

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Некоммерческое акционерное общество
«Алматинский университет энергетики и связи»

М. М. Аршидинов, В.И. Денисенко, Л. П. Болдырева

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Учебное пособие

Алматы
АУЭС
2016

УДК 621.3 (075.8)
ББК 31.2 я73
А 89

Рецензенты:

КазАТК, кафедра «Электроэнергетики» к.т.н., доцент

Б.Н. Хусаинов;

Университет «Туран», кафедра «Информатики» д.т.н., проф.

И.Т. Утепбергенов;

АУЭС, кафедра ЭиАПУ к.т.н., доцент

Х.О. Гали.

Рекомендовано к изданию Ученым советом Алматинского университета
энергетики и связи (Протокол № _ от ____2016г.). Печатается по
тематическому плану выпуска ведомственной литературы АУЭС на 2016 год,
позиция 24.

Аршидинов М.М., Денисенко В.И., Болдырева Л.П.

Теоретические основы электротехники: Учебн. пособие/
М.М.Аршидинов, В.И. Денисенко, Л.П.Болдырева, АУЭС, Алматы, 2016. -
98 с.:табл.**3**, Ил. **52**, библиогр. 10 назв.

ISBN 978-601-7889-03-6

В пособии представлены типовые задачи с подробными решениями и пояснениями, примеры применения основных методов расчета электрических цепей в установившемся и переходном режимах, примеры решения основных типов задач по электростатическому полю, электрическому полю в проводящей среде и магнитному полю постоянного тока.

Предназначается для студентов электротехнических и электроэнергетических специальностей вузов.

УДК 621.3 (075.8)
ББК 31.2 я73

ISBN 978-601-7889-03-6

© АУЭС, 2016
М.М Аршидинов
В.И. Денисенко
Л.П. Болдырева, 2016

Введение

Теоретические основы электротехники являются базовым курсом, на который опираются профилирующие дисциплины электротехнических и электроэнергетических специальностей вузов. В соответствии с новыми учебными планами курс ТОЭ изучается в течение трех семестров. При этом существенно увеличен объем самостоятельной работы студентов (до 60% от общего числа часов) и, в частности, возросло количество выполняемых расчетно-графических работ.

Цель настоящего учебного пособия состоит в оказании помощи студентам в их самостоятельной работе. Поэтому все задачи даны с подробными решениями, пояснениями, методическими указаниями, приведены основные положения теории и необходимые расчетные формулы.

В пособии рассмотрено применение основных методов расчета электрических цепей на примере цепей постоянного тока, приводится расчет разветвленных цепей однофазного синусоидального тока и трехфазных цепей со статической нагрузкой в симметричном и аварийном режимах. Показано применение метода симметричных составляющих для расчета несимметричных режимов трехфазных цепей с динамической нагрузкой, рассмотрены особенности расчета трехфазных цепей при несинусоидальных напряжениях и токах. Дан пример анализа переходных процессов в линейных электрических цепях классическим и операторным методом, приведен расчет цепей с распределенными параметрами на примере высоковольтной линии электропередачи.

Рассмотрены вопросы расчета электростатических полей систем заряженных проводников при наличии границ раздела сред с различными электрическими свойствами, расчет электрических полей в проводящей среде и магнитных полей постоянного тока.

1 Расчет линейных электрических цепей постоянного тока

Расчет линейных электрических цепей постоянного тока основан на применении закона Ома и законов Кирхгофа.

Закон Ома.

Закон Ома применяется для ветви или для одноконтурной замкнутой цепи. При написании закона Ома следует прежде всего выбрать положительное направление тока.

Закон Ома для ветви:

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b + \sum E}{\sum_a R}, \quad (1.1)$$

где $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$ - напряжение на ветви, отсчитываемое по выбранному положительному направлению тока;

$\sum E$ - алгебраическая сумма ЭДС ветви, со знаком «+» - ЭДС, совпадающие с током, со знаком «-», противоположные току;

$\sum_a R$ - арифметическая сумма сопротивлений ветви.

Закон Ома для одноконтурной схемы:

$$I = \frac{\sum E}{\sum R}, \quad (1.2)$$

где $\sum E$ - алгебраическая сумма ЭДС, действующих в схеме;

$\sum R$ - арифметическая сумма сопротивлений контура.

Методы преобразования.

Во всех случаях преобразования замена одних схем другими, им эквивалентными, не должна привести к изменению токов или напряжений на участках цепи, не подвергшихся преобразованию.

Замена последовательных сопротивлений одним эквивалентным.

Сопротивления соединены последовательно, если они обтекаются одним и тем же током.

Эквивалентное сопротивление цепи, состоящей из «n» последовательно соединенных сопротивлений:

$$R_{\Sigma} = \sum_{K=1}^n R_K. \quad (1.3)$$

Напряжение при последовательном соединении распределяется прямо пропорционально этим сопротивлениям. Например, для двух последовательно соединенных сопротивлений (рисунок 1.1) :

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}; \quad U = U_1 + U_2;$$

$$U_1 = \frac{UR_1}{R_1 + R_2}; \quad U_2 = \frac{UR_2}{R_1 + R_2}. \quad (1.4)$$

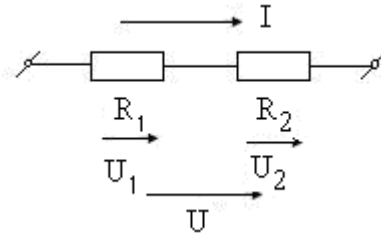


Рисунок 1.1

Замена параллельных сопротивлений одним эквивалентным.

Сопротивления соединены параллельно, если они присоединены к одной паре узлов.

Эквивалентное сопротивление цепи, состоящей из «n» параллельно соединенных сопротивлений:

$$\frac{1}{R_9} = \sum_{K=1}^n \frac{1}{R_K}. \quad (1.5)$$

Токи в ветвях с параллельным соединением сопротивлений, на примере двух параллельно соединенных сопротивлений (рисунок 1.2):

$$R_9 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}; \quad I = \frac{U}{R_9};$$

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (1.6)$$

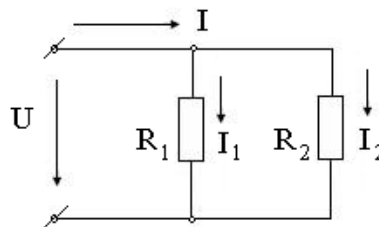


Рисунок 1.2

Замена смешанного соединения сопротивлений одним эквивалентным.

Смешанное соединение – это сочетание последовательного и параллельного соединения сопротивлений (рисунок 1.3).

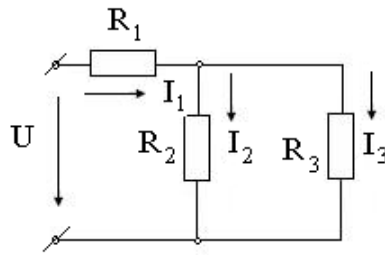


Рисунок 1.3

$$R_3 = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 + R_3}. \quad (1.7)$$

Формулы преобразования треугольника сопротивлений (рисунок 1.4, а) в эквивалентную звезду сопротивлений и наоборот (рисунок 1.4, в).

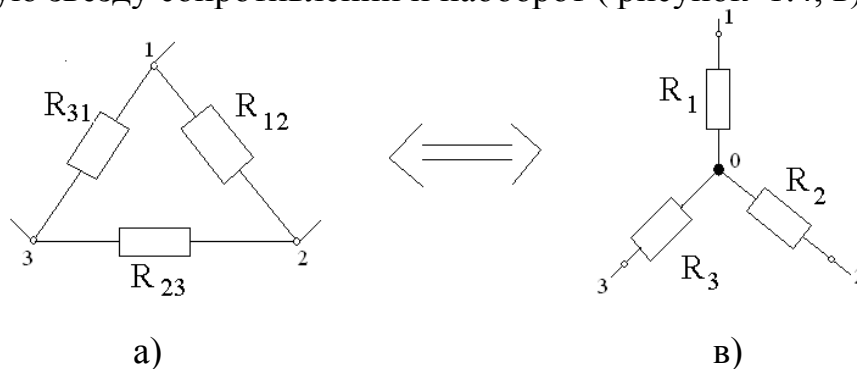


Рисунок 1.4

$$\left\{ R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_2 = \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_3 = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \right. \quad (1.8)$$

$$\left\{ R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}; \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}; \quad R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2}. \right. \quad (1.9)$$

Рассмотрим расчет на примере электрической цепи постоянного тока (рисунок 1.5).

Дано: ЭДС : $E_1=10$ В; $E_2=20$ В; $E_3=5$ В; $E_4=15$ В; $E_6=10$ В. Ток источника тока $J_{T4}=2$ А.

Сопротивления ветвей электрической цепи:

$R_1=2$ Ом; $R_2=4$ Ом; $R_3=3$ Ом; $R_4=5$ Ом; $R_5=2$ Ом; $R_6=4$ Ом.

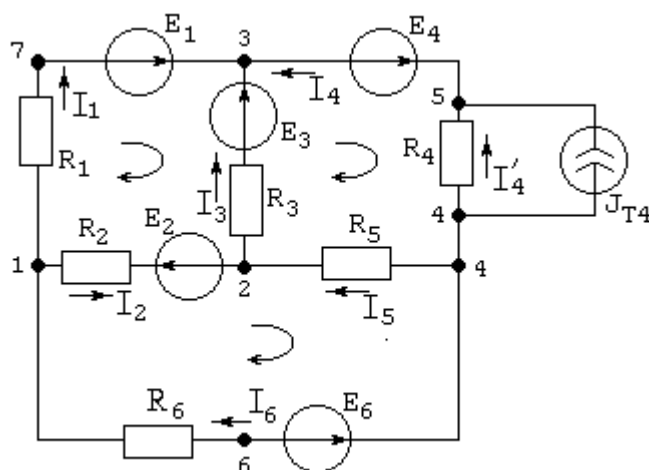


Рисунок 1.5

Законы Кирхгофа.

Составление уравнений для расчета токов во всех ветвях схемы электрической цепи на основании законов Кирхгофа.

Выбираем произвольно положительные направления токов во всех ветвях схемы электрической цепи (рисунок 1.5).

Запишем уравнения по первому закону Кирхгофа. Первый закон Кирхгофа применяется к узлам схемы электрической цепи и формулируется следующим образом: алгебраическая сумма токов в узле равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0.$$

Число уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа, равно числу узлов минус 1.

Для схемы (рисунок 1.5) число узлов $N_y=5$

Число уравнений $Y = N_y - 1 = 5 - 1 = 4$.

Токи, направленные к узлу, будем записывать с отрицательными знаками, токи, направленные от узла с положительными.

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_6 &= 0 \quad (\text{для узла 1}); \\ -I_2 + I_3 - I_5 &= 0 \quad (\text{для узла 2}); \\ -I_1 - I_3 - I_4 &= 0 \quad (\text{для узла 3}); \\ I_4 - I'_4 - J_{T4} &= 0 \quad (\text{для узла 5}). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Запишем уравнения по второму закону Кирхгофа.

Второй закон Кирхгофа применяется к контурам схемы электрической цепи и формулируется следующим образом: в любом замкнутом контуре алгебраическая сумма напряжений на сопротивлениях, входящих в этот контур, равна алгебраической сумме ЭДС

$$\sum_{K=1}^n R_K I_K = \sum_{K=1}^n E_K.$$

Выбираем взаимно независимые контуры. Контуры взаимно независимы, если каждый последующий контур, для которого составляется уравнение, имеет хотя бы одну новую ветвь и не получается из контуров, для которых уже написаны уравнения, путем удаления из этих контуров общих ветвей. Контур не должен содержать ветвь с идеальным источником тока.

Выбираем произвольно направления обхода контуров. Положительные знаки принимаются для токов и ЭДС, положительные направления которых совпадают с выбранным направлением обхода контура. Отрицательные знаки принимаются для токов и ЭДС, положительные направления которых противоположны выбранным направлениям обхода контура.

Число уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа равно: $K = N_B - N_T - Y$, где N_B - число ветвей, N_T - число ветвей с источником тока.

$$K = 8 - 1 - 4 = 3$$

$$R_1 I_1 - R_3 I_3 - R_2 I_2 = E_1 - E_3 + E_2 \quad (\text{для контура } 1-3-2-1);$$

$$R_3 I_3 - R_4 I'_4 + R_5 I_5 = E_3 + E_4 \quad (\text{для контура } 2-3-5-4-2); \quad (1.11)$$

$$R_2 I_2 - R_5 I_5 + R_6 I_6 = -E_2 - E_6 \quad (\text{для контура } 1-2-4-1).$$

Расчет токов во всех ветвях схемы электрической цепи методом контурных токов.

Метод контурных токов (МКТ) основан на том, что в каждом независимом контуре электрической цепи вводится контурный ток. По любой ветви электрической цепи должен проходить хотя бы один контурный ток. Для определения контурных токов составляются уравнения по второму закону Кирхгофа. Ток в любой ветви можно представить в виде алгебраической суммы контурных токов, протекающих по этой ветви.

Заменим источник тока J_{T4} эквивалентным источником ЭДС E_{T4} (рисунок 1.6).

$$E_{T4} = R_4 \cdot J_{T4} = 5 \cdot 2 = 10B.$$

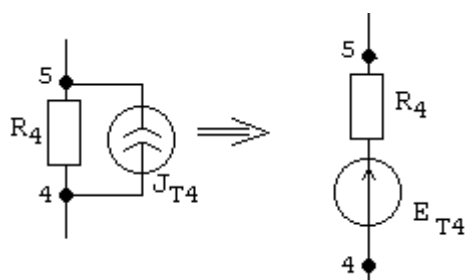


Рисунок 1.6

Заменяем два источника ЭДС E_4 и E_{T4} одним эквивалентным источником $E_{\Sigma 4}$ (рисунок 1.7).

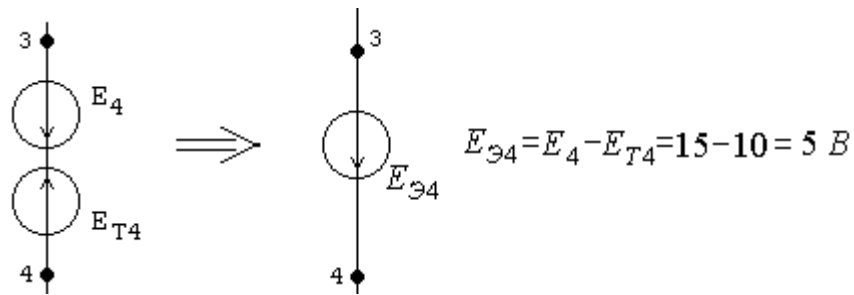


Рисунок 1.7

Составим уравнения для расчета токов методом контурных токов для электрической цепи (рисунок 1.8).

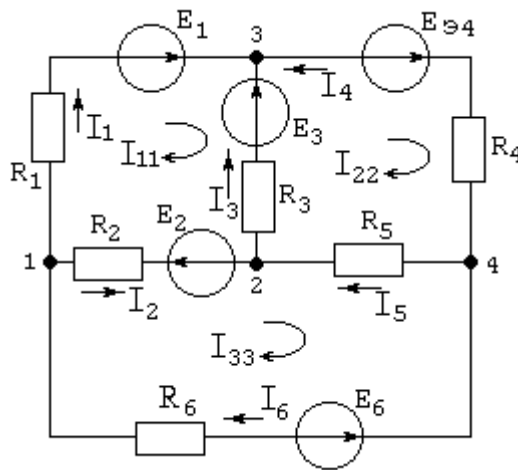


Рисунок 1.8

Выбираем взаимно независимые контуры, в каждом из которых замыкается один контурный ток. Положительные направления контурных токов выбираем произвольно. Число уравнений, составленных по МКТ, равно числу уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа.

$$\left. \begin{aligned} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}I_{33} &= E_{11} \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + R_{23}I_{33} &= E_{22} \\ R_{31}I_{11} + R_{32}I_{22} + R_{33}I_{33} &= E_{33} \end{aligned} \right\}. \quad (1.12)$$

R_{11}, R_{22}, R_{33} - собственные сопротивления контуров.

Собственное сопротивление контура равно сумме сопротивлений ветвей, входящих в данный контур:

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_3 = 2 + 4 + 3 = 9 \text{ Ом};$$

$$R_{22} = R_3 + R_4 + R_5 = 3 + 5 + 2 = 10 \text{ Ом};$$

$$R_{33} = R_2 + R_5 + R_6 = 4 + 2 + 4 = 10 \text{ Ом}.$$

$R_{12}=R_{21}$; $R_{13}=R_{31}$; $R_{23}=R_{32}$ - общие сопротивления контуров.

Общее сопротивление контуров равно сопротивлению ветви, общей для этих контуров. Общее сопротивление берется со знаком «+», если контурные токи рассматриваемых контуров протекают через общие для этих контуров ветви в одинаковом направлении, знак «-», если контурные токи в общих ветвях имеют противоположные направления:

$$R_{12} = R_{21} = -R_3 = -3 \text{ Ом};$$

$$R_{13} = R_{31} = -R_2 = -4 \text{ Ом};$$

$$R_{23} = R_{32} = -R_5 = -2 \text{ Ом}.$$

E_{11} , E_{22} , E_{33} - контурные ЭДС

Каждая из контурных ЭДС равна алгебраической сумме ЭДС всех источников в ветвях, входящих в данный контур. Положительные знаки взяты для ЭДС, положительные направления которых совпадают с положительным направлением контурного тока, замыкающегося в данном контуре:

$$E_{11}=E_1 - E_3 + E_2 = 10 - 5 + 20 = 25 \text{ В};$$

$$E_{22}=E_3 + E_{\text{Э4}} = 5 + 5 = 10 \text{ В};$$

$$E_{33} = -E_2 - E_6 = -20 - 10 = -30 \text{ В}.$$

Система уравнений для расчета токов по методу контурных токов имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} 9I_{11} - 3I_{22} - 4I_{33} &= 25; \\ -3I_{11} + 10I_{22} - 2I_{33} &= 10; \\ -4I_{11} - 2I_{22} + 10I_{33} &= -30. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Решая систему (1.13) при помощи определителей, определим токи I_{11} , I_{22} , I_{33} .

Рассчитаем определитель системы Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & -3 & -4 \\ -3 & 10 & -2 \\ -4 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 566;$$

Рассчитаем определители Δ_{11} , Δ_{22} , Δ_{33} :

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} E_{11} & R_{12} & R_{13} \\ E_{22} & R_{22} & R_{23} \\ E_{33} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 25 & -3 & -4 \\ 10 & 10 & -2 \\ -30 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 1400;$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} R_{11} & E_{11} & R_{13} \\ R_{21} & E_{22} & R_{23} \\ R_{31} & E_{33} & R_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 25 & -4 \\ -3 & 10 & -2 \\ -4 & -30 & 10 \end{vmatrix} = 790;$$

$$\Delta_{33} = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & E_{11} \\ R_{21} & R_{22} & E_{22} \\ R_{31} & R_{32} & E_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & -3 & 25 \\ -3 & 10 & 10 \\ -4 & -2 & -30 \end{vmatrix} = -980.$$

Определим контурные токи по формулам:

$$I_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{1400}{566} = 2,47 \text{ A};$$

$$I_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta} = \frac{790}{566} = 1,4 \text{ A};$$

$$I_{33} = \frac{\Delta_{33}}{\Delta} = \frac{-980}{566} = -1,73 \text{ A}.$$

Рассчитаем токи в ветвях электрической цепи.

Токи в ветвях I_1, I_4, I_6 равны контурным токам:

$$I_1 = I_{11} = 2,47 \text{ A};$$

$$I_4 = -I_{22} = -1,4 \text{ A};$$

$$I_6 = I_{33} = -1,73 \text{ A}.$$

Токи в ветвях I_2, I_3, I_5 , общих для нескольких контуров, равны алгебраической сумме контурных токов, протекающих по этим ветвям:

$$I_2 = -I_{11} + I_{33} = -2,47 - 1,73 = -4,2 \text{ A};$$

$$I_3 = I_{22} - I_{11} = 1,40 - 2,47 = -1,07 \text{ A};$$

$$I_5 = I_{22} - I_{33} = 1,40 + 1,73 = 3,13 \text{ A}.$$

Определим ток I_4° по первому закону Кирхгофа:

$$I_4' = I_4 - J_{T4} = -1,40 - 2 = -3,4 \text{ A}.$$

Если в результате решения значение какого-либо тока получилось отрицательным, то это означает, что действительное направление этого тока противоположно направлению, принятому за положительное.

Расчет токов во всех ветвях электрической цепи методом узловых потенциалов (МУП).

Метод узловых потенциалов позволяет уменьшить число уравнений системы до числа $U = N_y - 1$. Суть МУП заключается в определении потенциалов узлов электрической цепи, токи рассчитываются по закону Ома. При составлении уравнений узловых потенциалов, потенциал одного из узлов принимают равным нулю, для определения потенциалов оставшихся узлов составляются уравнения.

Если электрическая схема содержит только одну ветвь с идеальным источником ЭДС E и с сопротивлением, равным нулю, то при составлении уравнений по методу узловых потенциалов к нулю приравнивается потенциал одного из узлов, к которому присоединена данная ветвь. Тогда потенциал другого узла, присоединенного к этой же ветви, будет равен $\pm E$.

Определим узловые потенциалы для электрической цепи (рисунок 1.8).

Рассчитаем проводимости каждой ветви:

$$g_1 = \frac{1}{R_1} = 0,5 \text{ См}; \quad g_2 = \frac{1}{R_2} = 0,25 \text{ См}; \quad g_3 = \frac{1}{R_3} = 0,33 \text{ См};$$

$$g_4 = \frac{1}{R_4} = 0,2 \text{ См}; \quad g_5 = \frac{1}{R_5} = 0,5 \text{ См}; \quad g_6 = \frac{1}{R_6} = 0,25 \text{ См}.$$

Приравниваем к нулю потенциал любого узла, пусть $\varphi_4=0$.

Запишем уравнения для определения узловых потенциалов:

$$\left. \begin{aligned} g_{11}\varphi_1 - g_{12}\varphi_2 - g_{13}\varphi_3 &= \sum_1 Eg \\ -g_{21}\varphi_1 + g_{22}\varphi_2 - g_{23}\varphi_3 &= \sum_2 Eg \\ -g_{31}\varphi_1 - g_{32}\varphi_2 + g_{33}\varphi_3 &= \sum_3 Eg \end{aligned} \right\}. \quad (1.14)$$

g_{11} , g_{22} , g_{33} - собственная узловая проводимость, равна сумме проводимостей ветвей, присоединенных к данному узлу:

$$g_{11} = g_1 + g_2 + g_6 = 1 \text{ См};$$

$$g_{22} = g_2 + g_3 + g_5 = 1,08 \text{ См};$$

$$g_{33} = g_1 + g_3 + g_4 = 1,03 \text{ См}.$$

$g_{12} = g_{21}$, $g_{13} = g_{31}$, $g_{23} = g_{32}$ - общая узловая проводимость, равна сумме проводимостей ветвей, соединяющих между собой рассматриваемые узлы:

$$g_{12} = g_{21} = g_2 = 0,25 \text{ См};$$

$$g_{13} = g_{31} = g_1 = 0,5 \text{ См};$$

$$g_{23} = g_{32} = g_3 = 0,33 \text{ См}.$$

$\sum Eg$ - алгебраическая сумма произведений ЭДС на соответствующие проводимости для всех ветвей, присоединенных к рассматриваемому узлу. Если ЭДС направлена к рассматриваемому узлу, записывается знак «+», если ЭДС направлена от узла - «-»:

$$\sum_1 Eg = -E_1 g_1 + E_2 g_2 - E_6 g_6 = -2,5 \text{ А};$$

$$\sum_2 Eg = -E_2 g_2 - E_3 g_3 = -6,65 \text{ А};$$

$$\sum_3 Eg = E_1 g_1 + E_3 g_3 - E_{34} g_4 = 5,65 \text{ А}.$$

Уравнение для расчета узловых потенциалов запишется в виде:

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot \varphi_1 - 0,25\varphi_2 - 0,5\varphi_3 &= -2,5; \\ -0,25\varphi_1 + 1,08\varphi_2 - 0,33\varphi_3 &= -6,65; \\ -0,5\varphi_1 - 0,33\varphi_2 + 1,03\varphi_3 &= 5,65. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Рассчитаем потенциалы φ_1 , φ_2 , φ_3 при помощи определителей.
Определители для системы уравнений равны:

$$\Delta = \begin{vmatrix} g_{11} & -g_{12} & -g_{13} \\ -g_{21} & g_{22} & -g_{23} \\ -g_{31} & -g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -0,25 & -0,5 \\ -0,25 & 1,08 & -0,33 \\ -0,5 & -0,33 & 1,03 \end{vmatrix} = 0,587;$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} \sum_1 Eg & -g_{12} & -g_{13} \\ \sum_2 Eg & g_{22} & -g_{23} \\ \sum_3 Eg & -g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2,5 & -0,25 & -0,5 \\ -6,65 & 1,08 & -0,33 \\ 5,65 & -0,33 & 1,03 \end{vmatrix} = -1,80;$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} g_{11} & \sum_1 Eg & -g_{13} \\ -g_{21} & \sum_2 Eg & -g_{23} \\ -g_{31} & \sum_3 Eg & g_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2,5 & -0,5 \\ -0,25 & -6,65 & -0,33 \\ -0,5 & 5,65 & 1,03 \end{vmatrix} = -3,67;$$

$$\Delta_{33} = \begin{vmatrix} g_{11} & -g_{12} & \sum_1 Eg \\ -g_{21} & g_{22} & \sum_2 Eg \\ -g_{31} & -g_{32} & \sum_3 Eg \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -0,25 & -2,5 \\ -0,25 & 1,08 & -6,65 \\ -0,5 & -0,33 & 5,65 \end{vmatrix} = 1,17.$$

Потенциалы φ_1 , φ_2 , φ_3 определим по формулам:

$$\varphi_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = -\frac{1,80}{0,587} = -3,07 \text{ В};$$

$$\varphi_2 = \frac{\Delta_{22}}{\Delta} = -\frac{3,67}{0,587} = -6,25 \text{ В};$$

$$\varphi_3 = \frac{\Delta_{33}}{\Delta} = \frac{1,17}{0,587} = 1,99 \text{ В}.$$

Токи в ветвях электрической цепи определим по закону Ома:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\varphi_1 - \varphi_3 + E_1}{R_1} = \frac{-3,07 - 1,99 + 10}{2} = 2,47 \text{ A}; \\
I_2 &= \frac{\varphi_1 - \varphi_2 - E_2}{R_2} = \frac{-3,07 + 6,25 - 20}{4} = -4,2 \text{ A}; \\
I_3 &= \frac{\varphi_2 - \varphi_3 + E_3}{R_3} = \frac{-6,25 - 1,99 + 5}{3} = -1,08 \text{ A}; \\
I_4 &= \frac{-\varphi_3 - E_{\varepsilon 4}}{R_4} = \frac{-1,99 - 5}{5} = -1,4 \text{ A}; \\
I'_4 &= I_4 - J_{T4} = -1,4 - 2 = -3,4 \text{ A}; \\
I_5 &= \frac{-\varphi_2}{R_5} = \frac{6,25}{2} = 3,13 \text{ A}; \\
I_6 &= \frac{-\varphi_1 - E_6}{R_6} = \frac{3,07 - 10}{4} = -1,73 \text{ A}.
\end{aligned}$$

Метод эквивалентного генератора (МЭГ).

Метод эквивалентного генератора основан на теореме об активном двухполюснике, и позволяет определить ток в какой-либо одной ветви электрической цепи. Различают два варианта теоремы об активном двухполюснике:

а) теорема об эквивалентном источнике напряжения;

б) теорема об эквивалентном источнике тока. Рассмотрим *теорему об эквивалентном источнике напряжения*: ток в любой ветви линейной электрической цепи не изменится, если активный двухполюсник (электрическая цепь с двумя выводами), к которому присоединена данная ветвь, заменить эквивалентным источником напряжения с ЭДС $E_{\varepsilon K}$, равной напряжению U_X на зажимах разомкнутой ветви (рисунок 1.9 в), режим холостого хода (х.х.) и внутренним сопротивлением $R_{\varepsilon K}$, равным входному сопротивлению R_{BX} пассивного двухполюсника со стороны разомкнутой ветви (рисунок 1.9 г).

Пассивный двухполюсник получается из активного приравниванием к нулю всех ЭДС независимых источников напряжения (на схеме идеальный источник ЭДС заменяется короткозамкнутым участком) и всех токов независимых источников тока (ветвь с идеальным источником тока размыкается). Сопротивлением $R_{\varepsilon K}$ можно также рассчитать по формуле:

$R_{\varepsilon K} = \frac{U_X}{I_K}$, где I_K - ток короткого замыкания (рисунок 1.9 д). Ток в ветви с сопротивлением R определяют по закону Ома: $I = \frac{E_{\varepsilon K}}{R + R_{\varepsilon K}} = \frac{U_X}{R + R_K}$ или

$I = \frac{E_{\varepsilon K} \pm E}{R + R_{\varepsilon K}} = \frac{U_X \pm E}{R + R_{\varepsilon K}}$, если выделенная ветвь содержит источник ЭДС E . Со знаком «+» записывают ЭДС, направления которых совпадают с

направлением тока в этой ветви, со знаком «-» записывают ЭДС, направления которых противоположны направлению тока в этой ветви.

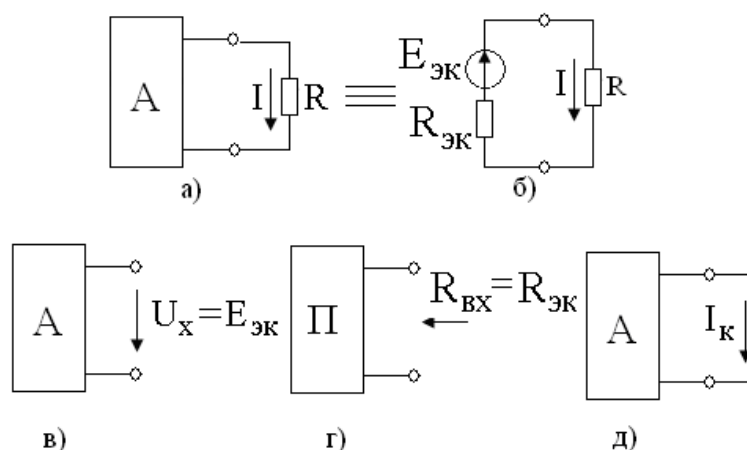


Рисунок 1.9

Определим ток I_2 , используя *метод активного двухполюсника*.

Заменим электрическую цепь, к которой присоединена выделенная ветвь с током I_2 , эквивалентным источником с ЭДС E_X , равной напряжению на зажимах разомкнутой ветви U_{12X} , и сопротивлением R_B , равным входному сопротивлению электрической цепи относительно зажимов, к которым присоединена данная ветвь (рисунок 1.10).

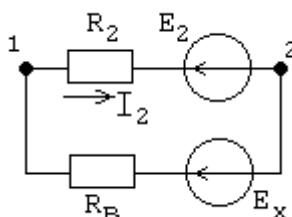


Рисунок 1.10

Ток I_2 рассчитаем по формуле:

$$I_2 = \frac{E_X - E_2}{R_e + R_2}. \quad (1.16)$$

Рассчитаем $E_X = U_{12X}$. Разомкнем ветвь с током I_2 , и определим U_{12X} :

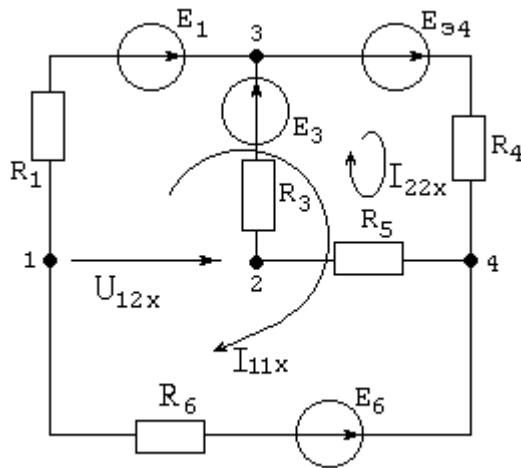


Рисунок 1.11

$$U_{12X} = -R_3 I_{22X} + E_3 - E_1 + R_1 I_{11X} . \quad (1.17)$$

Определим I_{11X} , I_{22X} методом контурных токов:

$$\begin{cases} (R_1 + R_4 + R_6)I_{11X} + R_4 I_{22X} = E_1 + E_{34} - E_6; \\ R_4 I_{11X} + (R_3 + R_4 + R_5)I_{22X} = E_3 + E_{34}. \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\begin{cases} 11I_{11X} + 5I_{22X} = 5; \\ 5I_{11X} + 10I_{22X} = 10. \end{cases}$$

$$I_{11X} = 0A; I_{22X} = 1 A;$$

$$U_{12X} = -8 B.$$

Определим сопротивление R_B . Положим ЭДС E_1 , E_3 , E_{34} , E_6 , равными нулю (рисунок 1.11).

