$

Где  $\tau$ -переменная интегрирования.

Из этой модели можно получить два других представления модели линейной стационарной системы: модель в пространстве состояний и модель в виде дифференциального уравнения.

Общее представление модели в пространстве состояний линейной стационарной системы имеет вид:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t);$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t),$$

где матрицы  $A, B, C$  и  $D$  имеют соответствующие размерности.

Для рассматриваемого примера:  $A = -k, B = 1, C = k, D = 0$ .

Модель линейной системы в виде дифференциального уравнения имеет вид:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = b_0 u(t) + b_1 \frac{du(t)}{dt} + \dots + b_n \frac{d^n u(t)}{dt^n}. \quad (3.6)$$

В примере:  $a_n = a_{n-1} = \dots = a_2 = 0, a_1 = 1/k, b_0 = 1, b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ .

*Пример 3.6 Модель скользящего среднего, использующего три точки:*

$$y(t) = \frac{1}{3}[u(t) + u(t-1) + u(t-2)], \quad t \in Z^+$$

является представлением модели в виде разностного уравнения. Легко показать, что это еще один пример линейной стационарной модели.

Дискретная модель в пространстве состояний может быть получена, например, для  $x_1(t) = u(t-1), x_2(t) = u(t-2)$ , так что

$$x_1(t+1) = u(t),$$

$$x_2(t+1) = u(t-1) = x_1(t),$$

$$y(t) = \frac{1}{3}[u(t) + x_1(t) + x_2(t)], \quad t \in Z^+$$

или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \frac{1}{3}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{3} u(t), \quad t \in Z^+,$$

так что



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, d = \frac{1}{3}.$$

Это представление не является единственным. Например, можно принять,  $x_1(t) = u(t-2)$  и  $x_2(t) = u(t-1)$  и получить другой вид модели в пространстве состояний. С другой стороны, преобразование модели в пространстве состояний в модель в виде дифференциального уравнения является единственным.

В предыдущем примере с одним входом и одним выходом (в настоящее время принятое обозначение SISO<sup>2</sup>- система) модель в виде «вход-выход» может быть записана в следующей общей форме:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)u(\tau)d\tau, t \in R \quad (3.7)$$

и

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^t g(t-k)u(k), t \in Z^+, \quad (3.8)$$

которая также называется представлением модели с использованием импульсной характеристики. Функция  $g(t)$  называется *непрерывной* или *дискретной импульсной функцией* системы.

В (3.7)–(3.8), выход  $y(t)$  представляется как интеграл свертки или суммы соответственно  $g(t)$  и  $u(t)$ . Поэтому эта модель также называется *моделью свертки*.

### 3.5 Аппроксимация модели объекта типовыми динамическими звеньями

Реальные объекты управления представляют собой совокупность отдельных элементов и блоков, соединенных между собой посредством связей. Поэтому на практике представляют математическую модель всей системы как совокупность относительно простых математических моделей отдельных элементов и блоков объекта, то есть рассматривают *структурированную* модель. Такая форма математического описания отражает не только физические, но и технические принципы построения системы управления и позволяет исследовать процессы, происходящие не только в системе в целом, но и процессы в отдельных ее элементах. Структурированные модели, учитывающие техническую организацию систем управления, создаются на основе следующих допущений:

1) Все элементы системы являются простейшими звеньями, т.е. имеют один вход и один выход. Если звено характеризуется несколькими обобщенными координатами, то в качестве выходной величины выбирается

---

<sup>2</sup>SISO – SingleInputSingleOutput.

та координата, которая является выходной или регулируемой величиной звена.

2) Все звенья, из которых состоит система, является детектирующими. В детектирующем звене выходная величина зависит только от входной величины. Если выходная величина звена оказывает влияние на входную, то звено называется не детектирующим. Допущения о том, что в состав системы управления должны входить только детектирующие звенья не сужает область применения структурированных моделей, так как не детектирующее звено можно рассматривать как совокупность детектирующих звеньев охватываемых обратной связью.

Таким образом, структурированная модель системы управления разбивается на ряд взаимосвязанных математических моделей отдельных звеньев. Тогда, последовательно исключая из рассмотрения все внутренние переменные, являющиеся входными или выходными сигналами внутренних звеньев, можно найти дифференциальное уравнение описывающее взаимосвязь входной и выходной переменных системы.

Первые реализованные в системах управления методы идентификации были основаны на использовании частотных, ступенчатых и импульсных воздействий. Суть метода заключается в следующем: на действующем объекте по входному каналу подается одно из трех типовых возмущающих воздействий: типа «единичного скачка», типа «единичного импульса», в виде синусоидальных колебаний различной частоты. Чаще всего используется возмущение типа «единичного скачка». Реакция объекта на такое возмущение – график изменения во времени выходного сигнала объекта называется *экспериментальной кривой разгона*. Далее применяется специальный, уникальный (только в теории автоматического управления) математический аппарат – совокупность шести типовых динамических звеньев.

Если рассматривать объект как «черный ящик», то есть считать, что нам ничего не известно о физико-химических процессах, происходящих в нем, то оказывается, что различные по природе технологического процесса, объему и конфигурации объекты управления в динамическом режиме работы математически описываются (имеют математическую модель) в виде одного и того же типового уравнения взаимосвязи выходного сигнала объекта с входным. В теории автоматического управления были подобраны всего 6 типов уравнений взаимосвязи выходного сигнала объекта с входным сигналом, которые назвали *типовыми динамическими звеньями*. Поскольку в динамическом режиме работы объекта, когда нарушено равновесие между притоком и стоком энергии или вещества в объекте, входной и/или выходной сигналы изменяются во времени, то большинство типовых уравнений взаимосвязи типовых динамических звеньев (ТДЗ) являются дифференциальными.

Методика использования математического аппарата теории автоматического управления – совокупности типовых динамических звеньев

– заключается в следующем: каждое типовое динамическое звено, кроме типового уравнения взаимосвязи входного и выходного сигналов, имеет свою *типовую кривую разгона* и ряд других типовых характеристик. Полученную на действующем объекте экспериментальную кривую разгона сравнивают с набором шести типовых кривых разгона типовых динамических звеньев и по совпадению характера изменения во времени экспериментальной и какой-либо типовой кривой разгона проводят замену (аппроксимацию) исследуемого объекта данным типовым динамическим звеном. Тогда типовое уравнение взаимосвязи этого типового динамического звена становится уравнением взаимосвязи выходного сигнала объекта с входным или искомой математической моделью объекта. Величину коэффициентов, входящих в данное типовое уравнение типового динамического звена, находят по экспериментальной кривой разгона объекта. Приведем примеры.

*Пример 1.* Пусть на объекте в результате подачи на его вход единичного скачка получена экспериментальная кривая разгона (рисунок 3.8), которая по характеру изменения во времени совпадает с типовой кривой разгона аperiodического (инерционного, статического) типового динамического звена.

Значит, такой объект можно аппроксимировать аperiodическим типовым динамическим звеном. Его типовое дифференциальное уравнение и передаточная функция имеют вид [10]:

$$T_0 \frac{dx_{\text{вых}}}{d\tau} + x_{\text{вых}} = k \cdot x_{\text{вх}}, \quad W(p) = \frac{x_{\text{вых}}(p)}{x_{\text{вх}}(p)} = \frac{k}{T_0 p + 1}.$$

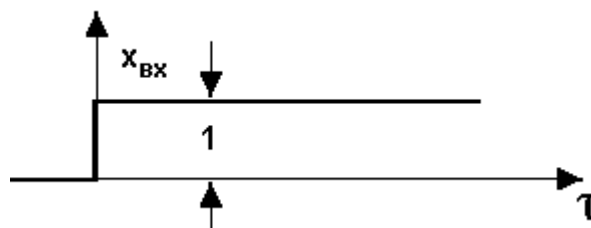
Коэффициенты уравнения  $K$  и  $T_0$  находятся из графика экспериментальной кривой разгона [1].

*Пример 3.8.* Пусть на объекте получена экспериментальная кривая разгона, похожая на типовую кривую разгона астатического (интегрирующего) типового динамического звена (рисунок 3.9).

Тогда дифференциальное уравнение и передаточная функция имеют вид:

$$T \frac{dx_{\text{вых}}}{d\tau} = x_{\text{вх}}, \quad W(p) = \frac{x_{\text{вых}}(p)}{x_{\text{вх}}(p)} = \frac{1}{T \cdot p}.$$

Коэффициент  $T$  определяется по экспериментальной кривой разгона по углу наклона  $\alpha$ :  $\text{tg} \alpha = \frac{1}{T}$ .



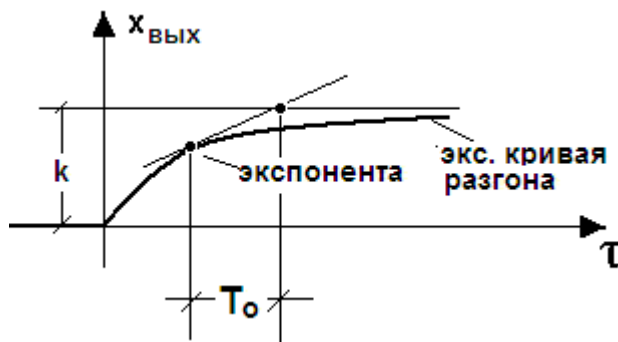


Рисунок 3.8 - Экспериментальная кривая разгона статического объекта

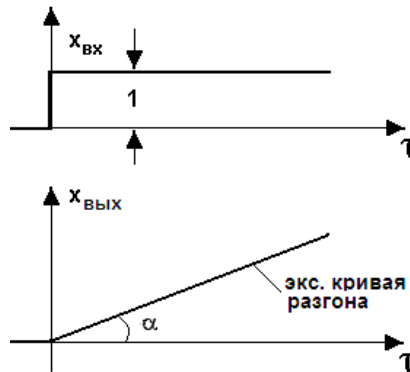


Рисунок 3.9 - Экспериментальная кривая разгона астатического объекта

Аналогично легко провести идентификацию динамического объекта по совпадению экспериментальной и типовой кривых разгона для замены (аппроксимации) объекта усилительным, реальным дифференцирующим и запаздывающим типовым динамическим звеном. Типовые кривые разгона этих звеньев приведены на рисунке 3.10.

Передаточные функции имеют вид:

$$W(p)_{\text{усилит}} = \frac{x_{\text{вых}}(p)}{x_{\text{вх}}(p)} = k; W(p)_{\text{реал. дифф.}} = \frac{k \cdot p}{T_0 \cdot p + 1}; W(p)_{\text{зап}} = \frac{x_{\text{вых}}(p)}{x_{\text{вх}}(p)} = e^{-p\tau_{\text{зап}}}$$

Величину коэффициентов в этих типовых передаточных функциях также легко найти по графикам экспериментальных кривых разгона.

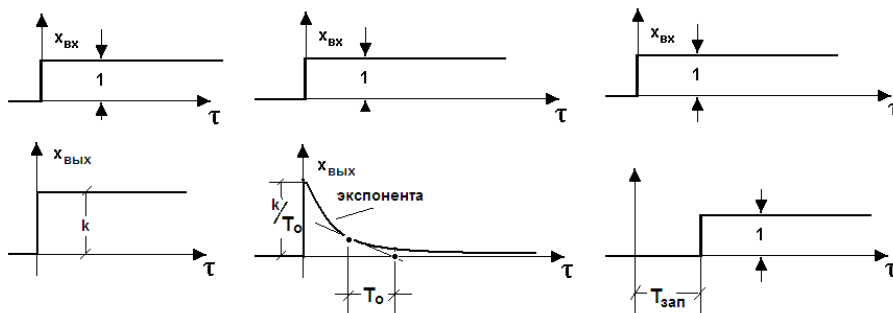


Рисунок 3.10 - Кривые разгона усилительного, реального дифференцирующего и запаздывающего ТДЗ

Сложнее найти математическую модель идентифицируемого объекта, если получена следующая экспериментальная кривая разгона (рисунок 3.11).

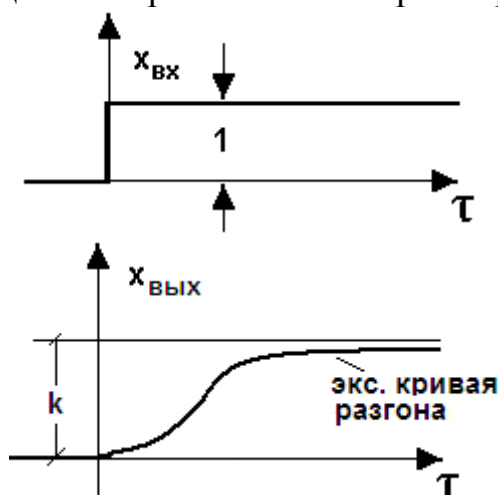


Рисунок 3.11 - Экспериментальная кривая разгона аperiodического звена второго порядка

Такая экспериментальная кривая разгона похожа на типовую кривую разгона аperiodического звена 2-го порядка с передаточной функцией:

$$\frac{x_{\text{вых}}(p)}{x_{\text{вх}}(p)} = W(p) = \frac{k}{T_1 p^2 + T_2 p + 1}.$$

Однако, точное определение коэффициентов  $T_1$  и  $T_2$  в этой передаточной функции затруднено. Для более точной идентификации такого объекта используют метод Симою, или «метод площадей».

Иногда по технологическим условиям нельзя длительное время держать «единичный скачок» на входе объекта. Тогда подается возмущение типа «единичного импульса», длительность которого достаточна для заметного изменения выходного сигнала. Практически «единичный импульс» рассматривается как два последовательных «единичных скачка», только первый имеет значение (+1), а второй – (-1).

Полученная на объекте экспериментальная импульсная характеристика – график изменения во времени выходного сигнала объекта путем несложных графических преобразований достраивается до экспериментальной кривой разгона и далее поиск математической модели –  $W_{об}(p)$  идет по указанному выше пути.

Получение экспериментальной амплитудной и фазо-частотной характеристик является длительным процессом. В одном эксперименте получаем только одну точку графика АФХ, но точность аппроксимации выше, чем при снятии экспериментальной кривой разгона. Экспериментальную АФХ сравнивают с типовыми АФХ звеньев и проводят аппроксимацию объекта над одним или совокупностью ТДЗ. Здесь также можно использовать логарифмические амплитудно- и фазо-частотные характеристики (ЛАЧХ и ЛФЧХ).

