Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра электрических машин и электропривода

ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Методические указания по выполнению расчетно - графических работ для студентов специальности 5В071800

Алматы 2019

СОСТАВИТЕЛИ: Мустафин М.А., Чныбаева Д.М., Жаркымбекова М.Б. Логические основы цифровых систем управления. Методические указания по выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 5В071800 .– Алматы: АУЭС, 2019. - 15 с.

Методические указания предназначены для студентов высших учебных заведений, изучающих дисциплину: «Логические основы цифровых систем управления». В разработке представлены задания и методические указания к выполнению трех расчетно-графических работ (РГР). Расчетно - графическая работа №1 посвящена проведению равносильных преобразований логических формул и переключательных схем. Студентам предложено по таблице истинности составить и упростить аналитически логическую функцию, составить соответствующую переключательную схему.

В расчетно - графической работе №2 необходимо минимизировать состав элементов, реализующих заданную логическую схему, средствами булевой алгебры.

В расчетно - графической работе №3 по словесному описанию технологического процесса необходимо составить аналитическое описание (логическую функцию) и логическую схему. Проводится минимизация логической функции с помощью карт Карно и составление схемы в булевом базисе. Методические указания предназначены для студентов, обучающихся в бакалавриате по специальности 5В071800 – Электроэнергетика.

Ил. 7, табл.4, библ. – 7 назв.

Рецензент: доцент кафедры ЭСС Б.К. Курпенов

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2019 г.

Содержание

1 Расчетно - графическая работа №1. Равносильные преобразования логических формул и переключательных схем

1.1 Задание на расчетно - графическую работу

В соответствии с вариантом задания (таблица 1.1) выписать таблицу истинности булевой функции FN, где N – номер варианта. Для этой функции записать аналитическое выражение F(X,Y,Z) и составить переключательную схему.

Упростить аналитически логическую функцию, составить соответствующую переключательную схему.

Составить таблицу истинности преобразованной схемы и сравнить с исходной таблицей истинности.

1.2 Методические указания

1.2.1 Приемы и способы, применяемые при упрощении логических формул.

Равносильные преобразования логических формул имеют то же назначение, что и преобразования формул в обычной алгебре. Они служат для упрощения формул или приведения их к определённому виду путем использования основных законов алгебры логики.

Некоторые преобразования логических формул похожи на преобразования формул в обычной алгебре (вынесение общего множителя за скобки, использование переместительного и сочетательного законов и т.п.), тогда как другие преобразования основаны на свойствах, которыми не обладают операции обычной алгебры (использование распределительного закона для конъюнкции, законов поглощения, склеивания, де Моргана и др.).

Покажем на примерах некоторые приемы и способы, применяемые при упрощении логических формул [1,3,4].

Для упрощения в (1.1) законы алгебры логики применяются в следующей последовательности: правило де Моргана, сочетательный закон, правило операций переменной с её инверсией и правило операций с константами:

$$\overline{X+Y}\ \cdot (X \cdot \bar{Y}) = \bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot (X \cdot \bar{Y}) = \bar{X} \cdot X \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Y} = 0 \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Y} = 0 \cdot \bar{Y} = 0. \qquad (1.1)$$

Для упрощения в (1.2) применяется правило де Моргана, выносится за скобки общий множитель, используется правило операций переменной с её инверсией:

$$\bar{X} \cdot Y + \overline{X+Y} + X = \bar{X} \cdot Y + \bar{X} \cdot \bar{Y} + X = \bar{X} \cdot (\mathrm{Y} + \bar{\mathrm{Y}}) + \mathrm{X} = \bar{X} + X = 1. \qquad (1.2)$$

Для упрощения в (1.3) повторяется второй сомножитель, что разрешено законом идемпотенции; затем комбинируются два первых и два последних сомножителя и используется закон склеивания:

$$(X+Y)\cdot(\bar{X}+Y)\cdot(\bar{X}+\bar{Y}) = (X+Y)\cdot(\bar{X}+Y)\cdot(\bar{X}+Y)\cdot(\bar{X}+\bar{Y}) = Y\cdot\bar{X}. \qquad (1.3)$$

Таблица 1.1 - Варианты заданий на расчетно - графическую работу №2

X	Y	Z	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15
1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0
X	Y	Z	F16	F17	F18	F19	F20	F21	F22	F23	F24	F25	F26	F27			
1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1				
1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0				
1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1				
1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1				
0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1				
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0				
0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1				
0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0				