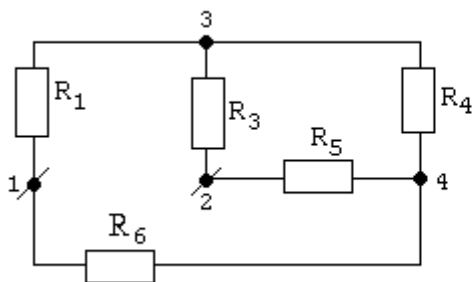


Рисунок 1.11

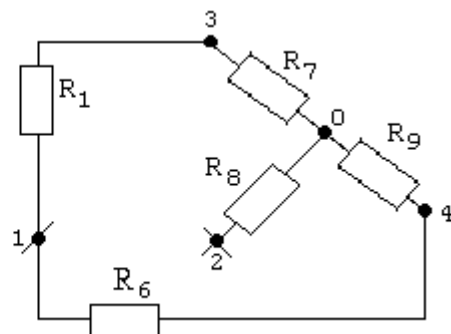


Рисунок 1.12

Преобразуем треугольник сопротивлений R_3 , R_4 , R_5 в эквивалентную звезду (рисунок 1.12):

$$\begin{aligned}
R_7 &= \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4 + R_5} = 1,5 \text{ Ом}; \\
R_8 &= \frac{R_3 \cdot R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = 0,6 \text{ Ом}; \\
R_9 &= \frac{R_4 \cdot R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = 1 \text{ Ом};
\end{aligned} \tag{1.19}$$

$$R_B = R_8 + \frac{(R_1 + R_7)(R_6 + R_9)}{R_1 + R_7 + R_6 + R_9} = 2,66 \text{ Ом.} \tag{1.20}$$

Ток I_2 будет равен:

$$I_2 = \frac{E_X - E_2}{R_B + R_2} = \frac{-8 - 20}{2,66 + 4} = -4,2 \text{ А.} \tag{1.21}$$

Составление уравнения баланса мощностей.

Суммарная мощность всех источников ЭДС и источников тока $P_{\text{ИСТ}}$ в электрической цепи равна суммарной мощности, расходуемой в сопротивлениях $P_{\text{ПР}}$:

$$\begin{aligned}
P_{\text{ИСТ}} &= P_{\text{ПР}}, \\
\sum_{k=1}^n (E_k I_k + U_{T_k} J_{T_k}) &= \sum_{k=1}^n I_k^2 R_k.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

$E_k I_k$ - мощность источника ЭДС в k -й ветви; мощность положительна, если положительные направления ЭДС E_k и тока I_k одинаковы; и отрицательна, если положительные направления ЭДС E_k и тока I_k противоположны;

$U_{T_k} J_{T_k}$ - мощность источника тока. U_{T_k} - напряжение на зажимах источника тока. Мощность положительна, если положительные направления U_{T_k} и I_k одинаковы, и отрицательна, если положительные направления U_{T_k} и I_k противоположны;

$I_k^2 R_k$ - мощность в сопротивлении k -й ветви.

Суммарная мощность всех источников ЭДС и источника тока:

$$P_{c.,T} = E_1 I_1 - E_2 I_2 + E_3 I_3 - E_6 I_6 - E_4 I_4 + U_{T4} J_{T4}. \tag{1.23}$$

Определим $U_{T4} = U_{54} = -I_4^{\circ} R_4 = 3,40 \cdot 5 = 17 \text{ В.}$

$P_{\text{ИСТ}} = 10 \cdot 2,47 - 20(-4,2) + 5 \cdot (-1,07) - 10 \cdot (-1,73) - 15 \cdot (-1,4) + 17 \cdot 2 = 175,65 \text{ Вт.}$

Суммарная мощность в сопротивлениях:

$$P_{np.} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4'^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 = 175,55 \text{ Вт.} \quad (1.24)$$

Определим погрешность расчетов:

$$\delta\% = \frac{P_{ист} - P_{пр}}{P_{ист}} \cdot 100\% = 0,06\%. \quad (1.25)$$

Построение потенциальной диаграммы для внешнего контура схемы электрической цепи.

Потенциальная диаграмма – это график распределения потенциала вдоль участка цепи или замкнутого контура. По оси абсцисс откладываются сопротивления участков в той последовательности, в которой они включены в цепь, а по оси ординат потенциалы соответствующих точек.

Приравняем к 0 потенциал любого узла электрической цепи, пусть $\varphi_4=0$, тогда

$$\begin{aligned} \varphi_5 &= -I_4' R_4 = 17 \text{ В}; \\ \varphi_3 &= \varphi_5 - E_4 = 2 \text{ В}; \\ \varphi_7 &= \varphi_5 - E_1 = -8 \text{ В}; \\ \varphi_1 &= \varphi_7 + I_1 R_1 = -3,1 \text{ В}; \\ \varphi_6 &= \varphi_1 + I_6 R_6 = -10 \text{ В}; \\ \varphi_4 &= \varphi_6 + E_6 = 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

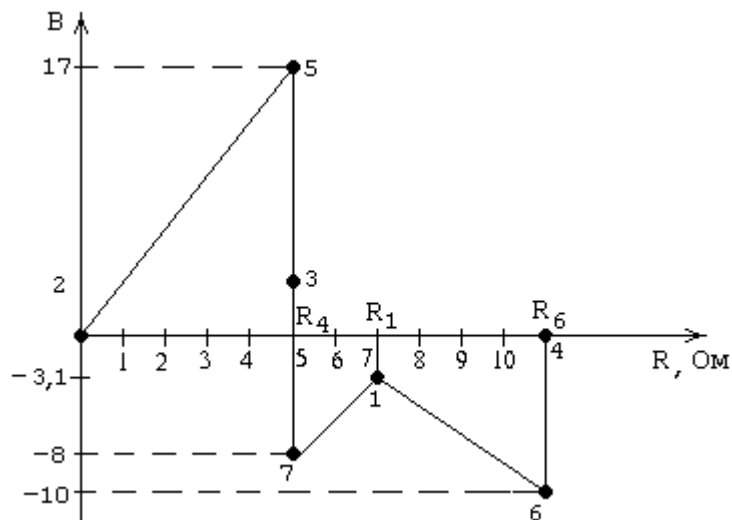


Рисунок 1.13

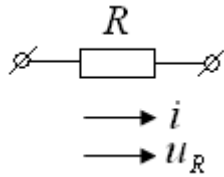
2 Расчет электрических цепей однофазного синусоидального тока

Расчет простейших цепей однофазного синусоидального тока.

Расчет линейных электрических схем гармонического тока в установившемся режиме аналогичен расчету электрических цепей постоянного тока, только все параметры записывают в комплексной (символической) форме.

Представим напряжение на активном сопротивлении, индуктивности и емкости относительно мгновенных и комплексных значений:

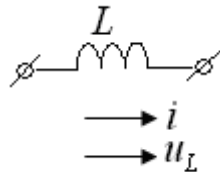
1)



$$u_R = iR$$

$$\dot{U} = \dot{I} R.$$

2)

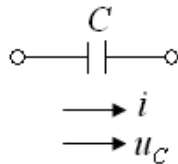


$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

$$\dot{U} = j\omega L \dot{I},$$

где $jX_L = j\omega L$ - индуктивное сопротивление в комплексной форме.

3)



$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt$$

$$\dot{U}_C = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I},$$

где $-jX_C = -j \frac{1}{\omega C}$ - емкостное сопротивление в комплексной форме.

2.1 Рассмотрим схему последовательного соединения активного, индуктивного и емкостного сопротивления

Рассчитаем ток, построим векторную диаграмму.

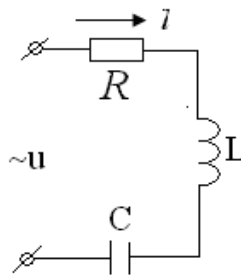


Рисунок 2.1

Комплексное сопротивление контура

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C).$$

Комплексное значение тока. $\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} A.$

Комплексы падений напряжений на участках:

$$\dot{U}_R = R \dot{I};$$

$$\dot{U}_L = jX_L \dot{I};$$

$$\dot{U}_C = -jX_C \dot{I}.$$

Построим векторную диаграмму (рисунок 2.2). Для этого нужно выбрать масштаб для тока и напряжений: m_I, m_U .

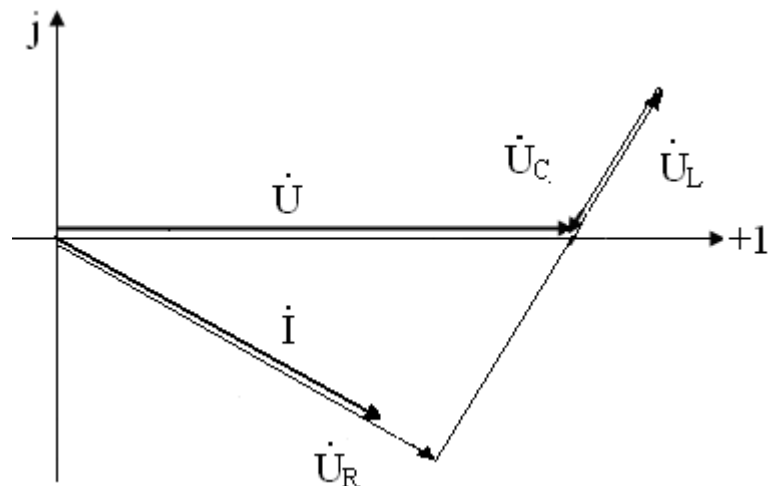


Рисунок 2.2

2.2 Рассмотрим смешанное соединение приемников (рисунок 2.3).

Определим токи ветвей. Построим векторную диаграмму.

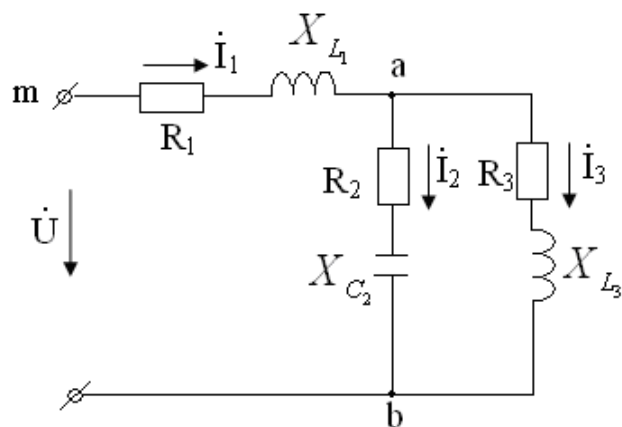


Рисунок 2.3

Комплексные сопротивления ветвей:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{L_1} ;$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 - jX_{C_2} ;$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + jX_{L_3} .$$

Полное сопротивление цепи:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} .$$

Ток в неразветвленной части цепи:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} .$$

Токи в параллельных ветвях могут быть выражены по теореме разброса:

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \cdot \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} ;$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 \cdot \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} .$$

Для построения векторной диаграммы (рисунок 2.4) рассчитаем падения напряжений на участках схемы:

$$U_{R_1} = R_1 I_1 ;$$

$$\dot{U}_{R_2} = R_2 \dot{I}_2 ;$$

$$\dot{U}_{R_3} = R_3 \dot{I}_3 ;$$

$$\dot{U}_{L_1} = jX_{L_1} \dot{I}_1 ;$$

$$\dot{U}_{C_2} = -jX_{C_2} \dot{I}_2 ;$$

$$\dot{U}_{L_3} = jX_{L_3} \dot{I}_3 .$$

Перед построением векторной диаграммы нужно выбрать масштабы по току и по напряжению: m_I ; m_U .

При построении векторной диаграммы учитываем, что:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 ; \quad \dot{U}_{ma} = \dot{U}_{R_1} + \dot{U}_{L_1} ;$$

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{R_2} + \dot{U}_{C_2} = \dot{U}_{R_3} + \dot{U}_{L_3} ;$$

$$\dot{U} = \dot{U}_{ma} + \dot{U}_{ab} .$$

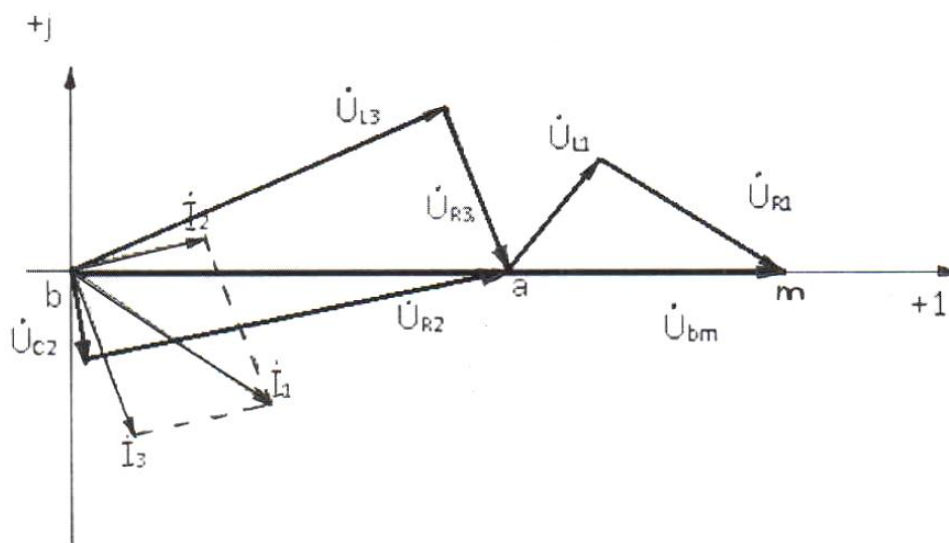


Рисунок 2.4

2.3 Методы расчёта разветвленных электрических цепей однофазного синусоидального тока

Расчет линейных электрических схем однофазного синусоидального тока аналогичен расчету электрических цепей постоянного тока, только все параметры записывают в комплексной (символической) форме. Таким образом, можно перейти от интегро-дифференциальных уравнений, составленных относительно мгновенных значений к алгебраическим уравнениям, составленным относительно комплексных значений.

Законы Кирхгофа в дифференциальной форме.

Законы Кирхгофа в дифференциальной форме записываются для мгновенных значений переменных токов и напряжений. *Первый закон Кирхгофа*: алгебраическая сумма мгновенных значений токов в узле схемы равна нулю:

$$\sum_{K=1}^n i_K = 0.$$

Со знаком «+» записываются токи i_K , положительные направления которых направлены к рассматриваемому узлу, со знаком «-» записываются токи i_K , положительные направления которых направлены от данного узла (или наоборот).

Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма мгновенных ЭДС всех источников напряжения в любом замкнутом контуре схемы равна алгебраической сумме мгновенных напряжений на всех остальных элементах того же контура:

$$\sum_{K=1}^n (R_K i_K + L_K \frac{di_K}{dt} + \frac{1}{C_K} \int i_K dt) = \sum_{K=1}^n e_K.$$

Второй закон Кирхгофа записывается для независимых контуров схемы, независимые контуры выбираются, так же, как и для цепей постоянного тока. Со знаком «+» записываются мгновенные напряжения, если положительные направления токов i_K и направление обхода контура совпадают, в противном случае напряжения записываются со знаком «-». Мгновенные ЭДС e_K записываются со знаком «+», если положительные направления e_K и направление обхода контура совпадают, в противном случае e_K записываются со знаком «-».

Законы Кирхгофа в символической форме.

Законы Кирхгофа в символической (комплексной) форме записываются для комплексных амплитуд или комплексных действующих значений токов, напряжений, ЭДС. *Первый закон Кирхгофа*: алгебраическая сумма комплексных токов в узле схемы равна нулю:

$$\sum_{K=1}^n \dot{i}_K = 0.$$

Со знаком «+» записываются токи \dot{i}_K , направленные к рассматриваемому узлу, со знаком «-» записываются токи \dot{i}_K , направленные от данного узла (или наоборот).

Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма комплексных ЭДС всех источников напряжения в любом замкнутом контуре схемы равна алгебраической сумме комплексных напряжений на всех остальных элементах того же контура:

$$\sum_{K=1}^n (R_K \dot{I}_K + j\omega L_K \dot{I}_K - j \frac{1}{\omega C_K} \dot{I}_K) = \sum_{K=1}^n \dot{E}_K, \text{ или } \sum_{K=1}^n \underline{Z}_K \dot{I}_K = \sum_{K=1}^n \dot{E}_K.$$

Здесь $\underline{Z}_K = R_K + j(x_{L_K} - x_{C_K})$, $x_{L_K} = \omega L_K$, $x_{C_K} = 1/\omega C_K$;

$\dot{U}_{R_K} = R_K \dot{I}_K$ – комплексное напряжение на активном сопротивлении;

$\dot{U}_{L_K} = j\omega L_K \dot{I}_K = jx_{L_K} \dot{I}_K$ – комплексное напряжение на индуктивности;

$\dot{U}_{C_K} = -j1/\omega C_K \dot{I}_K = -jx_{C_K} \dot{I}_K$ – комплексное напряжение на емкости.

Напряжения $\dot{U}_{R_K}, \dot{U}_{L_K}, \dot{U}_{C_K}$ записываются со знаком «+», если положительные направления токов \dot{I}_K и направление обхода контура совпадают, в противном случае напряжения записываются со знаком «-». ЭДС \dot{E}_K записываются со знаком «+», если положительные направления \dot{E}_K и направление обхода контура совпадают, в противном случае \dot{E}_K записываются со знаком «-».

Уравнения, выражающие законы Кирхгофа в комплексной форме для цепей синусоидального тока: $\sum_{K=1}^n \dot{I}_K = 0$, $\sum_{K=1}^n \underline{Z}_K \dot{I}_K = \sum_{K=1}^n \dot{E}_K$, аналогичны уравнениям, выражающим законы Кирхгофа для цепей постоянного тока:

$$\sum_{K=1}^n I_K = 0, \quad \sum_{K=1}^n R_K I_K = \sum_{K=1}^n E_K.$$

Следовательно, расчет цепей синусоидального тока комплексным методом полностью аналогичен расчету цепей постоянного тока. Все методы расчета цепей постоянного тока (МКТ, МУП, МЭГ и т.п.) применяют для расчета цепей синусоидального тока, только ЭДС, напряжения, токи и сопротивления входят в уравнения в виде комплексных величин:

$$\dot{E}_K, \dot{U}_K, \dot{I}_K, \underline{Z}_K.$$

Расчет разветвленных цепей однофазного синусоидального тока рассмотрим на примере схемы (рисунок 2.5).

Исходные данные для расчета:

$$e_2 = 20\sqrt{2}\sin(\omega t + 45^\circ);$$

$$e_3 = 40\sqrt{2}\sin(\omega t + 30^\circ);$$

$$R_1 = 15 \text{ Ом}; \quad X_{L1} = 10 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 18 \text{ Ом}; \quad X_{L3} = 10 \text{ Ом};$$

$$X_{C3} = 8 \text{ Ом}.$$

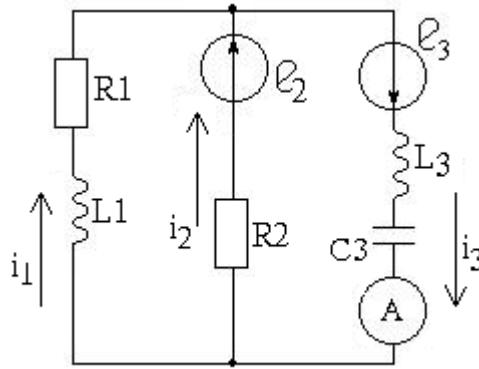


Рисунок 2.5

Составление уравнений для расчета токов во всех ветвях схемы на основании *законов Кирхгофа*, используя две формы записи: дифференциальную и символическую.

Произвольно выбираем направление токов в ветвях (рисунок 2.5). Составим уравнения в дифференциальной форме, т.е. для мгновенных значений токов и напряжений. В соответствии с первым законом Кирхгофа алгебраическая сумма мгновенных токов ветвей, сходящихся в узле, равна нулю. В схеме два узла, поэтому по первому закону Кирхгофа составим одно уравнение. По второму закону Кирхгофа алгебраическая сумма мгновенных ЭДС всех источников напряжения в замкнутом контуре схемы равна алгебраической сумме мгновенных напряжений на всех остальных элементах того же контура. В схеме два независимых контура, поэтому составляется два уравнения по второму закону Кирхгофа. Таким образом, получаем систему уравнений, составленных по законам Кирхгофа, в дифференциальной форме:

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - R_2 i_2 = -e_2 \\ R_2 i_2 + L_3 \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C_3} \int i_3 dt = e_2 + e_3 . \end{cases} \quad (2.1)$$

Для записи уравнений в символической форме необходимо мгновенные значения токов, ЭДС и напряжений заменить изображающими комплексами. Тогда получим систему уравнений по законам Кирхгофа в символической форме:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0 \\ (R_1 + jX_{L1})\dot{I}_1 - R_2 \dot{I}_2 = -\dot{E}_2 \\ R_2 \dot{I}_2 + (jX_{L3} - jX_{C3})\dot{I}_3 = \dot{E}_2 + \dot{E}_3 . \end{cases} \quad (2.2)$$

Решение полученной системы уравнений позволяет определить комплексные действующие значения токов в ветвях. Более эффективно эта задача может быть решена с использованием методов контурных токов и узловых потенциалов.

Расчет комплексных токов методом контурных токов.

Выберем направления контурных токов \dot{I}_{11} и \dot{I}_{22} по часовой стрелке и составим уравнения по второму закону Кирхгофа для этих токов (рисунок 2.6).

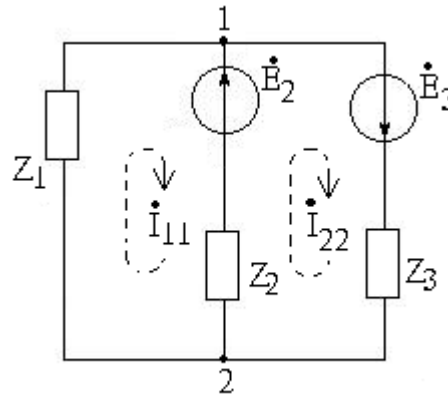


Рисунок 2.6

$$\begin{cases} (Z_1 + Z_2)\dot{I}_{11} - Z_2\dot{I}_{22} = -\dot{E}_2 \\ -Z_2\dot{I}_{11} + (Z_2 + Z_3)\dot{I}_{22} = \dot{E}_2 + \dot{E}_3 \end{cases} \quad (2.3)$$

где через Z_1 , Z_2 , Z_3 обозначены комплексные сопротивления соответствующих ветвей; $Z_1=R_1+jX_{L1}$; $Z_2=R_2$; $Z_3=j(X_{L3}-X_{C3})$.

\dot{E}_2 и \dot{E}_3 представляют собой комплексные действующие значения ЭДС:

$$\dot{E}_2 = 20e^{j45^\circ}, \text{ В}; \quad \dot{E}_3 = 40e^{j30^\circ}, \text{ В}.$$

Подставляя численные значения сопротивлений и ЭДС, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} (33 + j10)\dot{I}_{11} - 18\dot{I}_{22} = -20e^{j45^\circ} \\ -18\dot{I}_{11} + (18 + j2)\dot{I}_{22} = 20e^{j45^\circ} + 40e^{j30^\circ} \end{cases} \quad (2.4)$$

Уравнения (2.4) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 33 + j10 & -18 \\ -18 & 18 + j2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_{11} \\ \dot{I}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14,142 - j14,142 \\ 48,783 + j34,142 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Решим систему (2.5) способом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 33 + j10 & -18 \\ -18 & 18 + j2 \end{vmatrix} = 574 + j246 - 324 = 250 + j246 = 350,74e^{j44,5^\circ};$$

$$\Delta_{I_{11}} = \begin{vmatrix} -14,142 - j14,142 & -18 \\ 48,783 + j34,142 & 18 + j2 \end{vmatrix} = 651,822 + j331,716;$$

$$\Delta_{I_{22}} = \begin{vmatrix} 33 + j10 & -14,142 - j14,142 \\ -18 & 48,783 + j34,142 \end{vmatrix} = 1013,863 + j1359,96;$$

$$\dot{I}_{11} = \frac{\Delta_{I_{11}}}{\Delta} = 1,988 - j0,629 = 2,086e^{-j17,6^\circ}, \text{ А};$$

$$\dot{I}_{22} = \frac{\Delta I_{22}}{\Delta} = 4,78 + j0,736 = 4,836e^{j8,7^0}, A.$$

Определяем комплексы токов ветвей через найденные комплексы контурных токов при направлениях токов (рисунок 2.6):

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11} = 2,086e^{-j17,6^0}, A$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{22} - \dot{I}_{11} = 2,792 + j1,365 = 3,11e^{j26^0}, A;$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_{22} = 4,836e^{j8,6^0}, A$$

Расчет комплексов токов методом узловых потенциалов.

В схеме (рисунок 2.6) два узла, поэтому целесообразно применить метод двух узлов, являющийся частным случаем метода узловых потенциалов. Рассчитываем комплекс напряжения между узлами:

$$\dot{U}_{12} = \frac{\dot{E}_2 Y_2 - \dot{E}_3 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}, \quad (2.6)$$

где:

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{15 + j10} = 0,046 - j0,031 \text{ См};$$

$$Y_2 = \frac{1}{Z_2} = 0,0556 \text{ См}; \quad Y_3 = \frac{1}{Z_3} = -j0,5 \text{ См};$$

$$\dot{U}_{12} = \frac{20e^{j45} \cdot 0,0556 - 40e^{j30}(-j0,5)}{0,046 - j0,0331 + 0,0556 - j0,5} = 37,62e^{-j164^0}, B.$$

Комплексы токов в ветвях рассчитываем по закону Ома:

$$\dot{I}_1 = \frac{-\dot{U}_{12}}{Z_1} = \frac{-37,62e^{-j164^0}}{18,03e^{j33,6^0}} = 2,086e^{-j17,6^0} A;$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_2 - \dot{U}_{12}}{Z_2} = \frac{20e^{j45^0} - 37,62e^{-j164^0}}{18} = 3,11e^{j26^0} A;$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{E}_3 + \dot{U}_{12}}{Z_3} = \frac{40e^{j30^0} + 37,62e^{-j164^0}}{j2} = 4,836e^{j8,6^0} A.$$

Мощности в цепи синусоидального тока. Баланс мощностей.

Активная мощность. Активной мощностью называется среднее значение мгновенной мощности за период: $P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt$. Для синусоидального

тока активная мощность равна:

$$P = UI \cos \varphi = RI^2 = qU^2,$$

где U, I-действующие значения напряжения и тока;

φ - разность фаз напряжения и тока.

Единицы измерения активной мощности – ватты (Вт).

Реактивная мощность. Реактивная мощность определяется так:

$$Q = UI \sin \varphi = xI^2 = bU^2,$$

где x, b – реактивные сопротивление и проводимость. Единицу измерения реактивной мощности называют ВАр.

Полная мощность. Полной мощностью называется величина:

$$S = UI.$$

Единицу измерения полной мощности называют ВА (вольт-ампер).

Для синусоидального тока активная, реактивная и полная мощности связаны соотношением: $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$.

Комплексная мощность. Комплексной мощностью называют величину:

$$\tilde{S} = \dot{U}I^* = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ = Se^{j\varphi},$$

где $I^* = Ie^{-j\psi_i}$ – комплекс тока, сопряженный с комплексным током $\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$.

Другие выражения для комплексной мощности: $\tilde{S} = \underline{Z}I^2 = \underline{Y}^*U^2$.

Баланс мощностей.

В любой замкнутой электрической цепи сумма мощностей всех источников энергии равна сумме мощностей, расходуемых в приёмниках.

Уравнение баланса комплексных мощностей:

$$\sum_{K=1}^n \tilde{S}_{ИСТ K} = \sum_{K=1}^n \tilde{S}_{ПОТР K}. \quad (2.7)$$

Комплексная мощность источника ЭДС:

$$\tilde{S}_{ИСТ K} = \pm \dot{E}_K I_K^*, \quad (2.8)$$

где I^* – комплекс, сопряженный с комплексным током \dot{I} .

Комплексная мощность потребителя:

$$\tilde{S}_{ПОТР K} = Z_K I_K^2. \quad (2.9)$$

Определим комплексные мощности источников:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{ИСТ2} &= \dot{E}_2 I_2^* = 20e^{j45^\circ} \cdot 3,11e^{-j26^\circ} = 62,2e^{j19^\circ} = 58,81 + j20,25 \text{ ВА}; \\ \tilde{S}_{ИСТ3} &= \dot{E}_3 I_3^* = 40e^{j30^\circ} \cdot 4,836e^{-j8,6^\circ} = 193,44e^{j21,4^\circ} = 180,2 + j70,5 \text{ ВА}. \end{aligned}$$

Комплексные мощности потребителей:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{ПОТР1} &= Z_1 I_1^2 = (15 + j10) \cdot 2,086^2 = 65,27 + j43,51 \text{ ВА}; \\ \tilde{S}_{ПОТР2} &= Z_2 I_2^2 = 18 \cdot 3,11^2 = 174,1 \text{ ВА}; \\ \tilde{S}_{ПОТР3} &= Z_3 I_3^2 = j2 \cdot 4,836^2 = j46,77 \text{ ВА}. \end{aligned}$$

$$\sum_{K=1}^n \tilde{S}_{ПОТР K} = 239,37 + j90,28 \text{ ВА.}$$

$$\sum_{K=1}^n \tilde{S}_{ИСТ K} = 239,01 + j90,75, \text{ ВА.}$$

Погрешность расчета

$$\delta P = \frac{\Delta P}{P} \cdot 100\% = \frac{0,36}{239,01} \cdot 100\% = 0,51\% ;$$

$$\delta Q = \frac{\Delta Q}{Q} \cdot 100\% = \frac{0,47}{90,75} \cdot 100\% = 0,51\% .$$

Топографическая диаграмма, совмещённая с векторной диаграммой токов.

Топографическая диаграмма – это диаграмма комплексных потенциалов. Каждой точке схемы соответствует точка на топографической диаграмме. Точке, потенциал которой принят равным нулю, на топографической диаграмме соответствует начало координат. По топографической диаграмме можно судить о напряжениях между точками схемы. Векторы напряжений относительно точек на топографической диаграмме направлены противоположно положительным направлениям напряжений относительно соответствующих точек на схеме. Для построения топографической диаграммы определяются комплексные потенциалы точек схемы и откладываются полученные значения на комплексной плоскости.

Для построения топографической диаграммы необходимо рассчитать комплексные потенциалы точек цепи, а затем нанести полученные значения на комплексную плоскость. Примем потенциал точки 2, равным нулю, $\phi_2 = 0$ (рисунок 2.7) и выразим комплексные потенциалы всех остальных точек цепи.

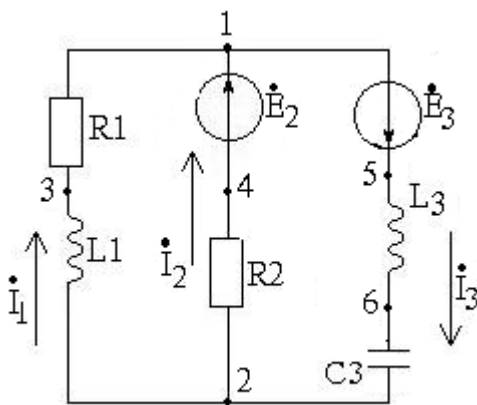


Рисунок 2.7

$$\begin{aligned} \phi_3 &= \phi_2 - jX_{L1} \dot{I}_1 = -j102,086e^{-j17,6^\circ} = \\ &= -6,3 - j19,88 = 20,86e^{-j107,6^\circ} \text{ В;} \end{aligned}$$

$$\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_3 - R_1 \dot{I}_1 = -36,1 - j10,42 = 37,6e^{-j164^0} \text{ В};$$

$$\dot{\phi}_4 = \dot{\phi}_1 - \dot{E}_2 = -50,27 - j24,56 = 55,95e^{-j154^0} \text{ В};$$

$$\dot{\phi}_6 = \dot{\phi}_2 + (-jX_{C3} \dot{I}_3 = -j8 \cdot 4,836e^{j8,6^0} = 5,78 - j38,25 = 38,69e^{-j81,4^0} \text{ В};$$

$$\dot{\phi}_5 = \dot{\phi}_6 - jX_{L3} \dot{I}_3 = -1,45 + j9,57 = 9,68e^{j98,6^0} \text{ В}.$$

Точку 2, потенциал которой принят равным нулю, помещаем в начало координат. Затем строим векторы, изображающие потенциалы остальных точек цепи. Например, потенциал точки 3 $\dot{\phi}_3 = 20,887e^{-j107,6^0}$, В. Проводим из начала координат отрезок прямой под углом $-107,6^0$ относительно положительной полуоси действительных чисел, и в выбранном масштабе откладываем по этому отрезку величину потенциала точки 3, т.е. 20,87 В. Получаем местоположение точки 3 на топографической диаграмме. Построив аналогично местоположение остальных точек цепи, соединяем их отрезками прямых в соответствии с их положением на схеме (рисунок 2.7). Полученная топографическая диаграмма представлена на рисунке 2.8. Там же построена векторная диаграмма токов.