Надо отметить, что дифференциальные уравнения линейных динамических звеньев являются идеализированным описанием динамики элементов, то есть представляют собой всего лишь аппроксимацию их реального поведения.

Классификацию методов идентификации можно проводить различными способами. В [5] предлагается деление всех экспериментальных методов определения динамических характеристик на следующие три основные группы:

- *прямые методы*, которые позволяют определить последовательности дискретных значений оператора связи в конечном числе точек путем подачи пробных сигналов специальной формы. Методами этой группы определяются следующие характеристики: в частотной области – амплитудные  $|W(j\omega)|$  и  $\varphi(\omega)$  фазовые характеристики, годографы  $W(j\omega)$  и т.д.; во временной области – импульсная переходная  $g(t)$  и переходная функции  $h(t)$ . Например, формируя на входе системы ступенчатый сигнал, на выходе системы получаем переходной процесс. По графику переходного процесса оцениваются важнейшие динамические характеристики объекта управления: чистое транспортное запаздывание, самовыравнивание, инерционность. Определяются коэффициенты передаточной функции и соответствующего дифференциального уравнения;

- *параметрическая идентификация* или *методы восстановления параметров модели* с известной структурой. В общем случае оценивание параметров модели заданной структуры проводится путем минимизации выбранного критерия качества модели – функции потерь (чаще всего – среднего квадрата рассогласования выходов объекта и его постулируемой модели). В результате применения методов этой группы можно определить коэффициенты дифференциального уравнения линейного одномерного объекта, а, следовательно, и коэффициенты передаточной функции;

- *непараметрическая идентификация* или *методы*, базирующиеся на определении неизвестных динамических характеристик объекта и аппроксимации их аналитическими выражениями, которые выбираются на основе имеющейся в распоряжении исследователя априорной информации об объекте. Здесь применяются методы статистики, которые позволяют в качестве источника информации использовать случайные естественные сигналы идентифицируемого объекта.

Так как при практическом применении любого из методов указанных групп, в конечном счете, необходимо определять некоторые параметры модели (коэффициенты дифференциального уравнения, параметры передаточной функции, коэффициенты аппроксимирующих полиномов и т.д.), то можно назвать все эти методы параметрическими. Отличие заключается в разнообразии операторов и используемых в качестве модели динамических характеристик объекта управления, то есть любая классификация является условной.

В дальнейшем изложении не будем придерживаться классификации, принятой в [5]. В настоящем учебном пособии рассматриваются другие подходы к классификации методов идентификации.

#### 4 Экспериментальные методы идентификации

В этом разделе будут рассматриваться методы идентификации, использующие отклики системы на специфические сигналы. Основной моделью анализа является модель, заданная в виде интеграла свертки:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)u(\tau)d\tau, t \in R$$

или для дискретного случая в виде суммы свертки:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^e g(t - k)u(k), te \in Z^+.$$

где

$u(t)$  и  $y(t)$  - соответственно входной и выходной сигналы;  
 $g(t)$  – импульсная переходная функция.

Это представление модели особенно подходит для линейных стационарных<sup>3</sup> динамических систем с одним входом и одним выходом (SISO-систем) и формирует основу экспериментальных непараметрических методов идентификации. Прилагательные «экспериментальные» и «непараметрические» выражают ограниченные априорные знания, используемые в процедуре идентификации; априорные знания ограничены предположениями относительно линейности и стационарности рассматриваемой системы.

Рассмотрим методы, которые непосредственно используют конкретные отклики системы, в частности, на импульсное, ступенчатое и синусоидальное воздействие. Как ранее отмечалось, такие методы также называют *прямыми* методами [5]. Первые два сигнала позволяют напрямую оценить импульсную переходную функцию  $g(t)$ , в то время как приложение синусоидального сигнала формирует только основу для более сложного метода. Для проектирования регулятора особенно подходят описания в частотной области, непосредственно обеспечивающие оценку  $g(t)$  в этой области. Во многих приложениях ясно наблюдается присутствие шума. В этих условиях надежность оценок могут быть значительно снижена. Для снижения влияния уровня помех разработаны методы, которые менее чувствительны к помехам, и, таким образом, очень полезны для практического применения.

---

<sup>3</sup>Напомним, что линейные, стационарные во времени системы с постоянными параметрами (ЛСС - системы) в зарубежной литературе и современных пакетах моделирования и идентификации объектов управления называются ЛТИ-системами (LinearTimeInvariant).

## 4.1 Идентификация с помощью импульсной переходной функции

### 4.1.1 Представление модели с помощью импульсной функции.

Напомним, что импульсная переходная функция определяется как отклик системы на импульсное воздействие. Чтобы убедиться в применимости модели свертки к линейным стационарным системам (ЛТИ-системам), вводится функция *единичного импульса*.

Единичная импульсная функция или функция Дирака в нулевой момент времени определяется следующим образом:

$$\delta(t) = 0 \text{ для } t \neq 0, \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (4.1.1)$$

и может рассматриваться как прямоугольный импульс единичной площади с бесконечно малой шириной.

Пусть единичный импульсный сигнал  $\delta(t)$  приложен ко входу линейной стационарной системы, реакцию системы на этот импульс обозначим  $g(t)$ . Так как система стационарная, сдвинутый по времени импульс  $\delta(t-\tau)$  формирует выходной сигнал  $g(t-\tau)$ . Более того, в силу линейности системы импульсный сигнал  $\delta(t-\tau)u(\tau)$  дает реакцию  $g(t-\tau)u(\tau)$ , и после интегрирования как входных, так и выходных импульсов в интервале  $(-\infty, \infty)$ , в соответствии со свойствами импульсной функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)u(\tau) d\tau = u(t);$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)u(\tau) d\tau = y(t),$$

Мы получили связь между входом  $u(t)$  и выходом  $y(t)$ .

Так как мы рассматриваем отношения на ограниченном промежутке времени,

то верхний предел интегрирования в этом интеграле свертки устанавливается равным  $t$ . Так как  $u(t) = 0$  для  $t < 0$ , при нулевых начальных условиях для устойчивой системы нижняя граница интеграла свертки устанавливается равной 0. То есть практически применяется следующий интеграл свертки:

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau, \quad (4.1.2)$$

при условии линейности и стационарности системы.

При выводе этой модели свертки были сделаны предположения только о линейности и стационарности системы. Поэтому модель свертки полностью характеризующаяся импульсной переходной функцией  $g(t)$ , может описать связь между входом и выходом широкого класса линейных стационарных систем. Следовательно, если известна функция  $g(t)$ , то для



данного входного сигнала  $u(t)$ , соответствующий выходной сигнал можно легко вычислить. Эта характерная особенность объясняет интерес к представлению модели в виде отклика на импульсное воздействие, особенно когда априорная информация о поведении системы ограничена.

#### 4.1.2 Представление модели в виде передаточной функции.

Одним из основных инструментов при анализе линейных систем является преобразование Лапласа. Напомним, что преобразование Лапласа определяется выражением (см. п. 1.5):

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt. \quad (4.1.3)$$

Применение преобразования Лапласа к модели свертки (4.2) дает выражение:

$$Y(s) = G(s)u(s), \quad (4.1.4)$$

которое определяет алгебраическую связь между преобразованным выходным сигналом  $Y(s)$  и преобразованным входным сигналом  $U(s)$ . Функция  $G(s)$  является преобразованием Лапласа импульсной переходной функции, то есть  $G(s) \equiv L[g(t)]$ , и называется *передаточной функцией*. Следовательно, представление (4.1.4) называется представлением *модели в виде передаточной функции*.

Связи различных представлений моделей с прямым и обратным преобразованием из одного вида модели в другой показаны на рисунке 4.1, где импульсная модель занимает центральное место.

Проиллюстрируем применение модели в виде передаточной функции к примеру 3.4 и рассмотрим различные связи с другими представлениями.

*Пример 4.1. Резервуар для хранения.* Напомним, что отношения «вход-выход» для модели резервуара, после решения линейного дифференциального уравнения первого порядка были получены в виде:

$$y(t) = \int_0^t k \cdot e^{-k(t-\tau)} u(\tau) d\tau.$$

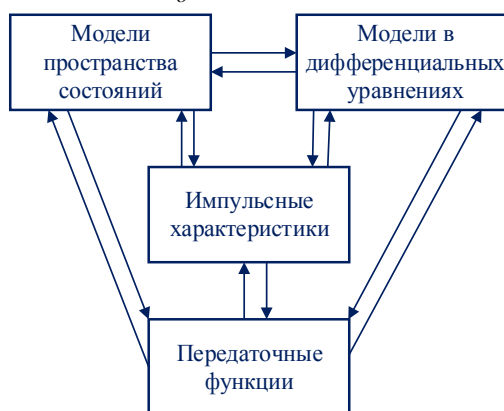


Рисунок 4.1 - Различные представления моделей для LTI-систем

Сравнение с моделью свертки (4.1.2) показывает, что импульсная переходная функция  $g(t)$  равна  $g(t) = k \cdot e^{-k(t-\tau)}$ , и, таким образом, передаточная функция имеет вид:

$$G(s) = L\{k \cdot e^{-k(t-\tau)}\} = \frac{k}{s+k} U(s),$$

тогда

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k}{s+k} U(s).$$

Альтернативный способ определения передаточной функции и импульсной переходной функции для примера 3.4- преобразование Лапласа дифференциального уравнения:

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t),$$

как в примере 3.5. Для нулевых начальных условий  $y(0)=0$ , и после применения свойств преобразования Лапласа (см.п.1.5.1) мы видим, что:

$$\frac{1}{k} \cdot s \cdot Y(s) + Y(s) = U(s).$$

Следовательно, передаточная функция  $G(s)$  этой SISO-системы (системы с одним входом и одним выходом) находится из выражения:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s+k}.$$

что, как мы видели выше, является преобразованием Лапласа функции  $g(t)$ .

Таким образом, функция  $g(t)$  может быть напрямую найдена с помощью обратного преобразования Лапласа функции  $G(s)$ . Таким же образом,  $g(t)$  и  $G(s)$  можно найти из модели в пространстве состояний.

До сих пор не было задействовано никаких реальных данных; импульсная переходная и передаточная функции были оценены на основе только априорных сведений.

**4.1.3 Экспериментальный метод идентификация с помощью импульсной переходной функции.**

Рассмотрим метод определения оценки импульсной переходной функции, используя экспериментальные данные. Так как сбор данных обычно выполняется в дискретное время, будем рассматривать дискретно-временное представление. В частности, для  $u(t) = 0$ ,  $t < 0$ , и нулевых начальных условиях, интеграл свертки запишется в виде суммы:

$$y(t) = \sum_{k=0}^t g(t-k)u(k) = \sum_{k=0}^t g(k)u(t-k), t \in Z^+, \quad (4.1.6)$$

где  $g(0)$  обычно равно 0, потому, что никакая реальная система не реагирует мгновенно на входной сигнал.

Следовательно, если мы сможем сгенерировать единичный импульс, то коэффициенты  $g(t)$  могут быть найдены непосредственно из измеренных значений выхода. Пусть, например, импульсный вход будет определен как:

$$u(t) = \begin{cases} a, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (4.1.7)$$

где выбирается в соответствии с физическими ограничениями входной сигнал.

Соответствующий выход будет:

$$y(t) = ag(t) + v(t), \quad (4.1.8)$$

где  $v(t)$  представляет собой шум измерения выходного сигнала.

Следовательно, оценка импульсной переходной функции имеет вид:

$$\hat{g}(t) = \frac{y(t)}{a} \quad (4.1.9)$$

и погрешность оценки равна  $v(t)/a$ .

Основным преимуществом метода является его простота, но есть некоторые серьезные ограничения. Как правило, оцениваемый отклик на единичный импульс описывает дискретное поведение непрерывной по времени системы. Поэтому отклик на единичный импульс может пропустить значительно быструю динамику, когда продолжительность эксперимента очень большая, или он может пропустить медленную динамику, когда продолжительность эксперимента очень маленькая. Если присутствует чистая задержка, это может быть определено в течение одного периода наблюдения. Однако ее главный недостаток заключается в том, что обычно ограничено, что препятствует значительному снижению помех измерения в оценках, так как ошибки оценки обратно пропорциональны значению  $a$ .

*Пример 4.2. Система отопления.* Импульсная переходная функция, представленная на рисунке 4.2, была получена на простой лабораторной системе отопления. Входной сигнал системы - напряжение тока, приложенного к нагревающему элементу. Выход измерен с термометром сопротивления. Следовательно, выход также измеряется в вольтах. Максимально допустимая величина входного сигнала 10В, а интервал дискретизации составляет 0,08 с. Во избежание нежелательных влияний начального состояния системы, входной импульс был приложен в момент  $t = 0,4$  с.

Из графика видно, что систему можно аппроксимировать звеном второго порядка с запаздыванием. Из рисунка 4.2 определяем, что время запаздывания составляет примерно 0,2 с. Коэффициенты импульсной характеристики могут быть непосредственно вычислены из (4.1.8).

Таким образом, для идентификации линейных стационарных систем, описанных моделью в виде интеграла свертки, можно использовать следующий алгоритм.

Алгоритм 4.1. Идентификация  $g(t)$  с помощью импульсного сигнала:

1) Генерируется импульс с максимально допустимым значением амплитуды.

2) Этот импульс подается на вход исследуемой системы.

3) Для определения оценок компонентов импульсной реакции  $g(t)$  используется формула (4.1.8), где значения выходного сигнала определяются из полученной экспериментальной кривой.

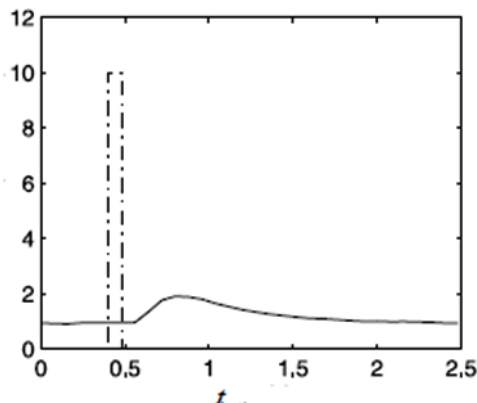


Рисунок 4.2 – Система отопления: импульсный вход в момент  $t=0,4$  сек. (пунктирная линия) и измеренный выход  $V$  (сплошная линия)

4.1.4 Экспериментальный метод идентификация с помощью переходной функции.