Для упрощения в (1.4) вводится вспомогательный логический сомножитель $(Y+\bar{Y})$; затем комбинируются два крайних и два средних логических слагаемых и используется закон поглощения:

$$X\cdot\bar{Y}+\bar{X}\cdot Y\cdot Z+X\cdot Z = X\cdot\bar{Y}+\bar{X}\cdot Y\cdot Z+X\cdot Z\cdot(Y+\bar{Y}) = X\cdot\bar{Y}+\bar{X}\cdot Y\cdot Z+$$
$$X\cdot Y\cdot Z+X\cdot\bar{Y}\cdot Z = (X\cdot\bar{Y}+X\cdot\bar{Y}\cdot Z)+(\bar{X}\cdot Y\cdot Z+X\cdot Y\cdot Z) = X\cdot\bar{Y}+Y\cdot Z. \qquad (1.4)$$

Для упрощения в (1.5) сначала добиваемся, чтобы знак отрицания стоял только перед отдельными переменными, а не перед их комбинациями. Для этого дважды применяем правило де Моргана; затем используем закон двойного отрицания:

$$\overline{X\cdot Y+\bar{Z}}=\overline{X\cdot Y}\ \cdot\ \bar{\bar{Z}}=(\bar{X}+\bar{Y})\cdot Z. \qquad (1.5)$$

Для упрощения в (1.6) выносятся за скобки общие множители; применяется правило операций с константами:

$$\mathrm{X\cdot Y+X\cdot Y\cdot Z+X\cdot Z\cdot P=X\cdot(Y\cdot(1+Z)+Z\cdot P)=X\cdot(Y+Z\cdot P)}. \qquad (1.6)$$

Для упрощения в (1.7) к отрицаниям неэлементарных формул применяется правило де Моргана; используются законы двойного отрицания и склеивания:

$$X+\ \overline{Y\cdot\bar{Z}}\ +\overline{\bar{X}+Y+\bar{Z}}\ =X+\bar{Y}+\bar{\bar{Z}}+\bar{\bar{X}}\cdot\bar{Y}\cdot\bar{\bar{Z}}=X+\bar{Y}+Z+X\cdot\bar{Y}\cdot Z=$$
$$X+Z+(\bar{Y}+X\cdot\bar{Y}\cdot Z)=X+Z+\bar{Y}. \qquad (1.7)$$

Для упрощения в (1.8) общий множитель x выносится за скобки, комбинируются слагаемые в скобках — первое с третьим и второе с четвертым, к дизъюнкции $Y\cdot Z+\overline{Y\cdot Z}$ применяется правило операции переменной с её инверсией:

$$X\cdot\bar{Y}+X\cdot Y\cdot Z+X\cdot\bar{Y}\cdot Z+X\cdot\overline{Y\cdot Z}=X(\bar{Y}+Y\cdot Z+\bar{Y}\cdot Z+\overline{Y\cdot Z})=X\cdot$$
$$((\bar{Y}+\bar{Y}\cdot Z)+(Y\cdot Z+\overline{Y\cdot Z})=\ X\cdot(\bar{Y}+\bar{Y}\cdot Z+1)=X\cdot 1=X. \qquad (1.8)$$

Для упрощения в (1.9) используются распределительный закон для дизъюнкции, правило операции переменной с ее инверсией, правило операций с константами, переместительный закон и распределительный закон для конъюнкции:

$$(X\cdot\bar{Y}+Z)\cdot(\bar{X}+Y)+\bar{Z}=X\cdot\bar{Y}\cdot\bar{X}+X\cdot\bar{Y}\cdot Y+Z\cdot\bar{X}+Z\cdot Y+\bar{Z}=0+0+Z\cdot\bar{X}+$$
$$Z\cdot Y+\bar{Z}=Z\cdot\bar{X}+(Z+\bar{Z})\cdot(Y+\bar{Z})=Z\cdot\bar{X}+1\cdot(Y+\bar{Z})=Z\cdot\bar{X}+Y+\bar{Z}=$$
$$(Z\cdot\bar{X}+\bar{Z})+Y=(Z+\bar{Z})\cdot(\bar{X}+\bar{Z})\cdot Y=1\cdot(\bar{X}+\bar{Z})+Y=\bar{X}+\bar{Z}+Y. \qquad (1.9)$$

Для упрощения в (1.10) используются правило де Моргана, закон двойного отрицания и закон поглощения:

$$X\cdot Y\big(\bar{X}\cdot Z+\overline{\overline{\overline{X\cdot Y}\cdot Z}}+Z\cdot T\big)=X\cdot Y\cdot\big(\bar{X}\cdot Z+\overline{\overline{\overline{X\cdot Y}}}+\bar{Z}+Z\cdot T\big)=X\cdot Y\cdot$$
$$(\bar{X}\cdot Z+X\cdot Y+\bar{Z}+Z\cdot T)=X\cdot Y+X\cdot Y\cdot\bar{Z}+X\cdot Y\cdot Z\cdot T=X\cdot Y. \qquad (1.10)$$

Из этих примеров видно, что при упрощении логических формул не всегда очевидно, какой из законов алгебры логики следует применить на том или ином шаге. Навыки приходят с опытом.