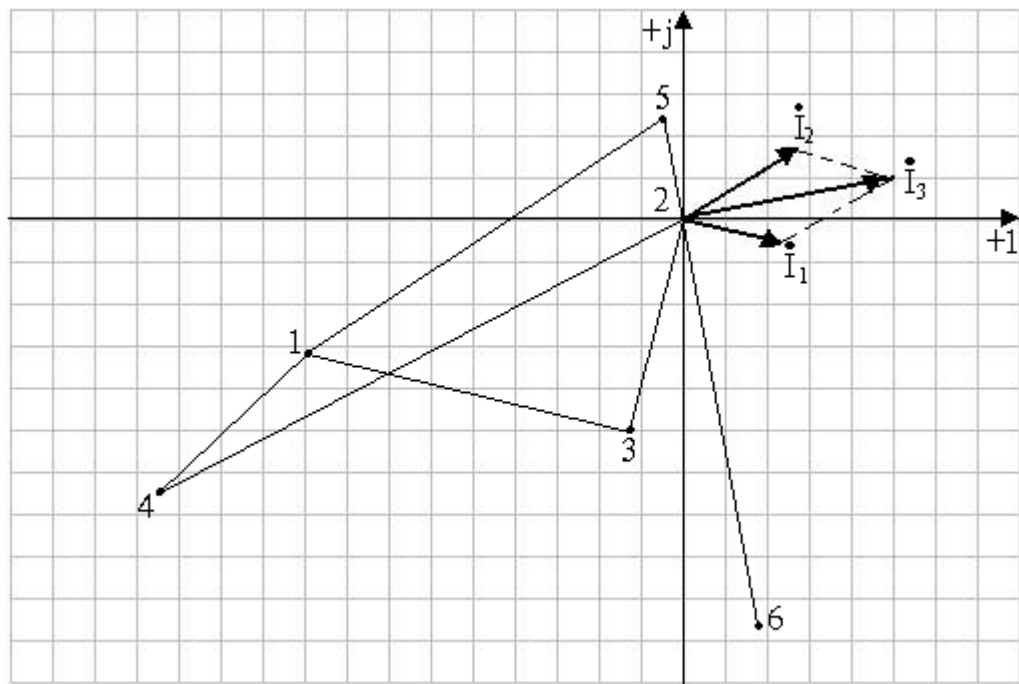


Рисунок 2.8

Составление уравнений по законам Кирхгофа в комплексной форме с учетом индуктивных связей.

Для расчета цепей с индуктивными связями применяются уравнения, составленные по законам Кирхгофа и метод контурных токов. Метод эквивалентного генератора можно применять, если между внешней по

отношению к активному двухполюснику, ветвью и ветвью, входящей в состав двухполюсника, нет индуктивной связи. Метод узловых потенциалов непосредственно применить нельзя.

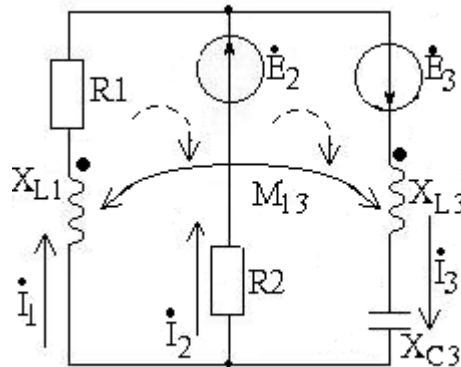


Рисунок 2.9

Полагаем, что между первой и третьей катушками индуктивности существует индуктивная связь, взаимная индуктивность обозначена как M_{13} (рисунок 2.9). Одноименные зажимы катушек указаны на схеме точками. При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа ЭДС взаимной индукции обычно учитываются как соответствующие напряжения, возникающие на зажимах катушек. Напряжение взаимной индукции в комплексной форме определяется как произведение комплексного сопротивления взаимной индукции $Z_M = j\omega M = jX_M$ на соответствующий комплекс тока. Так, напряжение взаимной индукции в первой катушке - $\pm jX_{M13} \dot{I}_3$, в третьей катушке - $\pm jX_{M13} \dot{I}_1$. Знак напряжения взаимной индукции определяется на основании сопоставления направления обхода контура в одной катушке и направления тока в другой катушке относительно одноименных зажимов этих катушек. Если эти направления относительно одноименных зажимов одинаковы, то напряжение входит в уравнение со знаком «+», в противном случае – со знаком «-».

Покажем составление уравнений для схемы (рисунок 2.9). Направление обхода контуров выбрано по часовой стрелке:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0; \\ Z_1 \dot{I}_1 - Z_2 \dot{I}_2 - Z_{M13} \dot{I}_3 = -\dot{E}_2; \\ Z_2 \dot{I}_2 + Z_3 \dot{I}_3 - Z_{M13} \dot{I}_1 = \dot{E}_2 + \dot{E}_3. \end{cases}$$

Напряжение взаимной индукции первой катушки $Z_{M13} \dot{I}_3$ входит в уравнение со знаком «-», т.к. стрелка, обозначающая направление обхода контура, выходит из одноименного зажима первой катушки, а ток \dot{I}_3 входит в одноименный зажим третьей катушки. Аналогично, напряжение третьей катушки также записано со знаком «-» на основании сопоставления

направления обхода контура для третьей катушки и направления тока в первой катушке относительно одноименных зажимов этих катушек.

3 Расчёт симметричных и несимметричных режимов в трехфазных цепях со статистической нагрузкой

К симметричному трёхфазному генератору с фазной ЭДС $E_{\phi}=380$ В через линию, сопротивление каждого провода которой $Z_{\text{пр}}=8+j5$ Ом, подключены два симметричных приёмника, соединённые звездой с фазными сопротивлениями $Z_1=90+j50$ Ом и треугольником, с фазными сопротивлениями $Z_2=80-j90$ Ом (рисунок 3.1).

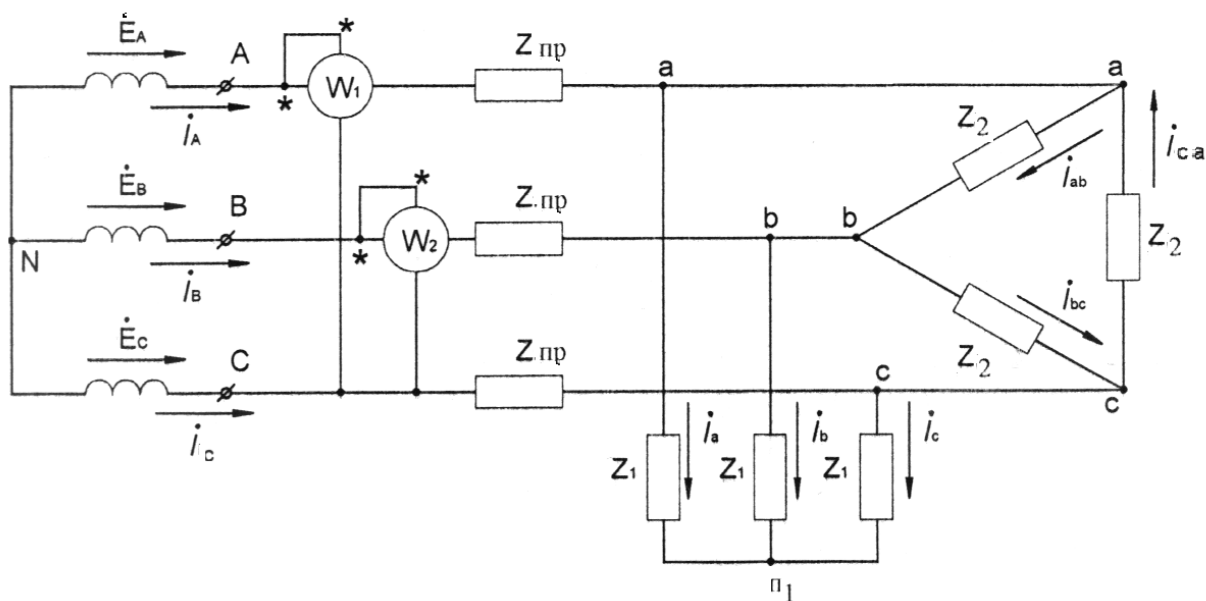


Рисунок 3.1

3.1 Расчет симметричного режима трехфазной цепи

Трёхфазную цепь и трёхфазный приемник называют *симметричными*, если комплексные сопротивления всех фаз одинаковы.

Если к симметричной трехфазной цепи приложена симметричная система напряжений, то получается симметричная система токов. Режим трёхфазной цепи, при котором трёхфазные системы напряжений и токов симметричны, называется симметричным режимом.

Преобразуем треугольник сопротивлений Z_2 в звезду, с сопротивлениями Z_3

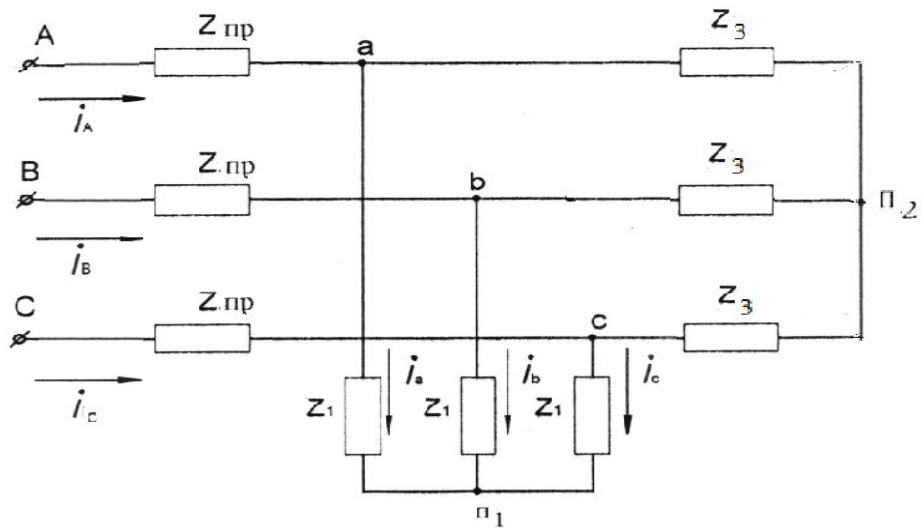


Рисунок 3.2

$$Z_3 = \frac{Z_2 Z_2}{Z_2 + Z_2 + Z_2} = \frac{Z_2}{3} = \frac{80 - j90}{3} = 26.667 - j30; \text{Ом.}$$

Так как в данном случае мы рассматриваем симметричный режим работы, то ток в нейтральном проводе отсутствует, тогда можем выделить одну фазу без изменения режима работы.

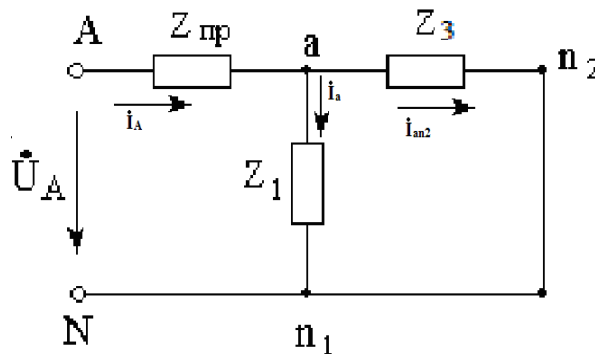


Рисунок 3.3

Комплексное сопротивление фазы цепи:

$$Z_{BX} = Z_{пр} + \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3};$$

$$Z_{BX} = (8 + j5) + \frac{(90 + j50)(26.667 - j30)}{(90 + j50) + (26.667 - j30)} = 11.02 + j3.3 = 11.5e^{j17^\circ} \text{ Ом.}$$

Проведем расчет комплексных токов в симметричном режиме:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{AN}}{Z_{BX}} = \frac{380}{11.5} e^{-j17^\circ} = 33e^{-j17^\circ} \text{ А;}$$

Соответствующие токи в фазах В и С по модулю такие же, как и в фазе А и сдвинуты по фазе относительно токов в фазе А на угол $\pm 120^\circ$.

$$\dot{I}_B = \dot{I}_A e^{-j120^\circ} = 33e^{-j17^\circ} * e^{-j120^\circ} = 33e^{-j137^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_A e^{j120^\circ} = 33e^{-j17^\circ} * e^{j120^\circ} = 33e^{j103^\circ} \text{ A}.$$

По теореме разброса для данной схемы определим ток \dot{I}_a

$$\dot{I}_a = \dot{I}_A \frac{Z_3}{Z_1 + Z_3} = 33e^{-j17^\circ} * \frac{26.667 - j30}{26.667 - j30 + 90 + j50} = 33e^{-j17^\circ} * \frac{40e^{-j48^\circ}}{118e^{j10^\circ}} =$$

$$33e^{-j17^\circ} * 0.34e^{-j58^\circ} = 11.2e^{-j75^\circ} \text{ A}.$$

Соответственно:

$$\dot{I}_b = \dot{I}_a e^{-j120^\circ} = 11.2e^{-j195^\circ}, \text{ A};$$

$$\dot{I}_c = \dot{I}_a e^{j120^\circ} = 11.2e^{j45^\circ}, \text{ A}.$$

$$\dot{I}_{an2} = \dot{I}_A \frac{Z_1}{Z_1 + Z_3} = 33e^{-j17^\circ} * \frac{90 + j50}{(90 + j50) + (26.667 - j30)} = 33e^{-j17^\circ} * \frac{102.9e^{j29^\circ}}{118e^{j10^\circ}} =$$

$$= 33e^{-j17^\circ} * 0.87e^{j19^\circ} = 28.7e^{j2^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_{bn2} = \dot{I}_{an2} e^{-j120^\circ} = 28.7e^{j2^\circ} e^{-j120^\circ} = 28.7e^{-j118^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_{cn2} = \dot{I}_{an2} e^{j120^\circ} = 28.7e^{j2^\circ} e^{j120^\circ} = 28.7e^{j122^\circ} \text{ A}.$$

Определим фазные напряжения U_{ab}, U_{bc}, U_{ca} :

Для этого сначала выразим $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$:

$$\dot{E}_A = 380e^{j0^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{E}_B = 380e^{-j120^\circ} = -190 - j329 \text{ В};$$

$$\dot{E}_C = 380e^{j120^\circ} = -190 + j329 \text{ В};$$

$$\dot{U}_{ab} = \dot{I}_B Z_{np} - \dot{E}_B + \dot{E}_A - \dot{I}_A Z_{np} =$$

$$\begin{aligned} & 380 - 33e^{-j17^\circ} (8 + j5) - (-190 - j329) + 33e^{-j137^\circ} * (8 + j5) = \\ & = 380 - 33e^{-j17^\circ} * 9.4e^{j132^\circ} - (-190 - j329) + 33e^{-j137^\circ} * 9.4e^{-j137^\circ} e^{j32^\circ} = \\ & = 380 - 310e^{j15^\circ} + 190 + 329e^{j90^\circ} + 310e^{-j105^\circ} = \\ & = 380 - 299 - j80 + 190 + j329 - 80 - j299 = 191 - j50 = 197e^{-j15^\circ} \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\dot{U}_{bc} = \dot{I}_C Z_{np} - \dot{E}_C + \dot{E}_B - \dot{I}_B Z_{np} =$$

$$\begin{aligned} & = -190 - j329 - 33e^{-j137^\circ} * 9.4e^{j32^\circ} - (-190 + j329) + 33e^{-j103^\circ} * \\ & * 9.4e^{j32^\circ} = -190 - j329 + 190 - j329 - 310e^{j105^\circ} + 310e^{j135^\circ} = \\ & = -j658 + 80 - j299 - 219 + j219 = -139 - j140 = 197e^{-j135^\circ} \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\dot{U}_{ca} = \dot{I}_A Z_{np} - \dot{E}_A + \dot{E}_C - \dot{I}_C Z_{np} =$$

$$= -190 + j329 - 33e^{j103^\circ} * 9.4e^{j32^\circ} - 380 + 33e^{-j17^\circ} * 9.4e^{j32^\circ} = 197e^{j105^\circ} \text{ В}.$$

Теперь определим фазные токи:

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z_2} = \frac{197e^{-j15^\circ}}{80 - j90} = \frac{197e^{-j15^\circ}}{120e^{-j48^\circ}} = 1.64e^{j33^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{bc}}{Z_2} = \frac{197e^{-j135^\circ}}{120e^{-j48^\circ}} = 1.64e^{-j87^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{ac}}{Z_2} = \frac{197e^{j105^\circ}}{120e^{-j48^\circ}} = 1.64e^{j153^\circ} \text{ A}.$$

Определим $\dot{U}_a, \dot{U}_b, \dot{U}_c$:

$$\dot{U}_a = \dot{I}_a Z_1 = 11.2e^{-j75^\circ} (90 + j50) = 11.2e^{-j75^\circ} * 102.9e^{j29^\circ} = 1152.5e^{-j46^\circ} = 800.6 - j829 \text{ B};$$

$$\dot{U}_b = \dot{I}_b Z_1 = 11.2e^{-j195^\circ} * 102.9e^{j129^\circ} = -1118.3 - j279 = 1152.5e^{-j166^\circ} \text{ B};$$

$$\dot{U}_c = \dot{I}_c Z_1 = 11.2e^{-j195^\circ} * 102.9e^{j129^\circ} = -1118.3 - j279 = 1152.5e^{-j166^\circ} \text{ B}.$$

Рассчитаем показания ваттметров:

$$\dot{U}_{AC} = \dot{E}_A - \dot{E}_C = 380 + 190 - j329 = 570 - j329 = 658e^{-j30^\circ} \text{ B};$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{E}_B - \dot{E}_C = -190 - j329 + 190 - j329 = 658e^{-j90^\circ} \text{ B};$$

$$P_{W1} = U_{AC} I_A \cos(\varphi_U - \varphi_I) = 658 * 33 \cos(-30^\circ + 17^\circ) = 21062.6 \text{ Bm};$$

$$P_{W2} = U_{BC} I_A \cos(\varphi_U - \varphi_I) = 658 * 33 \cos(-90^\circ + 137^\circ) = 14809 \text{ Bm};$$

$$P = P_{W1} + P_{W2} = 21062.6 + 14809 = 35871.6 \text{ Bm}.$$

Определим активную и реактивную мощности:

Активная мощность:

$$Z_{BX} = (11.06 + j3.3), \text{ Ом}$$

$$P_A = I_A^2 R = 33^2 * 11.06 = 12044.34 \text{ Bm};$$

$$P = 3P_A = 35933.1 \text{ Bm}. Z_{BX} = (11.06 + j3.3), \text{ Ом}$$

Реактивная мощность:

$$Q_A = I_A^2 X_L = 33^2 * 3.3 = 3593.7 \text{ Вар};$$

$$Q = 3Q_A = 10781.1 \text{ Вар}.$$

Полная мощность:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 37897.7 \text{ ВА}.$$

Построим вектурную диаграмму токов и напряжений (рисунок 3.4). На ней представлены фазные ЭДС (или напряжения) $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$, линейные напряжения генератора U_{ab}, U_{bc}, U_{ca} и все токи.

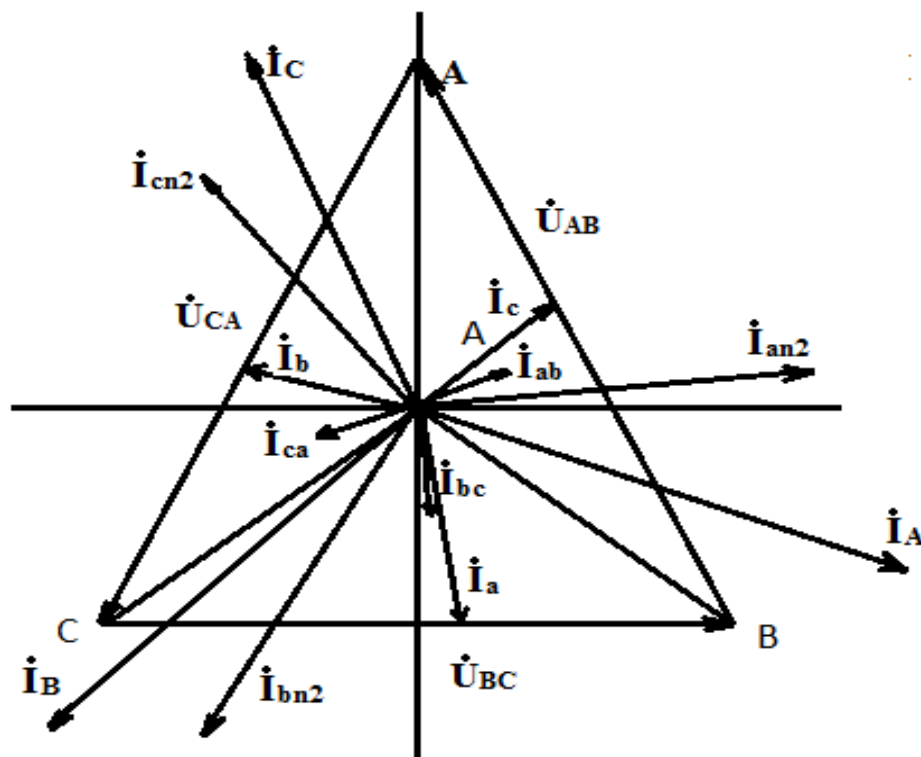


Рисунок 3.4

3.2 Расчет несимметричного режима трехфазной цепи

Рассмотрим обрыв линии А (рисунок 3.5).

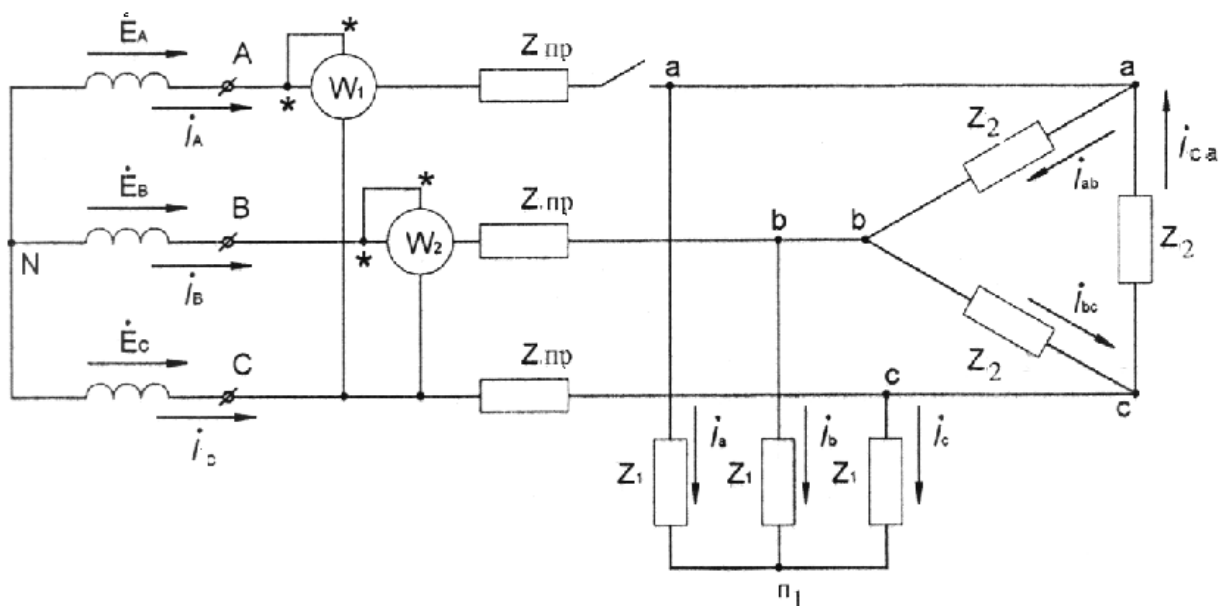


Рисунок 3.5

Преобразуем звезду сопротивлений Z_1 в треугольник сопротивлений Z_1' (рисунок 3.6)

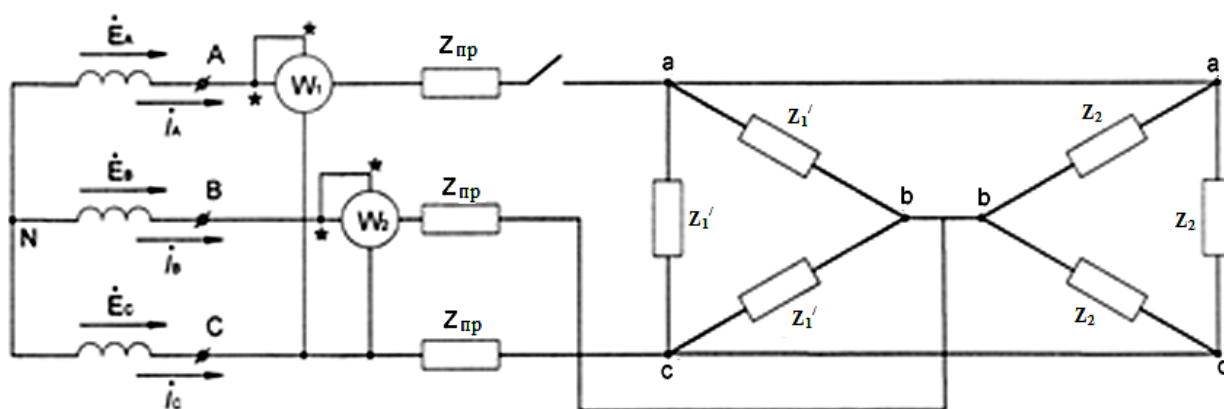


Рисунок 3.6

$$Z_1' = Z_1 + Z_1 + \frac{Z_1 Z_1}{Z_1} = 3Z_1 = 3(90 + j50) = (270 + j150), \text{ Ом}$$

Объединим два треугольника сопротивлений Z_2 и Z_1' в треугольник Z_3 (рисунок 3.7).

$$Z_3 = \frac{Z_2 Z_1'}{Z_2 + Z_1'} = \frac{(80 - j90)(270 + j150)}{(80 - j90) + (270 + j150)} = (91,57 - j50,84), \text{ Ом};$$

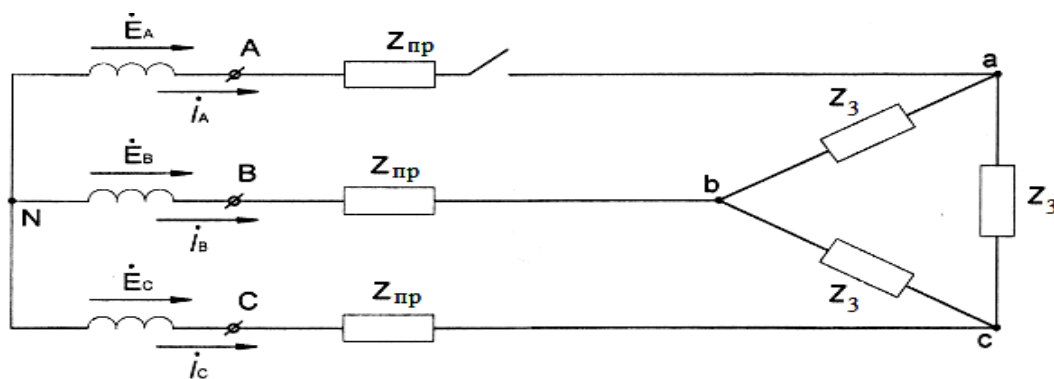


Рисунок 3.7

Треугольник Z_3 преобразуем в звезду Z_4 (рисунок 3.8)

$$Z_4 = \frac{Z_3 Z_3}{3Z_3} = \frac{Z_3}{3} = \frac{91,57 - j50,84}{3} = (30,52 - j16,95), \text{ Ом}.$$

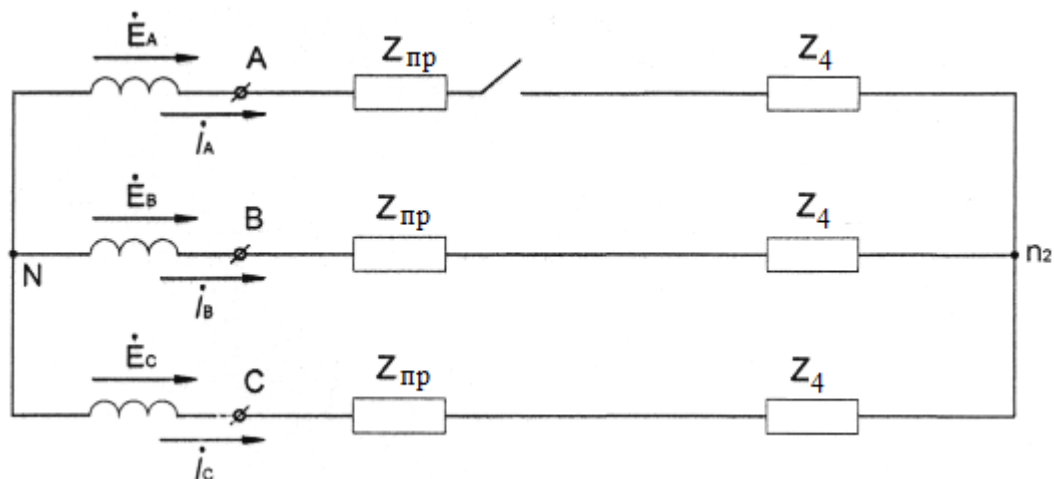


Рисунок 3.8

При обрыве фазы А между нейтральными точками генератора и нагрузки возникает напряжение (смещение нейтрали), определяемое следующим выражением:

$$\dot{U}_{n_2N} = \frac{\dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{Y_B + Y_C},$$

где $Y_B = Y_C = \frac{1}{Z_{np} + Z_4} = \frac{1}{38.52 - j11.95} = (0.0237 + j0.00735), \text{ Ом}^{-1}; \rightarrow$

$$\dot{U}_{n_2N} = \frac{\dot{E}_B + \dot{E}_C}{2} = \frac{-190 - j329.09 - 190 + j329.09}{2} = -190 \text{ В}.$$

Рассчитаем токи в фазах В и С:

$$\dot{I}_A = 0; \text{ (так как обрыв линии А);}$$

$$\dot{I}_B = (\dot{E}_B - \dot{U}_{n_2N}) Y_B = (-190 - j329.09 + 190)(0.0237 + j0.00735) = 2.419 - j7.799 = 8,166 e^{-j73^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = (\dot{E}_C - \dot{U}_{n_2N}) Y_C = (-190 - j329.09 + 190)(0.0237 + j0.00735) = -2.419 + j7.799 = 8,166 e^{j107^\circ} \text{ А. } \dot{I}_A = 0; \text{ (так как обрыв линии А);}$$

Рассчитаем фазные напряжения и токи:

$$\dot{U}_{bc} = \dot{I}_C Z_{np} - \dot{E}_C + \dot{E}_B - \dot{I}_B Z_{np} = (-2,419 + j7.799)(8 + j5) + 190 - j329.09 - 190 - j329.09 - (2.419 - j7.799)(8 + j5) = (-116.694 - j557.586), \text{ В}$$

$$\dot{I}_{ab} = \dot{I}_{ca} = -\frac{\dot{U}_{bc}}{2Z_2} = \frac{116.694 + j557.586}{80 - j90} = -1.4085 + j1.9003 = 2.365 e^{j127^\circ}, \text{ А}$$

$$\dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{bc}}{Z_2} = \frac{-116.694 - j557.586}{80 - j90} = 2.817 + j3.8006 = 4.730 e^{j127^\circ}, \text{ А}$$

Остальные токи рассчитаем по 1-му закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_a = 0;$$

$$\dot{I}_b = \dot{I}_B + \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{bc} = 2,419 - j7,799 - 1,4085 + j1,9003 + 2,81 - j3,8006 = 3,8275 - j9,699 = 10,427e^{-j68}, \text{ A}$$

$$\dot{I}_c = \dot{I}_C + \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ca} = -2,419 + j7,799 - 2,817 + j3,8006 + 1,4085 - j1,9003 = -3,8275 + j9,699 = 10,427e^{j112}, \text{ A}.$$

Показания ваттметров:

$$P_{W1} = 0 \text{ Вт};$$

$$P_{W2} = U_{bc} I_B \cos(\varphi_U - \varphi_I) = 658 * 8,166 \cos(-90^\circ + 73^\circ) = 5139,849 \text{ Вт};$$

Определим мощности:

Активная мощность:

$$Z_{BX} = Z_{np} + Z_4 = 8 + j5 + 30,52 - j16,95 = (38,52 - j11,95), \text{ Ом};$$

$$P_A = 0 \text{ Вт} \quad P_B = I_B^2 R = 8,166^2 * 38,52 = 2568,65 \text{ Вт};$$

$$P_C = I_C^2 R = 8,166^2 * 38,52 = 2568,65 \text{ Вт};$$

$$P = P_{W2} = P_A + P_B + P_C = 2568,65 + 2568,65 = 5137,3 \text{ Вт}.$$

Реактивная мощность:

$$Q_A = 0 \text{ ВАр}; \quad Q_B = Q_C = I_B^2 X = I_C^2 X = -8,166^2 * 11,95 = -796,868 \text{ ВАр};$$

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = -796,868 - 796,868 = -1593,736 \text{ Вар}.$$

Полная мощность:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 5378,883 \text{ ВА}.$$

Построим векторную диаграмму токов и напряжений (рисунок 3.9)