Ступенчатый сигнал можно рассматривать как бесконечную последовательность непрерывных, равных, коротких, прямоугольных импульсов. Следовательно, аналогично импульсному воздействию, ступенчатый сигнал определяется как:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ a, & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.1.10)$$

*Пример 4.3. Система отопления.* Эффект применения ступенчатого входного сигнала к лабораторной системе отопления можно увидеть на рисунке 4.3. Анализ отклика на ступенчатый сигнал опять показывает, что система является системой второго порядка с запаздыванием 0,2 с. Дальнейший анализ системы выполнить легче по переходной функции (рисунок 4.3), чем по импульсной переходной функции (рисунок 4.2), поэтому мы пренебрежем динамикой второго порядка на графике переходной характеристики.

По графику переходного процесса, проводя касательную к ней в начальной точке, определяем постоянную времени (абсцисса точки пересечения касательной с установившимся состоянием [5,10], которая примерно равна 0,4 с. Статический коэффициент усиления определяется путем деления разности между установившимися значениями выходного и разности между установившимися значениями входного сигнала, т. е.  $(4,8 - 1,0)/(5 - 0) = 0,76V/V$ . Отметим, что этой информации о времени запаздывания, постоянной времени и коэффициенте статического усиления

достаточно для настройки ПИД-контроллеров с использованием известных правил настройки Циглера-Николса.

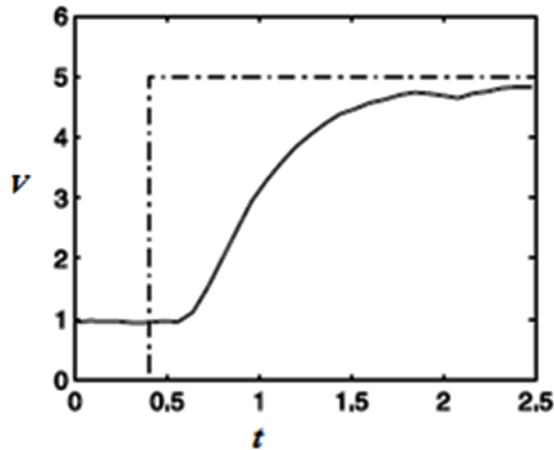


Рисунок 4.3 - Система отопления: ступенчатый входной сигнал, приложенный в момент  $t=0,4$  сек. (пунктирная линия) и измеренный выход  $V$  (сплошная линия)

#### 4.1.5 Определение импульсной функции по переходной функции.

Применение ступенчатого входного сигнала (4.1.10) к линейной стационарной системе, описываемой уравнением (4.1.6), дает:

$$y(t) = a \sum_{k=0}^t g(k) + v(t). \quad (4.1.11)$$

Так как

$$y(t-1) = a \sum_{k=0}^{t-1} g(k) + v(t-1),$$

оценки  $g(t)$  могут быть найдены вычислением конечной разности переходной функции

$$\hat{g}(t) = \frac{y(t) - y(t-1)}{a} \quad (4.1.12)$$

с соответствующей ошибкой  $[v(t) - v(t-1)]/a$ . Значение  $a$  необходимо выбирать как можно больше.

Таким образом, если для идентификации ЛТИ-системы неприемлемо применение импульсного входного сигнала, может быть выполнена идентификация с использованием ступенчатого сигнала в соответствии со следующим алгоритмом.

Алгоритм 4.2. Идентификация  $g(t)$  с помощью ступенчатого сигнала:

- 1) Сформировать ступенчатый сигнал с максимально допустимым значением величины  $a$ .
- 2) Установить этот сигнал на входе системы.

3) По полученной переходной функции графическим методом определить установившееся значение, постоянную времени и коэффициент усиления [1].

4) Для определения оценок компонентов импульсной функции  $g(t)$  используется выражение (4.1.12).

Однако, как указывалось ранее, если цель состоит в том, чтобы получить некоторые основные характеристики отклика такие, как время задержки, постоянную времени, коэффициент усиления, анализа переходной характеристики (реакции на ступенчатый сигнал) достаточно.

*Пример 4.4. Система отопления.* Восстановим импульсную переходную характеристику по переходной функции (рисунок 4.3), используя алгоритм 4.2. Результат представлен на рисунке 4.4, для сравнения здесь же приведена измеренная импульсная характеристика.

#### 4.1.6 Идентификация с помощью гармонического сигнала.

Еще один элементарный сигнал, который применяется для идентификации ЛТИ-систем, - синусоидальная волна, определяемая выражением:

$$u(t) = a \cdot \sin \omega t. \quad (4.1.13)$$

Обычно вводится частотная передаточная функция  $G(j\omega)$ , где  $j$  - комплексное число. Эта частотная функция является Фурье-преобразованием импульсной функции  $g(t)$ , которую можно определить просто из передаточной функции  $G(s)$ , заменив  $s$  на  $j\omega$ . Для дискретных систем вместо преобразования Лапласа или Фурье может быть использовано дискретное преобразование Фурье:

$$G(e^{j\omega}) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}. \quad (4.1.14)$$

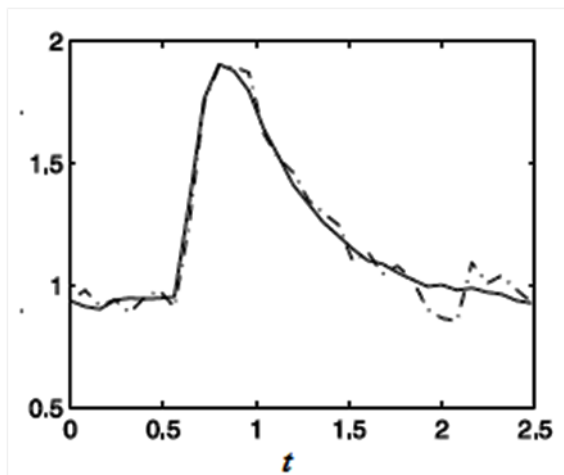


Рисунок 4.4 – Измеренная (сплошная линия) и восстановленная (пунктирная линия) импульсная характеристика

Это преобразование может быть интерпретировано как дискретный вариант преобразования Фурье.

Напомним, что  $\sin \omega t = \text{Im}(e^{j\omega t})$ . Так как  $G(e^{j\omega})$  является комплексным числом, оно может быть записано в следующем виде  $|G(e^{j\omega})e^{j\omega}|$ , где  $|G(\cdot)|$

определяет амплитуду и  $\varphi = \arg(G(\cdot))$ . Следовательно, используя уравнение (4.5) где  $k = -\infty, \dots, \infty$ , получим на выходе реакцию на синусоидальный входной сигнал:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= a \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) \operatorname{Im}(e^{j\omega(t-k)}) = a \cdot \operatorname{Im} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) e^{-j\omega(t-k)} = \\
 &= a \operatorname{Im}\{e^{j\omega t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) e^{-j\omega k}\} = a \operatorname{Im}\{e^{j\omega t} G(e^{j\omega})\} = \\
 (4.1.15) \\
 &= a |G(e^{j\omega})| \sin(\omega t + \varphi).
 \end{aligned}$$

Следовательно, выходной сигнал представляет собой синусоидальную волну той же частоты, что и входной  $u(t)$ , но с амплитудой  $|G(e^{j\omega})|$  и сдвигом по фазе  $\varphi$ . Обратите внимание, что результат подразумевает, что входные данные являются вечной синусоидальной волной, которая никогда не может быть реализована на практике. Поэтому, если предполагается, что  $u(t) = 0, t < 0$ , обычно не учитывают первые гармоники отклика.

*Пример 4.5. Система обогрева.* Эффект влияния синусоидального сигнала с частотой 5 рад/сек. на выход системы представлен на рисунке 4.5.

Определены величина и фазовый сдвиг частотной функции при частоте 5 рад / с (более детально графики представлены на рисунке. 4.6). Для  $\omega = 5$  рад/с коэффициент усиления  $G(e^{j\omega}) = 0,256 V/V$ , а фазовый сдвиг  $\varphi = -\omega t = -5 \times 0.50 = -2.50$  рад.

Поскольку использовались отдельные значения сигналов, этот результат очень чувствителен к шуму в обоих сигналах, особенно при экстремальных значениях.

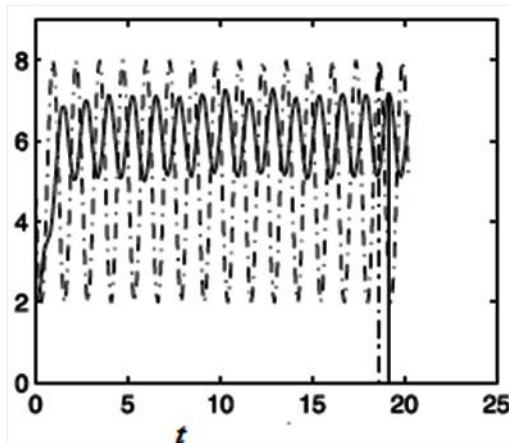


Рисунок 4.5 – Система отопления: синусоидальный вход (пунктирная линия) и выход (сплошная линия)

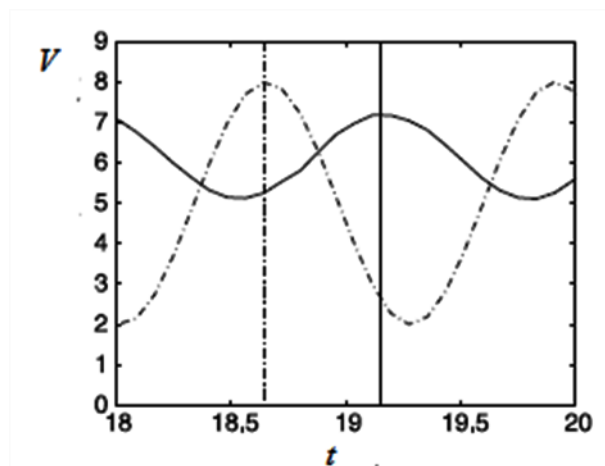


Рисунок 4.6 – Система отопления: фрагмент синусоидального входа (пунктирная линия) и выхода (сплошная линия)

Рассмотренные в этой главе методы имеют длинную историю, особенно с приложениями в электрических и механических системах. Переходная характеристика важна для промышленных применений и особенно в вопросах настройки PID-регулятора. Методы идентификации с помощью гармонических сигналов во временной области не имеют широкого распространения. Актуальность этого метода значительно выше для частотной области.

#### 4.1.7 Упражнения для самостоятельного выполнения.

1. Задана передаточная функция объекта:  $W = \frac{k}{Ts+1}$ .

Выполните следующие действия:

- запишите дифференциальное уравнение модели объекта по этой передаточной функции;
- получите из передаточной функции импульсную характеристику этой системы, используя команду *impz* системы MatLab;
- создайте график отклика на единичный входной сигнал при  $K= 2$ , and  $\tau= 0.5$ , используя команду *step* системы MatLab;
- запишите модель *sys1* в пространстве состояний, используя команду *ss* системы MatLab;
- определите модель *sys2* в виде передаточной функции, используя команду *tf* системы MatLab;
- проверьте оба представления с помощью команд *ss2tf* и *tf2s*.

2. Система задана своей передаточной функцией:  $W = \frac{2}{10s+1}$ . Для этой системы:

- сформируйте ее в MatLab;
- сгенерируйте синусоидальный сигнал с заданной частотой и отразите его на графике;
- получите реакцию на этот сигнал с помощью команды *lsim* и отразите его на том же графике. Объясните результат.



## 4.2 Частотный метод идентификации

### 4.2.1 Использование гармонического сигнала.

Из п. 4.1.6 можно вывести следующий алгоритм идентификации с использованием частотной функции:

Алгоритм 4.3. Идентификация функции  $G(e^{j\omega})$  при использовании гармонических колебаний:

1) Сформируйте гармонический сигнал на определенной частоте с максимально разрешенной амплитудой.

2) Установите этот сигнал на входе системы.

3) Запишите реакцию системы.

4) Определите амплитуду и фазовый сдвиг функции  $G(e^{j\omega})$  для определенной частоты, используя записи входного и выходного сигналов.

5) Повторите предыдущие шаги для всех исследуемых частот  $\omega \in \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ .

Как было отмечено в предыдущем параграфе, функция комплексного переменного  $G(e^{j\omega})$ ,  $-\pi \leq \omega \leq \pi$ , называется частотной передаточной функцией, или коротко частотной функцией дискретной ЛТИ-системы. Частотная функция широко используется во множестве методов проектирования контроллеров в частотной области. Поэтому всегда представляют интерес методы, позволяющие напрямую идентифицировать частотную функцию, используя экспериментальные данные. Одним из простейших методов является ранее описанная процедура идентификации, используя единичный гармонический сигнал (часто называемый гармоническим оцениванием). Однако эта процедура требует много времени. Частотная характеристика может быть определена с использованием полигармонического сигнала. Вначале введем понятие дискретного преобразования Фурье.

### 4.2.2 Дискретное преобразование Фурье.

Дискретное преобразование Фурье сигнала  $y(t)$ , заданного для  $t = 1, 2, \dots, N$ , определяется следующим выражением:

$$Y_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N y(t) e^{-j\omega t}, \quad (4.2.1)$$

Где  $\omega = 2\pi k/N$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Заметим, что для определенного  $k$ ,  $N/k$  является периодом, связанным с определенной частотой  $\omega k$ . Аналогично может быть найдено дискретное преобразование Фурье для  $u(t)$ . Абсолютная величина корня величины  $Y(\omega k)$ ,  $|Y(2\pi k/N)|^2$ , является мерой энергии, вкладываемой этой частотой в энергию сигнала. График величины  $|Y(\omega)|^2$  как функции  $\omega$  называется периодограммой сигнала  $u(t)$ .

*Пример 4.6.* Синусоидальный сигнал. Рассмотрим сигнал:

$$y(t) = A \cos \omega_0 t,$$

где  $A \in \mathbb{R}$  и  $\omega_0 = 2\pi/N_0$  для некоторого целого  $N_0 > 1$ .