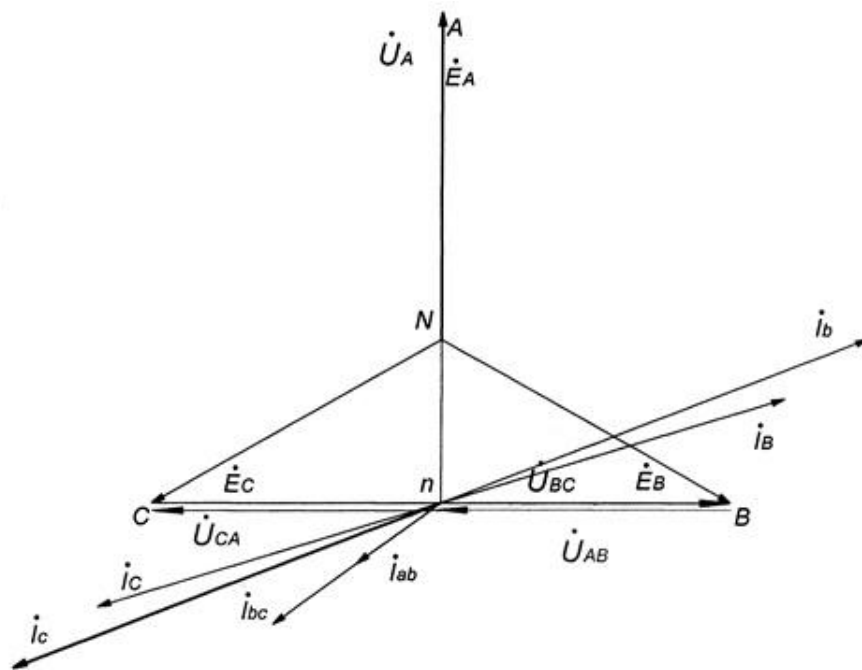


Рисунок 3.9

Рассмотрим обрыв фазы ab , (рисунок 3.10):

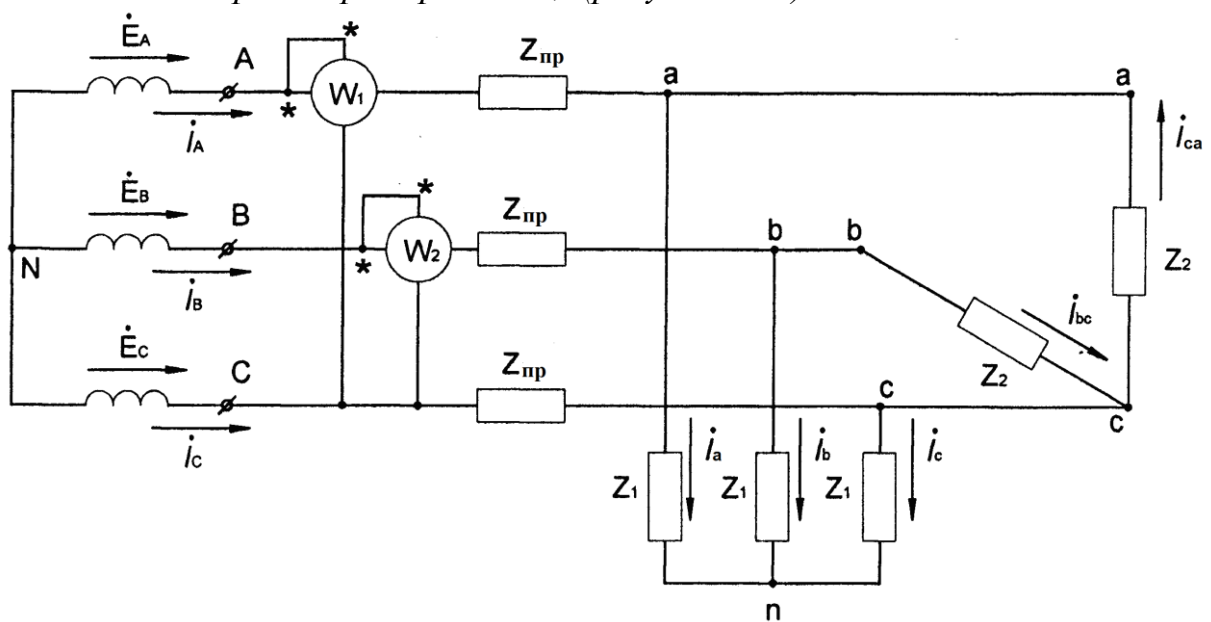


Рисунок 3.10

Преобразуем звезду сопротивлений Z_1 в треугольник сопротивлений Z_1'
 $Z_1' = Z_1 + Z_1 + (Z_1 * Z_1) / Z_1 = 3 Z_1 = 3(90 + j50) = (270 + j150), \text{ Ом.}$

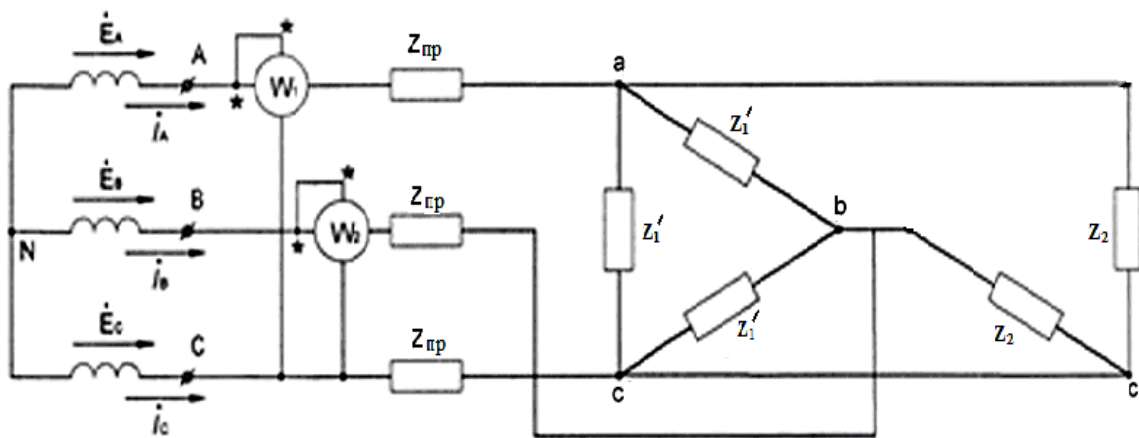


Рисунок 3.11

Преобразуем схему, определив Z_3, Z_4, Z_4'

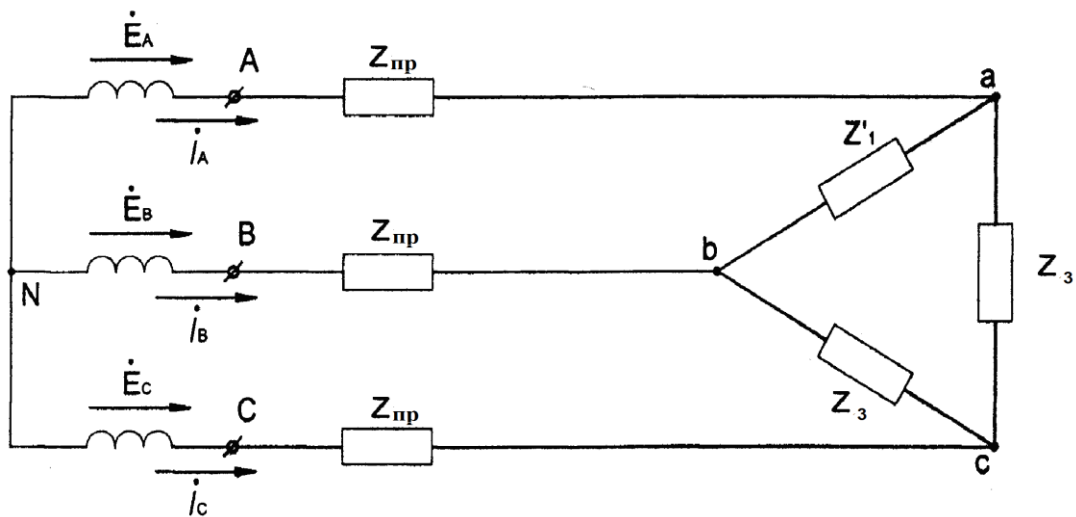


Рисунок 3.12

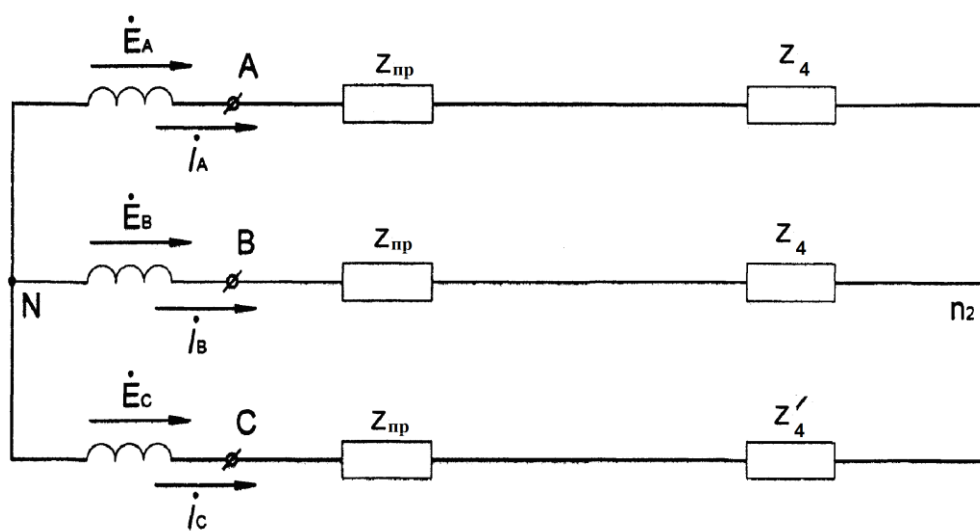


Рисунок 3.13

$$Z_3 = \frac{Z_2 * Z_1'}{Z_2 + Z_1'} = \frac{(80 - j90)(270 + j150)}{(80 - j90) + (270 - j150)} = (91.57 - j50.84), \text{ Ом},$$

$$Z_4 = \frac{Z_3 * Z_1'}{Z_3 + Z_3 + Z_1'} = \frac{(270 + j150)(91.57 - j50.84)}{270 + j150 + 183.14 - j101.68} = (70.59 - j7.508), \text{ Ом},$$

$$Z_4' = \frac{Z_3 * Z_3}{Z_3 + Z_3 + Z_1'} = \frac{(91.57 - j50.84)(91.57 - j50.84)}{(270 + j150 + 183.14 - j101.68)} = (10.49 - j21.666), \text{ Ом}.$$

Рассчитаем смещение нейтрали в результирующей схеме:

$$\dot{U}_{n_2N} = \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{2Y_A + Y_C},$$

$$\text{где } Y_A = Y_B = \frac{1}{Z_{np} + Z_4} = \frac{1}{78.59 - j2.508} = (0.0126 + j0.00041), \text{ Ом}^{-1}$$

$$Y_C = \frac{1}{Z_{np} + Z_4'} = \frac{1}{18.49 - j16.666} = (0.0298 + j0.0269), \text{ Ом}^{-1}$$

$$\dot{U}_{n_2N} = \frac{-11.972 + j0.604}{0.055 + j0.028} = -168.47 + j95.529 \text{ В}.$$

Рассчитаем токи:

$$\dot{I}_A = (\dot{E}_A - U_{n_2N}) Y_A = (548.747 - j95.529)(0.0126 + j0.00041) = 7.014 - j0.992 = 7.084 e^{-j8^\circ}, \text{ А};$$

$$\dot{I}_B = (\dot{E}_B - U_{n_2N}) Y_B = (-21.253 - j424.619)(0.0126 + j0.00041) = -0.098 - j5.406 = 5.407 e^{-j91^\circ}, \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = (\dot{E}_C - U_{n_2N}) Y_C = (-21.253 + j233.561)(0.0298 + j0.0269) = -6.916 + j6.398 = 9.422 e^{j137^\circ}, \text{ А};$$

$$\dot{U}_{ab} = \dot{I}_A Z_4 - \dot{I}_B Z_4 = (487.676 - j122.666) - (-218.513 - j632.178) = 706.2 + j509.5 \text{ В};$$

$$\dot{U}_{bc} = \dot{I}_C Z_{np} - \dot{E}_C + \dot{E}_B - \dot{I}_B Z_{np} = (-6.916 + j6.398)(8 + j5) + 190 - j329.09 - 190 - j329.09 - (-0.098 - j5.406)(8 + j5) = (-113.565 - j597.84), \text{ В};$$

$$\dot{U}_{ca} = \dot{I}_A Z_{np} - \dot{E}_A + \dot{E}_C - \dot{I}_C Z_{np} = (7.014 - j0.992)(8 + j5) - 380 - 190 + j329.09 - (-6.916 + j6.398)(8 + j5) = (-421.611 + j339.625), \text{ В};$$

$$\dot{I}_{ab} = 0, \text{ А};$$

$$\dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{bc}}{Z_2} = \frac{-113.565 - j597.84}{80 - j90} = 3.084 - j4.003 = 5.053 e^{-j52^\circ}, \text{ А};$$

$$\dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{ca}}{Z_2} = \frac{-421.611 - j339.625}{80 - j90} = -4.434 - j0.743 = 4.49 e^{-j170^\circ}, \text{ А}.$$

Остальные токи рассчитаем по 1-му закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_a = \dot{I}_{ca} + \dot{I}_A = -4.434 - j0.743 + 7.014 - j0.992 = 2.58 - j1.735 = 3.109 e^{-j34^\circ}, \text{ А};$$

$$\dot{I}_b = \dot{I}_B + \dot{I}_{bc} = -0.098 - j5.406 - 3.084 + j4.003 = -3.182 - j1.403 = 3.478 e^{-j156^\circ}, \text{ А};$$

$$\begin{aligned} I_c = I_{bc} - I_{ca} + I_c &= 3,084 - j4,003 + 4,434 + j0,743 - 6,916 + j6,398 = \\ &= 0,602 + j3,138 = 3,195 e^{j79^\circ}, \text{ А;} \end{aligned}$$

Рассчитаем показания ваттметров:

$$P_{W1} = U_{AC} I_A \cos(\varphi_u - \varphi_i) = 658 \times 7,084 \cos(-30^\circ + 8^\circ) = 4323,032 \text{ Вт};$$

$$P_{W2} = U_{BC} I_B \cos(\varphi_u - \varphi_i) = 658 \times 5,407 \cos(-90^\circ + 91^\circ) = 3558,24 \text{ Вт};$$

$$P = P_{W1} + P_{W2} = 7881,269 \text{ Вт}.$$

Определим мощности:

1) Активная мощность:

$$Z_{BX_A} = Z_{BX_B} = Z_{np} + Z_4 = 8 + j5 + 70,59 - j7,508 = (78,59 - j2,508), \text{ Ом};$$

$$Z_{BX_C} = Z_{np} + Z'_4 = 8 + j5 + 10,49 - j21,666 = (18,59 - j16,666), \text{ Ом};$$

$$P_A = I_A^2 R = 7,084^2 \cdot 78,59 = 3943,8865 \text{ Вт};$$

$$P_B = I_B^2 R = 5,407^2 \cdot 78,59 = 2291,63 \text{ Вт};$$

$$P_C = I_C^2 R = 9,422^2 \cdot 18,59 = 1650,31 \text{ Вт};$$

$$P = P_A + P_B + P_C = 7891,826 \text{ Вт}.$$

2) Реактивная мощность:

$$Q_A = I_A^2 X = 7,084^2 \cdot (-2,508) = -125,859 \text{ ВАр};$$

$$Q_B = I_B^2 X = 5,407^2 \cdot (-2,508) = -73,323 \text{ ВАр};$$

$$Q_C = I_C^2 X = 9,422^2 \cdot (-16,66) = -1478,976 \text{ ВАр};$$

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = -1552,299 \text{ ВАр}.$$

3. Полная мощность:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{62280917,61 + 2409632,185} = 8043,04 \text{ ВА}.$$

Построим векторную диаграмму токов и напряжений (рисунок 3.14)

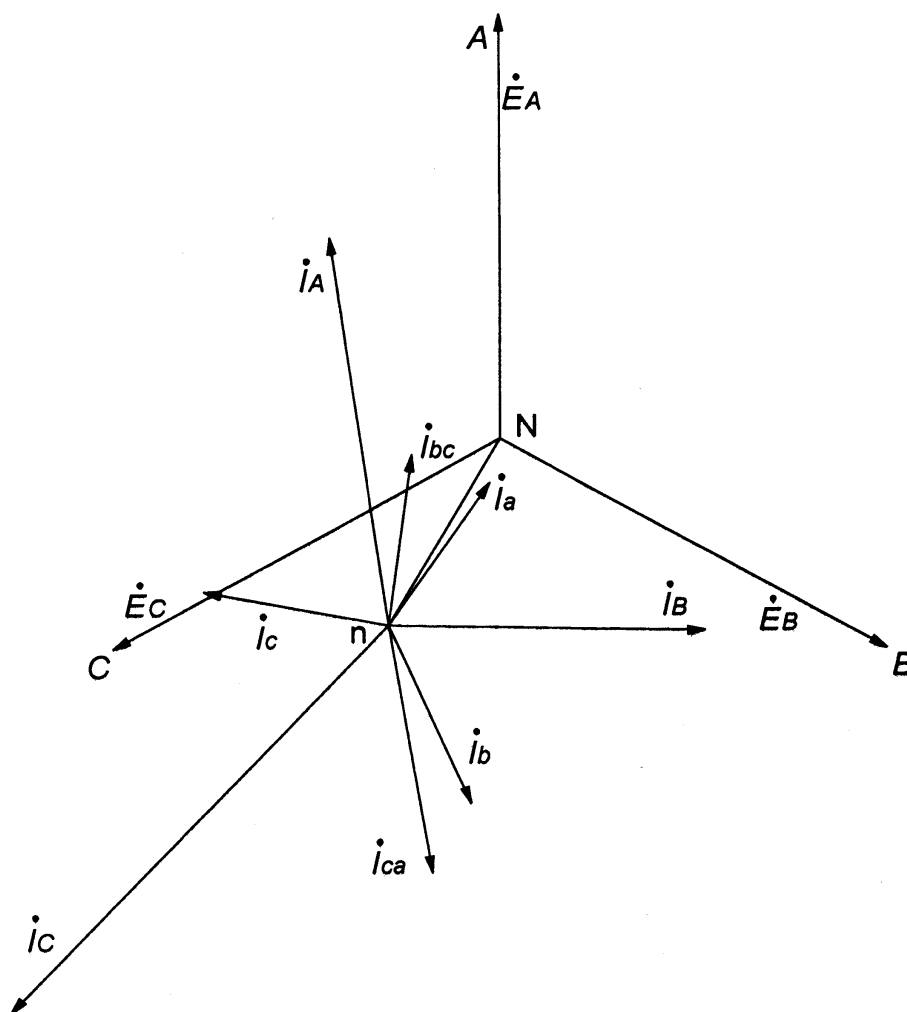


Рисунок 3.14

4 Расчет несимметричных режимов трехфазных цепей методом симметричных составляющих.

В высоковольтных трехфазных цепях несимметричные режимы обычно возникают в аварийных условиях, чаще всего при несимметричных коротких замыканиях (замыканиях между фазами, замыкание одной или двух фаз на землю). Рассмотрим расчет несимметричных режимов на примере наиболее распространенного однофазного *короткого замыкания*.

Симметричная динамическая нагрузка подключена к симметричному трехфазному генератору с фазной ЭДС E_ϕ (рисунок 4.1). В цепи произошло короткое замыкание одной из фаз на землю (например, фазы C) на зажимах нагрузки.

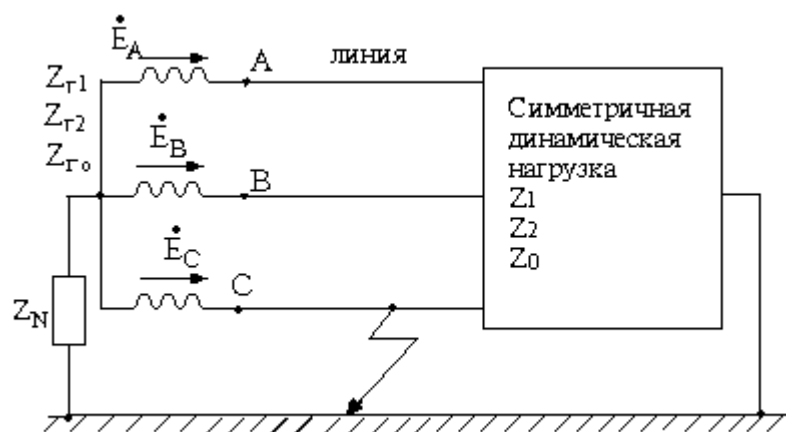


Рисунок 4.1

Исходные данные для расчета: $E_\phi = 200$ В, $Z_N = j0,25$ Ом, сопротивление прямой последовательности генератора $Z_{Г1} = (0,25 + j1,4)$ Ом, линии $Z_{Л1} = j3,5$ Ом, нагрузки $Z_1 = (2 + j3)$ Ом, сопротивление обратной последовательности генератора $Z_{Г2} = j0,18$, сопротивление линии $Z_{Л2} = Z_{Л1}$, сопротивление нагрузки $Z_2 = (0,15 + j0,45)$ Ом, сопротивление нулевой последовательности генератора $Z_{Г0} = j0,05$ Ом, линии $Z_{Л0} = j10$ Ом и нагрузки $Z_0 = j0,8$ Ом.

Расчет симметричных составляющих токов и напряжений.

Для расчета несимметричного режима трехфазных цепей удобно пользоваться принципом компенсации, заменяя несимметричную нагрузку, которая возникает при коротком замыкании фазы на землю, источником напряжений, значения которых до окончания всего расчета остаются неизвестными. После такой замены вся цепь становится симметричной и для нее разноименные симметричные составляющие токов и напряжений не зависят друг от друга. Связи же между симметричными составляющими токов и напряжений различных последовательностей, обусловленных несимметрией, вводятся позднее.

Заменим несимметричную нагрузку, обусловленную коротким замыканием фазы С (рисунок 4.1), тремя источниками неизвестных напряжений $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$. Тогда получится симметричная схема, в которой, помимо генератора с симметричной трехфазной системой ЭДС, имеются источники несимметричных напряжений $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$. Разложим напряжения $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ на симметричные составляющие прямой \dot{U}_1 , обратной \dot{U}_2 и нулевой \dot{U}_0 последовательностей, приняв фазу А за основную. Фазовый множитель $a = e^{j120}$, $a^2 = e^{-j120}$.

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_A &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0; \\ \dot{U}_B &= a^2 \dot{U}_1 + a \dot{U}_2 + \dot{U}_0; \\ \dot{U}_C &= a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2 + \dot{U}_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Тогда получим симметричную схему (рисунок 4.2), причем в ответвлении, где была несимметричная нагрузка, находятся источники трех симметричных систем напряжений прямой, обратной и нулевой последовательностей.

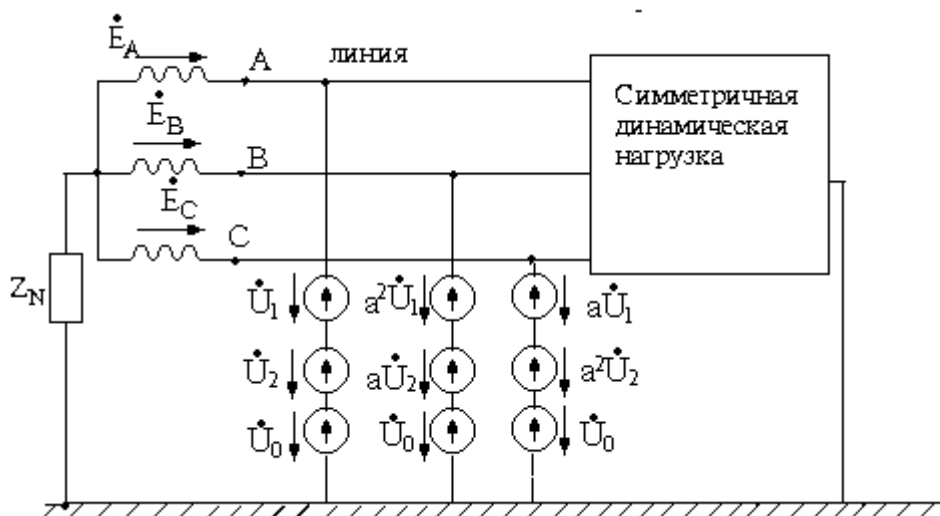


Рисунок 4.2

В симметричной цепи симметричная система напряжений какой-либо последовательности вызывает симметричную систему токов той же самой последовательности. Следовательно, можно составить три однофазные схемы для токов и напряжений различных последовательностей для фазы А. Эти схемы сокращенно назовем схемами прямой, обратной и нулевой последовательностей (рисунки 4.3, 4.4 и 4.5).

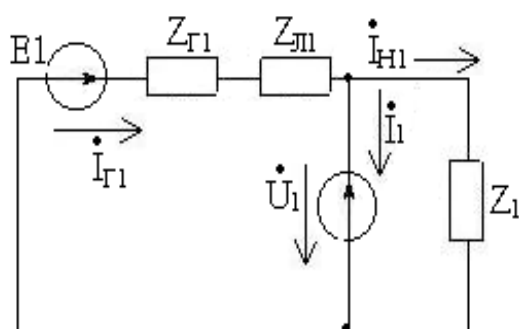


Рисунок 4.3

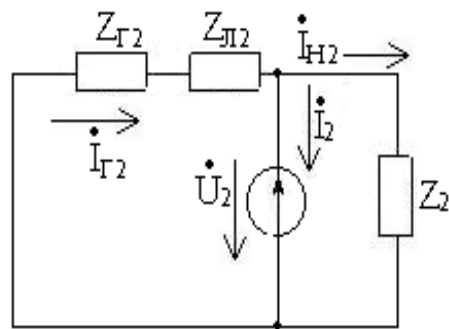


Рисунок 4.4

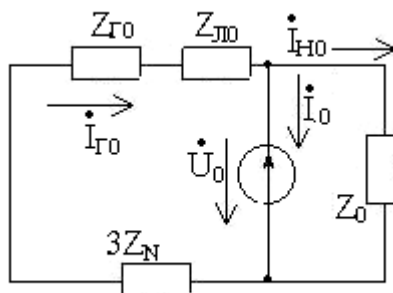


Рисунок 4.5

Сопротивление в нейтральном проводе Z_N не оказывает влияния на симметричные составляющие токов прямой и обратной последовательностей, поэтому в схемах прямой и обратной последовательностей сопротивление Z_N отсутствует. В схему нулевой последовательности вводится утроенное значение сопротивления Z_N , т.к. ток в нейтральном проводе равен тройному значению составляющей тока нулевой последовательности, т.е.

$$\dot{I}_N = 3\dot{I}_0. \quad (4.2)$$

Для дальнейшего расчета целесообразно преобразовать схемы отдельных последовательностей к простейшему виду, не затрагивая при этом ветвей с источниками неизвестных напряжений $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_0$.

В схеме прямой последовательности заменим ветви генератора и симметричной нагрузки эквивалентным генератором, э.д.с. которого определяется следующим выражением:

$$\dot{E}_{\text{э1}} = \frac{\dot{E}_1 Y_1}{Y_1 + Y_1'}, \quad (4.3)$$

где

$$Y_1 = \frac{1}{Z_{Г1} + Z_{Л1}}; \quad Y_1' = \frac{1}{Z_1}.$$

Эквивалентное сопротивление этого генератора равно:

$$Z_{\text{э1}} = \frac{(Z_{Г1} + Z_{Л1})Z_1}{Z_{Г1} + Z_{Л1} + Z_1}. \quad (4.4)$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$\dot{E}_{\text{э1}} = \frac{200(0,01 - j0,2)}{0,01 - j0,2 + 0,154 - j0,23} = 82,76 - j26,9 = 87e^{-j18^\circ}, \quad \text{В};$$

$$Z_{\text{э1}} = 0,76 + j2, \quad \text{Ом}.$$

В схемах обратной и нулевой последовательностей объединяем ветви генератора и нагрузки:

$$Z_{\Sigma 2} = \frac{(Z_{\Gamma 2} + Z_{Л2})Z_2}{Z_{\Gamma 2} + Z_{Л2} + Z_2} = 0,119 + j0,405, \quad \text{Ом};$$

$$Z_{\Sigma 0} = \frac{(Z_{\Gamma 0} + Z_{Л0} + 3Z_N)Z_0}{Z_{\Gamma 0} + Z_{Л0} + 3Z_N + Z_0} = j0,745, \quad \text{Ом}.$$

Преобразованные схемы прямой, обратной и нулевой последовательностей (рисунки 4.6, 4.7 и 4.8).

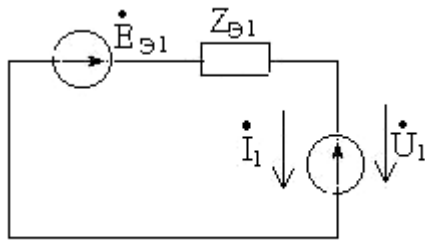


Рисунок 4.6

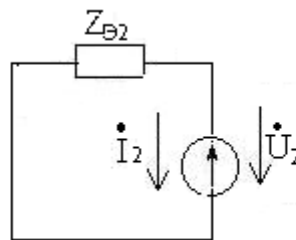


Рисунок 4.7

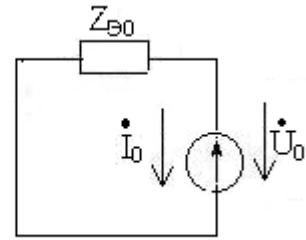


Рисунок 4.8

Для каждой из этих трех схем запишем уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned} Z_{\Sigma 1} \dot{I}_1 + \dot{U}_1 &= E_1; \\ Z_{\Sigma 2} \dot{I}_2 + \dot{U}_2 &= 0; \\ Z_{\Sigma 0} \dot{I}_0 + \dot{U}_0 &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

В этих трех уравнениях шесть неизвестных $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_0, \dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_0$. Дополнительные три уравнения, связывающие эти шесть неизвестных величин, составляются на основании заданной схемы несимметричной нагрузки. В нашем случае несимметрия обусловлена коротким замыканием фазы С на землю, поэтому схема несимметричной нагрузки имеет вид, представленный на рисунке 4.9.

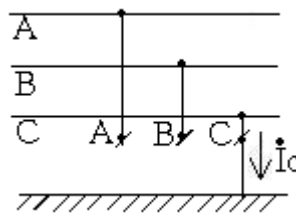


Рисунок 4.9

Составим дополнительные уравнения для данной схемы:

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= 0; \\ \dot{I}_B &= 0; \\ \dot{U}_C &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Раскладывая $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{U}_C$ на симметричные составляющие, получим:

$$\begin{aligned}
\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0 &= 0; \\
a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2 + \dot{I}_0 &= 0; \\
a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2 + \dot{U}_0 &= 0.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Объединяя уравнения (4.5) и (4.7), получим систему из шести уравнений с шестью неизвестными:

$$\begin{cases}
Z_{\varepsilon 1} \dot{I}_1 + \dot{U}_1 = \dot{E}_{\varepsilon 1} \\
Z_{\varepsilon 2} \dot{I}_2 + \dot{U}_2 = 0 \\
Z_{\varepsilon 0} \dot{I}_0 + \dot{U}_0 = 0 \\
\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0 \\
a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0 \\
a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 0.
\end{cases} \tag{4.8}$$

Покажем решение системы (4.8). Вычитая из четвертого уравнения пятое, получим:

$$(1 - a^2) \dot{I}_1 + (1 - a) \dot{I}_2 = 0 \rightarrow \dot{I}_2 = -\frac{1 - a^2}{1 - a} \dot{I}_1 = -(1 + a) \dot{I}_1 = a^2 \dot{I}_1, \tag{4.9}$$

т.к. $1 + a + a^2 = 0$ и, следовательно $1 + a = -a^2$.

Подставляя (4.9) в четвертое уравнение, получим:

$$\dot{I}_0 = -\dot{I}_1 - \dot{I}_2 = -\dot{I}_1 - a^2 \dot{I}_1 = -(1 + a^2) \dot{I}_1 = a \dot{I}_1. \tag{4.10}$$

Умножая первое уравнение на a , второе на a^2 и суммируя первые три уравнения системы (4.8) с учетом шестого уравнения этой системы, получим:

$$a Z_{\varepsilon 1} \dot{I}_1 + a^2 Z_{\varepsilon 2} \dot{I}_2 + Z_{\varepsilon 0} \dot{I}_0 = a \dot{E}_{\varepsilon 1} \text{ или с учетом (4.9) и (4.10) получим:} \\
\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_{\varepsilon 1}}{Z_{\varepsilon 1} + Z_{\varepsilon 2} + Z_{\varepsilon 0}}. \tag{4.11}$$

Подставляет числовые значения:

$$\begin{aligned}
\dot{I}_1 &= \frac{87e^{-j18}}{0,879 + j3,15} = -1,11 - j26,58 = 26,6e^{-j92,4^0}, \quad A; \\
\dot{I}_2 &= a^2 \dot{I}_1 = e^{-j120^0} \cdot 26,6e^{-j92,4^0} = 26,6e^{-j212,4^0} = -22,46 + j14,26, A; \\
\dot{I}_0 &= a \dot{I}_1 = e^{j120^0} \cdot 26,6e^{-j92,4^0} = 26,6e^{j27,6^0} = 23,57 + j12,32, A.
\end{aligned}$$

;

Симметричные составляющие напряжений в месте короткого замыкания на землю определяются из первых трех уравнений системы (4.8):

$$\begin{aligned}
\dot{U}_1 &= \dot{E}_{\varepsilon 1} - Z_{\varepsilon 1} \dot{I}_1 = 30,45 - j4,48 = 30,78e^{-j8,4^0}, \quad B; \\
\dot{U}_2 &= -Z_{\varepsilon 2} \dot{I}_2 = 8,44 + j7,4 = 11,22e^{j41,2^0}, \quad B; \\
\dot{U}_0 &= -Z_{\varepsilon 0} \dot{I}_0 = 9,18 - j17,56 = 19,8e^{-j62,4^0}, \quad B.
\end{aligned}$$

По схемам прямой, обратной и нулевой последовательностей (рисунки 4.3, 4.4, 4.5) рассчитываем симметричные составляющие токов генератора и нагрузки:

$$\dot{I}_{H1} = \frac{\dot{U}_1}{Z_1} = \frac{30,45 - j4,48}{2 + j3} = 3,66 - j7,7 = 8,5e^{-j64,6^\circ}, \quad A;$$

$$\dot{I}_{H2} = \frac{\dot{U}_2}{Z_2} = 20,4 - j11,95 = 23,66e^{-j30,3^\circ}, \quad A;$$

$$\dot{I}_{H0} = \frac{\dot{U}_0}{Z_0} = -21,95 - j11,475 = 24,77e^{-j152,4^\circ}, \quad A.$$

$$\dot{I}_{\Gamma1} = \dot{I}_1 + \dot{I}_{H1} = 2,55 - j34,28 = 34,37e^{-j85,8^\circ}, \quad A;$$

$$\dot{I}_{\Gamma2} = \dot{I}_2 + \dot{I}_{H2} = -2,06 + j2,3 = 3,088e^{j132^\circ}, \quad A;$$

$$\dot{I}_{\Gamma0} = \dot{I}_0 + \dot{I}_{H0} = 1,62 + j0,845 = 1,83e^{j27,5^\circ}, \quad A.$$

Симметричные составляющие напряжений на зажимах генератора находим по схемам прямой, обратной и нулевой последовательностей (рисунки 4.3, 4.4, 4.5):

$$\dot{U}_{\Gamma1} = \dot{E}_1 - Z_{\Gamma1}\dot{I}_1 = \dot{U}_1 + Z_{\Gamma1}\dot{I}_{\Gamma1} = 150,43 + j4,445 = 150,5e^{j1,7^\circ}, \quad B;$$

$$\dot{U}_{\Gamma2} = -Z_{\Gamma2}\dot{I}_{\Gamma2} = \dot{U}_2 + Z_{\Gamma2}\dot{I}_{\Gamma2} = 0,39 + j0,19 = 0,43e^{j26^\circ}, \quad B;$$

$$\dot{U}_{\Gamma0} = -(3Z_N + Z_{\Gamma0})\dot{I}_{\Gamma0} = \dot{U}_0 + Z_{\Gamma0}\dot{I}_{\Gamma0} = 0,73 - j1,36 = 1,54e^{-j61,8^\circ}, \quad B.$$

Расчет токов и напряжений на участках цепи.

Фазные токи генератора

$$\dot{I}_{\Gamma A} = \dot{I}_{\Gamma1} + \dot{I}_{\Gamma2} + \dot{I}_{\Gamma0} = 2,1 - j31,135 = 31,2e^{-j86,1^\circ}, \quad A;$$

$$\dot{I}_{\Gamma B} = a^2\dot{I}_{\Gamma1} + a\dot{I}_{\Gamma2} + \dot{I}_{\Gamma0} = -30,3 + j12,845 = 32,9e^{j157^\circ}, \quad A;$$

$$\dot{I}_{\Gamma C} = a\dot{I}_{\Gamma1} + a^2\dot{I}_{\Gamma2} + \dot{I}_{\Gamma0} = 33,05 + j20,82 = 39,06e^{j32,2^\circ}, \quad A.$$

Фазные токи нагрузки:

$$\dot{I}_{HA} = \dot{I}_{H1} + \dot{I}_{H2} + \dot{I}_{H0} = 2,1 - j31,135 = 31,2e^{-j86,1^\circ}, \quad A;$$

$$\dot{I}_{HA} = \dot{I}_{\Gamma A}$$

$$\dot{I}_{HB} = a^2\dot{I}_{H1} + a\dot{I}_{H2} + \dot{I}_{H0} = -30,3 + j12,845 = 32,9e^{j157^\circ}, \quad A;$$

$$\dot{I}_{HB} = \dot{I}_{\Gamma B}$$

$$\dot{I}_{HC} = a\dot{I}_{H1} + a^2\dot{I}_{H2} + \dot{I}_{H0} = -37,66 - j16,14 = 41,06e^{-j156,8^\circ}, \quad A.$$

Ток короткого замыкания в фазе С:

$$\dot{I}_C = a\dot{I}_1 + a^2\dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 70,71 + j36,96 = 79,8e^{j27,6^\circ}, \quad A.$$

Токи между фазами А, В и землей:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0, \quad A;$$

$$\dot{I}_B = a^2\dot{I}_1 + a\dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0, \quad A.$$

Фазные напряжения на зажимах генератора

$$\dot{U}_{\Gamma A} = \dot{U}_{\Gamma1} + \dot{U}_{\Gamma2} + \dot{U}_{\Gamma0} = 151,55 + j3,275 = 151,58e^{j1,2^\circ}, \quad B;$$

$$\dot{U}_{\Gamma B} = a^2\dot{U}_{\Gamma1} + a\dot{U}_{\Gamma2} + \dot{U}_{\Gamma0} = -71 - j133,62 = 151,31e^{-j118^\circ}, \quad B;$$

$$\dot{U}_{\Gamma C} = a\dot{U}_{\Gamma1} + a^2\dot{U}_{\Gamma2} + \dot{U}_{\Gamma0} = -78,36 + j126,27 = 148,6e^{j121,8^\circ}, \quad B.$$

Напряжения в месте короткого замыкания:

$$\begin{aligned}\dot{U}_A &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 48,07 - j14,64 = 50,25e^{-j16,9^\circ}, \quad B; \\ \dot{U}_B &= a^2\dot{U}_1 + a\dot{U}_2 + \dot{U}_0 = -20,55 - j38,08 = 43,27e^{-j118,35^\circ}, \quad B; \\ \dot{U}_C &= a\dot{U}_1 + a^2\dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 0, B.\end{aligned}$$

Расчет мощностей генератора

Активные мощности фаз:

$$\begin{aligned}P_A &= E_A I_{GA} \cos(\dot{E}_A \wedge \dot{I}_{GA}) = 200 \cdot 31,2 \cdot \cos 86,1^\circ = 424,4 \quad Bm; \\ P_B &= E_B I_{GB} \cos(\dot{E}_B \wedge \dot{I}_{GB}) = 200 \cdot 32,9 \cdot \cos(-120^\circ - 157^\circ) = 801,9 \quad Bm; \\ P_C &= E_C I_{GC} \cos(\dot{E}_C \wedge \dot{I}_{GC}) = 200 \cdot 39,06 \cdot \cos(120^\circ - 32,2^\circ) = 299,9 \quad Bm.\end{aligned}$$

Активная мощность всей цепи:

$$P = P_A + P_B + P_C = 1526,2, \quad Bm.$$

Реактивная мощность:

$$\begin{aligned}Q_A &= E_A I_{GA} \sin(\dot{E}_A \wedge \dot{I}_{GA}) = 200 \cdot 31,2 \cdot \sin 86,1^\circ = 6225,5 \quad BAp; \\ Q_B &= E_B I_{GB} \sin(\dot{E}_B \wedge \dot{I}_{GB}) = 200 \cdot 32,9 \cdot \sin(-277^\circ) = 6531 \quad BAp; \\ Q_C &= E_C I_{GC} \sin(\dot{E}_C \wedge \dot{I}_{GC}) = 200 \cdot 39,06 \cdot \sin 87,8^\circ = 7806,2 \quad BAp; \\ Q &= Q_A + Q_B + Q_C = 20562,7 \quad BAp.\end{aligned}$$

Полная мощность цепи:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 20619,26 \quad BA.$$

Рассмотрим расчет несимметричных режимов на примере *обрыва* одной из фаз, например, фазы С.

Симметричная динамическая нагрузка подключена к симметричному трехфазному генератору с фазной ЭДС E_ϕ . Параметры генератора $Z_{Г1}, Z_{Г2}, Z_{Г0}$; параметры линии и нагрузки $Z_{Л1}, Z_{Л2}, Z_{Л0}$ и Z_1, Z_2, Z_0 соответственно.

В трехфазной цепи происходит обрыв одного из линейных проводов (рисунок 4.10). Используя метод симметричных составляющих, рассчитать токи и напряжения на всех участках цепи, определить активную, реактивную и полную мощности генератора.

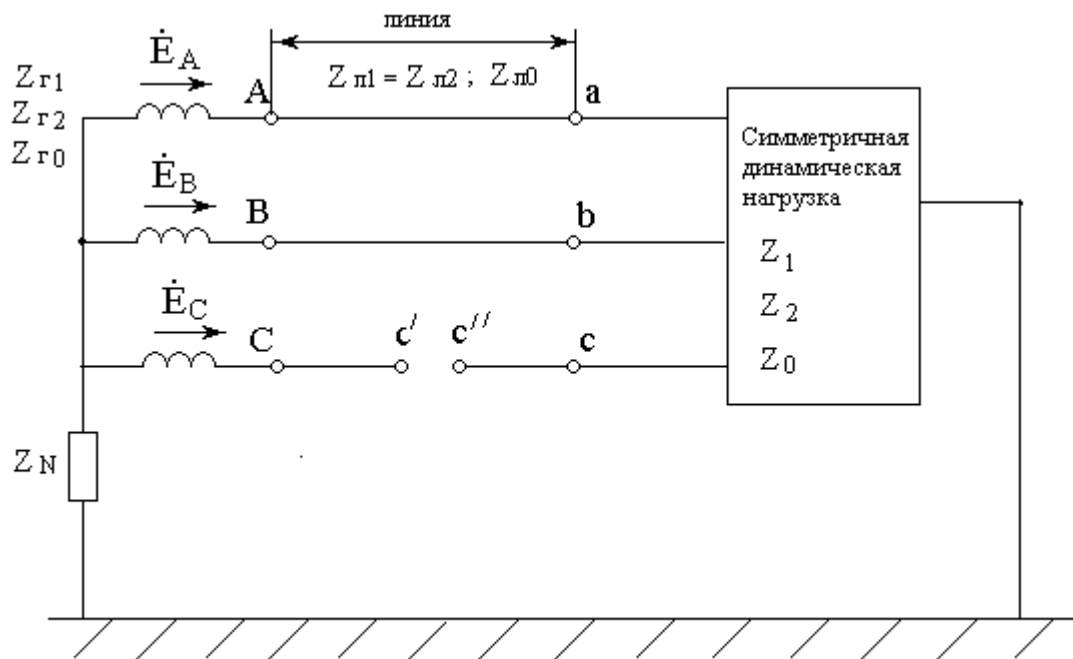


Рисунок 4.10

Исходные данные для расчета:

$$E_{\phi}=127 \text{ В}, Z_N=j0,4 \text{ Ом.}$$

Сопротивление прямой, обратной и нулевой последовательностей генератора:

$$Z_{Г1}=(0,38+j2,2) \text{ Ом};$$

$$Z_{Г2}=j0,23 \text{ Ом}; Z_{Г0}=j0,11 \text{ Ом};$$

линии:

$$Z_{Л1}=Z_{Л2}=j3,8 \text{ Ом}, Z_{Л0}=j7 \text{ Ом},$$

нагрузки:

$$Z_1=(3+j4) \text{ Ом}; Z_2=(0,35+j0,8) \text{ Ом и } Z_0=j0,7 \text{ Ом.}$$

Заменим несимметричный участок линии, обусловленный обрывом линии С, тремя источниками неизвестных напряжений $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$. Разложим эти напряжения на симметричные составляющие прямой \dot{U}_1 , обратной \dot{U}_2 и нулевой \dot{U}_0 последовательностей, приняв фазу А за основную. Фазовый множитель

$$a = e^{j120^\circ}, a^2 = e^{-j120^\circ}$$

$$\begin{cases} \dot{U}_A = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0 \\ \dot{U}_B = a^2 \dot{U}_1 + a \dot{U}_2 + \dot{U}_0 \\ \dot{U}_C = a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2 + \dot{U}_0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Для фазы А составим эквивалентные схемы прямой, обратной и нулевой последовательностей (рисунки 4.11, 4.12, 4.13):

Схема прямой
последовательности

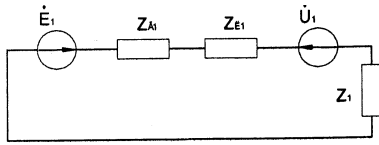


Рисунок 4.11

Схема обратной
последовательности

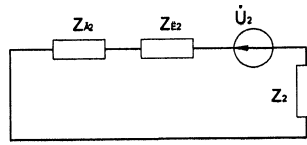


Рисунок 4.12

Схема нулевой
последовательности

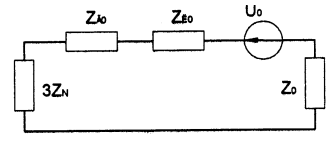


Рисунок 4.13

Для каждой из этих трех схем записываем уравнение по II закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} Z_{\Sigma 1} \dot{I}_1 + \dot{U}_1 = \dot{E}_1 \\ Z_{\Sigma 2} \dot{I}_2 + \dot{U}_2 = 0 \\ Z_{\Sigma 0} \dot{I}_0 + \dot{U}_0 = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

Дополнительные три уравнения, связывающие шесть неизвестных из этих уравнений, составляются на основании схемы несимметричного участка. В нашем случае несимметрия обусловлена обрывом линии С, поэтому получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{I}_C = 0 \\ \dot{U}_A = 0 \\ \dot{U}_B = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Разложив \dot{I}_C , \dot{U}_A и \dot{U}_B на симметричные составляющие, получим:

$$\begin{cases} a\dot{I}_1 + a^2\dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0 \\ \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 0 \\ a\dot{U}_1 + a^2\dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

Получившуюся систему из шести уравнений с шестью неизвестными будем решать:

$$\begin{cases} Z_{\Sigma 1} \dot{I}_1 + \dot{U}_1 = \dot{E}_1 & (a) \\ Z_{\Sigma 2} \dot{I}_2 + \dot{U}_2 = 0 & (b) \\ Z_{\Sigma 0} \dot{I}_0 + \dot{U}_0 = 0 & (c) \\ a\dot{I}_1 + a^2\dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0 & (d) \\ \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 0 & (e) \\ a\dot{U}_1 + a^2\dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 0 & (f) \end{cases} \quad (4.16)$$

Покажем решение системы (4.16). Для этого помножим уравнения (a), (b) и (c) на $\frac{a}{Z_{\Sigma 1}}$, $\frac{a^2}{Z_{\Sigma 2}}$ и $\frac{1}{Z_{\Sigma 0}}$ соответственно.

Затем сложим их, тогда получим:

$$\begin{cases} (a\dot{I}_1 + a^2\dot{I}_2 + \dot{I}_0) + \frac{a\dot{U}_1}{Z_{\varepsilon 1}} + \frac{a^2\dot{U}_2}{Z_{\varepsilon 2}} + \frac{\dot{U}_0}{Z_{\varepsilon 0}} = \frac{a\dot{E}_1}{Z_{\varepsilon 1}} & (g) \\ a\dot{I}_1 + a^2\dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0 & (d) \\ \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 0 & (e) \\ a\dot{U}_1 + a^2\dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 0 & (f) \end{cases} \quad (4.17)$$

Учитывая уравнение (d), получим следующий вид системы.

Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования. (4.18)

Далее вычтем из уравнения (f) уравнение (e), получим:

$$\begin{cases} \frac{a\dot{U}_1}{Z_{\varepsilon 1}} + \frac{a^2\dot{U}_2}{Z_{\varepsilon 2}} + \frac{\dot{U}_0}{Z_{\varepsilon 0}} = \frac{a\dot{E}_1}{Z_{\varepsilon 1}} \\ (a^2 - 1)\dot{U}_1 + (a - 1)\dot{U}_2 = 0 & (h) \end{cases} \quad (4.19)$$

Преобразуем уравнение (h)

$$\dot{U}_2 = \frac{(a^2 - 1)\dot{U}_1}{(a - 1)} = -\frac{(a - 1)(a + 1)\dot{U}_1}{(a - 1)} = -(a + 1)\dot{U}_1 \rightarrow .$$

Так как из $a^2 + a + 1 = 0$, получим, что $a + 1 = -a^2$, т.е. $\dot{U}_2 = a\dot{U}_1$.

Теперь, подставив $\dot{U}_2 = a\dot{U}_1$ в уравнение (e) найдем $\dot{U}_0 = a\dot{U}_1$.

Подставив найденные значения симметричных составляющих напряжения в уравнение (g), получим:

$$\frac{a\dot{U}_1}{Z_{\varepsilon 1}} + \frac{a^2\dot{U}_2}{Z_{\varepsilon 2}} + \frac{\dot{U}_0}{Z_{\varepsilon 0}} = \frac{a\dot{E}_1}{Z_{\varepsilon 1}} \rightarrow \dot{U}_1 = \dot{E}_1 \left(\frac{Z_{\varepsilon 2}Z_{\varepsilon 0}}{Z_{\varepsilon 1}Z_{\varepsilon 2} + Z_{\varepsilon 2}Z_{\varepsilon 0} + Z_{\varepsilon 1}Z_{\varepsilon 0}} \right);$$

$$Z_{\varepsilon 1} = Z_{\Gamma 1} + Z_{\text{Л1}} + Z_1 = 0,38 + j2,2 + j3,8 + 3 + j4 = (3,38 + j10), \text{ Ом}.$$

Учитывая, что $Z_{\varepsilon 2} = Z_{\Gamma 2} + Z_{\text{Л2}} + Z_2 = j0,19 + j3,8 + 0,35 + j0,8 = (0,35 + j4,79), \text{ Ом}$, тогда получим

$$Z_{\varepsilon 0} = Z_{\Gamma 0} + Z_{\text{Л0}} + Z_0 + 3Z_N = j0,011 + j7 + j0,7 + 3 \cdot jj0,4 = j7,81 \text{ Ом}.$$

$$\dot{U}_1 = \dot{E}_1 \left(\frac{Z_{\varepsilon 2}Z_{\varepsilon 0}}{Z_{\varepsilon 1}Z_{\varepsilon 2} + Z_{\varepsilon 2}Z_{\varepsilon 0} + Z_{\varepsilon 1}Z_{\varepsilon 0}} \right) = 127 \left(\frac{(3,38 + j10)(j7,81)}{(3,38 + j10)(0,35 + j4,79) + (3,38 + j10)(j7,81) + (3,38 + j10)(j7,81)} \right) = (27,445 + j6,119), \text{ В}$$

Отсюда найдем $\dot{U}_2 = a\dot{U}_1 = (-8,423 - j26,828)$, и $\dot{U}_0 = a\dot{U}_1 = (-19,022 + j20,708)$, В.

Из системы по уравнениям (a), (b) и (c) найдем симметричные составляющие токов:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}_1}{Z_{\Sigma 1}} = (2,471 - j9,12), \text{ А} & \dot{I}_2 &= \frac{-\dot{U}_2}{Z_{\Sigma 2}} = (5,699 - j1,342), \text{ А} \\ \dot{I}_0 &= \frac{-\dot{U}_0}{Z_{\Sigma 0}} = (-2,651 - j2,436), \text{ А}. \end{aligned}$$

Определим токи в фазах через симметричные составляющие:

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 5,518 - j12,898 = 14,029 e^{-j67^\circ} \text{ А}; \\ \dot{I}_B &= a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = -13,473 + j5,591 = 14,587 e^{j157^\circ} \text{ А}; \\ \dot{I}_C &= a \dot{I}_1 + a^2 \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0 \text{ А}. \end{aligned}$$

Рассчитаем симметричные составляющие напряжений на генераторе:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\Gamma 1} &= \dot{E}_1 + \dot{I}_1 Z_{\Gamma 1} = (105,996 - j1,97), \text{ В}; \\ \dot{U}_{\Gamma 2} &= -\dot{I}_2 Z_{\Gamma 2} = (-0,255 - j1,083), \text{ В}; \\ \dot{U}_{\Gamma 0} &= -\dot{I}_0 Z_{\Gamma 0} = (-0,268 + j0,292), \text{ В}. \end{aligned}$$

Найдем напряжение на генераторе в фазах через симметричные составляющие:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\Gamma A} &= \dot{U}_{\Gamma 1} + \dot{U}_{\Gamma 2} + \dot{U}_{\Gamma 0} = (105,473 - j2,761), \text{ В}; \\ \dot{U}_{\Gamma B} &= a^2 \dot{U}_{\Gamma 1} + \dot{U}_{\Gamma 2} + \dot{U}_{\Gamma 0} = (-53,907 - j90,198), \text{ В}; \\ \dot{U}_{\Gamma C} &= a \dot{U}_{\Gamma 1} + a^2 \dot{U}_{\Gamma 2} + \dot{U}_{\Gamma 0} = (-52,37 + j93,834), \text{ В}. \end{aligned}$$

Рассчитаем симметричные составляющие напряжений на нагрузке:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{H1} &= \dot{I}_1 Z_1 = (43,894 - j17,478), \text{ В}; & \dot{U}_{H2} &= \dot{I}_2 Z_2 = (3,068 + j4,089), \text{ В}; \\ \dot{U}_{H0} &= \dot{I}_0 Z_0 = (1,705 - j1,856), \text{ В}. \end{aligned}$$

Найдем напряжений на нагрузке в фазах через симметричные составляющие:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{HA} &= \dot{U}_{H1} + \dot{U}_{H2} + \dot{U}_{H0} = (48,667 - j15,245), \text{ В}; \\ \dot{U}_{HB} &= a^2 \dot{U}_{H1} + a \dot{U}_{H2} + \dot{U}_{H0} = (-40,454 - j30,518), \text{ В}; \\ \dot{U}_{HC} &= a \dot{U}_{H1} + a^2 \dot{U}_{H2} + \dot{U}_{H0} = (-3,098 + j40,194), \text{ В}. \end{aligned}$$

Рассчитаем симметричные составляющие напряжений в линии:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{Л1} &= \dot{I}_1 Z_{Л1} = (34,658 + j9,389), \text{ В}; \\ \dot{U}_{Л2} &= \dot{I}_2 Z_{Л2} = ((5,1 + j21,656), \text{ В}; \\ \dot{U}_{Л0} &= \dot{I}_0 Z_{Л0} = (17,049 - j18,56), \text{ В}. \end{aligned}$$

Найдем напряжение в линии в фазах через симметричные составляющие:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ЛА} &= \dot{U}_{Л1} + \dot{U}_{Л2} + \dot{U}_{Л0} = (56,806 + j12,484), \text{ В}; \\ \dot{U}_{ЛВ} &= a^2 \dot{U}_{Л1} + a \dot{U}_{Л2} + \dot{U}_{Л0} = (-13,453 - j59,681), \text{ В}; \\ \dot{U}_{ЛС} &= a \dot{U}_{Л1} + a^2 \dot{U}_{Л2} + \dot{U}_{Л0} = (7,794 - j8,485), \text{ В}. \end{aligned}$$

Выполним проверку:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{\Gamma A} &= \dot{U}_{\Lambda A} + \dot{U}_{HA} = (105,473 - j2,761), \text{ В}; \\ \dot{U}_{\Gamma B} &= \dot{U}_{\Lambda B} + \dot{U}_{HB} = (-53,907 - j90,198), \text{ В}; \\ \dot{U}_{c'c''} &= a\dot{U}_1 + a^2\dot{U}_2 + \dot{U}_0 = (-57,066 + j62,125), \text{ В}; \\ \dot{U}_{\Gamma C} &= \dot{U}_{\Lambda C} + \dot{U}_{HC} + \dot{U}_{c'c''} = (-52,37 + j93,834), \text{ В}.\end{aligned}$$

Расчет мощностей.

Активные мощности фаз:

$$\begin{aligned}P_A &= E_A I_{\Gamma A} \cos(\angle E_A \angle I_{\Gamma A}) = 127 \times 14,029 \cos 67^\circ = 696,16 \text{ Вт}; \\ P_B &= E_B I_{\Gamma B} \cos(\angle E_B \angle I_{\Gamma B}) = 127 \times 14,587 \cos(-37^\circ) = 1479,51 \text{ Вт}; \\ P_C &= E_C I_{\Gamma C} \cos(\angle E_C \angle I_{\Gamma C}) = 0 \text{ Вт}.\end{aligned}$$

Активная мощность всей цепи:

$$P = P_A + P_B + P_C = 2175,67 \text{ Вт}.$$

Реактивная мощность

$$\begin{aligned}Q_A &= E_A I_{\Gamma A} \sin(\angle E_A \angle I_{\Gamma A}) = 127 \times 14,029 \sin 67^\circ = 1640,05 \text{ Вар}; \\ Q_B &= E_B I_{\Gamma B} \sin(\angle E_B \angle I_{\Gamma B}) = 127 \times 14,587 \sin(-37^\circ) = -1114,89 \text{ Вар}; \\ Q_C &= E_C I_{\Gamma C} \sin(\angle E_C \angle I_{\Gamma C}) = 0 \text{ Вар}.\end{aligned}$$

Реактивная мощность всей цепи:

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = 525,16 \text{ Вар}.$$

Полная мощность цепи:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{4733539,9 + 275793,03} = 2182 \text{ ВА}.$$

5 Расчет трехфазных цепей с несинусоидальными напряжениями и токами

Рассмотрим трехфазную цепь, в которой к симметричному трехфазному генератору с фазной ЭДС, изменяющейся по несинусоидальному закону, подключена симметричная нагрузка (рисунок 5.1). Зависимость ЭДС фазы А от времени представлена (рисунок 5.2).

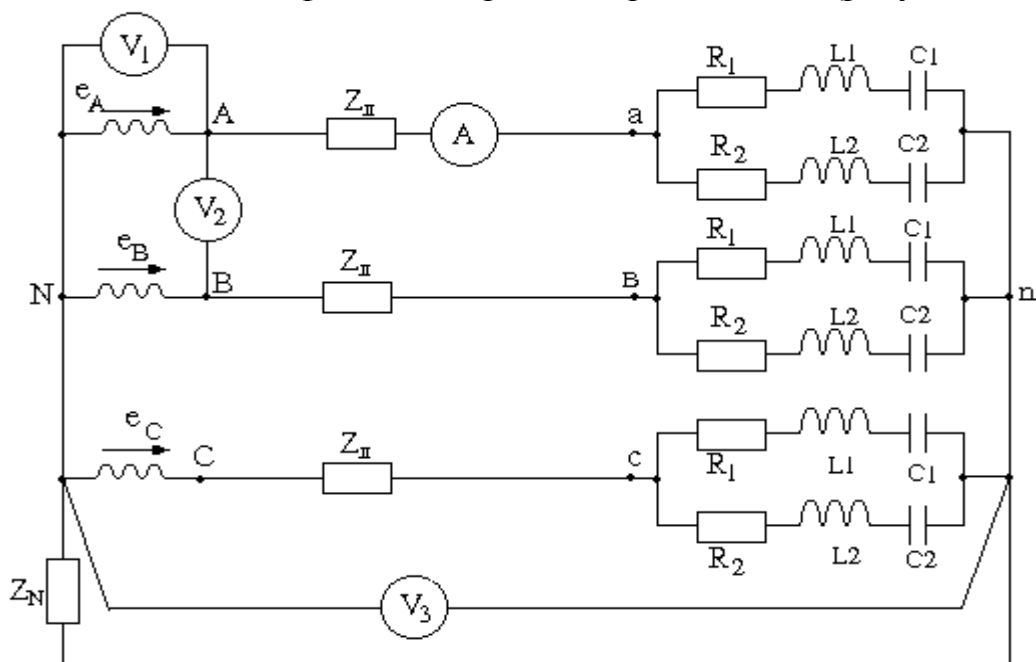


Рисунок 5.1

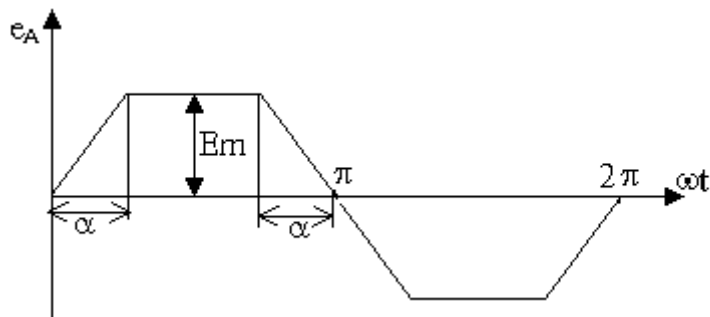


Рисунок 5.2

Данные для расчета: $E_m=400$ В, $\alpha=\pi/8$.

Сопротивление линии $Z_{л(1)}=(6+j7)$ Ом, сопротивление в нейтральном проводе $Z_N=1,7$ Ом. Параметры нагрузки: $R_1=35$ Ом, $R_2=20$ Ом, $X_{L1(1)}=45$ Ом, $X_{L2(1)}=0$ Ом, $X_{C1(1)}=55$ Ом, $X_{C2(1)}=30$ Ом. Сопротивления реактивных элементов заданы для первой (основной) гармоники.

Определение гармонического состава фазной ЭДС.

Заданная несинусоидальная кривая (рисунок 5.2) раскладывается в тригонометрический ряд:

$$e_A(\omega t) = \frac{4E_m}{\alpha\pi} \left(\sin\alpha \sin\omega t + \frac{1}{9} \sin 3\alpha \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\alpha \sin 5\omega t + \dots \right). \quad (5.1)$$

Ограничиваемся первыми тремя гармоническими составляющими и получаем следующее выражение для ЭДС фазы А:

$$e_A(\omega t) = 496,31 \sin\omega t + 133,13 \sin 3\omega t + 47,93 \sin 5\omega t, \text{ В}.$$

ЭДС фаз В и С имеют следующие выражения:

$$e_B(\omega t) = 496,31 \sin(\omega t - 120^\circ) + 133,13 \sin 3\omega t + 47,93 \sin(5\omega t + 120^\circ), \text{ В}$$

$$e_C(\omega t) = 496,31 \sin(\omega t + 120^\circ) + 133,13 \sin 3\omega t + 47,93 \sin(5\omega t - 120^\circ), \text{ В}$$

Расчет при наличии нейтрального провода.

Расчет токов первой гармоники.

Рассчитываем комплексное сопротивление нагрузки:

$$Z_{H(1)} = \frac{(R_1 + jX_{L1(1)} - jX_{C1(1)})(R_2 + jX_{L2(1)} - jX_{C2(1)})}{R_1 + jX_{L1(1)} - jX_{C1(1)} + R_2 + jX_{L2(1)} - jX_{C2(1)}}. \quad (5.2)$$

Подставляем численные значения сопротивлений

$$Z_{H(1)} = \frac{(35 - j10)(20 - j30)}{55 - j40} = 15,568 - j11,405, \text{ Ом}.$$

Комплексное сопротивление фазы с учетом сопротивления линии $Z_{л(1)}$
 $Z_{(1)} = Z_{л(1)} + Z_{H(1)} = 6 + j7 + 15,568 - j11,405 = 21,568 - j4,405 = 22,013e^{-j11,5^\circ}, \text{ Ом}.$

Комплексные токи первой гармоники фазы А:

$$\dot{I}_{A(1)} = \frac{\dot{E}_{A(1)}}{Z_{(1)}}, \quad \text{где} \quad \dot{E}_{A(1)} = \frac{E_{m(1)}}{\sqrt{2}} = 350,94, \text{ В};$$

$$\dot{I}_{A(1)} = \frac{350,94}{22,013e^{-j11,5^\circ}} = 15,94e^{j11,5^\circ}, \text{ А}.$$

Комплексные токи первой гармоники фаз В и С

$$\dot{I}_{B(1)} = \dot{I}_{A(1)} e^{-j120^\circ} = 15,94e^{-j108,5^\circ}, \text{ А};$$

$$\dot{I}_{C(1)} = \dot{I}_{A(1)} e^{j120^\circ} = 15,94e^{j131,5^\circ}, \text{ А}.$$

Расчет токов третьей гармоники.

Для третьей гармоники реактивные сопротивления индуктивностей увеличиваются, а реактивные сопротивления емкостей уменьшаются в три раза, т.е. $X_{L(3)} = 3X_{L(1)}$, $X_{C(3)} = 1/3 X_{C(1)}$, $X_{L1(3)} = j135 \text{ Ом}$, $X_{C1(3)} = 18,33 \text{ Ом}$, $X_{C2(3)} = 10 \text{ Ом}$, $Z_{л(3)} = (6 + j21) \text{ Ом}$.