Пусть  $N = mN_0$ . Будем рассматривать дискретные моменты времени  $t = 1, 2, \dots, N$ . Так как

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}],$$

после подстановки этого выражения в (5.1), найдем:

$$Y_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N \frac{A}{2} [e^{j(\omega_0 - \omega)t} + e^{-j(\omega_0 - \omega)t}].$$

Это выражение можно упростить, используя следующее соотношение:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{j2\pi(\frac{nk}{N})} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & 1 \leq n < N. \end{cases}$$

Поэтому

$$|Y_N(\omega)|^2 = \begin{cases} N \frac{A^2}{4}, & \text{если } \omega = \pm \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} = \frac{2\pi m}{N} \\ 0, & \text{если } \omega = \frac{2\pi k}{N}, k \neq m. \end{cases}$$

Следовательно, периодограмма имеет два пика на частотах  $\omega = -\omega_0$  и  $\omega = \omega_0$ , в интервале  $[-\pi, \pi]$ . На рисунке 5.1 представлена периодограмма сигнала  $y(t) = \cos(\omega_0 t)$  для  $\omega_0 = 2$ ,  $t = 1, \dots, N$  и  $N = 629$ .

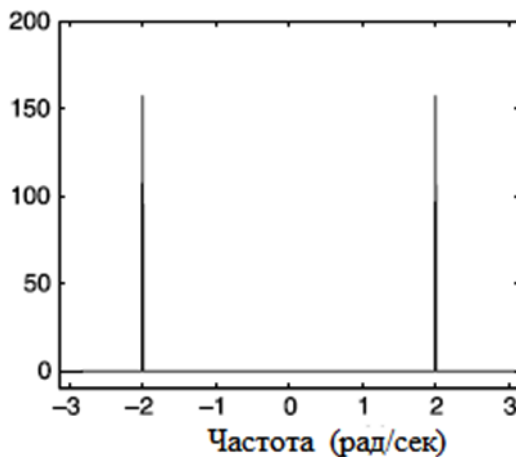


Рисунок 4.7 – Периодограмма сигнала  $y(t) = \cos(2t)$

#### 4.2.3 Оценивание эмпирической передаточной функции.

Напомним, что  $Y(s) = G(s)U(s)$ , поэтому, используя замену  $s = j\omega$ , мы получим выражение:

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega), \quad (4.2.2)$$

которое также может быть получено применением преобразования Фурье к

модели свертки. Этот тип алгебраических соотношений сохраняется и для дискретных систем. Следовательно, для заданного входного сигнала  $u(t)$  и соответствующего выходного сигнала  $y(t)$ ,  $t= 1, 2, \dots, N$ , используя дискретное преобразование Фурье сигналов  $u(t)$  и  $y(t)$ , может быть найдена оценка передаточной функции:

$$\hat{G}(e^{j\omega}) = \frac{Y_N(\omega)}{U_N(\omega)}. \quad (4.2.3)$$

Эта оценка называется *эмпирической оценкой* передаточной функции и сохраняется для случаев, когда вход не является простым гармоническим сигналом. На самом деле,  $U_N$  и  $Y_N$  являются разложением входного и выходного сигналов в ряды по синусам и косинусам. Поэтому, грубо говоря, соотношение (4.2.3) выполняется для каждой частоты, входящей в  $u(t)$  и  $y(t)$ , что позволяет восстановить и амплитуду, и фазовый сдвиг частотной функции для множества частот. Для того чтобы избежать эффекта начальных условий, на практике первые компоненты входных и выходных векторов не принимаются в расчет. Дискретное преобразование Фурье этих исправленных векторов дает оценки  $G(e^{j\omega})$  для  $\omega = \frac{2\pi}{N}, \dots, \pi$  рад/сек.

Продемонстрируем применение функции *etfe* (*experimental transfer function estimation* - экспериментальное оценивание передаточной функции) системы Matlab на следующем примере.

*Пример 4.9. ETFE.* Чтобы получить оценку статического увеличения, двоичный входной сигнал  $u(t)$  с расширяющимися импульсами генерирует следующий выход (таблица 4.1).

Таблица 4.1 – Экспериментальные данные о входах и выходах

$u(t)$	0	1	0	0	1	1	0	0
$y(t) \cdot 10^2$	4.5	0	87.53	11.56	5.5	89.3	97.76	8.47
$u(t)$	0	1	1	1	0	0	0	
$y(t) \cdot 10^2$	5.01	0	87.65	101.09	103.97	15.88	0	

Как видно из следующего графика (рисунок 4.8), система приблизительно аппроксимируется первым порядком с единичным запаздыванием, поскольку выход следует за входом после одного интервала дискретизации. Кроме того, доминирующая постоянная времени составляет около 0,5 с, и статическое усиление близко к одному.

Периодограмма выходного сигнала, полученная с помощью функции MATLAB *etfe*, которая вычисляет выходной вектор в 128 равновеликих частотах между 0 (исключая) и  $\pi$ , представлена на рисунке 4.9.

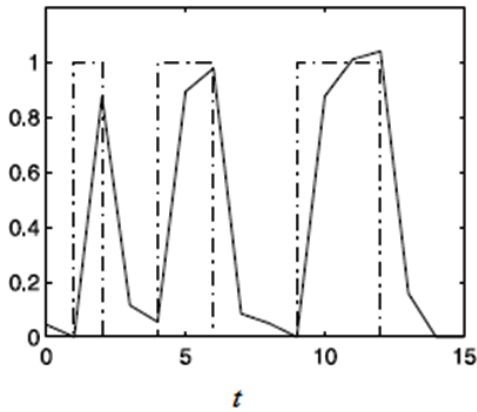


Рисунок 4.8 – Графическое представление входного (пунктирная линия) и выходного (сплошная линия) сигналов

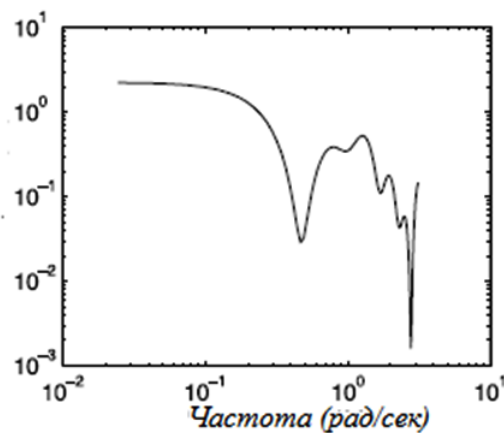


Рисунок 4.9 – Периодограмма выходного сигнала

Амплитудно-частотные характеристики, которые являются полезным инструментом для графической оценки частотной функции, тоже получены с помощью *etfe*. но теперь она применена к оценке эмпирической передаточной функции (4.2.3).

Результаты приведены на рисунках 4.10 и 4.11.

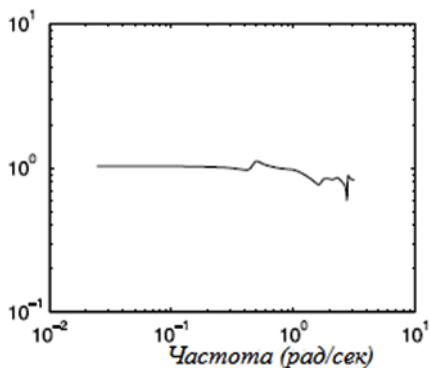


Рисунок 4.10 – График амплитуды оценки эмпирической передаточной функции

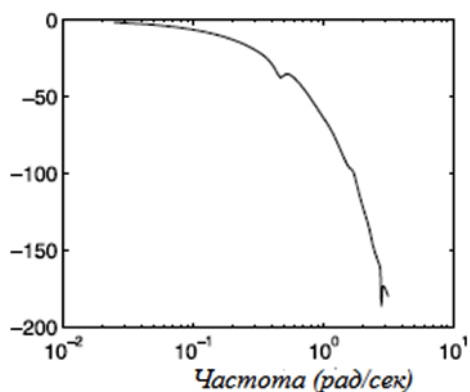


Рисунок 4.11 – График фазо-частотной характеристики оценки эмпирической передаточной функции

Можно легко проверить на амплитудной характеристике, что статическое усиление приблизительно равно 1 и что на высоких частотах нет полезной информации о динамике системе, которую можно было бы получить за счет значительного присутствия высокочастотных шумовых составляющих в выходных данных. Опять же, этот результат очень чувствителен к шуму, особенно на тех частотах, которые совпадают с доминирующими частотами шума.

Напомним, что  $\hat{G}(e^{j\omega})$  для  $-\pi \leq \omega \leq \pi$  является оценкой дискретного преобразования Фурье импульсной функции. Следовательно, оценка импульсной характеристики теоретически может быть получена из  $G(e^{j\omega})$  с помощью обратного преобразования Фурье. На практике, однако, анализируются графики АЧХ для некоторых четко определенных, элементарных частотных характеристик (первого и второго порядков и с чистым запаздыванием).

Таким образом, можно описать следующий алгоритм.

Алгоритм 4.3: Алгоритм идентификации частотной функции  $G(e^{j\omega})$  при использовании экспериментальных данных:

- 1) Генерируется произвольный входной сигнал  $u(t)$ ,  $t = 1, 2, \dots, N$ .
- 2) Этот сигнал устанавливается на входе системы.
- 3) Регистрируются входной  $u(t)$  и соответствующий выходной  $y(t)$  сигналы.
- 4) Вычисляются дискретное преобразование Фурье входного  $u(t)$  и выходного  $y(t)$  сигналов -  $U_N(\omega)$  и  $Y_N(\omega)$  соответственно.
- 5) Выполняется покомпонентное деление  $Y_N(\omega)$  на  $U_N(\omega)$  для  $\omega = \frac{2\pi}{N}, \dots, \pi$  рад/сек, с целью получения оценки функции  $G(e^{j\omega})$ .
- 6) При необходимости можно использовать элементарную частотную характеристику для оценки передаточной функции  $G(s)$ .

Заметим, что для заданного входного сигнала мы можем начать с п.3 алгоритма.

### 4.3 Корреляционные методы

#### 4.3.1 Автокорреляционная функция.

Рассмотренные в п.п. 4.1-4.2 методы идентификации являются простыми. Однако большим недостатком этих методов является то, что результат получается с большими погрешностями, так как используется массив экспериментальных данных. Поэтому с целью сглаживания уровня помех были разработаны *корреляционные* методы.

Напомним, что *автокорреляционная функция* входного сигнала  $u(t)$  определяется как:

$$R_{uu}(\tau) = M[u(t)u(t + \tau)], \quad (4.3.1)$$

где  $\tau$  – временной сдвиг;

$M[\cdot]$  – оператор математического ожидания, который определяет среднее значение функции.

Это математическое ожидание может быть представлено средним по времени в следующем виде (см. п. 1.5):

$$R_{uu}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)u(t + \tau) dt. \quad (4.3.2)$$

Эта функция зависит только от  $\tau$  и не зависит от  $t$ . Интеграл берется в некотором интервале  $[-T, T]$  при  $T \rightarrow \infty$ , потому что на этом этапе переходные процессы не рассматриваются. Дискретное представление, применимое к дискретным данным, имеет вид:

$$R_{uu}(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{i=-N}^N u(i)u(i+l). \quad (4.3.3)$$

Заметим, что для конечной дискретной последовательности  $u(i)$  с  $N$  элементами, дискретная автокорреляционная  $R_{uu}(l)$  может быть вычислена как:

$$R_{uu}(l) = M[u(i)u(i+l)^T],$$

где  $u(i)$  – подпоследовательность из интервала от  $-N$  до  $N-1$ ;

$u(i+l)$  – подпоследовательность от  $-N+l$  до  $N$ .

Чтобы получить более точную оценку значений автокорреляционной функции, значение  $\tau$  в большинстве выбирается меньше, чем  $N/4$ . Легко может быть установлено, что автокорреляционная функция включает и положительные, и отрицательные значения  $\tau$  и что она является четной функцией (то есть симметрична относительно начала координат 0).

Отметим также, что:

$$\begin{aligned} R_{uu} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N u(i)u(i-l) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N-l}^{N-1} u(j+1)u(j) = \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^N u(j)u(j+l),$$

которое для  $l \ll N$  эквивалентно (4.3).

Более того,  $R_{uu}(l) \ll R_{uu}(0)$  для  $\forall l \in \mathbb{Z}$ , и если  $u(t)$  имеет периодическую компоненту, тогда  $R_{uu}(l)$  также имеет периодическую компоненту, что иллюстрируется следующим примером.

*Пример 4.10. Синусоидальный сигнал.* Рассмотрим синусоидальный сигнал  $u(t) = \sin(\omega t)$ , где  $t \in \mathbb{R}$ . Тогда, подставляя эту функцию в (4.3.2) и применяя известные формулы:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta); \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha, \end{aligned}$$

мы получим следующий результат:

$$R_{uu}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\cos \omega \tau \cdot (T - \frac{1}{2} \sin 2\omega T)}{2T} = \frac{1}{2} \cos \omega \tau,$$

Который также является синусоидой с частотой  $\omega$ .

Сгенерируем дискретный сигнал  $u(t) = \sin(\frac{2\pi}{32} t)$  на конечном интервале  $t=0, 1, \dots, 128$ .

Используя команду `xcorr` системы `MatLab`, вычислим соответствующую дискретную автокорреляционную функцию. Графическое представление исходного синусоидального сигнала и нормализованной автокорреляционной функции представлено на рисунке 4.12. Затухание автокорреляционной функции при возрастании временного лага обусловлено тем, что рассматривается конечный сигнал. Конечный сигнал на интервале  $[0, N]$

может рассматриваться как произведение бесконечного сигнала и ступенчатого сигнала с амплитудой 1 на промежутке  $[0, N]$ . Так как ступенчатая функция имеет треугольную автокорреляционную функцию и сохраняется принцип суперпозиции, то амплитуда автокорреляционной функции конечной последовательности будет уменьшаться с увеличением лага.