Комплексное сопротивление нагрузки:

$$Z_{(3)} = \frac{(35 + j116,67)(20 - j10)}{55 + j106,67} = 21,817 - j6,25, \text{ Ом}.$$

Токи третьей гармоники образуют симметричную систему нулевой последовательности, поэтому эквивалентное сопротивление фазы для третьей гармоники содержит утроенную величину сопротивления нейтрального провода Z_N .

$$Z_{(3)} = Z_{л(3)} + Z_{H(3)} + 3Z_{N(3)} = 6 + j21 + 21,817 - j6,25 + 3 \cdot 1,7 = 32,917 + j14,75 = 36,07e^{j24,1^\circ}, \text{ Ом}.$$

Комплекс тока третьей гармоники:

$$\dot{I}_{A(3)} = \frac{\dot{E}_{A(3)}}{Z_{(3)}} = \frac{94,137}{36,07e^{j24,1^\circ}} = 2,61e^{-j24,1^\circ}, \text{ А};$$

$$\text{где} \quad \dot{E}_{A(3)} = \frac{E_{m(3)}}{\sqrt{2}} = \frac{133,19}{\sqrt{2}} = 94,137, \text{ В};$$

$$\dot{I}_{B(3)} = \dot{I}_{C(3)} = \dot{I}_{A(3)} = \dot{I}_{(3)} = 2,61e^{-j24,1^\circ}, \text{ А}.$$

Расчет токов пятой гармоники.

Для пятой гармоники реактивные сопротивления индуктивностей и емкостей изменяются в пять раз, т.е. $X_{L(5)}=5X_{L(1)}$, $X_{C(5)}=1/5X_{C(1)}$, $X_{L1(5)}=225 \text{ Ом}$, $X_{C1(5)}=11 \text{ Ом}$, $X_{C2(5)}=6 \text{ Ом}$, $Z_{л(5)}=(6+j35) \text{ Ом}$.

Комплексное сопротивление нагрузки:

$$Z_{H(5)} = \frac{(35 + j214)(20 - j6)}{55 + j208} = 20,646 - j4,08, \text{ Ом}.$$

Комплексное сопротивление фазы:

$$Z_{(5)} = Z_{л(5)} + Z_{H(5)} = 26,646 + j30,92 = 40,82e^{j49,2^0}, \text{ Ом}.$$

Комплекс тока пятой гармоники фазы А:

$$i_{A(5)} = \frac{\dot{E}_{A(5)}}{Z_{(5)}} = \frac{33,89}{40,82e^{j49,2^0}} = 0,83e^{-j49,2^0}, \text{ А};$$

$$\text{где } \dot{E}_{A(5)} = \frac{E_{m(5)}}{\sqrt{2}} = \frac{47,93}{\sqrt{2}} = 33,89, \text{ В}.$$

Комплексные токи пятой гармоники фаз В и С :

$$i_{B(5)} = i_{A(5)} e^{j120^0} = 0,83e^{j70,8^0}, \text{ А};$$

$$i_{C(5)} = i_{A(5)} e^{-j120^0} = 0,83e^{-j169,2^0}, \text{ А}.$$

Мгновенные и действующие значения токов.

Мгновенное значение несинусоидального тока равно сумме мгновенных значений токов отдельных гармоник. Мгновенное значение тока фазы А:

$$i_A = i_{A(1)} + i_{A(3)} + i_{A(5)}; \quad (5.3)$$

$$i_{A(1)} = I_{Am(1)} \sin(\omega t + \varphi_{A(1)}) = \sqrt{2} \cdot 15,94 \sin(\omega t + 11,5^0), \text{ А};$$

$$i_{A(3)} = I_{m(3)} \sin(3\omega t + \varphi_{A(3)}) = \sqrt{2} \cdot 2,61 \sin(3\omega t - 24,1^0), \text{ А};$$

$$i_{A(5)} = I_{Am(5)} \sin(5\omega t + \varphi_{A(5)}) = \sqrt{2} \cdot 0,83 \sin(5\omega t - 49,2^0), \text{ А}.$$

Мгновенные значения токов фаз В и С

$$i_B = \sqrt{2} \cdot 15,94 \sin(\omega t - 108,5^\circ) + \sqrt{2} \cdot 2,61 \sin(3\omega t - 24,1^\circ) + \sqrt{2} \cdot 0,83 \sin(5\omega t + 70,8^\circ), \text{ A}$$

$$i_C = \sqrt{2} \cdot 15,94 \sin(\omega t + 131,5^\circ) + \sqrt{2} \cdot 2,61 \sin(3\omega t - 24,1^\circ) + \sqrt{2} \cdot 0,83 \sin(5\omega t - 169,2^\circ), \text{ A}$$

Мгновенное значение тока в нейтральном проводе равно утроенному току третьей гармоники

$$i_N = 3i_{(3)} = \sqrt{2} \cdot 7,83 \sin(3\omega t - 24,1^\circ), \text{ A}.$$

Действующее значение несинусоидального тока определяется как корень квадратный из суммы квадратов действующих значений токов отдельных гармоник:

$$I = \sqrt{I_{(1)}^2 + I_{(3)}^2 + I_{(5)}^2} ; \quad (5.4)$$

$$I_A = I_B = I_C = I = \sqrt{15,94^2 + 2,61^2 + 0,83^2} = 16,17 \text{ A}.$$

Действующее значение тока в нейтральном проводе:

$$I_N = 3I_{(3)} = 7,83, \text{ A}.$$

Показания приборов.

Вольтметр V1 измеряет действующее значение фазного напряжения генератора (напряжение на зажимах генератора в рассматриваемом примере равно ЭДС генератора, т.к. внутреннее сопротивление генератора принято равным нулю), которое равно:

$$U_\phi = \sqrt{E_{(1)}^2 + E_{(3)}^2 + E_{(5)}^2} = \sqrt{350,94^2 + 94,137^2 + 33,89^2} = 364,92, \text{ B}.$$

Вольтметр V2 измеряет действующее значение линейного напряжения на зажимах генератора. Как известно, линейное напряжение не содержит гармоник с номерами, кратными трем, следовательно, линейное напряжение содержит только первую и пятую гармоники

$$U_L = \sqrt{3} \cdot \sqrt{E_{(1)}^2 + E_{(5)}^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{350,94^2 + 33,89^2} = 610,67, \text{ B}.$$

Вольтметр V3 измеряет действующее значение напряжения между нейтральными точками генератора и нагрузки, которое может быть определено как произведение действующего значения тока в нейтральном проводе на сопротивление нейтрального провода.

$$U_{nN} = Z_N \cdot I_N = 1,7 \cdot 7,83 = 13,31, \text{ B}.$$

Амперметр измеряет действующее значение тока в фазе А, которое определяется по выражению (5.4) и которое уже было рассчитано выше

$$I = 16,17 \text{ A}.$$

Расчет мощностей генератора.

Активная мощность несинусоидального тока равна сумме активных мощностей отдельных гармоник.

$$P_A = P_{A(1)} + P_{A(3)} + P_{A(5)} ; \quad (5.5)$$

$$P_{A(1)} = E_{A(1)} I_{A(1)} \cos(\dot{E}_{A(1)} \wedge \dot{I}_{A(1)}) = 350,94 \cdot 15,94 \cos(-11,5^0) = 5481,7, \text{ Вт};$$

$$P_{A(3)} = E_{A(3)} I_{A(3)} \cos(\dot{E}_{A(3)} \wedge \dot{I}_{A(3)}) = 94,137 \cdot 2,61 \cos(24,1^0) = 224,28, \text{ Вт};$$

$$P_{A(5)} = E_{A(5)} I_{A(5)} \cos(\dot{E}_{A(5)} \wedge \dot{I}_{A(5)}) = 33,89 \cdot 0,83 \cos(49,2^0) = 18,38, \text{ Вт};$$

$$P_A = 5724,36, \text{ Вт}.$$

Активные мощности в фазах В и С равны по величине активной мощности в фазе А, поэтому активная мощность всей цепи определяется как утроенная величина активной мощности фазы А :

$$P = 3P_A = 17173,08 \text{ Вт}.$$

Реактивная мощность несинусоидального тока равна сумме реактивных мощностей отдельных гармоник :

$$Q_A = Q_{A(1)} + Q_{A(3)} + Q_{A(5)}; \quad (5.6)$$

$$Q_{A(1)} = E_{A(1)} I_{A(1)} \sin(\dot{E}_{A(1)} \wedge \dot{I}_{A(1)}) = 350,94 \cdot 15,94 \sin(-11,5^0) = -1115,26, \text{ Вар};$$

$$Q_{A(3)} = E_{A(3)} I_{A(3)} \sin(\dot{E}_{A(3)} \wedge \dot{I}_{A(3)}) = 94,137 \cdot 2,61 \sin(24,1^0) = 100,33, \text{ Вар};$$

$$Q_{A(5)} = E_{A(5)} I_{A(5)} \sin(\dot{E}_{A(5)} \wedge \dot{I}_{A(5)}) = 33,89 \cdot 0,83 \sin(49,2^0) = 21,29, \text{ Вар};$$

$$Q_A = -993,64, \text{ Вар};$$

$$Q = 3Q_A = -2980,92 \text{ Вар}.$$

Полная мощность несинусоидального тока равна произведению действующего значения несинусоидальной ЭДС на действующее значение несинусоидального тока.

$$S_A = E_A \cdot I_A = \sqrt{E_{A(1)}^2 + E_{A(3)}^2 + E_{A(5)}^2} \cdot \sqrt{I_{A(1)}^2 + I_{A(3)}^2 + I_{A(5)}^2}, \quad (5.7)$$

$$S_A = 364,92 \cdot 16,17 = 5900,76 \text{ ВА}.$$

Полная мощность всей цепи равна утроенной величине полной мощности фазы

$$S = 3S_A = 17702,28 \text{ ВА}.$$

В цепях несинусоидального тока

$$S^2 \neq P^2 + Q^2. \quad (5.8)$$

Это неравенство обусловлено несовпадением форм кривых несинусоидальных напряжений и токов. Мощностью искажения Т называют величину

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}; \quad (5.9)$$

$$T = \sqrt{17702,28^2 - 17173,08^2 - (-2980,92)^2} = 3093,57, \text{ Вар}.$$

Расчет при обрыве нейтрального провода.

При отсутствии нейтрального провода токи третьей гармоники протекать не могут, поэтому в составе фазных токов токи третьей гармоники отсутствуют. Токи первой и пятой гармоник сохраняют те же значения, что и при наличии нейтрального провода. Покажем расчет тех величин, которые изменяют свои значения при обрыве нейтрального провода.

Мгновенные и действующие значения токов:

$$i_A = i_{A(1)} + i_{A(5)} = \sqrt{2} \cdot 15,94 \sin(\omega t + 11,5^\circ) + \sqrt{2} \cdot 0,83 \sin(5\omega t - 49,2^\circ), \text{ A};$$

$$i_B = \sqrt{2} \cdot 15,94 \sin(\omega t - 108,5^\circ) + \sqrt{2} \cdot 0,83 \sin(5\omega t + 70,8^\circ), \text{ A};$$

$$i_C = \sqrt{2} \cdot 15,94 \sin(\omega t + 131,5^\circ) + \sqrt{2} \cdot 0,83 \sin(5\omega t - 169,2^\circ), \text{ A};$$

$$i_N = 0;$$

$$I = \sqrt{I_{(1)}^2 + I_{(5)}^2} = \sqrt{15,94^2 + 0,83^2} = 15,96 \text{ A}.$$

Показания приборов.

Показания вольтметров V_1 и V_2 не изменяются:

$$V_1 \rightarrow 364,92 \text{ В}, V_2 \rightarrow 610,67 \text{ В}.$$

Напряжение между нейтральными точками генератора и нагрузки U_{nN} станет равным действующему значению э.д.с. третьей гармоники, т.е. $U_{nN} = 94,137 \text{ В}$. Следовательно, показание вольтметра V_3 увеличится до величины 94,137 В.

Показание амперметра станет равным действующему значению тока, в составе которого отсутствует третья гармоника, т.е. $I = 15,96 \text{ А}$.

Расчет мощностей генератора.

Активные и реактивные мощности первой и пятой гармоник не изменяются, а мощности третьей гармоники станут равными нулю, поэтому:

$$P_A = P_{A(1)} + P_{A(5)} = 5481,7 + 18,38 = 5500,08 \text{ Вт};$$

$$P = 3P_A = 16500,24 \text{ Вт};$$

$$Q_A = Q_{A(1)} + Q_{A(5)} = -1115,26 + 21,29 = -1093,97 \text{ Вар};$$

$$Q = 3Q_A = -3281,91 \text{ Вар}.$$

Полная мощность:

$$S_A = E_A \cdot I_A = 364,92 \cdot 15,96 = 5824,12 \text{ ВА};$$

$$S = 3S_A = 17472,36 \text{ ВА}.$$

Мощность искажения:

$$T = \sqrt{17472,36^2 - 16500,24^2 - (-3281,91)^2} = 4717,47, \text{ Вар}.$$

Построение графика изменения во времени фазной ЭДС.

Мгновенное значение ЭДС фазы А, как было показано в (5.1), представляется в виде суммы первой, третьей и пятой гармоник, т.е.

$$e_A(\omega t) = 496,31 \sin \omega t + 133,13 \sin 3\omega t + 47,93 \sin 5\omega t, \text{ В}.$$

Строим отдельно каждую из гармоник, а затем суммируем три полученные синусоиды и получаем график зависимости от времени несинусоидальной ЭДС фазы А (рисунок 5.3).

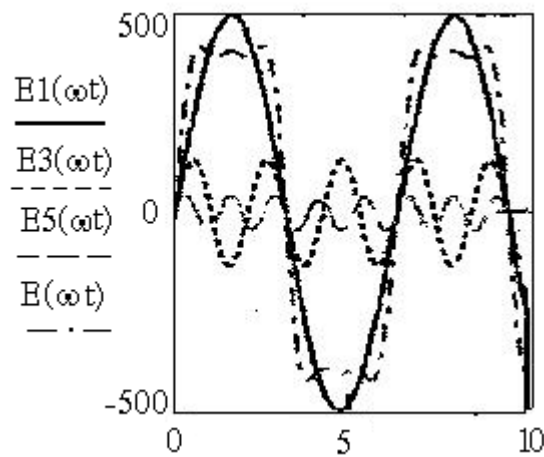


Рисунок 5.3

6 Переходные процессы в линейных электрических цепях

Рассмотрим расчет переходных процессов на примере электрической цепи (рисунок 6.1), в которой происходит коммутация. Параметры цепи: $E=270$ В; $R_1=60$ Ом; $R_2=80$ Ом; $R_3=120$ Ом; $L=60$ мГн; $C=30$ мкФ. Требуется определить закон изменения во времени напряжения на индуктивности после коммутации. Расчет выполнить двумя методами: классическим и операторным.

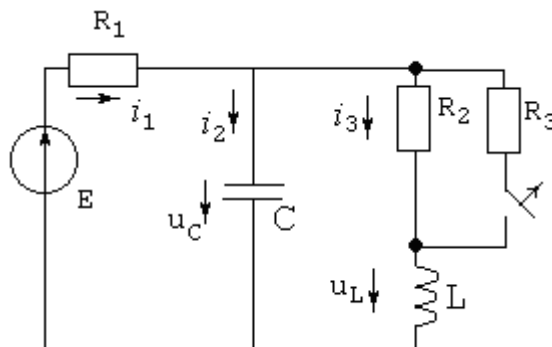


Рисунок 6.1

6.1 Классический метод расчета переходных процессов

Определение независимых начальных условий.

Независимые начальные условия: ток в индуктивности $i_3(0)$ и напряжение на емкости $u_C(0)$ в момент времени $t=0$.

Рассчитаем принужденный режим в электрической цепи до коммутации (контакт замкнут).

Так как ЭДС E постоянная, то и токи и напряжения в электрической цепи в принужденном режиме до коммутации также постоянные, поэтому ток в емкости и напряжение на индуктивности равны нулю:

$$i_{2-} = i_{2пр-} = 0, \quad u_{L-} = u_{Lпр-} = 0.$$

Схема для расчета принужденного режима в цепи до коммутации (рисунок 6.2).

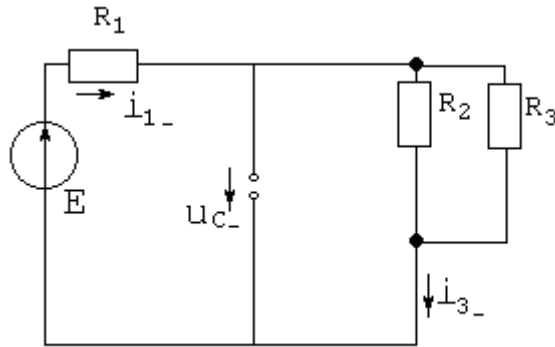


Рисунок 6.2

Ток в индуктивности i_{3-} и напряжение на емкости u_{C-} рассчитываются по формулам:

$$i_{1-} = i_{3-} = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{270}{60 + \frac{80 \cdot 120}{80 + 120}} = 2,5A; \quad (6.1)$$

$$u_{C-} = E - i_{1-} R_1 = 270 - 2,5 \cdot 60 = 120B \quad (6.2)$$

$$i_{3-} = i_{3-}(0) = 2,5A, u_{C-} = u_{C-}(0) = 120B.$$

По законам коммутации:

$$\left. \begin{aligned} i_{3-}(0) &= i_3(0); \\ u_{C-}(0) &= u_C(0). \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Независимые начальные условия равны:

$$i_3(0) = 2,5A; \quad u_C(0) = 120B.$$

Составление системы дифференциальных уравнений. Уравнения составляются по законам Кирхгофа для электрической цепи после коммутации ($t \geq 0$):

$$\left. \begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0; \\ i_1 R_1 + u_c &= E; \\ i_3 R_2 + u_L - u_c &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} (6.4.a) \\ (6.4.б) \\ (6.4.в) \end{aligned}$$

$$u_L = L \frac{di_3}{dt}, \quad (6.5)$$

$$i_2 = C \frac{du_c}{dt} \quad (6.6)$$

Переходное напряжение u_L представим в виде суммы принужденного и свободного режимов цепи:

$$u_L = u_{Lnp} + u_{Lсв}. \quad (6.7)$$

Определение напряжения на индуктивности в принужденном режиме цепи после коммутации u_{Lnp} .

Так как ток в индуктивности i_{3np} в принужденном режиме цепи после коммутации постоянный, то

$$u_{Lnp} = L \frac{di_{3np}}{dt} = 0. \quad (6.8)$$

Определение напряжения на индуктивности в свободном режиме $u_{Lсв}$.

Для определения $u_{Lсв}$ необходимо получить характеристическое уравнение цепи после коммутации. Наиболее простой способ составления характеристического уравнения - это метод входного сопротивления.

Запишем входное сопротивление цепи после коммутации в комплексной форме $Z(j\omega)$. Входное сопротивление цепи можно рассматривать относительно любой ветви, кроме ветви с источником тока.

Комплексное входное сопротивление цепи $Z(j\omega)$ относительно ветви с источником ЭДС имеет вид:

$$Z(j\omega) = R_1 + \frac{\frac{1}{j\omega C}(R_2 + j\omega L)}{\frac{1}{j\omega C} + R_2 + j\omega L}. \quad (6.9)$$

В формуле $Z(j\omega)$ заменим $j\omega$ на P и полученное выражение $Z(P)$ приравняем нулю: $Z(P) = 0$;

$$Z(P) = R_1 + \frac{\frac{1}{PC}(R_2 + PL)}{\frac{1}{PC} + R_2 + PL} = R_1 + \frac{R_2 + PL}{P^2 LC + PCR_2 + 1} =$$

$$= \frac{P^2 LCR_1 + P(R_1 R_2 C + L) + R_1 + R_2}{P^2 LC + PCR_2 + 1} = 0. \quad (6.10)$$

Приравняем к нулю числитель выражения (6.10)

$$P^2 LCR_1 + P(R_1 R_2 C + L) + R_1 + R_2 = 0. \quad (6.11)$$

Уравнение (6.11) является характеристическим уравнением цепи.

Подставим в характеристическое уравнение (6.11) заданные значения R_1, R_2, L, C :

$$1,08 \cdot 10^{-4} P^2 + 0,204P + 140 = 0. \quad (6.12)$$

Вычислим корни характеристического уравнения (6.12)

$$P_{1,2} = \frac{-0,204 \pm \sqrt{0,204^2 - 4 \cdot 1,08 \cdot 10^{-4} \cdot 140}}{2 \cdot 1,08 \cdot 10^{-4}} = (-944,44 \pm j635,86) = -\alpha \pm j\omega'.$$

Полученные корни комплексно-сопряженные, следовательно свободную составляющую напряжения на индуктивности $u_{L\sigma}$ ищем в виде:

$$u_{L\sigma} = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega' t + \Psi) = Ae^{-944,44t} \sin(635,86t + \Psi), \quad (6.13)$$

где A и Ψ - постоянные интегрирования.

6.1.5 Определение постоянных интегрирования.

Запишем переходное напряжение на индуктивности u_L :

$$u_L = u_{L\cdot p} + u_{L-\sigma} = u_{L-\sigma} = Ae^{-944,44t} \sin(635,86t + \Psi). \quad (6.14)$$

Вычислим постоянные интегрирования A, Ψ .

Постоянные интегрирования находят по начальным значениям напряжения $u_L(0)$ и его первой производной $u'_L(0)$.

Найдем производную $u'_L(t)$:

$$u'_L(t) = -\alpha Ae^{-\alpha t} \sin(\omega' t + \Psi) + \omega Ae^{-\alpha t} \cos(\omega' t + \Psi) =$$

$$= -944,44Ae^{-944,44t} \sin(635,86t + \Psi) + 635,86Ae^{-944,44t} \cos(635,86t + \Psi). \quad (6.15)$$

Запишем уравнения $u_L(0)$ и $u'_L(0)$ для момента времени $t = 0$:

$$\left. \begin{aligned} u_L(0) &= A \sin \Psi; \\ u'_L(0) &= -944,44A \sin \Psi + 635,86A \cos \Psi. \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

Значения $u_L(0)$ и $u'_L(0)$ находят путем решения уравнений, составленных для цепи после коммутации по законам Кирхгофа (6.4.а-6.4.в)

рассматриваемых при $t=0$ и подставляя в них независимые начальные условия $i_3(0) = 2,5A, u_C(0) = 120B$.

$$\left. \begin{aligned} i_1(0) - i_2(0) - i_3(0) &= 0; \\ i_1(0)R_1 + u_C(0) &= E; \\ i_3(0)R_2 + u_L(0) - u_C(0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} (6.17.a) \\ (6.17.б) \\ (6.17.в) \end{aligned}$$

Из уравнения (6.17.в) найдем $u_L(0)$:

$$u_L(0) = u_C(0) - i_3(0)R_2 = 120 - 2,5 \cdot 80 = -80B.$$

Вычислим $u'_L(t)$ путем дифференцирования уравнения (6.4.в):

$$i'_3(t)R_2 + u'_L(t) - u'_C(t) = 0; \quad (6.18)$$

$$\text{где } i'_3(t) = \frac{u'_L(t)}{L}; \quad (6.19)$$

$$u'_C(t) = \frac{i_2(t)}{C}. \quad (6.20)$$

Подставим (6.19) и (6.20) в уравнение (6.18) и определим $u'_L(t)$:

$$u'_L(t) = \frac{i_2(t)}{C} - \frac{u_L(t)}{L}R_2. \quad (6.21)$$

Запишем $u'_L(t)$ для момента времени $t=0$:

$$u'_L(0) = \frac{i_2(0)}{C} - \frac{u_L(0)}{L}R_2. \quad (6.22)$$

Рассчитаем ток $i_2(0)$, используя уравнения (6.17.а) и (6.17.б).

$$i_1(0) = \frac{E - u_C(0)}{R_1};$$

$$i_2(0) = i_1(0) - i_3(0) = \frac{E - u_C(0)}{R_1} - i_3(0) = \frac{270 - 120}{60} - 2,5 = 0.$$

$$\text{Вычислим } u'_L(0) = -\frac{u_L(0)}{L}R_2 = \frac{80}{60 \cdot 10^{-3}} \cdot 80 = 106666,67, B/c.$$

Подставим найденные значения $u_L(0)$ и $u'_L(0)$ в уравнения (6.16):

$$-80 = A \sin \Psi \quad (6.23a)$$

$$106666,67 = -944,44A \sin \Psi + 635,86A \cos \Psi \quad (6.23б)$$

Из уравнения (6.23.а) определим:

$$A = -\frac{80}{\sin \Psi} \quad (6.24)$$

и подставим в уравнение (6.23.б).

$$106666,67 = -944,44 \cdot (-80) + 635,86 \cdot \left(-\frac{80}{\sin \Psi} \right) \cos \Psi. \quad (6.25)$$

Из уравнения (6.25) найдем $\operatorname{tg} \Psi$:

$$\operatorname{tg} \Psi = -1,635.$$

Отсюда Ψ равно: $\Psi = \operatorname{arctg}(-1,635) = -58,5^\circ$.

Из уравнения (6.24) определим A : $A = 93,8$

Подставим найденные значения A и Ψ в уравнение (6.14) и определим переходное напряжение u_L .

$$u_L = 93,8 e^{-944,44t} \sin(635,86t - 58,5^\circ) \text{ В}.$$

6.2 Операторный метод расчета переходных процессов

6.2.1 Эквивалентная операторная схема.

Независимые начальные условия равны:

$$i_3(0) = 2,5 \text{ А}, u_C(0) = 120 \text{ В}.$$

Задача имеет ненулевые начальные условия. Эквивалентная операторная схема содержит внутренние ЭДС $Li_3(0)$ и $-\frac{u_C(0)}{P}$, положительные направления этих дополнительных внутренних ЭДС приняты совпадающими с положительным направлением тока в данной ветви. Эквивалентная операторная схема (рисунок 6.3).

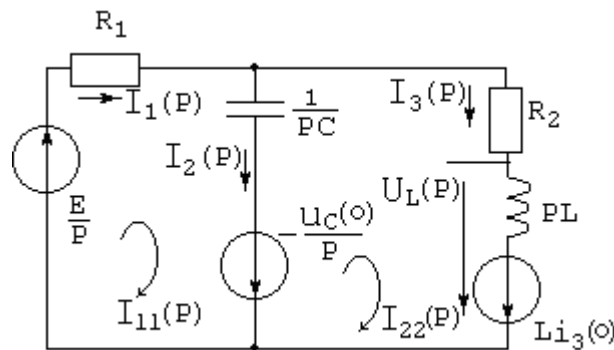


Рисунок 6.3

6.2.2 Определение изображения тока и напряжения на индуктивности.

Определим операторное напряжение $U_L(P)$ по формуле:

$$U_L(P) = I_3(P)PL - Li_3(0). \quad (6.26)$$

Ток $I_3(P)$ можно найти, используя законы Кирхгофа в операторной форме, метод контурных токов, метод узловых потенциалов, метод эквивалентного генератора.

Определим ток $I_3(P)$, методом контурных токов. Так как $I_{11}(P) = I_1(P)$ и $I_{22}(P) = I_3(P)$, контурные уравнения запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} I_1(P)(R_1 + \frac{1}{PC}) - I_3(P)\frac{1}{PC} &= \frac{E}{P} - \frac{u_C(0)}{P}; \\ -I_1(P)\frac{1}{PC} + I_3(P)\left(\frac{1}{PC} + R_2 + PL\right) &= Li_3(0) + \frac{u_C(0)}{P}. \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

Решив эти уравнения, найдем ток $I_3(P)$:

$$I_3(P) = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 + \frac{1}{PC} & -\frac{1}{PC} \\ -\frac{1}{PC} & \frac{1}{PC} + R_2 + PL \end{vmatrix} = \frac{P^2 R_1 LC + P(R_1 R_2 C + L) + R_1 + R_2}{PC},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} R_1 + \frac{1}{PC} & \frac{E}{P} - \frac{u_C(0)}{P} \\ -\frac{1}{PC} & Li_3(0) + \frac{u_C(0)}{P} \end{vmatrix} = \frac{P^2 R_1 LC i_3(0) + P[R_1 u_C(0) + Li_3(0)] + E}{P^2 C}.$$

Отсюда

$$I_3(P) = \frac{P^2 R_1 LC i_3(0) + P[R_1 u_C(0) + Li_3(0)] + E}{P[P^2 R_1 LC + P(R_1 R_2 C + L) + R_1 + R_2]}. \quad (6.28)$$

Подставим в формулу (6.26) найденный ток $I_3(P)$, получим операторное напряжение на индуктивности

$$u_L(P) = \frac{L[PR_1 C(u_C(0) - R_2 i_3(0)) + E - i_3(0)(R_1 + R_2)]}{P^2 R_1 LC + P(R_1 R_2 C + L) + R_1 + R_2} = \frac{F_1(P)}{F_2(P)}. \quad (6.29)$$

где

$$\begin{aligned} F_1(P) &= L[PR_1 C(u_C(0) - R_2 i_3(0)) + E - i_3(0)(R_1 + R_2)] = \\ &= 60 \cdot 10^{-3} [P 60 \cdot 30 \cdot 10^{-6} (120 - 80 \cdot 2,5) + 270 - 2,5(60 + 80)] = -8,64 \cdot 10^{-3} P - 4,8 \\ F_2(P) &= P^2 R_1 LC + P(R_1 R_2 C + L) + R_1 + R_2 = \\ &= P^2 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \cdot 30 \cdot 10^{-6} + P(60 \cdot 80 \cdot 30 \cdot 10^{-6} + 60 \cdot 10^{-3}) + 60 + 80 = \\ &= 1,08 \cdot 10^{-4} P^2 + 0,204 P + 140. \end{aligned}$$

6.2.3 Определение напряжения на индуктивности.

Напряжение u_L определим по теореме разложения.

Корни характеристического уравнения $F_2(P) = 0$ равны:

$$P_{1,2} = (-944,44 \pm j635,86).$$

Применяя теорему разложения, определим оригинал u_L по формуле:

$$u_L = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{F_1(P_1)}{F_2'(P_1)} e^{P_1 t} \right]. \quad (6.30)$$

Найдем $F_2'(P) = 2,16 \cdot 10^{-4} P + 0,204$.

Вычислим

$$F_2'(P_1) = 2,16 \cdot 10^{-4} (-944,44 + j635,86) + 0,204 = j0,1373 = 0,1373e^{j90^0};$$

$$F_1(P_1) = -8,64 \cdot 10^{-3} (-944,44 + j635,86) - 4,8 = 3,36 - j5,49 = 6,436e^{-j58,5^0}.$$

$$\begin{aligned} u_L &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{6,436e^{-j58,5^0}}{0,1373e^{j90^0}} \cdot e^{(-944,44 + j635,86)t} \right] = 2 \operatorname{Re} \left[46,88e^{-944,44t} \cdot e^{j(635,86t - 58,5^0 - 90^0)} \right] = \\ &= 93,8e^{-944,44t} \cdot \operatorname{Re} \left[\cos(635,86t - 58,5^0 - 90^0) + j \sin(635,86t - 58,5^0 - 90^0) \right] = \\ &= 93,8e^{-944,44t} \cos(635,86t - 58,5^0 - 90^0) = 93,8e^{-944,44t} \sin(635,86t - 58,5^0), B. \end{aligned}$$

6.2.4 Построение графика изменения напряжения на индуктивности u_L в функции времени.

График u_L построим на основании полученного аналитического выражения

$$u_L = 93,8e^{-944,44t} \sin(635,86t - 58,5^0) B$$

на интервале от $t = 0$ до $t = \frac{3}{\alpha}$.

Здесь $\alpha = 944,44c^{-1}$ - коэффициент затухания.

$$\text{Вычислим } \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{944,44} = 1,06 \cdot 10^{-3} c = 1,06 \text{ мс};$$

$$t = \frac{3}{\alpha} = 3,2 \text{ мс}.$$

Для построения графика $u_L(t)$ вычислим значения напряжения u_L для различных моментов времени. Результаты расчета приведены в таблице 6.1.

Таблица 6.1 - Зависимость напряжения u_L от времени.

$t, \text{мс}$	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	
u_L, B	-80	-37,8	-13,7	-1,5	3,5	4,8	4,3	3,2	

Примечание - При вычислении $\sin(635,86t - 58,5^0)$ необходимо перевести угол $\Psi = 58,5^0$ в радианы:

$$\frac{\pi}{180} \cdot 58,5^0 = 1,02 \text{ рад}.$$

Построим график напряжения $u_L(t)$ (рисунок 6.4).

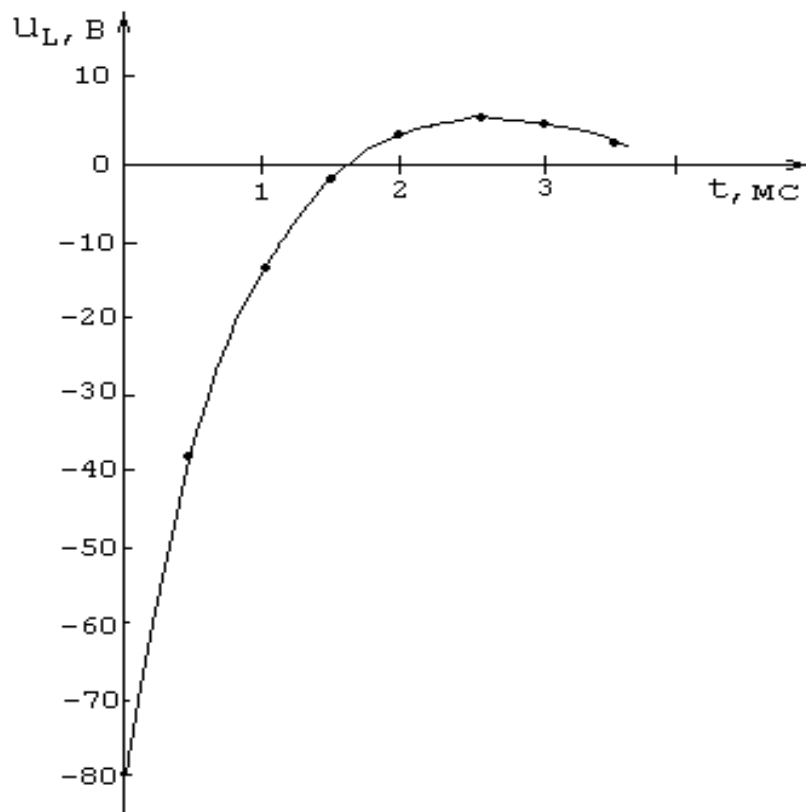


Рисунок 6.4

7 Расчет цепей с распределенными параметрами

Параметры однородной линии. Первичными параметрами однородной линии на единицу ее длины являются:

R_0 - сопротивление, Ом;

L_0 - индуктивность, Гн;

C_0 - емкость, Ф;

G_0 - проводимость изоляции между проводами (утечка), См/м.

$$Z_0 = R_0 + j\omega L_0,$$

$$Y_0 = G_0 + j\omega C_0.$$

Вторичные параметры однородной линии: $\underline{Z_B}$ - волновое (характеристическое) сопротивление

$$\underline{Z_B} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}},$$

γ - коэффициент распространения

$$\underline{\gamma} = \sqrt{Z_0 \cdot Y_0} = \alpha + j\beta,$$

где α - коэффициент затухания;
 β - коэффициент фазы.

Уравнения однородной линии с гиперболическими функциями.

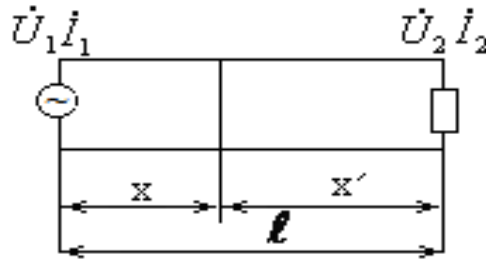


Рисунок 7.1

Эти уравнения позволяют рассчитывать комплексы напряжений и токов в любой точке линии, отстоящей на расстоянии x от её начала через заданные напряжения и ток в начале линии, т.е. $U_1; I_1$ (рисунок 7.1).

$$\dot{U} = \dot{U}_1 \cosh \gamma x - \dot{I}_1 \underline{Z}_B \cdot \sinh \gamma x,$$

$$\dot{I} = -\frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_B} \cdot \sinh \gamma x + \dot{I}_1 \cosh \gamma x.$$

Эти уравнения позволяют рассчитывать комплексы напряжений и токов в любой точке, отстоящей на расстоянии x' от конца линии через заданные комплексы напряжения и токов от конца линии, т.е. $U_2; I_2$.

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \cosh \gamma x + \dot{I}_2 \underline{Z}_B \cdot \sinh \gamma x,$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_B} \cdot \sinh \gamma x + \dot{I}_2 \cosh \gamma x.$$

Под входным сопротивлением линий \underline{Z}_{BX} понимают сопротивление двухполюсника, которым можно заменить линию вместе с приемником на её конце при расчете режима в начале линии.

Если $x=l$, получим:

$$\underline{Z}_{ax} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2 \cosh \gamma l + \dot{I}_2 \underline{Z}_B \sinh \gamma l}{\frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_B} \sinh \gamma l + \dot{I}_2 \cosh \gamma l}.$$

Рассмотрим расчет на примере трехфазной линии передачи электроэнергии.

Линия длиной $l=900$ км работает при номинальном фазном напряжении $U_n=220$ кВ и частоте $f=50$ Гц. Первичные параметры линии $R_0=0,08$ Ом/км, $L_0=1,34 \cdot 10^{-3}$ Гн/км, $C_0=8,6 \cdot 10^{-9}$ Ф/км, $G_0=0,04 \cdot 10^{-6}$ См/км. Линия питает нагрузку, активная мощность одной фазы которой $P_2=100$ МВт,

напряжение на нагрузке U_2 равно номинальному U_H , коэффициент мощности нагрузки $\cos \varphi_2=0,98$

Определение вторичных параметров линии.

Вычислим комплексные сопротивления и проводимость на 1 км линии:

$$Z_0 = R_0 + j\omega L_0 = R_0 + j2\pi f L_0 = 0,08 + j0,42 = 0,428e^{j79,2} \text{ Ом/км}; \quad (7.1)$$

$$Y_0 = G_0 + j\omega C_0 = G_0 + j2\pi f C_0 = 0,04 \cdot 10^{-6} + j2,7 \cdot 10^{-6} = \\ = 2,7 \cdot 10^{-6} e^{j89,2} \text{ См/км}. \quad (7.2)$$

Рассчитаем вторичные параметры линии:

$$\text{- волновое сопротивление } Z_C = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = Z_C e^{j\theta};$$

$$\text{- коэффициент распространения } \gamma = \sqrt{Z_0 Y_0}.$$

$$Z_C = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{0,428e^{j79,2}}{2,7 \cdot 10^{-6} e^{j89,2}}} = 398e^{-j5^\circ} \text{ Ом}; \quad (7.3)$$

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{0,428e^{j79,2} \cdot 2,7 \cdot 10^{-6} e^{j89,2}} = 1,075 \cdot 10^{-3} e^{j84,2} \text{ км}^{-1} = \\ = (0,109 \cdot 10^{-3} + j1,069 \cdot 10^{-3}) \text{ км}^{-1} = \alpha + j\beta, \quad (7.4)$$

$$\text{где } \alpha = 0,109 \cdot 10^{-3} \text{ Нп/км}, \quad \beta = 1,069 \cdot 10^{-3} \text{ рад/км}$$

Расчет напряжения и тока в начале линии, тока в конце линии и КПД линии.

Активная мощность одной фазы нагрузки

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2, \quad (7.5)$$

где $U_2 = U_H = 220 \text{ кВ}$, $P_2 = 100 \text{ МВт}$, $\cos \varphi_2 = 0,98$.

Отсюда действующий ток в конце линии

$$I_2 = \frac{P_2}{U_2 \cos \varphi_2} = \frac{100 \cdot 10^6}{220 \cdot 10^3 \cdot 0,98} = 463,82 \text{ А}. \quad (7.6)$$

Определим начальную фазу тока в конце линии:

$$\psi_{i2} = \psi_{u2} - \varphi_2, \text{ если положить } \psi_{u2} = 0, \text{ то}$$

$$\psi_{i2} = -\varphi_2 = -\arccos 0,98 = -11,48^\circ.$$

Комплексный ток в конце линии

$$\dot{I}_2 = I_2 e^{j\psi_{i2}} = 463,82 e^{-j11,48^\circ} \text{ А}.$$

Напряжение \dot{U}_1 и ток \dot{I}_1 в начале линии найдем по уравнениям линии с гиперболическими функциями:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \dot{I}_2 Z_C \operatorname{sh} \gamma l; \quad (7.7)$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{Z_C} \operatorname{sh} \gamma l + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l. \quad (7.8)$$

Значения гиперболических функций $\operatorname{ch} \gamma l$, $\operatorname{sh} \gamma l$ можно рассчитать по формулам:

$$\gamma l = (0,109 \cdot 10^{-3} + j1,069 \cdot 10^{-3}) \cdot 900 = 0,0981 + j0,962$$

$$0,962 \text{ рад} = 55,12^\circ;$$

$$\operatorname{ch} \gamma l = \frac{1}{2}(e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}) = \frac{1}{2}(e^{0,0981} e^{j55,12^\circ} + e^{-0,0981} e^{-j55,12^\circ}) =$$

$$= \frac{1}{2}(1,103 e^{j55,12^\circ} + 0,906 e^{-j55,12^\circ}) = 0,58 e^{j8^\circ};$$

$$\operatorname{sh} \gamma l = \frac{1}{2}(e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}) = 0,826 e^{j86,1^\circ}.$$

Подставим найденные значения $\operatorname{ch} \gamma l$, $\operatorname{sh} \gamma l$ в уравнения (7.7), (7.8) и определим \dot{U}_1 , \dot{I}_1 .

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \dot{I}_2 Z_C \operatorname{sh} \gamma l = 220 \cdot 10^3 \cdot 0,58 e^{j8^\circ} + 463,82 e^{-j11,48^\circ} \cdot 398 e^{-j5^\circ} \cdot 0,826 e^{j86,1^\circ} = \\ &= (127,6 e^{j8^\circ} + 152,48 e^{j69,62^\circ}) \cdot 10^3 = (126,358 + j17,758) \cdot 10^3 + (53,1 + j142,935) \cdot 10^3 = \\ &= (179,458 + j160,693) \cdot 10^3 = 240,89 e^{j41,84^\circ} \text{ кВ}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\dot{U}_2}{Z_C} \operatorname{sh} \gamma l + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l = \frac{220 \cdot 10^3}{398 e^{-j5^\circ}} \cdot 0,826 e^{j86,1^\circ} + 463,82 e^{-j11,48^\circ} \cdot 0,58 e^{j8^\circ} = \\ &= 456,6 e^{j91,1^\circ} + 269,02 e^{-j3,48^\circ} = -8,77 + j456,52 + 268,52 - j16,33 = \\ &= 259,75 + j440,19 = 511,11 e^{j59,46^\circ} \text{ А}. \end{aligned}$$

Активная мощность в начале линии:

$$\begin{aligned} P_1 &= U_1 I_1 \cos \varphi_1 = 240,89 \cdot 10^3 \cdot 511,11 \cos(-17,62) = 117,345 \cdot 10^6 \text{ Вт} = \\ &= 117,345 \text{ МВт} \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{100}{117,345} = 0,852. \quad (7.10)$$

Определение напряжения в конце линии \dot{U}_2 и тока в ее начале при сбросе всей нагрузки на конце линии.

Напряжение в начале линии равно номинальному $U_{1X} = U_N = 220 \text{ кВ}$.

Напряжение в конце линии:

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{2X} = \frac{\dot{U}_{1X}}{ch\gamma l} = \frac{220 \cdot 10^3}{0,58e^{j8}} = 379,3 \cdot 10^3 e^{-j8^\circ} B = 379,3e^{-j8^\circ} kB. \quad (7.11)$$

Ток в начале линии

$$i_1 = i_{1X} = \frac{\dot{U}_{2X}}{Z_C} sh\gamma l = \frac{379,3 \cdot 10^3 e^{-j8^\circ}}{398e^{-j5^\circ}} 0,826e^{j86,1^\circ} = 787,2e^{j83,1^\circ} A. \quad (7.12)$$

Расчет режима согласованной нагрузки.

Режим согласованной нагрузки:

$$Z_2 = Z_C = 398e^{-j5^\circ} \text{ Ом}; \quad z_2 = z_C = 398 \text{ Ом}, \quad \varphi_2 = \theta = -5^\circ.$$

Напряжение на нагрузке (конец линии) $U_2=U_H=220$ кВ.

Ток в конце линии

$$i_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_C} = \frac{220 \cdot 10^3}{398e^{-j5^\circ}} = 553e^{j5^\circ} A. \quad (7.13)$$

Естественная мощность, передаваемая нагрузке

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2 = U_2 I_2 \cos \theta = 220 \cdot 10^3 \cdot 553 \cos 5^\circ = 121,2 \text{ МВт}. \quad (7.14)$$

Напряжение в начале линии

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 e^{\gamma l} = 220e^{0,0981} e^{j55,12^\circ} = 242,7e^{j55,12^\circ} kB. \quad (7.15)$$

В режиме согласованной нагрузки входное сопротивление линии равно волновому сопротивлению

$$Z_{ex} = Z_C.$$

Ток в начале линии

$$i_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_{ex}} = \frac{\dot{U}_1}{Z_C} = \frac{242,7e^{j55,12^\circ} \cdot 10^3}{398e^{-j5^\circ}} = 609,8e^{j60,12^\circ} A. \quad (7.16)$$

Мощность, получаемая линией

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \theta = U_2 I_2 e^{2\alpha l} \cos \theta = P_2 e^{2\alpha l}, \quad (7.17)$$

к.п.д. линии

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-2\alpha l} = e^{-2 \cdot 0,0981} = 0,822. \quad (7.18)$$

8 Расчет электрических и магнитных полей

Расчет электростатических полей.

Задача 1. Тонкий бесконечно длинный провод радиусом $r = 4$ мм расположен в воздухе параллельно поверхности земли на высоте $h_1 = 5$ м. К проводу приложено напряжение $U = 10$ кВ (рисунок 8.1).

Требуется:

а) рассчитать заряд провода на единицу длины τ ;

б) рассчитать ёмкость между проводом и землёй на единицу длины.

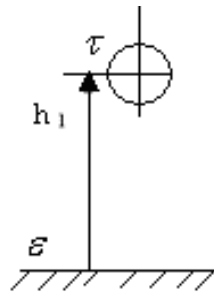


Рисунок 8.1

Решение:

а) для расчёта применяем метод зеркальных изображений, в соответствии с которым вводим дополнительный расчётный (фиктивный) заряд - τ , расположенный на месте зеркального изображения заряда τ . Далее поле рассчитывается от двух зарядов: исходного τ и расчётного $-\tau$.

Напряжение между проводом и землёй равно потенциалу провода, так как потенциал земли принимается равным нулю:

$$U = \varphi_{np} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2h}{r}, \quad (8.1)$$

откуда

$$\tau = \frac{U \cdot 2\pi\epsilon_a}{\ln \frac{2h}{r}} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 8,86 \cdot 10^{-12}}{\ln \frac{10}{4 \cdot 10^{-3}}} = 7,11 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}; \quad (8.2)$$

б) ёмкость между проводом и землёй на единицу длины равна:

$$C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln \frac{2h}{r}} = 7,11 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}. \quad (8.3)$$

Задача 2. Тонкий бесконечно длинный провод радиусом $r = 4\text{мм}$ расположен в воздухе параллельно поверхности земли на высоте $h_1 = 5\text{м}$. Заряд провода на единицу длины $\tau = 8 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}$ (рисунок 8.1).

Требуется:

а) определить напряжение между проводом и землёй U .

б) плотность зарядов на поверхности земли.

Решение:

а) для расчёта применяем метод зеркальных изображений, в соответствии с которым вводим дополнительный расчётный (фиктивный) заряд - τ , расположенный на месте зеркального изображения заряда τ (рисунок 8.1). Далее поле рассчитывается от двух зарядов: исходного τ и расчётного τ (рисунок 8.2).

Напряжение между проводом и землёй равно потенциалу провода, так как потенциал земли принимается равным нулю:

$$U = \varphi_{np} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2h}{r} = \frac{8 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{10}{4 \cdot 10^{-3}} = 11,262 \cdot 10^{-3} \text{ В}; \quad (8.4)$$

б) плотность поверхностных зарядов определяется по граничному условию:

$$\sigma = D = \epsilon_a E, \quad (8.5)$$

где E - напряженность поля в точке на поверхности земли.

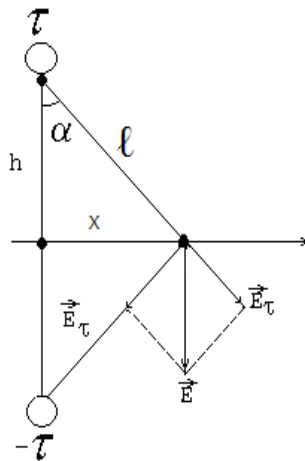


Рисунок 8.2

В точке, отстоящей на расстоянии x , вектор напряженности равен геометрической сумме \vec{E}_τ и $\vec{E}_{-\tau}$. Модуль этого вектора равен:

$$E = 2E_\tau \cdot \cos \alpha, \text{ где } E_\tau = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a \sqrt{h^2 + x^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}}.$$

Следовательно

$$E = 2 \cdot \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{h^2 + x^2}} = \frac{\tau h}{\pi\epsilon_a (h^2 + x^2)}.$$

$$\text{Тогда, } \delta = \frac{\tau h}{\pi(h^2 + x^2)}.$$

Задача 3. Поле электрических зарядов вблизи границы раздела двух диэлектриков.

Параллельно плоской границе раздела двух сред с диэлектрическими проницаемостями $\epsilon_1=4$ и $\epsilon_2=6$ протянуты два параллельных длинных провода одинакового сечения с радиусом $R=5 \cdot 10^{-3}$ м на расстоянии $d=0,9$ м и на расстоянии $h_1=0,6$ м и $h_2=0,8$ м от граничной плоскости. Проводам сообщены заряды $\tau_1=0,3 \cdot 10^{-8}$ Кл/м и $\tau_2=-0,6 \cdot 10^{-8}$ Кл/м. Взаимное расположение проводов и плоскости раздела двух сред (рисунок (8.3)).

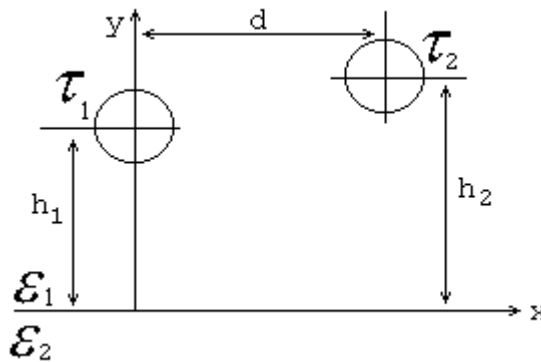


Рисунок 8.3

При расчете электростатических полей в неоднородных средах, когда электрические заряды расположены вблизи границы раздела двух сред с различными электрическими свойствами применяется метод изображений.

Идея метода изображений заключается в том, что вместо неоднородной среды рассматривается среда однородная, влияние неоднородности учитывается введением фиктивных зарядов.

Определение напряжения между проводами.

Напряжение между проводами определим по формуле:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (8.6)$$

где φ_1 - потенциал на поверхности провода с зарядом τ_1 ;

φ_2 - потенциал на поверхности провода с зарядом τ_2 .

Потенциалы проводов φ_1 и φ_2 равны алгебраической сумме потенциалов, создаваемых заданными зарядами τ_1 , τ_2 и фиктивными зарядами:

$$\tau_1' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \tau_1, \quad \tau_2' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \tau_2. \quad (8.7)$$

При этом рассматривается однородная среда с диэлектрической проницаемостью ε_1 (рисунок 8.4).

Так как $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, заряды τ_1' и τ_2' противоположны по знаку.

$$\tau_1' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \tau_1 = -0,2\tau_1; \quad \tau_2' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \tau_2 = -0,2\tau_2.$$

Напряжение между проводами U рассчитаем по формуле:

$$\begin{aligned}
U = \varphi_1 - \varphi_2 &= \left(\frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1} \ln \frac{1}{R} + \frac{\tau_1'}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1} \ln \frac{1}{2h_1} + \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1} \ln \frac{1}{a_{12}} + \frac{\tau_2'}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1} \ln \frac{1}{b_{12}} \right) - \\
&- \left(\frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1} \ln \frac{1}{R} + \frac{\tau_2'}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1} \ln \frac{1}{2h_2} + \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1} \ln \frac{1}{a_{12}} + \frac{\tau_1'}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1} \ln \frac{1}{b_{12}} \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1} \left[\tau_1 \left(\ln \frac{a_{12}}{R} + 0,2 \ln \frac{2h_1}{b_{12}} \right) - \tau_2 \left(\ln \frac{a_{12}}{R} + 0,2 \ln \frac{2h_2}{b_{12}} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{2\pi \cdot 8,846 \cdot 10^{-12} \cdot 4} \left[0,3 \cdot 10^{-8} \left(\ln \frac{0,922}{0,005} + 0,2 \ln \frac{1,2}{1,66} \right) + 0,6 \cdot 10^{-8} \left(\ln \frac{0,922}{0,005} + 0,2 \ln \frac{1,6}{1,66} \right) \right] = \\
&= 210,12 \text{ В},
\end{aligned}$$

$$\text{где } a_{12} = \sqrt{d^2 + (h_2 - h_1)^2} = 0,922 \text{ м}; \quad b_{12} = \sqrt{d^2 + (h_2 + h_1)^2} = 1,66 \text{ м};$$

$$\epsilon_0 = 8,846 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}.$$

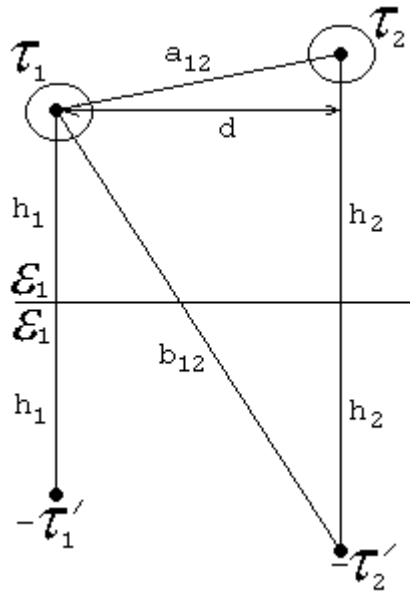


Рисунок 8.4

Определение плотности связанных зарядов $\sigma_{\text{связ}}$ в точке К на граничной плоскости.

Плотность связанных зарядов равна:

$$\sigma_{\text{связ}} = -(P_{1n} - P_{2n}), \quad (8.8)$$

где P_{1n} , P_{2n} - нормальные составляющие векторов поляризации в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 и в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 .

$$\left. \begin{aligned} P_{1n} &= D_{1n} - \epsilon_0 E_{1n} \\ P_{2n} &= D_{2n} - \epsilon_0 E_{2n} \end{aligned} \right\}. \quad (8.9)$$

Отсюда

$$\sigma_{связ} = -(D_{1n} - D_{2n}) + \varepsilon_0 (E_{1n} - E_{2n}) = \varepsilon_0 (E_{1n} - E_{2n}), \quad (8.10)$$

где $D_{1n} - D_{2n} = 0$, так как плотность свободного заряда на граничной плоскости равна 0;

E_{1n}, E_{2n} — нормальные составляющие векторов напряженности электрического поля на граничной плоскости в средах с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 .

Напряженность E_{1n} рассчитывается от заданных зарядов τ_1 и τ_2 и фиктивных зарядов τ'_1 и τ'_2 (рисунок 8.5).

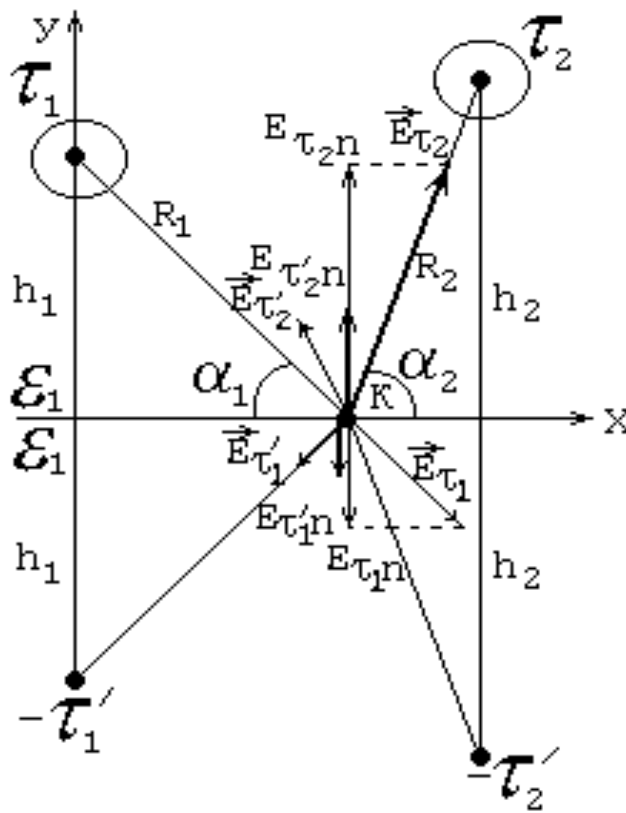


Рисунок 8.5

Напряженности $E_{\tau_1}, E_{\tau'_1}, E_{\tau_2}, E_{\tau'_2}$ рассчитываются по формулам:

$$E_{\tau_1} = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1 R_1} = \frac{0,3 \cdot 10^{-8}}{2\pi \cdot 8,846 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 0,848} = 15,912 \frac{B}{м};$$

$$E_{\tau'_1} = \frac{\tau'_1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1 R_1} = \frac{0,2 \cdot 0,3 \cdot 10^{-8}}{2\pi \cdot 8,846 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 0,848} = 3,182 \frac{B}{м};$$

$$E_{\tau_2} = \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1 R_2} = \frac{0,6 \cdot 10^{-8}}{2\pi \cdot 8,846 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 0,854} = 31,602 \frac{B}{м};$$

$$E_{\tau'_2} = \frac{\tau'_2}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1 R_2} = \frac{0,2 \cdot 0,6 \cdot 10^{-8}}{2\pi \cdot 8,846 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 0,854} = 6,320 \frac{B}{м},$$

$$\text{где } R_1 = \sqrt{h_1^2 + x_K^2} = \sqrt{0,6^2 + 0,6^2} = 0,848 м;$$

$$R_2 = \sqrt{h_2^2 + (d - x_K)^2} = \sqrt{0,8^2 - 0,3^2} = 0,854 м.$$

Координаты точки К: $X_K = 0,6 м$, $Y_K = 0$.

Нормальные составляющие $E_{\tau_{1n}}, E_{\tau'_{1n}}, E_{\tau_{2n}}, E_{\tau'_{2n}}$ равны:

$$\left. \begin{aligned} E_{\tau_{1n}} &= E_{\tau_1} \sin \alpha_1 = E_{\tau_1} \cdot \frac{h_1}{R_1} = 15,912 \cdot \frac{0,6}{0,848} = 11,258 \frac{B}{м}; \\ E_{\tau'_{1n}} &= E_{\tau'_1} \sin \alpha_1 = E_{\tau'_1} \cdot \frac{h_1}{R_1} = 3,182 \cdot \frac{0,6}{0,848} = 2,251 \frac{B}{м}; \\ E_{\tau_{2n}} &= E_{\tau_2} \sin \alpha_2 = E_{\tau_2} \cdot \frac{h_2}{R_2} = 31,602 \cdot \frac{0,8}{0,854} = 29,604 \frac{B}{м}; \\ E_{\tau'_{2n}} &= E_{\tau'_2} \sin \alpha_2 = E_{\tau'_2} \cdot \frac{h_2}{R_2} = 6,32 \cdot \frac{0,8}{0,854} = 5,920 \frac{B}{м}. \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

Знак зарядов $\tau_1, \tau_2, \tau'_1, \tau'_2$ учтен при изображении векторов $\vec{E}_{\tau_1}, \vec{E}_{\tau_2}, \vec{E}_{\tau'_1}, \vec{E}_{\tau'_2}$ (рисунок 8.5).

Отсюда E_{1n} равна:

$$E_{1n} = -E_{\tau_{1n}} - E_{\tau'_{1n}} + E_{\tau_{2n}} + E_{\tau'_{2n}} = 22,015 \frac{B}{м}.$$

Напряженность E_{2n} рассчитывается от фиктивных зарядов

$$\tau''_1 = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \tau_1 = 1,2 \tau_1; \tau''_2 = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \tau_2 = 1,2 \tau_2. \quad (8.12)$$

При этом рассматривается однородная среда с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 (рисунок 8.6).

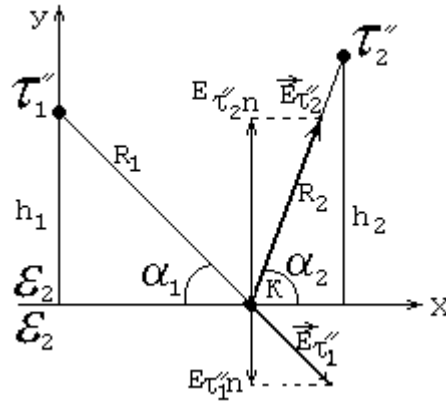


Рисунок 8.6

Напряженности $E_{\tau_1''}, E_{\tau_2''}$ равны:

$$E_{\tau_1''} = \frac{\tau_1''}{2\pi\epsilon_0\epsilon_2 R_1} = \frac{1,2 \cdot 0,3 \cdot 10^{-8}}{2\pi \cdot 8,846 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 0,848} = 12,73 \frac{B}{м};$$

$$E_{\tau_2''} = \frac{\tau_2''}{2\pi\epsilon_0\epsilon_2 R_2} = \frac{1,2 \cdot 0,6 \cdot 10^{-8}}{2\pi \cdot 8,846 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 0,854} = 25,279 \frac{B}{м}.$$
(8.13)

Нормальные составляющие напряженностей $E_{\tau_1''}, E_{\tau_2''}$ и E_{2n} вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} E_{\tau_1''n} &= E_{\tau_1''} \sin \alpha_1 = 12,73 \cdot \frac{0,6}{0,848} = 9,007 \frac{B}{м} \\ E_{\tau_2''n} &= E_{\tau_2''} \sin \alpha_2 = 25,279 \cdot \frac{0,8}{0,854} = 23,681 \frac{B}{м} \end{aligned} \right\},$$

$$E_{2n} = -E_{\tau_1''n} + E_{\tau_2''n} = -9,007 + 23,681 = 14,674 \frac{B}{м}.$$
(8.14)

Отсюда определим плотность связанных зарядов в точке К на граничной плоскости

$$\sigma_{связ} = \epsilon_0 (E_{1n} - E_{2n}) = 8,846 \cdot 10^{-12} (22,015 - 14,674) = 6,494 \cdot 10^{-11} \frac{Кл}{м^2}.$$

Расчет магнитного поля постоянного тока.

Задача 4. Расчет магнитного поля уединенного бесконечно длинного прямого провода.

Построим качественно картину магнитного поля уединенного бесконечно длинного прямого провода круглого сечения, по которому протекает постоянный ток I . Окружающая среда - воздух. По условиям симметрии линии напряженности магнитного поля \vec{H} представляют собой

концентрические окружности, центры которых расположены на оси провода. Линии напряженности магнитного поля \vec{H} лежат в плоскостях перпендикулярных оси провода. Направление вектора \vec{H} определяется по правилу буравчика (рисунок 8.7). Аналогично можно построить линии магнитной индукции $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ - магнитная постоянная; μ - относительная магнитная проницаемость).

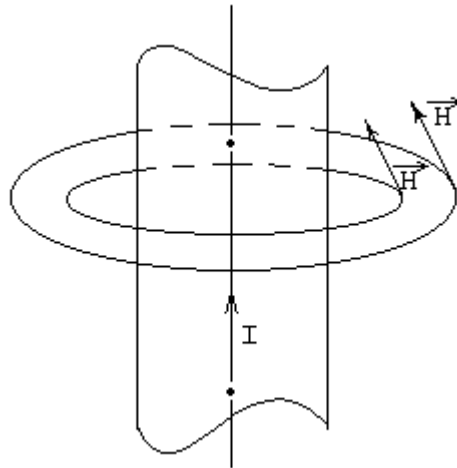


Рисунок 8.7

Расчет напряженности магнитного поля \vec{H} и магнитной индукции \vec{B} внутри и вне провода.

Рассчитаем напряженность магнитного поля \vec{H} и магнитную индукцию \vec{B} внутри провода.

Согласно закону полного тока

$$\oint_{\ell_{Bн}} \vec{H}_{Bн} d\vec{\ell} = \int_{S_{Bн}} \vec{\delta} d\vec{s}, \quad (8.15)$$

где $\vec{\delta}$ - вектор плотности тока;

$\int_{S_{Bн}} \vec{\delta} d\vec{s}$ - ток, протекающий сквозь поверхность, ограниченную контуром $\ell_{Bн}$ (рисунок 8.8)

Предполагаем, что плотность тока распределена по сечению провода равномерно. В этом случае плотность тока рассчитывается по формуле:

$$\delta = \frac{I}{\pi R^2}, \quad (8.16)$$

где R - радиус провода.