#### 4.3.2 Последовательность сигнала «белый шум».

Этот сигнал требует особого внимания. Он имеет важную роль при идентификации ЛТИ-систем. Последовательность с нулевым средним, конечной дисперсией и последовательно некоррелированными членами, называется последовательностью «белого шума». Другими словами, последовательность «белого шума» не имеет структуры. Однако непрерывный во времени «белый шум» не существует в физическом смысле, так как это требует бесконечного количества энергии для его генерирования

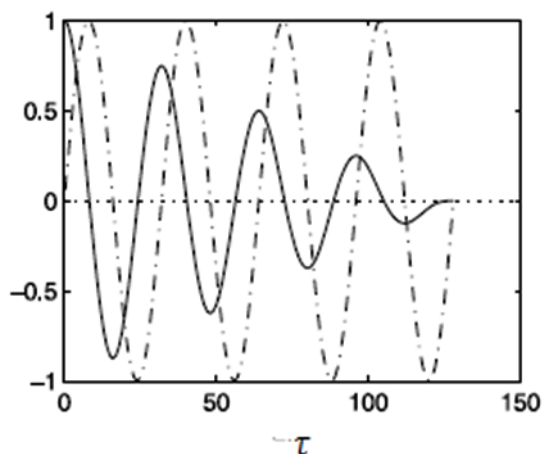


Рисунок 4.12 – Синусоидальный сигнал (пунктирная линия) и его нормализованная автокорреляционная функция (сплошная линия)

Поэтому рассматривается только дискретный белый шум. Формальное определение такого сигнала дается следующей формулой:

$$M[w(t)] = 0; \quad (4.3.5)$$

$$M[w(t)w^T(t+l)] = \begin{cases} Q, & l = 0 \\ 0, & l \neq 0. \end{cases} \quad (4.3.6)$$

В следующем примере рассматривается сгенерированная на компьютере последовательность белого шума.

*Пример 4.11. Белый шум.* Нарисунке 4.13 представлена равномерно распределенная последовательность белого шума, сгенерированная функцией *rand* системы MatLab.

Соответствующая нормализованная автокорреляционная функция  $R_{uu}(l)/R_{uu}(0)$  для  $l = 0, 1, 2, \dots$  представленная на рисунке 4.14, показывает, что значения автокорреляционной функции значимы только при нулевом лаге. Пунктирные линии указывают на 99% доверительные пределы, вычисленные функцией *xcorr* системы MatLab.

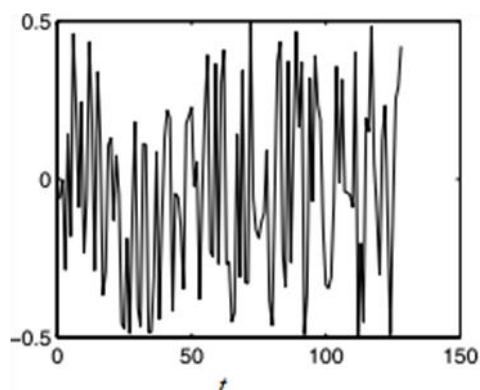


Рисунок 4.13 – Сгенерированная последовательность «белого шума»



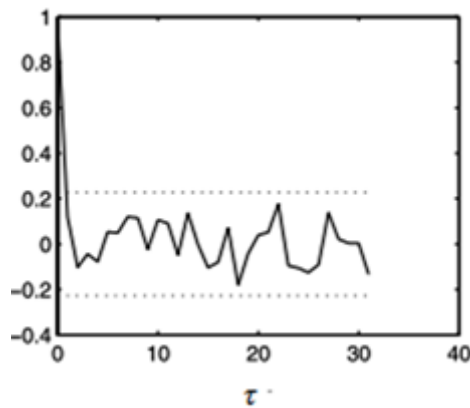


Рисунок 4.14 – Дискретная автокорреляционная функция (сплошная линия) и соответствующий 99% доверительный интервал последовательности «белого шума»

#### 4.3.3 Взаимно-корреляционная функция.

В дополнение к автокорреляционной функции вводится взаимно-корреляционная функция входного  $u(t)$  и выходного  $y(t)$  сигналов  $R_{uy}(\tau, t)$ , которая определяется следующим образом:

$$R_{uy}(\tau, t) = M[u(t)y(t + \tau)].$$

Аналогично

$$R_{uy}(l) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \int u(i)y(i+l). \quad (4.3.7)$$

и для дискретного случая

$$R_{uy}(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N u(i)y(i+l). \quad (4.3.8)$$

На практике в дискретном случае и для конечного  $N$ , функция  $R_{uy}(l)$ -дискретная взаимно-корреляционная функция. Несмотря на то, что взаимно-корреляционная функция определена для отрицательных значений  $\tau$ , она не является четной. Заметим, что для отрицательных  $\tau$  вычисляется корреляция между входом в момент времени  $i$  и выходом в момент  $t + l$ , для  $l < 0$ . Эти корреляции редко представляют интерес, потому что выход системы не зависит от будущих входов. Поэтому для практического применения рассматриваются только положительные значения  $\tau$ .

Важно отметить, что авто- и взаимно-корреляционные функции имеют важную роль в процедурах идентификации ЛТИ-систем на основе экспериментальных данных, потому что они тесно связаны с импульсной функцией системы, что будет рассмотрено в следующем разделе.

4.3.4 Использование уравнения Винера-Хопфа для идентификации импульсной функции.

Напомним, что выход  $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)u(t-k)$  как результат приложения входного сигнала  $u(t)$ , который начался неопределенно давно, в момент времени  $i+l$  определяется выражением:

$$y(i+l) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)u(i+l-k).$$

Тогда взаимно-корреляционная функция между последовательностями  $[u]$  и  $[y]$  будет иметь вид:

$$\begin{aligned} R_{uy}(l) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N u(i) \sum_{k=0}^{\infty} g(k)u(i+l-k) = \\ &= R_{uy}(l) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N u(i)u(i+l-k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} g(k)R_{uu}(l-k). \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Это выражение называется *уравнением Винера-Хопфа*. Это уравнение похоже на интеграл свертки (2.5), где  $y(\cdot)$  и  $u(\cdot)$  заменены на  $R_{uy}$  и  $R_{uu}$ .

Следующий пример иллюстрирует применение оценок авто- и взаимно-корреляционных функций для определения импульсной функции  $g(t)$  из экспериментальных данных.

*Пример 4.12. Идентификация импульсной функции.* Для асимптотически устойчивой системы достаточно определения только первых  $s$  элементов функции  $g(t)$ , поэтому

$$R_{uy} = \sum_{k=0}^s g(k)R_{uu}(l-k).$$

Пусть зарегистрированы входы  $u(0), \dots, u(N)$  и соответствующие выходы  $y(0), \dots, y(N)$ . После удаления эффекта начального состояния получим следующие последовательности:  $u(M), u(M+1), \dots, u(N)$  и соответствующие выходы  $y(M), y(M+1), \dots, y(N)$ . Корреляционные функции могут быть вычислены по следующим выражениям:

$$R_{uu}(l) \cong \frac{1}{N-M+1-l} \sum_{i=-M}^{N-1} u(i)u(i+l)$$

и

$$R_{uy}(l) \cong \frac{1}{N-M+1-l} \sum_{i=-M}^{N-1} u(i)y(i+l).$$

Подставляя выражения для корреляционных функций в уравнение Винера-Хопфа, для  $l=0, 1, \dots, s$  получим:

$$R_{uy}(0) = g(0)R_{uu}(0) + g(1)R_{uu}(-1) + g(2)R_{uu}(-2) + \dots + g(s)R_{uu}(-s),$$

$$R_{uy}(1) = g(0)R_{uu}(1) + g(1)R_{uu}(0) + g(2)R_{uu}(-1) + \dots + g(s)R_{uu}(1-s),$$

$$R_{uy}(2) = g(0)R_{uu}(2) + g(1)R_{uu}(1) + g(2)R_{uu}(0) + \dots + g(s)R_{uu}(2-s),$$

$$R_{uy}(s) = g(0)R_{uu}(s) + g(1)R_{uu}(s-1) + g(2)R_{uu}(s-2) + \dots + g(s)R_{uu}(0).$$

Запишем эту систему в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} R_{uy}(0) \\ R_{uy}(1) \\ R_{uy}(2) \\ \dots \\ R_{uy}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{uu}(0) & R_{uu}(-1) & R_{uu}(-2) & \dots & R_{uu}(-s) \\ R_{uu}(1) & R_{uu}(0) & R_{uu}(-1) & \dots & R_{uu}(1-s) \\ R_{uu}(2) & R_{uu}(1) & R_{uu}(0) & \dots & R_{uu}(2-s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{uu}(s) & R_{uu}(s-1) & R_{uu}(s-2) & \dots & R_{uu}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ \dots \\ g(s) \end{bmatrix}.$$

Эта система может быть решена, если ее матрица обратима. Отметим, что  $R_{uu}(-l) = R_{uu}(l)$ . Также отметим, что устанавливая вместо  $u(t)$  импульсный сигнал, то есть  $R_{uu}(0) = 1$  и  $R_{uu}(l) = 0$  для  $l \neq 0$ , мы можем сразу определить коэффициенты импульсной переходной функции  $g(t)$ .

Этот пример показывает другое свойство уравнения Винера-Хопфа: если мы можем найти входной сигнал, для которого  $R_{uu}(l-k) = 0$  для  $l \neq 0$ , рассчитать коэффициенты импульсной переходной функции становится намного легче. Из этого примера можно вывести следующий алгоритм:

Алгоритм 4.3. Идентификация функции  $g(t)$  из экспериментальных данных, используя уравнение Винера-Хопфа:

- 1) Генерируется произвольный входной сигнал  $u(t)$ ,  $t=1, 2, \dots, N$ .
- 2) Измеряются входные  $u(t)$  и соответствующие выходные  $y(t)$  сигналы.
- 3) Вычисляются дискретная автокорреляционная функция:

$$R_{uu}(t) \cong \frac{1}{N-l} \sum_{i=1}^{N-1} u(i)u(i+1)$$

и дискретная взаимно-корреляционная функция:

$$R_{uy}(t) \cong \frac{1}{N-l} \sum_{i=1}^{N-1} u(i)y(i+1).$$

- 4) Для  $l=0, 1, \dots, s$  формируется вектор

$$R_{uy} = [R_{uy}(0), R_{uy}(1), R_{uy}(2), \dots, R_{uy}(s)]$$

и соответствующая  $(s+1) \times (s+1)$  матрица  $R_{uu}$ , заполненная дискретными значениями автокорреляционной функции, как в предыдущем примере.

- 5) Из уравнения  $g = \|R_{uu}\|^{-1} \cdot R_{uy}$  определяется вектор:

$$g = [g(0), g(1), g(2), \dots, g(s)]^T,$$

Если результаты экспериментов заданы, то выполнение алгоритма начинается с шага 3.

#### 4.3.4 Фильтрующее свойство уравнения Винера-Хопфа.

Может возникнуть вопрос: зачем использовать для определения импульсной функции трудоемкий метод вычисления последовательностей  $\{R_{uy}\}$  и  $\{R_{uu}\}$ , если соответствующим выбором входного сигнала элементы

функции  $g(t)$  могут быть напрямую определены из экспериментальных данных. Ответ на этот вопрос заключается в следующем.

Предположим, что наблюдаемый выходной сигнал содержит регулярную составляющую  $\{\bar{y}(t)\}$  и случайную (шум)  $\{v\}$ , так что:

$$y(t) = \bar{y}(t) + v(t). \quad (4.3.10)$$

Вычислим взаимно-корреляционную функцию:

$$R_{uy}(l) \cong \frac{1}{N-M+1-l} \sum_{i=-M}^{N-1} u(i)[\bar{y}(i+1) = V(i+l)] \cong R_{u\bar{y}}(l) + R_{uv}(l) \quad (4.3.11)$$

Так как  $\{v\}$  не коррелировано с  $\{u\}$  и имеет нулевое среднее, долгосрочное среднее  $u(i)v(i+l)$  будет достаточно малым. Следовательно, использование уравнения Винера-Хопфа фильтрует влияние шума на оценки единичного импульсного отклика, в отличие от прямых методов предыдущего раздела.

#### 4.4 Параметрическая идентификация

В этом разделе рассматриваются методы идентификации в случае, когда структура модели известна и требуется определить оценки параметров модели. Эта процедура известна как *параметрическая* идентификация.

##### 4.4.1 Линейные статические системы.

Для линейных систем параметрическая модель представляется в виде следующего разложения - *уравнения регрессии*:

$$y(t) = \varphi_1(t)\mathcal{G}_1 + \dots + \varphi_p(t)\mathcal{G}_p + e(t), \quad (4.4.1)$$

где  $y(t)$  - наблюдаемый выход;

$\varphi_1(t), \dots, \varphi_p(t)$  - базисные функции, также называемые *регрессорами*.

Это уравнение содержит линейную относительно неизвестных параметров составляющую и ненаблюдаемую ошибку  $e$  (шум).

Пусть  $t=1, \dots, N$ . Определим вектора-столбцы соответствующих размерностей:  $y=[y(1), \dots, y(N)]^T$ ,  $e=[e(1), \dots, e(N)]^T$ ,  $\mathcal{G}=[\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_p]$ . Пусть, кроме того,  $\Phi$  будет матрица  $N \times p$  с элементами  $\Phi_{ij} = \varphi_j(t), j=1, \dots, p$ . Тогда уравнение (4.4.1) может быть записано в матричной форме:

$$y = \Phi \mathcal{G} + e. \quad (4.4.2)$$

*Пример 4.4.1.* Движущийся объект. Пусть  $x$ -позиция объекта, движущегося по прямой линии с постоянным ускорением  $a$ . По закону кинематики:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

Мы можем предсказать положение объекта в момент времени  $t$ , если известны начальная позиция  $x_0$ , начальная скорость  $v_0$  и ускорение  $a$ . Если же эти переменные неизвестны, мы можем оценить их из данных наблюдений уи  $t$ . Следовательно, с точки зрения линейной регрессионной модели, мы определяем  $\vartheta = [x_0, v_0, a]^T$  и  $\Phi = [1, t, t^2/2]$  и, следовательно:

$$y(t) = \Phi(t)^T \vartheta + e(t).$$

Это уравнение является нелинейным относительно  $t$ , но *линейным по неизвестным параметрам*.

Обратите внимание, что кинематическая модель, хотя и явно зависящая от времени  $t$ , приводит к статическим отношениям, так как для описания процесса не используются дифференциальные или разностные уравнения. Отметим также, что переменная, связанная с  $x_0$ , равна 1 для всех дискретных моментов времени, и, таким образом, можно предположить, что  $e$  имеет нулевое среднее значение.

Таким образом, задача оценки статического состояния системы может рассматриваться как линейная задача оценки параметров и наоборот. В дальнейшем основное внимание уделяется задаче оценке параметров.