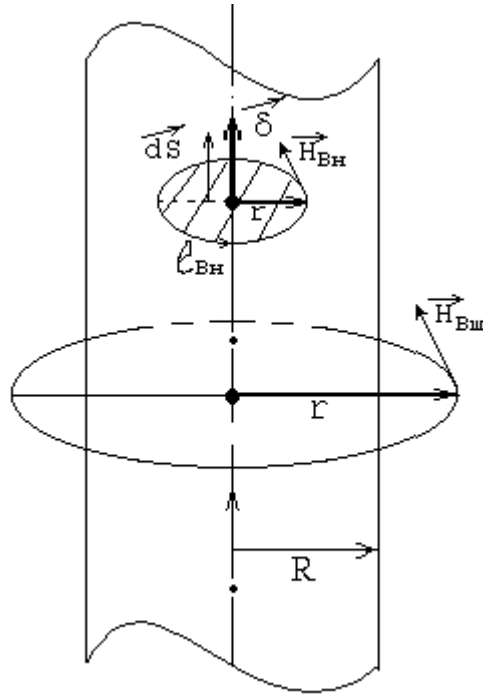


Рисунок 8.8

Рассчитаем интеграл $\int_{S_{BH}} \vec{\delta} d\vec{s}$:

$$\int_{S_{BH}} \vec{\delta} d\vec{s} = \int_{S_{BH}} \delta ds = \int_{S_{BH}} \frac{I}{\pi R^2} ds = \frac{I}{\pi R^2} \int_{S_{BH}} ds = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 = I \frac{r^2}{R^2} . \quad (8.17)$$

Рассчитаем интеграл $\int_{\ell_{BH}} \vec{H}_{BH} d\vec{\ell}$, учтем, что \vec{H}_{BH} и $d\vec{\ell}$ - совпадают по направлению и модуль вектора напряженности H_{BH} имеет одно и то же значение во всех точках контура интегрирования ℓ_{BH} .

$$\int_{\ell_{BH}} \vec{H}_{BH} d\vec{\ell} = \int_{\ell_{BH}} H_{BH} d\ell = H_{BH} \int_{\ell_{BH}} d\ell = H_{BH} \ell_{BH} = H_{BH} \cdot 2\pi r. \quad (8.18)$$

Закон полного тока (8.15) с учетом выражений (8.17) и (8.18) запишется в виде:

$$H_{BH} 2\pi r = I \frac{r^2}{R^2}, \quad (8.20)$$

Отсюда

$$H_{BH} = \frac{Ir}{2\pi R^2}. \quad (8.21)$$

Магнитная индукция B_{BH} рассчитывается по формуле:

$$B_{Bн} = \mu_0 \mu_n = \frac{\mu_0 \mu I r}{2\pi R^2}, \quad (8.23)$$

где μ - относительная магнитная проницаемость провода.

Так как среда внутри провода однородная и изотропная, то вектора $\vec{H}_{Bн}$ и $\vec{B}_{Bн}$ направлены одинаково.

Рассчитаем напряженность магнитного поля $\vec{H}_{Bн}$ и магнитную индукцию $\vec{B}_{Bн}$ вне провода.

По закону полного тока (рисунок 8.8).

$$\oint_{\ell_{Bн}} \vec{H}_{Bн} d\vec{\ell} = I,$$

$$\text{где } \oint_{\ell_{Bн}} \vec{H}_{Bн} d\vec{\ell} = \int_{\ell_{Bн}} \vec{H}_{Bн} d\ell = \vec{H}_{Bн} \int_{\ell_{Bн}} d\ell = \vec{H}_{Bн} 2\pi r$$

Отсюда

$$H_{Bн} 2\pi r = I. \quad (8.22)$$

Напряженность магнитного поля вне провода $H_{Bн}$ равна:

$$H_{Bн} = \frac{I}{2\pi r}. \quad (8.23)$$

Магнитную индукцию вне провода $\vec{B}_{Bн}$ определим по формуле:

$$B_{вн} = \mu_0 \mu_B H_{вн} = \mu_0 H_{вн} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (8.24)$$

где $\mu_e = 1$ - относительная магнитная проницаемость воздуха.

Построение графиков $H(r)$ и $B(r)$.

Построим графики зависимости $H(r)$ и $B(r)$ в функции расстояния r от оси провода.

По проводу протекает ток $I=5A$, относительная магнитная проницаемость провода $\mu=100$, радиус провода $R=9 \cdot 10^{-3} m$. Рассчитаем напряженность магнитного поля $H(r)$ и магнитную индукцию $B(r)$ для различных значений r , для $r \leq R$ по формулам (8.21) и (8.22) для $r \geq R$ по формулам (8.24) и (8.25). Результаты расчетов приведены в таблицах 8.1 и 8.2.

Таблица 8.1 - Зависимость напряженности магнитного поля H от r

	Внутри провода $H_{Bн}$				Вне провода $H_{Bн}$				
$r \cdot 10^{-3}, m$	0	3	6	9	9	12	15	18	21
$H, A/m$	0	29,47	58,94	88,42	88,42	66,31	53,05	44,21	37,89

Таблица 8.2 - Зависимость магнитной индукции B от r

	Внутри провода $B_{вн}$				Вне провода $B_{внш}$				
$r \cdot 10^{-3}, \text{м}$	0	3	6	9	9	12	15	18	21
$B, \text{тл}$	0	$3,7 \cdot 10^{-3}$	$7,4 \cdot 10^{-3}$	$11,1 \cdot 10^{-3}$	$11,1 \cdot 10^{-5}$	$8,33 \cdot 10^{-5}$	$6,67 \cdot 10^{-5}$	$5,56 \cdot 10^{-5}$	$4,76 \cdot 10^{-5}$

Так как напряженность магнитного поля \vec{H} и магнитная индукция \vec{B} направлены по касательной к поверхности провода, то $H_{твн} = H_{вн}$ и $H_{твнш} = H_{внш}$, где H_t - тангенциальная составляющая напряженности. Отсюда, согласно граничному условию $H_{вн}(R) = H_{внш}(R)$ на поверхности провода.

Для магнитной индукции $B_{твн} = B_{вн}$ и $B_{твнш} = B_{внш}$, и согласно граничному условию $\frac{B_{вн}(R)}{\mu} = \frac{B_{внш}(R)}{\mu_e}$, отсюда $\frac{B_{вн}(R)}{B_{внш}(R)} = \mu$ на поверхности провода.

Графики зависимости $H(r)$ и $B(r)$ приведены на рисунках 8.9 и 8.10.

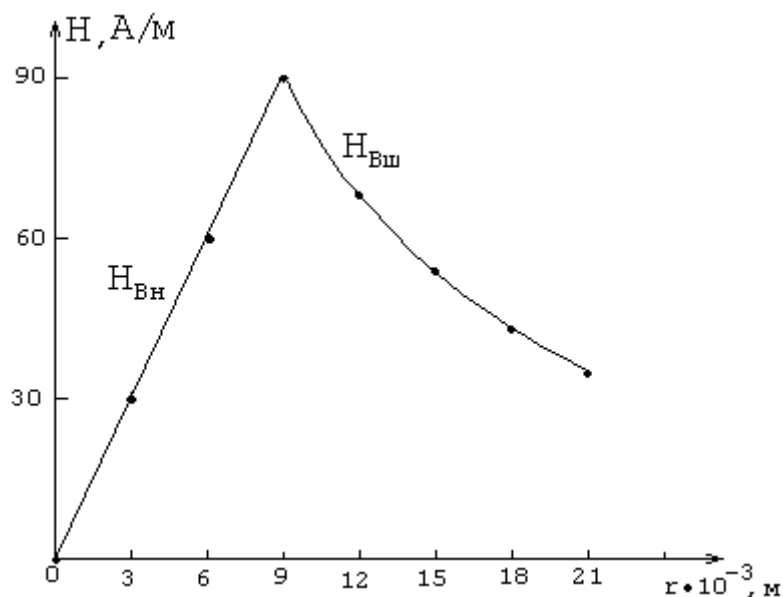


Рисунок 8.9

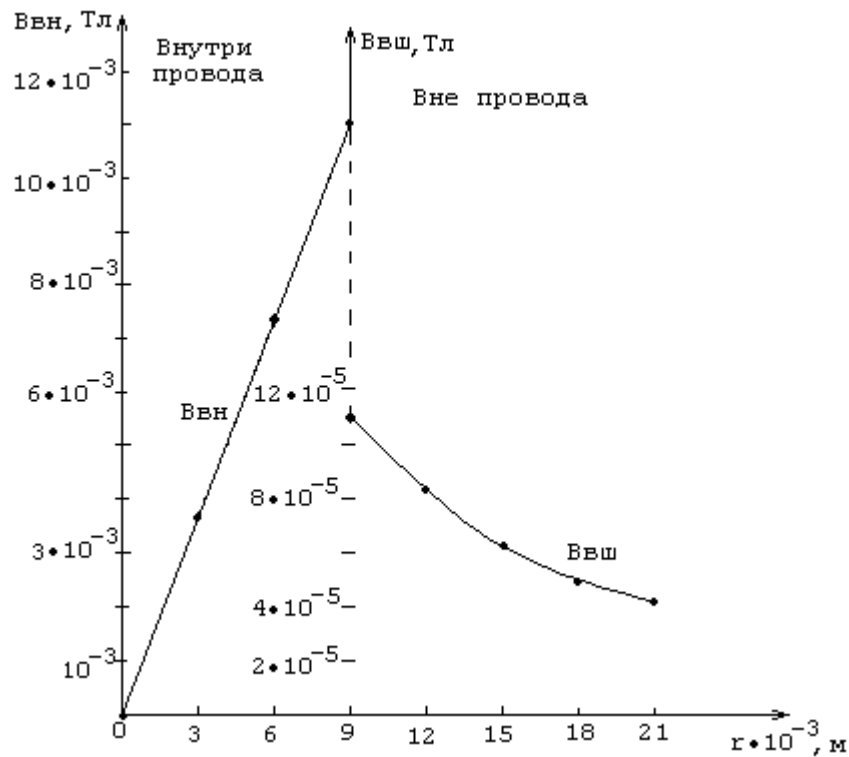


Рисунок 8.10

Задача 5. Расчет магнитного потока внутри провода.

Магнитный поток внутри провода на участке длиной ℓ (рисунок 8.11) равен:

$$\Phi_{Bн} = \int_s \mu_0 \mu \vec{H}_{Bн} d\vec{s}, \quad (8.26)$$

где $\vec{H}_{Bн}$ - вектор напряженности магнитного поля;

$\vec{H}_{Bн}$ направлен перпендикулярно сечению провода “от нас”.

Вектор $d\vec{s}$ направлен также перпендикулярно сечению провода.

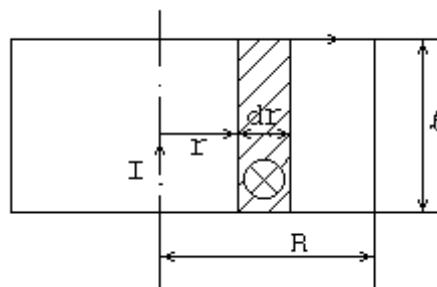


Рисунок 8.11

Рассчитаем поток $\Phi_{Bн}$:

$$\begin{aligned} \Phi_{Bн} &= \int_s \mu_0 \mu \vec{H}_{Bн} d\vec{s} = \int_s \mu_0 \mu H_{Bн} ds = \int_0^R \mu_0 \mu H_{Bн} \ell dr = \\ &= \int_0^R \mu_0 \mu \frac{Ir}{2\pi R^2} \cdot dr = \mu_0 \mu \frac{I\ell}{2\pi R^2} \frac{r^2}{2} \Big|_0^R = \frac{\mu_0 \mu I \ell}{4\pi} \end{aligned} \quad (8.27)$$

Расчет потокосцепления $\psi_{Bн}$ внутри провода.

Потокосцепление $\psi_{Bн}$ внутри провода определим по формуле:

$$\psi_{Bн} = \int \frac{I_{Bн}}{I} d\Phi_{Bн}, \quad (8.28)$$

где $I_{Bн} = I \frac{r^2}{R^2}$ - ток, протекающий через поперечное сечение провода, с радиусом r ;

$$d\Phi_{Bн} = \mu_0 \mu H_{Bн} ds = \frac{\mu_0 \mu I r}{2\pi R^2} \ell dr - \text{элементарный магнитный поток,}$$

пронизывающий поверхность площадью $ds = \ell dr$.

Отсюда

$$\psi_{Bн} = \int \frac{I_{Bн}}{I} d\Phi_{Bн} = \int_0^R \frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{\mu_0 \mu I r}{2\pi R^2} \ell dr = \frac{\mu_0 \mu I \ell}{2\pi R^4} \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\mu_0 \mu I \ell}{8\pi}. \quad (8.29)$$

Расчет внутренней индуктивности провода. Рассчитаем внутреннюю индуктивность участка провода длиной $\ell = 1\text{ м}$.

Внутренняя индуктивность $L_{Bн}$ участка провода связана с потокосцеплением $\psi_{Bн}$ уравнением:

$$\psi_{Bн} = L_{Bн} I. \quad (8.30)$$

$$\text{Отсюда } L_{Bн} = \frac{\psi_{Bн}}{I} = \frac{\mu_0 \mu \ell}{8\pi} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} 100 \cdot 1}{8\pi} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}. \quad (8.31)$$

Расчет векторного потенциала \vec{A} .

Векторный потенциал определяется по формуле:

$$\text{rot} \vec{A} = \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (8.32)$$

Для прямого провода вектор \vec{A} совпадает с направлением вектора плотности тока $\vec{\delta}$, т.е. направлен по оси провода.

Применим цилиндрическую систему координат: z, r, θ . Ось z направим по оси провода. Вектор \vec{A} будет иметь только одну проекцию $A_z = A$. Вектор \vec{H} направлен перпендикулярно оси z и радиусу r ($H_r = H_z = 0$) и имеет также одну проекцию $H_\theta = H$.

Отсюда для расчета векторного потенциала получаем формулу:

$$-\frac{dA_z}{dr} = \mu_0 \mu H_\theta. \quad (8.33)$$

Внутри провода

$$\begin{aligned} A_{Bн} &= -\int \mu_0 \mu H_{Bн} dr + \text{const} = -\int \mu_0 \mu \frac{Ir}{2\pi R^2} dr + \text{const} = \\ &= -\frac{\mu_0 \mu I r^2}{4\pi R^2} + \text{const} \end{aligned} \quad (8.34)$$

Примем, что $A_{Bн} = 0$ при $r = R$, отсюда $\text{const} = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi}$.

Векторный потенциал внутри провода будет равен:

$$A_{Bн} = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (8.35)$$

Вне провода

$$\begin{aligned} A_{Bвн} &= -\int \mu_0 \mu_e H_{Bвн} dr + const = -\int \mu_0 \mu_e \frac{I}{2\pi r} dr + const = \\ &= -\frac{\mu_0 \mu_e I}{2\pi} \ln r + const. \end{aligned} \quad (8.36)$$

На поверхности провода $r=R$ векторный потенциал непрерывен $A_{Bн}(R) = A_{Bвн}(R)$.

Отсюда

$$\begin{aligned} -\frac{\mu_0 \mu_e I}{2\pi} \ln R + const &= 0, \\ const &= \frac{\mu_0 \mu_e I}{2\pi} \ln R. \end{aligned}$$

Векторный потенциал вне провода равен:

$$A_{Bвн} = \frac{\mu_0 \mu_e I}{2\pi} \ln \frac{R}{r}. \quad (8.37)$$

Рассчитаем векторный потенциал внутри провода на расстоянии $r=0,5R$ и вне провода на расстоянии $r=2R$:

$$\begin{aligned} A_{Bн}(0,5R) &= \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi} \left(1 - \frac{0,5^2 R^2}{R^2}\right) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 5}{4\pi} (1 - 0,5^2) = \\ &= 3,75 \cdot 10^{-5} \frac{B \cdot c}{м}; \\ A_{Bвн}(2R) &= \frac{\mu_0 \mu_{\%} I}{2\pi} \ln \frac{R}{2R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{2\pi} \ln 0,5 = -6,93 \cdot 10^{-7} \frac{B \cdot c}{м}. \end{aligned}$$

Задача 6. Расчет магнитного поля двухпроводной линии.

Двухпроводная линия состоит из длинных цилиндрических проводов. Радиусы проводов одинаковы и равны $R=4 \cdot 10^{-3}$ м. Провода параллельны, расстояние между их осями $d=0,8$ м. Ток в линии $I=20$ А. Окружающая среда - воздух (рисунок 8.12).

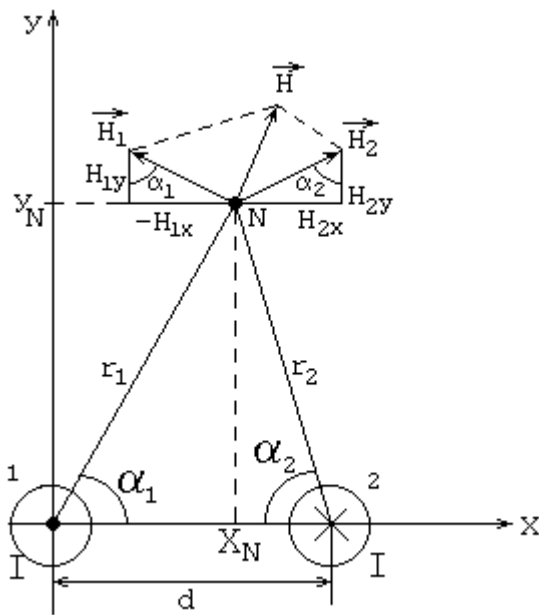


Рисунок 8.12

Расчет напряженности магнитного поля двухпроводной линии.

Напряженность \vec{H} магнитного поля двухпроводной линии определяется по принципу наложения:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2, \quad (8.38)$$

где \vec{H}_1 - вектор напряженности магнитного поля, обусловленный током в проводе 1;

\vec{H}_2 - вектор напряженности магнитного поля, обусловленный током в проводе 2.

Вектора \vec{H}_1 , \vec{H}_2 , \vec{H} изображены на рисунке 8.12.

По модулю напряженности H_1 и H_2 равны:

$$H_1 = \frac{I}{2\pi r_1}; \quad (8.39)$$

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r_2}. \quad (8.40)$$

Проекции векторов \vec{H}_1 , \vec{H}_2 на ось X и ось Y равны:

$$\left. \begin{aligned} H_{1X} &= h_1 \sin \alpha_1 = \frac{I}{2\pi r_1} \sin \alpha_1 \\ H_{1Y} &= h_1 \cos \alpha_1 = \frac{I}{2\pi r_1} \cos \alpha_1 \end{aligned} \right\}, \quad (8.41)$$

$$\left. \begin{aligned} H_{2X} &= h_2 \sin \alpha_2 = \frac{I}{2\pi r_2} \sin \alpha_2 \\ H_{2Y} &= h_2 \cos \alpha_2 = \frac{I}{2\pi r_2} \cos \alpha_2 \end{aligned} \right\}, \quad (8.42)$$

где $r_1 = \sqrt{X_N^2 + Y_N^2}$, $r_2 = \sqrt{(d - X_N)^2 + Y_N^2}$,
 $\sin \alpha_1 = \frac{Y_N}{r_1}$, $\cos \alpha_1 = \frac{X_N}{r_1}$, $\sin \alpha_2 = \frac{Y_N}{r_2}$, $\cos \alpha_2 = \frac{d - X_N}{r_2}$.

Проекции вектора \vec{H} на ось X и ось Y рассчитываются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} H_X &= H_{2X} - H_{1X}; \\ H_Y &= H_{1Y} + H_{2Y}. \end{aligned} \right\} \quad (8.43)$$

$$\text{Отсюда } H = \sqrt{H_X^2 + H_Y^2}. \quad (8.44)$$

Рассчитаем H в точке N с координатами $X_N=0,6$ м, $Y_N=0,9$ м:

$$\begin{aligned} H_{1X} &= \frac{IY_N}{2\pi r_1^2} = \frac{20 \cdot 0,9}{2\pi \cdot (0,6^2 + 0,9^2)} = 2,648 \frac{A}{м}; \\ H_{2X} &= \frac{IY_N}{2\pi r_2^2} = \frac{20 \cdot 0,9}{2\pi \cdot (0,2^2 + 0,9^2)} = 3,107 \frac{A}{м}; \\ H_{1Y} &= \frac{IX_N}{2\pi r_1^2} = \frac{20 \cdot 0,6}{2\pi \cdot (0,6^2 + 0,9^2)} = 1,765 \frac{A}{м}; \\ H_{2Y} &= \frac{I(d - X_N)}{2\pi r_2^2} = \frac{20 \cdot 0,2}{2\pi \cdot (0,2^2 + 0,9^2)} = 0,691 \frac{A}{м}; \\ H_X &= 0,459 \frac{A}{м}; \quad H_Y = 2,456 \frac{A}{м}; \\ H &= \sqrt{0,459^2 + 2,456^2} = 2,5 \frac{A}{м}. \end{aligned}$$

Расчет векторного потенциала \vec{A} .

Векторный потенциал \vec{A} в точке N (X_N , Y_N) определяется по принципу наложения.

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2. \quad (8.45)$$

Векторные потенциалы \vec{A}_1 и \vec{A}_2 направлены параллельно осям проводов, т.е. совпадают с направлением токов (рисунок 8.13).

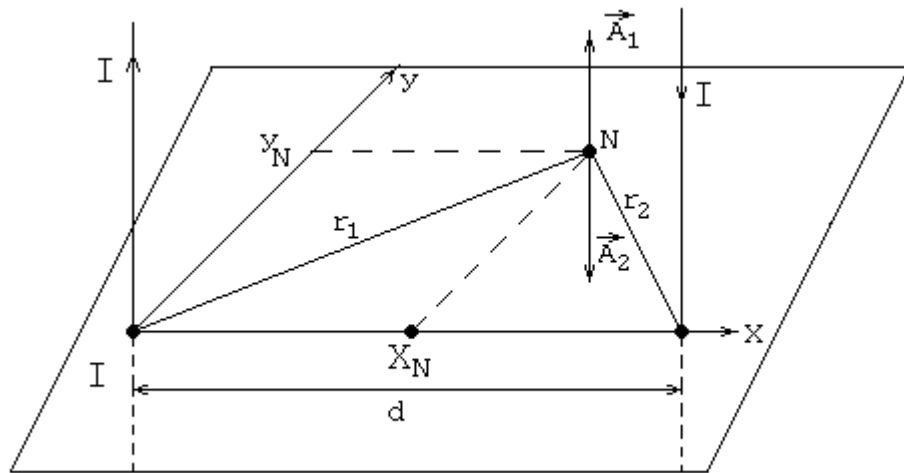


Рисунок 8.13

Векторные потенциалы A_1 и A_2 вне проводов определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R}{r_1} \\ A_2 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R}{r_2} \end{aligned} \right\}. \quad (8.46)$$

Отсюда
$$A = A_1 - A_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (8.47)$$

Для точки N с координатами $X_N=0,6$ м и $Y_N=0,9$ м

$$\begin{aligned} A &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(d - X_N)^2 + Y_N^2}}{\sqrt{X_N^2 + Y_N^2}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 20}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{0,2^2 + 0,9^2}}{\sqrt{0,6^2 + 0,9^2}} = \\ &= -6,39 \cdot 10^{-7} \frac{B \cdot c}{м}. \end{aligned}$$

Расчет внешней индуктивности двухпроводной линии.

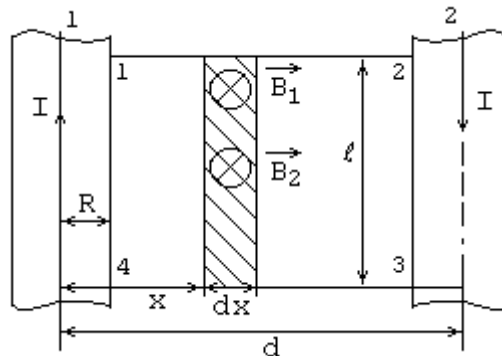


Рисунок 8.14

Внешний магнитный поток, сцепленный с линией на участке длиной ℓ , вычисляется по формуле:

$$\Phi_{\text{вн}} = \int_s \vec{B}_{\text{вн}} d\vec{s} = \int_s \mu_0 \vec{H}_{\text{вн}} d\vec{s}. \quad (8.48)$$

Магнитную индукцию $\vec{B}_{\text{вн}}$ находят по принципу наложения

$$\vec{B}_{\text{вн}} = \vec{B}_{1\text{вн}} + \vec{B}_{2\text{вн}}, \quad (8.49)$$

где $\vec{B}_{1\text{вн}}$ - магнитная индукция одиночного провода 1;

$\vec{B}_{2\text{вн}}$ - магнитная индукция одиночного провода 2.

Магнитные индукции $\vec{B}_{1\text{вн}}, \vec{B}_{2\text{вн}}$ направлены перпендикулярно плоскости, проходящей через оси проводов, от нас.

$$\text{Отсюда} \quad B_{\text{вн}} = B_{\text{вн1}} + B_{\text{вн2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right). \quad (8.50)$$

Если выбрать направление обхода контура по пути 1234, то вектора $\vec{B}_{\text{вн}}$ и $d\vec{s}$ направлены одинаково.

Внешний поток будет равен:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{вн}} &= \int_s B_{\text{вн}} ds = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \int_R^{d-R} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} [\ln x - \ln(d-x)]_R^{d-R} = \\ &= \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \left(\ln \frac{d-R}{R} - \ln \frac{R}{d-R} \right) = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \ln \left(\frac{d-R}{R} \right)^2 = \frac{\mu_0 I \ell}{\pi} \ln \frac{d-R}{R}. \end{aligned} \quad (8.51)$$

Внешнее потокосцепление $\psi_{\text{вн}} = \Phi_{\text{вн}}$, так как магнитный поток $\Phi_{\text{вн}}$ сцеплен с током I один раз.

$$\text{Отсюда} \quad L_{\text{вн}} = \frac{\psi_{\text{вн}}}{I} = \frac{\mu_0 \ell}{\pi} \ln \frac{d-R}{R}. \quad (8.52)$$

Внешняя индуктивность на единицу длины линии ($\ell = 1$)

$$L_{\text{вн}} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-R}{R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi} \ln \frac{0,8 - 0,004}{0,004} = 2,12 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}.$$

8.3.3 Расчет магнитного поля прямого длинного провода, расположенного вблизи прямоугольной рамки.

На расстоянии $d=0,8$ м от прямого длинного тонкого провода с постоянным током $I=50$ А расположена прямоугольная рамка с числом витков $\omega=200$ из тонкого изолированного провода. По рамке протекает ток $I_1=20$ А. Две стороны рамки параллельны оси провода. Стороны рамки $a=0,2$ м; $b=0,4$ м (рисунок 8.15).

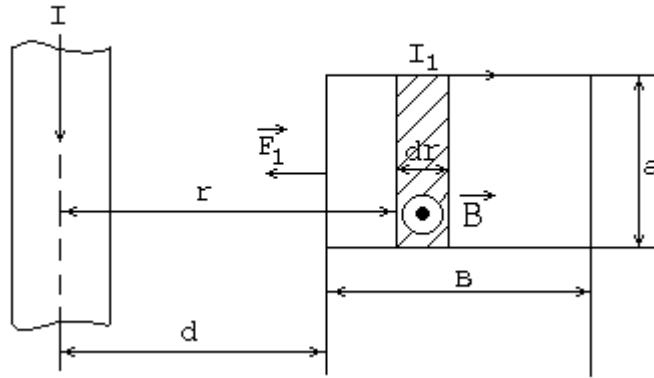


Рисунок 8.15

Определение магнитного потока взаимной индукции.

Рассчитаем магнитный поток взаимной индукции Φ_m магнитного поля тока I , пронизывающий рамку.

Магнитная индукция \vec{B} магнитного поля тока I определяется по формуле:

$$B = \frac{\mu_a I}{2\pi r}, \quad (8.53)$$

где $\mu_a = \mu_0 \mu$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн / м}$ - магнитная постоянная;

$\mu = 1$ - относительная магнитная проницаемость среды;

r - расстояние от оси провода с током I до элементарной площадки $ds = a dr$.

Магнитная индукция \vec{B} направлена перпендикулярно поперечному сечению рамки “к нам”.

Магнитный поток взаимной индукции Φ_m магнитного поля тока I вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \int_d^{d+B} B ds = \int_d^{d+B} \frac{\mu_a I}{2\pi r} \cdot a dr = \frac{\mu_a I a}{2\pi} \int_d^{d+B} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_a I a}{2\pi} \ln \frac{d+B}{d} = \\ &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 0,2}{2\pi} \ln \frac{0,8+0,4}{0,8} = 8,11 \cdot 10^{-7} \text{ Вб}. \end{aligned} \quad (8.54)$$

Определение взаимной индуктивности.

Рассчитаем взаимную индуктивность между проводом и рамкой M . Взаимная индуктивность определяется по формуле:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\omega \Phi_m}{I} = \frac{\omega \mu_a a}{2\pi} \ln \frac{d+B}{d} = \frac{200 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,2}{2\pi} \ln \frac{1,2}{0,8} = \\ &= 32,44 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}. \end{aligned} \quad (8.55)$$

Определение силы, действующей на рамку.

Силу \vec{F}_1 , действующую на рамку, можно определить по формуле:

$$F_1 = \frac{\partial W}{\partial d}, \quad (8.56)$$

где W - энергия магнитного поля токов I и I_1 .

$$W = \frac{L_1 I^2}{2} + \frac{L_2 I_1^2}{2} - M I I_1, \quad (8.57)$$

где L_1, L_2 - индуктивность провода и рамки.

Слагаемое $M I I_1$ в формуле (8.57) записывается со знаком “-”, так как магнитная индукция \vec{B}_1 магнитного поля тока I_1 направлена внутри рамки «от нас». Магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции, сцепленные с рамкой, вычитаются.

Сила \vec{F}_1 действует на рамку в радиальном направлении r . Под действием силы \vec{F}_1 рамка будет перемещаться в этом направлении (притягиваться к проводу), вследствие чего будет изменяться расстояние d между проводом и рамкой и, следовательно, изменится M . L_1 и L_2 остаются постоянными, так как предполагаем, что рамка жесткая и ее размеры и форма не изменяются.

Отсюда сила \vec{F}_1 равна:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\partial W}{\partial d} = -I_1 \frac{\partial M}{\partial d} = -I_1 \frac{\partial}{\partial d} \left(\frac{\omega \mu_a a}{2\pi} \ln \frac{d + \epsilon}{d} \right) = \\ &= -\frac{I_1 \omega \mu_a a}{2\pi} \frac{\partial}{\partial d} \left(\ln \frac{d + \epsilon}{d} \right) = -\frac{I_1 \omega \mu_a a}{2\pi} \left(\frac{1}{d + B} - \frac{1}{d} \right) = \\ &= \frac{\mu_a \omega I_1 a \epsilon}{2\pi d(d + \epsilon)} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 200 \cdot 50 \cdot 20 \cdot 0,2 \cdot 0,4}{2\pi \cdot 0,8(0,8 + 0,4)} = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ Н}. \end{aligned} \quad (8.58)$$

Список литературы

Основная:

- 1 Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники.-М.: Гардарики, 2013. – 638 с.
- 2 Атабеков Г.И. ТОЭ. Линейные электрические цепи.-СПб.: «Лань», 2010.
- 3 Башарин С.А. ТОЭ теория электрических цепей и электромагнитного поля.-М., 2010.
- 4 Денисенко В.И., Креслина С.Ю. Теоретические основы электротехники 1. Конспект лекции (для студентов всех форм обучения специальности 050718 – Электроэнергетика). -Алматы: АИЭС, 2006.- 63 с.
- 5 Денисенко В.И., Креслина С.Ю. Теоретические основы электротехники 2. Конспект лекции (для студентов всех форм обучения специальности 050718 – Электроэнергетика). -Алматы: АИЭС, 2007.- 62 с.
- 6 Денисенко В.И., Светашев Г.М. Теоретические основы электротехники 3. Конспект лекции для студентов всех форм обучения специальности 050718 – Электроэнергетика. -Алматы: АИЭС, 2007. – 90 с.

Дополнительная:

- 7 ТОЭ т.1/под ред. Демирчян К.С. и др.-СПб. 2006
- 8 Сборник задач по теоретическим основам электротехники/ Л.Д.Бессонов, И.Г.Демидова, М.Е.Заруди и др.-М.: Высшая школа, 2003.-52 с.
- 9 Денисенко В.И., Зуслина Е.Х ТОЭ. Учебное пособие.- Алматы: АИЭС, 2000.- 83 с.
- 10 Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники. Т.1. - СПб.: Питер, 2003.-463 с.
- 11 Прянишников В.А. ТОЭ: Курс лекций: Учебное пособие – 3-е изд., перераб. и доп. – СПб., 2000 – 368 с.
- 12 Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники.-М.: Гардарики, 1999. – 638 с.
- 13 Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В. Основы теории цепей.- М.: Энергоатомиздат, 1989. -528 с.

Содержание

Введение.....	3
1 Расчет линейных электрических цепей постоянного тока.....	4
2 Расчет электрических цепей однофазного синусоидального тока.....	18
3 Расчет симметричных и несимметричных режимов в трехфазных цепях со статистической нагрузкой.....	32
4 Расчет несимметричных режимов трехфазных цепей методом симметричных составляющих.....	44
5 Расчет трехфазных цепей с несинусоидальными напряжениями и токами.....	56
6 Переходные процессы в линейных электрических цепях.....	63
7 Расчет цепей с распределенными параметрами.....	71
8 Расчет электрических и магнитных полей.....	75
Список литературы.....	96

Владислав Иосифович Денисенко
Маликжан Мамежанович Аршидинов
Любовь Павловна Болдырева

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Примеры расчета электрических цепей и электромагнитных полей.
Учебное пособие

Редактор

Л.Т. Сластихина

Подписано в печать _____ 2016

Тираж экз. Формат

Бумага типографская №2

Уч.-изд. лист. Заказ № _____

Цена

Некоммерческое АО «АУЭС»
Г.Алматы, ул. Байтурсынова, 126

Копировально-множительное бюро
некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
г. Алматы, ул. Байтурсынова, 126