#### 4.4.2 Метод наименьших квадратов.

Разумным способом оценки неизвестных параметров является требование о том, чтобы *ошибки прогнозирования* или *невязка*  $\varepsilon(t) = y(t) - \Phi(t)^T \vartheta$  была наименьшей [1], то есть мы выбираем вектор параметров  $\vartheta$  таким образом, чтобы сумма квадратов ошибок прогнозирования:

$$J(\vartheta) = \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t) = \sum_{t=1}^N [y(t) - \Phi(t)^T \vartheta]^2 \quad (4.4.3)$$

была минимальна.

Учитывая, что  $(\Phi \vartheta)^T = \vartheta^T \Phi^T$  (сведения из теории матриц [11]), в матричной форме (4.4.3) может быть записано следующим образом:

$$J(\vartheta) = \varepsilon^T \varepsilon = (y^T - \vartheta^T \Phi^T)(y - \Phi \vartheta). \quad (4.4.4)$$

Как известно,  $J$  будет минимально тогда и только тогда, когда градиент  $J$  будет равен нулю, а вторая производная положительна. Так как  $J$  скалярная функция, учитывая, что  $y^T \Phi \vartheta = \vartheta^T \Phi^T y$ , имеем:

$$J(\vartheta) = y^T y - y^T \Phi \vartheta - \vartheta^T \Phi^T y + \vartheta^T \Phi^T \Phi \vartheta = y^T y - 2\vartheta^T \Phi^T y + \vartheta^T \Phi^T \Phi \vartheta; \quad (4.4.5)$$

$$\frac{\partial J(\vartheta)}{\partial \vartheta} = -2\Phi^T y + 2\Phi^T \Phi \vartheta. \quad (4.4.6)$$

Градиент  $J(\vartheta)$  равен нулю тогда и только тогда, когда:

$$\Phi^T \Phi \hat{\vartheta} = \Phi^T y. \quad (4.4.7)$$

Уравнение (4.4.7) называется *нормальным уравнением*. Из этого уравнения находим оценки параметров:

$$\hat{\vartheta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y \quad (4.4.8)$$

в предположении, что матрица  $\Phi^T \Phi$  является обратимой.

В следующем примере приведена иллюстрация метода наименьших квадратов для оценивания неизвестных параметров.

*Пример 4.4.2.* Движущийся объект. В таблице 4.4.1 даны результаты наблюдений за движущимся объектом, для которого параметры  $x_0, v_0$  и  $a$  неизвестны, причем  $p=3, N=6$ .

Таблица 4.4.1 – Результаты наблюдений

$t (s)$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$y (m)$	3	59	98	151	218	264

Тогда,

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0.0 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0.02 \\ 1 & 0.4 & 0.08 \\ 1 & 0.6 & 0.18 \\ 1 & 0.8 & 0.32 \\ 1 & 1.0 & 0.50 \end{bmatrix}$$

матрица размерности  $N \times p$  и  $\Phi^T y = \begin{bmatrix} 793 \\ 580 \\ 238 \end{bmatrix}$ ,  $\Phi^T \Phi = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1.1 \\ 3 & 2.2 & 0.9 \\ 1.1 & 0.9 & 0.3916 \end{bmatrix}$ .

Отсюда, используя (4.4.8), имеем:  $\hat{g} = [4.79 \quad 234 \quad 55.4]^T$ .

Оценка  $\hat{g}$  может быть найдена в командном окне MatLab, используя выражение:

$$\hat{g} = A \setminus y,$$

где  $A = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T$ .

Обратный слэш (\) определяет так называемое левое матричное деление – операция, которая не существует в математике.

Из этого примера видно, что размерность матрицы  $\Phi^T \Phi$  не зависит от числа наблюдений, а только от числа неизвестных параметров. Кроме того, эта матрица симметрична.

Таким образом, для заданных экспериментальных данных алгоритм оценки параметров для линейной статической модели методом наименьших квадратов выглядит следующим образом:

1) Даны измерения  $y(t)$ , рассчитаны значения базисных функций  $\varphi_j(t)$  for  $t = 1, \dots, N$  and  $j = 1, \dots, p$ ; требуется определить вектор  $y = [y(1), \dots, y(N)]^T$  размерности  $N$ .

2) Сформировать матрицу  $\Phi$  размерности  $N \times p$  элементами  $\Phi_{ij} = \varphi_j(t)$ , где  $\varphi_j$  является  $j$ -ым регрессором.

3) Вычислить, используя (4.4.8), среднеквадратичную оценку неизвестного  $p$ -размерного вектора параметров  $\mathcal{G}$ .

#### 4.4.3 Нелинейные статические системы.

Проблема оценки параметров линейной модели может быть легко расширена на нелинейный случай. Рассмотрим следующую нелинейную модель:

$$y = f(\Phi, \mathcal{G}) + e,$$

где  $y = [y(1), \dots, y(N)]^T$  – измеренный вектор выхода;

$e = [e(1), \dots, e(N)]^T$  – вектор ошибки;

$f(\Phi, \mathcal{G})$  – векторная функция, связывающая независимые переменные с вектором выхода;

$\mathcal{G} = [\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_N]$  – вектор неизвестных параметров.

По сути,  $\mathcal{G}$  содержит все неизвестные, которые должны быть оценены по экспериментальным данным. Как и раньше, основное внимание будет уделено оценке параметров. Как и в линейном случае, мы будем стараться минимизировать сумму квадратов ошибки предсказания, то есть:

$$J(\mathcal{G}) = \varepsilon^T \varepsilon = (y - (\Phi, \mathcal{G}))^T (y - f(\Phi, \mathcal{G})).$$

Опять-таки, вектор параметров  $\mathcal{G}$  выбирается так, чтобы градиент  $J$  относительно  $\mathcal{G}$ , был равен нулю, то есть:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathcal{G}} = -2 \left( \frac{\partial f(\Phi, \mathcal{G})}{\partial \mathcal{G}} \right)^T (y - f(\Phi, \mathcal{G})) = 0,$$

где  $\left( \frac{\partial f(\Phi, \mathcal{G})}{\partial \mathcal{G}} \right)^T = X(\mathcal{G}, t)$  называется матрицей чувствительности.

Следовательно,

$$\left( \frac{\partial f(\Phi, \mathcal{G})}{\partial \mathcal{G}} \right)^T \cdot f(\Phi, \mathcal{G}) = \left( \frac{\partial f(\Phi, \mathcal{G})}{\partial \mathcal{G}} \right)^T \cdot y. \quad (4.4.9)$$

Последнее выражение представляет собой *обобщенное нормальное* уравнение. Подставляя в это уравнение выражения  $\Phi \mathcal{G} = f(\Phi, \mathcal{G})$  и  $\Phi = \frac{\partial f(\Phi, \mathcal{G})}{\partial \mathcal{G}}$

для линейного случая, получаем уравнение (4.4.7).

Решение уравнения (4.4.9) получается только с использованием численных процедур. Минимизация функции  $J(\mathcal{G})$  численным методом основана на итеративной процедуре получения оценок в соответствии с формулой:

$$\hat{\mathcal{G}}^{(i+1)} = \hat{\mathcal{G}}^{(i)} + \alpha^{(i)} s^{(i)},$$

где  $i$  – номер итерации;

$\alpha^{(i)}$  – длина шага;

$s^{(i)}$  – направление поиска в  $i$ – той итерации.

Наиболее распространенные методы поиска: симплекс-метод, метод наискорейшего спуска, метод Ньютона. Класс хорошо известных методов Ньютона использует формулу:

$$s^{(i)} = -[J''(\hat{\mathcal{G}}^{(i)})]^{-1} J'(\hat{\mathcal{G}}^{(i)}),$$

которая берет свое начало от формулы Ньютона-Рафсона для определения корня уравнения  $J'(\mathcal{G}) = \frac{\partial J(\mathcal{G})}{\partial \mathcal{G}} = 0$ .

#### 4.4.4 Линейные динамические системы.

##### 4.4.4.1 Разностные модели.

Рассматриваются модели, описывающие поведение динамической системы в дискретном времени, включающие влияние помех. Начнем с простейшей структуры модели свертки, где оператор  $G(q)$  заменяется оператором  $B(q)$  с аддитивным шумом:

$$y(t) = b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + \dots + e(t) = B(q)u(t) + e(t),$$

где  $B(q) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k q^{-k} = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots$ ;

$e(t)$ - помеха в виде «белого шума».

Эта структура также называется *IIR (Infinite Impulseresponse)* структура. На практике, обычно, используется конечное число членов  $nb$ , поэтому

$$B(q) = \sum_{k=1}^{nb} b_k q^{-k} = b_{1b} q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{nb} q^{-nb}. \text{ Эта структура называется } FIR$$

(*Finite Impulseresponse*) структурой.

Другая простая модель в виде «вход-выход» определяется разностным уравнением:

$$\begin{aligned} y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_{na} y(t-n_a) = \\ = b_1 u(t-1) + \dots + b_{nb} u(t-n_b) + e(t). \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

Запишем (4.4.10) в компактном виде:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t), \quad (4.4.11)$$

где  $A(q) = \sum_{k=0}^{na} a_k q^{-k} = a_0 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_{na} q^{-na}, a_{0=1}$ ;

$$B(q) = \sum_{k=1}^{nb} b_k q^{-k} = b_{1b} q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{nb} q^{-nb}.$$

Отметим, что (4.11) имеет авто регрессионную (*AutoRegressive*)  $A(q)y(t)$  и экзогенную (*exogenous*)  $B(q)u(t)$  части. Поэтому модели такой структуры называются *ARX*-моделями, которые могут быть записаны в следующем виде:

$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)} u(t) + \frac{1}{A(q)} e(t). \quad (4.4.12)$$

На рисунке 4.4.1 приведена структура таких моделей.



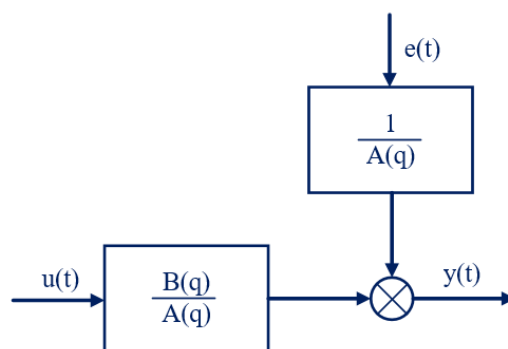


Рисунок 4.4.1 – Структура ARX-модели

Более подробно модели такой структуры записываются в виде  $ARX(n_a, n_b, n_k)$ , где параметр  $n_k$  значит интервал задержки.

Частный случай получается, когда  $n_a = 0$ , что снижает ARX-модели до структуры FIR-модели.

Дальнейшее расширение модели получается в том случае, если помеха моделируется как скользящее среднее, то есть:

$$y(t) + a_1y(t-1) + \dots + a_{n_a}y(t-n_a) = b_1u(t-1) + \dots + b_{n_b}u(t-n_b) + e(t) + c_1e(t-1) + \dots + c_{n_c}e(t-n_c). \quad (4.4.13)$$

В связи с присутствием части со скользящим средним, такая структура называется ARMAX-моделью (*Auto Regressive-Moving Averagewith the Xternalinput*) – модель авторегрессии скользящего среднего. В более общем виде:

$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)}u(t) + \frac{C(q)}{A(q)}e(t), \quad (4.4.14)$$

где  $A(q)$  и  $B(q)$  определены выше, а

$$C(q) = \sum_{k=0}^{n_c} c_k q^{-k} = c_0 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \dots + c_{n_c} q^{-n_c}, \quad c_0 = 1.$$

Такие ARMAX-модели часто используются в процедурах проектирования контроллеров.

Структура семейства ARMAX-моделей приведена на рисунке 4.4.2.

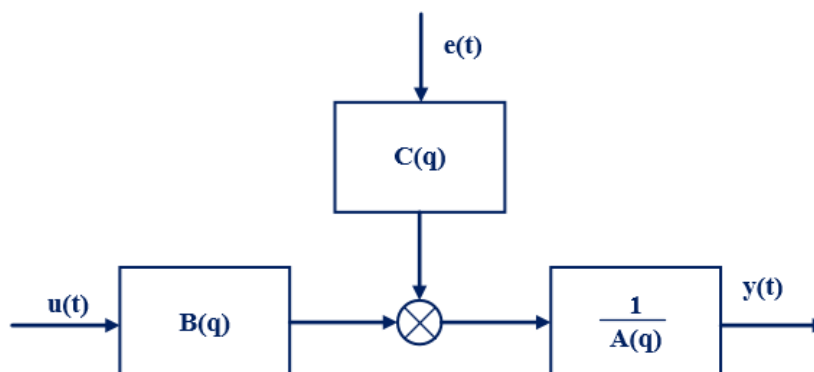


Рисунок 4.4.2 - Структура ARMAX-модели

#### 4.4.3.2 Алгоритмы оценки параметров.

Для оценки неизвестных параметров  $b_1, b_2, \dots, b_{n_b}$  FIR-модели на основе наблюдения за входами и выходами объекта выход модели может быть записан в виде уравнения линейной структуры:

$$\hat{y}(t, \vartheta) = \Phi(t)^T \vartheta, \quad (4.4.15)$$

где  $\Phi(t)^T = [u(t-1), u(t-2), \dots, u(t-n_b)]$ ;

$$\vartheta = [b_1, b_2, \dots, b_{n_b}]^T.$$

Пусть входы  $u(0), u(1), \dots, u(N)$  и соответствующие выходы  $y(0), y(1), \dots, y(N)$  записаны для  $N \gg n_b$ . Тогда, в векторно-матричном виде выходной вектор определяется как:

$$y = [y(n_b), y(1), \dots, y(N)]^T,$$

а регрессионная матрица имеет вид:

$$\Phi = \begin{bmatrix} u(n_b - 1) & u(n_b - 2) & u(0) \\ u(n_b) & u(n_b - 1) & u(1) \\ u(n_b + 1) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ u(N - 1) & u(N - 2) & u(N - n_b) \end{bmatrix}.$$

Параметры модели могут быть определены методом наименьших квадратов. Выход ARX модели также может быть записан в виде уравнения регрессии:

$$\hat{y}(t, \vartheta) = \Phi(t)^T \vartheta,$$

где  $\Phi(t)^T = [-y(t-1), -y(t-2), \dots, -y(t-n_a), u(t-1), u(t-2), \dots, u(t-n_b)]$ ;

$$\vartheta = [a_1, a_2, \dots, a_{n_a}, b_1, b_2, \dots, b_{n_b}]^T.$$

Принимая опять, что известны измеренные входы  $u(0), u(1), \dots, u(N)$  и соответствующие выходы  $y(0), y(1), \dots, y(N)$  для  $N \gg \max(n_a, n_b)$ , в векторно-матричных обозначениях имеем:

- вектор выхода  $= [y(\max(n_a, n_b)), \dots, y(N)]^T$ ;
- матрица регрессии для  $n_a \geq n_b$ :

$$\Phi = \begin{bmatrix} -y(n_a - 1) & -y(0) & u(n_a - 1) & u(n_a - n_b) \\ -y(n_a) & -y(1) & u(n_a) & u(n_a - n_b + 1) \\ -y(n_a + 1) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y(N - 1) & -y(N - n) & u(N - 1) & u(N - n_b) \end{bmatrix}. \quad (4.4.16)$$

Чтобы избежать нежелательного влияния грубых помех в экспериментальных данных, необходимо предварительно их обработать, используя процедуры фильтрации или сглаживания. В алгоритмах

идентификации предполагается, что предварительная обработка данных была выполнена.

Таким образом, алгоритм идентификации параметров  $ARX$ -модели имеет вид:

- 1) Задать структуру  $ARX$ -модели, то есть  $n_a, n_b$ .
- 2) Определить вектор  $y=[y(n_a), \dots, y(N)]^T$  и матрицу  $\Phi$  – выражение (4.4.16) для  $n_a \geq n_b$ .
- 3) Используя (4.4.8), рассчитать оценку  $(n_a+n_b)$ -мерного вектора параметров  $\theta$  по средне квадратичному критерию.

Оценки параметров могут быть найдены применением функции  $arx$  системы MatLab. Аналогично могут быть определены параметры и  $arxmax$  модели, а также и других.

В состав MatLab входит графический пользовательский интерфейс  $ident$ , который позволяет легко решить задачи оценки. Описание и применение этого инструментария приведено в [1].

*Пример 4.4.3.* Система обогрева. В идентификационном эксперименте для системы отопления были измерены следующие значения входов и выходов (рисунок 4.3.3). Вход - случайный двоичный сигнал с  $p_0=0.2$ ,  $N=1000$  и интервалом дискретизации  $T_s=0.08$  s. Выходной сигнал предварительно обрабатывается путем вычитания его среднего значения и исключения первых 100 значений выхода для того, чтобы исключить влияние начальных значений.

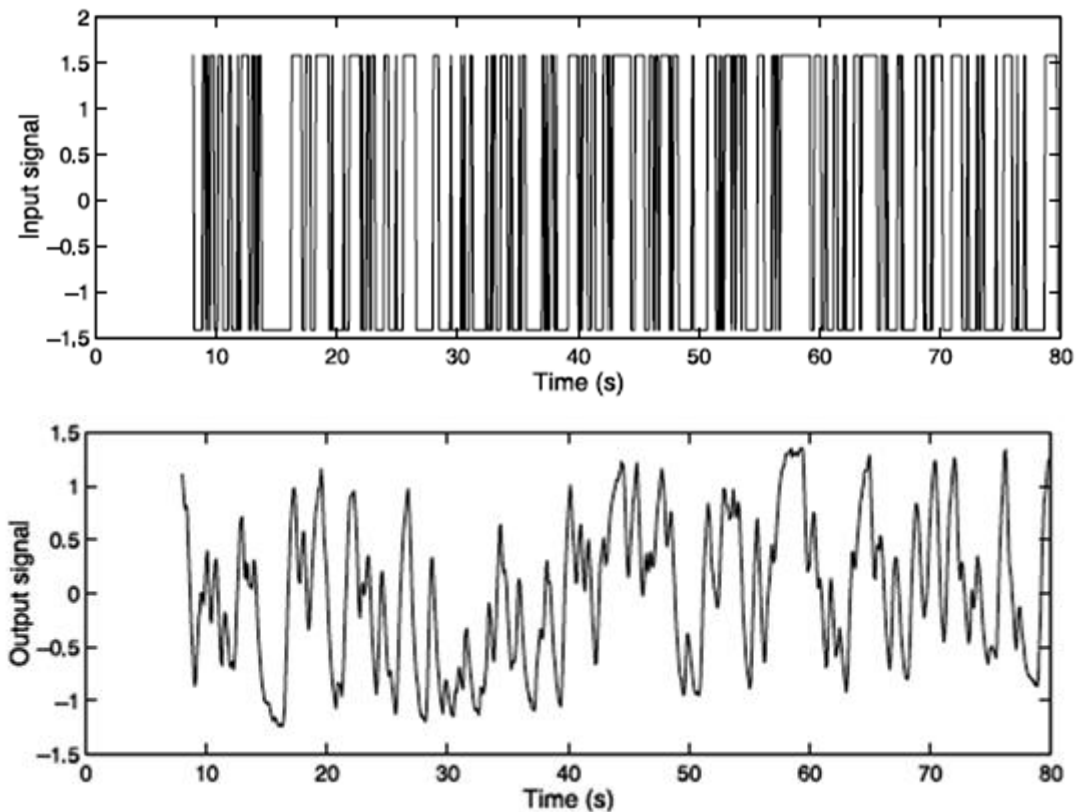


Рисунок 4.4.3 – Графики входных и выходных данных в идентификационном эксперименте

Предположим, что система может быть описана  $ARX(1, 1, 1)$  моделью, где аргументы определяют число авторегрессионных и внешних членов, и значение времени задержки. Следовательно, модель имеет вид:

$$y(t) = -a_1 y(t-1) + b_1 u(t-2) + e(t),$$

который может быть записан в матрично-векторной форме со следующими обозначениями:

$$y = [y(2), y(3), \dots, y(902)]^T;$$

$$\vartheta = [a_1, b_1]^T,$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} -y(1) & u(0) \\ -y(2) & u(1) \\ \dots & \dots \\ -y(901) & u(900) \end{bmatrix}.$$

Оценки коэффициентов модели можно просто найти, применив функцию *arx* системы MatLab, которая дает  $\vartheta = [-0.9558 \ 0.0467]^T$  и соответствующие стандартные отклонения 0.0066 и 0.0029. Сравнение предсказанного выхода модели и измеренного выхода показывает, что предсказания модели неточны (рисунок 4.4.4). Следовательно, должна быть оценена модель другой структуры.

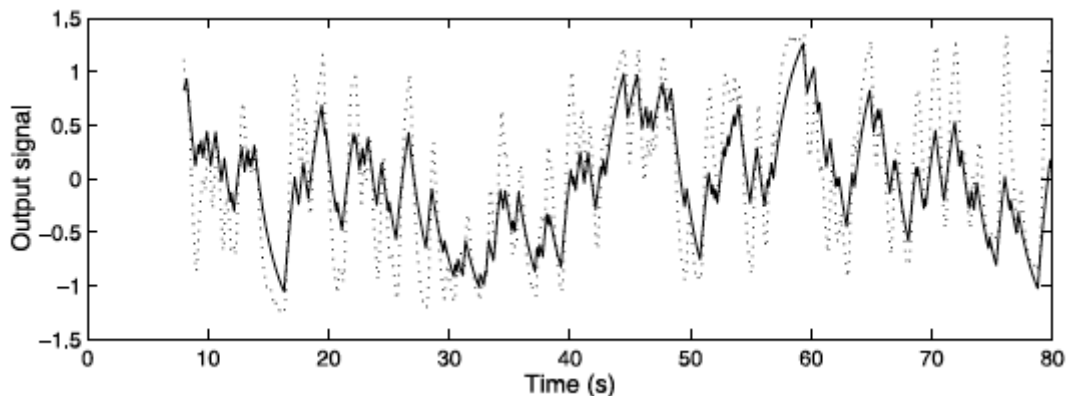


Рисунок 4.4.4 – Графики измеренных (пунктирная линия) и предсказанных по уравнению (сплошная линия) выходных сигналов

Построим ARMAX-модель. В этом случае появляется проблема, которая заключается в том, что значения ошибки  $e(t-1), e(t-2), \dots, e(t-nc)$  являются неизвестными. Обычной практикой решения этой проблемы является замена этих значений ошибками предсказания  $\varepsilon(t-1, \vartheta), \varepsilon(t-2, \vartheta), \dots, \varepsilon(t-nc, \vartheta)$ , где  $\varepsilon(t, \vartheta) = y(t) - \hat{y}(t, \vartheta)$  и  $\vartheta = [a_1, \dots, a_{na}, b_1, \dots, b_{nb}, c_1, \dots, c_{nc}]$ . Ошибки предсказания, однако, зависят от значений параметров  $\vartheta$ .

Вводя вектор  $\varphi(t, \vartheta)^T = [-y(t-1), -y(t-2), \dots, -y(t-na), u(t-1), u(t-2), \dots, u(t-nb), \varepsilon(t-1, \vartheta), \varepsilon(t-2, \vartheta), \dots, \varepsilon(t-nc, \vartheta)]$ , можем записать *нелинейную* модель в следующем виде:

$$\hat{y}(t, \vartheta) = \Phi(t, \vartheta)^T \vartheta. \quad (4.4.17)$$



#### 4.4.5 Идентификация структуры модели.

До сих пор предполагалось, что структура модели априори задана. Однако, на практике это не всегда выполняется; экспериментальные данные о входных и выходных переменных могут предполагать иную структуру, чем выбранная из существующих априорных знаний о системе. Самый естественный путь – рассмотреть различные структуры и оценить их эффективность. Можно предложить идею построения целевой функции для распознавания лучшей структуры. Проиллюстрируем это на следующем примере.

*Пример. 4.4.4.* Пусть результаты эксперимента заданы таблицей 4.4.2.

Самая простая модель, приближенно описывающая эти данные, задается следующей структурой:

$$y(t) = \vartheta_0 + e(t)$$

с  $\vartheta_0=5,02$  и суммой квадратов ошибки предсказания  $\varepsilon^T \varepsilon = 0.388$ .

Таблица 4.4.2 – Данные о случайном процессе

$x(t)$	1	2	3	4	5
$y(t)$	5.2	5.3	5.1	4.5	5.0

Можно легко установить, что альтернативная модель:

$$y(t) = \vartheta_0 + \vartheta_1 x(t) + \vartheta_2 x^2(t) + \vartheta_3 x^3(t) + \vartheta_4 x^4(t) + e(t)$$

с  $\vartheta_0=6,4997$ ,  $\vartheta_1=-2,9661$ ,  $\vartheta_2=2,2830$ ,  $\vartheta_3=-0,68325$  и  $\vartheta_4=0,06666$  точно описывает данные. Следовательно, значение целевой функции (сумма квадратов) равна нулю. Однако предсказания модели за пределами диапазона, в отличие от прогнозов первой модели  $\hat{y}(t) = 5.02$ , становятся неустойчивыми. Например, для  $x(t)=6$ ,  $\hat{y}(t) = 9.7$ , для  $x(t)=10$ ,  $\hat{y}(t) = 188$ , и для  $x(t)=6$ ,  $\hat{y}(t) = 9.7$ , то есть, для больших значений  $x$  предсказанное значение выхода стремится к бесконечности.

Из этого примера становится ясно, что оценка структуры модели только по значениям целевой функции не является достаточным, поскольку несмотря на идеальную оценку, можно получить модели с низкими предсказательными свойствами. Такие модели скорее оценивают шум, чем динамику процесса.

Таким образом, без дополнительных предположений, не следует отдавать предпочтение одной модели перед другой. Дополнительные предположения могут быть выражены в терминах вероятностей, фальсифицируемости или минимальной длины описания.

В пределах системы идентификации, выбор модели направлен на выбор модели оптимальной сложности для приведенных (конечных) данных. Многие процедуры выбора модели используют идею экономии. Если набор моделей подходит для данных одинаково хорошо, предпочтительнее использовать простейшую модель. Поэтому в дополнение к мере

несоответствия, может быть введена мера сложности модели. Например, в [8] предлагается информационный критерий *Akaike* (AIC), который основан на концепции энтропии и обеспечивает компромисс между сложностью модели и ее пригодностью для экспериментальных данных. AIC-критерий задается формулой:

$$AIC = -2\log L + 2d_\mu,$$

где  $L$  – вероятность;

$d_\mu$  – число параметров модели.

Предпочтительна модель с самым низким AIC. Фактически, он количественно измеряет относительную меру потерь информации, когда модель используется для описания набора данных. Следует отметить, что AIC не является тестом для модели в терминах проверки гипотез. Он обеспечивает проверку между моделями и, таким образом, является одним из инструментов для выбора модели.

Критерий *Akaike* - FPE (*Final Prediction Error* – конечная ошибка предсказания) обеспечивает оценку качества модели, тестируя на разных экспериментальных данных. Следовательно, предсказательные качества модели также тестируются. Согласно теории *Akaike* наиболее точная модель имеет наименьшее значение FPE, и этот критерий определяется по формуле:

$$J_{FPE}(\mu) = \frac{1 + d_\mu/N}{1 - d_\mu/N} \cdot \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{1}{2} \varepsilon^2(t, \hat{\vartheta}).$$

Как и прежде, он сочетает в себе сложность модели и удобство подгонки под конкретную модель  $M(\vartheta)$ . В этом критерии сложность модели представлена размерностью вектора параметров модели  $d_\mu$ . Выражение  $J_{FPE}(\mu) = \frac{1+d_\mu/N}{1-d_\mu/N} \cdot \frac{1}{N} = \frac{1+d_\mu/N}{N-d_\mu/N}$  можно интерпретировать как число, обратное числу степеней свободы  $N-d_\mu$ . Выражение  $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{1}{2} \varepsilon^2(t, \hat{\vartheta})$ , используемое в инструментарии *System Identification* системы MatLab, является функцией потерь и представляет собой среднеквадратичную целевую функцию.

*Пример 4.4.5.* Система отопления: в примере 4.4.3 оказалось, что структура  $ARX(1, 1, 1)$ -модели не подходит для описания данных. Оценим ряд моделей-кандидатов  $ARX$ .

С помощью функции *struc* системы MatLab, определим матрицы возможных структур  $ARX(1:5, 1:5, 0:5)$ . Затем, используя функции *arxstruc* и *selstruc* для заданного экспериментального материала, получим результат, представленный на рисунке 4.4.5. Из рисунка 4.4.5 можно сделать вывод, что значение функции FPE уменьшается с уменьшением количества параметров модели или, другими словами, уменьшением сложности модели. Это уменьшение вызвано увеличением степеней свободы. Следующим шагом является найти оптимальное сочетание авторегрессионных и экзогенных параметров и времени задержки. Естественный способ найти это –

определить точки перегиба в кривой, а затем оценивать все возможные комбинации для определенного количества параметров. Результаты исследования параметров

в диапазоне от двух до семи представлены в таблице 4.4.3.

На основе этих результатов можно сделать вывод, что хорошим выбором будет модель структуры  $ARX(2, 2, 3)$ , потому что более сложные структуры значительно не увеличат производительность модели, которая измеряется значениями функции потерь и  $JFPE$ .

Здесь нужно отметить, что производительность модели оценивалась на том же наборе данных, который использовался для оценки параметров. Интерес представляет случай, когда сравнение структур моделей выполняются на экспериментальных данных, которые не использовались для оценки параметров.

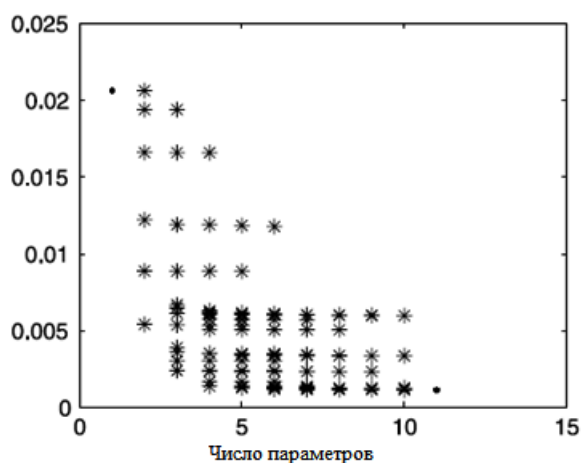


Рисунок 4.4.5 – Значения функции  $FPE$  (отмечены \*) в зависимости от числа параметров  $ARX$ - модели

Таблица 4.4.3 – Результаты идентификации структуры модели

$n_a$	$n_b$	$n_k$	Функция потерь ( $\times 10^{-4}$ )	$JPE$ ( $\times 10^{-4}$ )	$d_u$
1	1	4	54.074	54.314	2
2	1	3	24.157	24.318	3
2	2	3	13.886	14.010	4
3	2	3	12.788	12.931	5
3	3	3	11.809	11.967	6
4	3	3	11.628	11.810	7

#### 4.4.6 Нелинейные динамические системы.

Напомним, что система конечной размерности описывается следующими уравнениями:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t), w(t); \vartheta), x(0) = x_0;$$

$$y(t) = h(t, x(t), u(t); \vartheta) + v(t), t \in R,$$



где в общем случае функции  $f(\cdot)$  и  $h(\cdot)$  определяются из априорных сведений об изучаемой системе.

Заметим, что в это описание также включены последовательности возмущений  $w(t)$  и  $v(t)$ . Напомним, что эти возмущения представляют ошибки моделирования в связи с ошибками в процессе измерения или использования аппарата приближения.

На практике обычно используется дискретная версия этой модели:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= f(t, x(t), u(t), w(t); \vartheta), x(0) = x_0; \\y(t) &= h(t, x(t), u(t); \vartheta) + v(t), t \in R,\end{aligned}$$

Такое представление хорошо подходит для процедуры идентификации. Однако, следует отметить, что ни  $w(t)$ , ни  $v(t)$  заранее не известны. Они могут только быть оценены позже, когда будет доступна оценка вектора параметров модели  $\vartheta$ .

Полагая, что  $w(t)$  и  $v(t)$  имеют математические ожидания, равные нулю, можем записать следующие уравнения:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= f(t, x(t), u(t), 0; \vartheta), x(0); \\y(t) &= h(t, x(t), u(t); \vartheta),, t \in Q^+.\end{aligned}\quad (4.5.1)$$

Эта модель, в которой  $Q^+$  является множеством положительных рациональных чисел, также может быть использована для описания поведения системы между дискретными моментами времени, чтобы избежать больших шагов интегрирования.

Иногда требуется иметь для анализа линеаризованную модель. Для линеаризации нелинейной системы (5.1), вводятся конечные разности:

$$\Delta x(t) = x(t) - x^*(t); \Delta u(t) = u(t) - u^*(t); \Delta y(t) = y(t) - h(t, x^*(t), u^*(t)).$$

Используя разложение в ряды Тейлора как функции  $f(\cdot)$ , так и  $h(\cdot)$  в (4.5.1) и пренебрегая нелинейными (более высокого порядка) членами в полученном разложении, имеем:

$$\begin{aligned}\Delta x(t+1) &= F_x \Delta x(t) + F_u \Delta u(t); \\ \Delta \hat{y}(t) &= H_x \Delta x(t) + H_u \Delta u(t),\end{aligned}\quad (4.5.2)$$

где

$$\begin{aligned}F_x(t) &= \frac{\partial}{\partial x} f(t, x, u; \vartheta)|_{x^*(t), u^*(t)}, F_u(t) = \frac{\partial}{\partial u} f(t, x, u; \vartheta)|_{x^*(t), u^*(t)}; \\ H_x(t) &= \frac{\partial}{\partial x} h(t, x, u; \vartheta)|_{x^*(t), u^*(t)}, H_u(t) = \frac{\partial}{\partial u} h(t, x, u; \vartheta)|_{x^*(t), u^*(t)}.\end{aligned}$$

Заметим, что (4.5.1) аппроксимируется линейной, изменяющиеся во времени моделью (4.5.2), которая, в принципе, является только приближением к начальной траектории.

*Нелинейная регрессия.* Используя методы линеаризации, представленные в предыдущем разделе, но теперь относительно параметров модели  $\vartheta$ , линеаризованную модель (4.5.2) можно записать в терминах линейной регрессии:

$$\hat{y}(t) = \Phi^T(t)\vartheta,$$

которая может использоваться для непосредственной оценки параметров линеаризованной модели. Однако это часто не требуется; для оценки физически интерпретируемых параметров следует использовать полную нелинейную модель. Поэтому введем нелинейный предиктор:

$$\hat{y}(t) = \Pi(t, Z^{t-1}); \vartheta,$$

где  $Z^{t-1}$  обозначает набор входных и выходных измерений, доступных в момент времени  $t$ .

Функцию  $\Pi(\cdot)$  можно рассматривать как результат «черного ящика». В случае, если предиктор основан на моделировании, модель  $Z^{t-1}$  содержит только начальные выходные и прошлые входные значения. Отсюда, в общем-то, прогноз  $y(t)$  может быть построен путем оценивания модели до момента времени  $t$  для заданных входных  $u(0), \dots, u(t-1)$ , выходных  $y(0), \dots, y(t-1)$  данных и вектора параметров  $\vartheta$ . Следовательно, (5.2) можно записать как:

$$y(t) = \Pi(t, Z^{t-1}; \vartheta) + e(t), \quad (4.5.3)$$

где  $e(t)$  теперь можно рассматривать как ошибку многошагового прогнозирования. Эта нелинейная регрессионная модель является отправной точкой для оценки параметров.

*Итеративное решение.* Очевидно, что неизвестный параметр  $\vartheta$  в (4.5.3) не может быть найден непосредственно из экспериментальных данных. Как и в нелинейном статическом случае, требуется итеративное решение. Начиная с начальной точки  $\hat{\vartheta}^{(0)}$  предсказания модели, начинающиеся с  $y(0)$ , можно найти с помощью (4.5.2), что в большинстве случаев требует только «прогона» модели. Если, начальные условия неизвестны, они также могут быть включены в  $\hat{\vartheta}^{(0)}$ , то есть начальные условия оцениваются одновременно с неизвестными параметрами модели. На основе выходных измерений и предсказания по модели вычисляется ошибка предсказания как сумма квадратов. На следующей итерации новые значения оценок требуются для формирования вектора  $\hat{\vartheta}^{(1)}$ , который последовательно используется в имитационной модели. Имитационная модель с вектором параметров  $\hat{\vartheta}^{(1)}$  позволяет сформировать новую сумму квадратов ошибки предсказания. Обратите внимание, что эта проблема нелинейной оценки не сильно отличается от задачи, представленной для статического случая.

## Список литературы

1. Бессекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления: Учебное пособие. – СПб.:Профессия, 2003.
2. Мышенков В.И., Мышенков Е.В. Численные методы. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений: Учебное пособие. – М.:МГУЛ, 2005. – 109 с.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы. Учебное пособие. - СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 592 с.
4. Галажинская О.Н., Моисеева С.П. Теория случайных процессов. - Томск: ТГУ -201. - 59 с.
5. Ибраева Л.К., Хисаров Б.Д. Моделирование и идентификация объектов управления. Учебное пособие. - Алматы: АИЭС, 2009.
6. Matlab: Офиц. учебный курс Кембриджского университета /пер.с англ. - М. : Триумф, 2008. – 352с.
7. Дьяконов В.П., Matlab 6.5 Sp1/7+Simulink 5/6.Обработка сигналов и проектирование фильтров / В.П. Дьяконов. - М. : Солон-Пресс, 2005. – 576с.
8. Karel J. Keesman. System Identification. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing.- New York: Springer London Dordrecht Heidelberg, -2010.
9. Ибраева Л.К. Моделирование и идентификация объектов управления. Конспект лекций для студентов специальности 5В070200 - Автоматизация и управление-Алматы: АУЭС, 2016.
10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.- М.: Физматлит: 2010. – 560 с.
11. Сыздыков Д.Ж.Идентификация в системах управления. - Алматы, 2007.
12. Гайдук А.Р., Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MatLab /А.Р. Гайдук, В.Е. Беляев, Т.А. Пьявченко. - 2-е изд.испр. - М. : Горячая линия-Телеком, 2011. – 464с
13. Васильев А.Н., Matlab. Практический подход: Самоучитель/А.Н. Васильев. - СПб. : Наука и Техника, 2012. – 448с.

## Содержание

Введение.....	3
1 Описание свойств объектов управления математическими моделями.....	4
1.1 Место моделей в структуре системы управления.....	4
1.2 Виды моделирования.....	5
1.3 Классификация объектов управления и их математических моделей.....	9
1.4 Два подхода к построению моделей объектов управления.....	15
1.5 Математические основы моделирования динамических систем.....	18
1.5.1 Применение преобразования Лапласа для исследования систем автоматического управления.....	18
1.5.2 Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.....	27
1.5.3 Аппроксимация функций. Ряд Фурье.....	34
1.5.4 Элементы теории случайных процессов.....	40
1.5.5 Упражнения для самостоятельного выполнения.....	47
1.6 Математическое описание объектов управления.....	49
1.6.1 Основные операторы моделей объектов управления.....	49
1.6.2 Линеаризация уравнений.....	54
1.6.3 Примеры использования системы MatLab для создания и анализа моделей объектов управления.....	58
1.6.3.1 Пакет исследования линейных стационарных систем.....	58
1.6.3.2 Вычисления в командном окне MatLab.....	60
1.6.3.3 Программирование в MatLab.....	36
1.6.3.4 Упражнения для самостоятельного выполнения.....	39
2 Аналитические методы построения моделей объектов управления.....	69
2.1 Общие принципы.....	69
2.2 Объекты регулирования уровня.....	75
2.3 Объект регулирования уровня раствора.....	79
2.4 Применение уравнений теплового баланса для аналитического моделирования объектов управления.....	82
2.4.1 Моделирование теплообменных процессов.....	82
2.4.2 Моделирование объекта регулирования температуры.....	85
2.4.3 Объект регулирования температуры красильного раствора.....	88
3 Идентификация объектов управления.....	93
3.1 Общие подходы к проблеме идентификации сведения.....	93
3.2 Виды идентификации.....	95
3.3 Процедура идентификации системы.....	98
3.4 Структурное представление динамической системы.....	100

3.5 Аппроксимация модели объекта типовыми динамическими звеньями.....	106
4 Экспериментальные методы идентификации.....	112
4.1 Идентификация с помощью импульсной переходной функции.....	112
4.1.1 Представление модели с помощью импульсной функции.....	113
4.1.2 Представление модели в виде передаточной функции.....	113
4.1.3 Экспериментальный метод идентификация с помощью импульсной переходной функции.....	114
4.1.4 Экспериментальный метод идентификация с помощью переходной функции.....	117
4.1.5 Определение импульсной функции по переходной функции.....	118
4.1.6 Идентификация с помощью гармонического сигнала.....	119
4.1.7 Упражнения для самостоятельного выполнения.....	121
4.2 Частотный метод.....	122
4.2.1 Использование гармонического сигнала.....	122
4.2.2 Дискретное преобразование Фурье.....	123
4.2.3 Оценивание эмпирической передаточной функции.....	124
4.3 Корреляционные методы.....	127
4.3.1 Автокорреляционная функция.....	127
4.3.2 Последовательность сигнала «белый шум».....	129
4.3.3 Взаимно-корреляционная функция.....	130
4.3.4 Использование уравнения Винера-Хопфа для идентификации импульсной функции.....	131
4.3.5 Фильтрующее свойство уравнения Винера-Хопфа.....	133
4.4 Параметрическая идентификация.....	133
4.4.1 Линейные статические системы.....	133
4.4.2 Метод наименьших квадратов.....	134
4.4.3 Нелинейные статические системы.....	136
4.4.4 Линейные динамические системы.....	137
4.4.4.1 Разностные модели.....	137
4.4.4.2 Алгоритмы оценки параметров.....	139
4.4.5 Идентификация структуры модели.....	143
4.4.6 Нелинейные динамические системы.....	146
Список литературы.....	149

Ибраева Лида Куандыковна

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**  
Учебное пособие

Редактор

Л. Сластихина

Пописано в печать \_\_. \_\_. \_\_\_\_  
Тираж 100 экз. Формат 60x84 1/ 16

Бумага типографская №2  
Объем 9,4 уч.-изл.. Заказ № \_\_\_\_  
Цена 4700 тенге

Копировально-множительное бюро  
некоммерческого акционерного общества  
«Алматинский университет энергетики и связи»  
050013, Алматы, ул. Байтурсынулы, 126/1