1.2.2 Построение таблиц истинности.

Пусть задана логическая функция:

$$Y = X1 \cdot \overline{X2} + \overline{X1} \cdot X2.$$

2.3.1 Для удобства разделим данное выражение на 2 части:

$$Y = Y1 + Y2,$$
$$Y1 = X1 \cdot \overline{X2},$$
$$Y2 = \overline{X1} \cdot X2.$$

Запишем данные формулы на языке MSExcel:

Y1 = И(X1;НЕ(X2)),

Y2 = И(НЕ(X1);X2),

Y = ИЛИ(Y1;Y2)

и расположим в ячейках поля Excel. Построим таблицу истинности для данных функций:

X1	X2	НЕ X1	НЕ X2	Y1	Y2	Y1	Y2	Y	Y
1	1	0	0	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	0	0	ЛОЖЬ	0
1	0	0	1	ИСТИНА	ЛОЖЬ	1	0	ИСТИНА	1
0	1	1	0	ЛОЖЬ	ИСТИНА	0	1	ИСТИНА	1
0	0	1	1	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	0	0	ЛОЖЬ	0

Рисунок 1.1 - Таблица истинности данной функции

Примечания

1 В целом, для такой простой логической функции мы могли бы записать формулу на языке MSExcel в общем виде:

Y1 = ИЛИ(И(X1;НЕ(X2));И(НЕ(X1);X2))

но это затрудняет проверку и анализ полученных результатов в случае более сложной логической функции.

2 При логических построениях удобно пользоваться выпадающим меню Excel «Формулы» → «Логические» с простой инструкцией использования

2 Расчетно - графическая работа №2. Минимизация состава элементов, реализующих логическую функцию

2.1 Задание на расчетно - графическую работу

Задана представленная на рисунке 2.1 структурная схема системы, включающая 8 логических элементов, номера которых изображены на схеме. Логическая функция, выполняемая каждым логическим элементом, выбирается из таблицы 1.1 в соответствии с заданным вариантом, номер которого приравнивается к номеру Ф.И.О. студента в списке группы.

В расчетно - графической работе необходимо минимизировать состав элементов, реализующих заданную логическую схему [1,3,7].

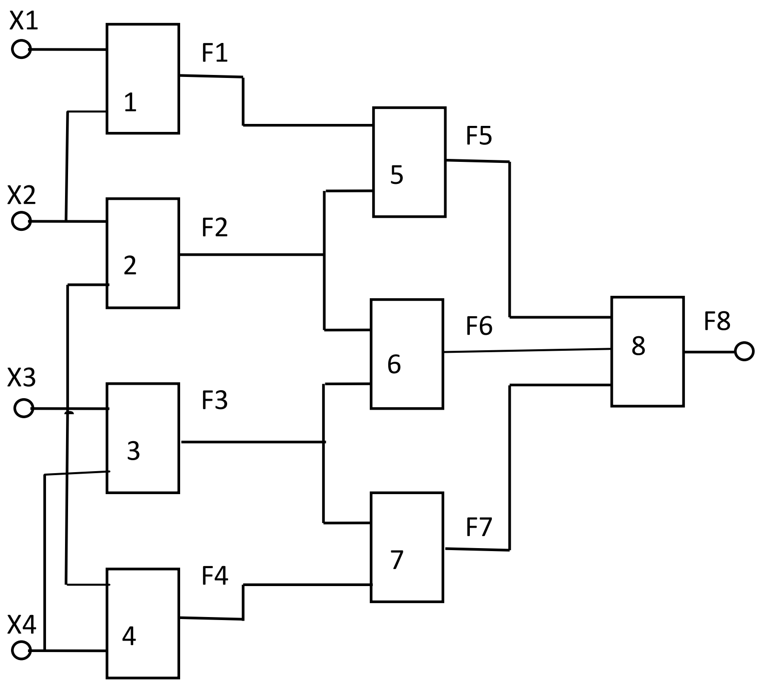

Рисунок 2.1 - Структурная схема системы

2.2 Методические указания

Выполнение расчетно - графической работе проводится в следующей последовательности.

2.2.1 Перечерчиваем структурную схему с указанием логических элементов 1…8 в соответствии с вариантом задания (например, рисунок 2.2).

2.2.2 Аналитическое описание заданной системы представляется логическими выражениями, записанными для каждого из логических элементов. Например, если элемент 1 представляет собой логическую функцию «ИЛИ-НЕ», записываем для него:

$$F1 = \overline{X1 + X2}.$$

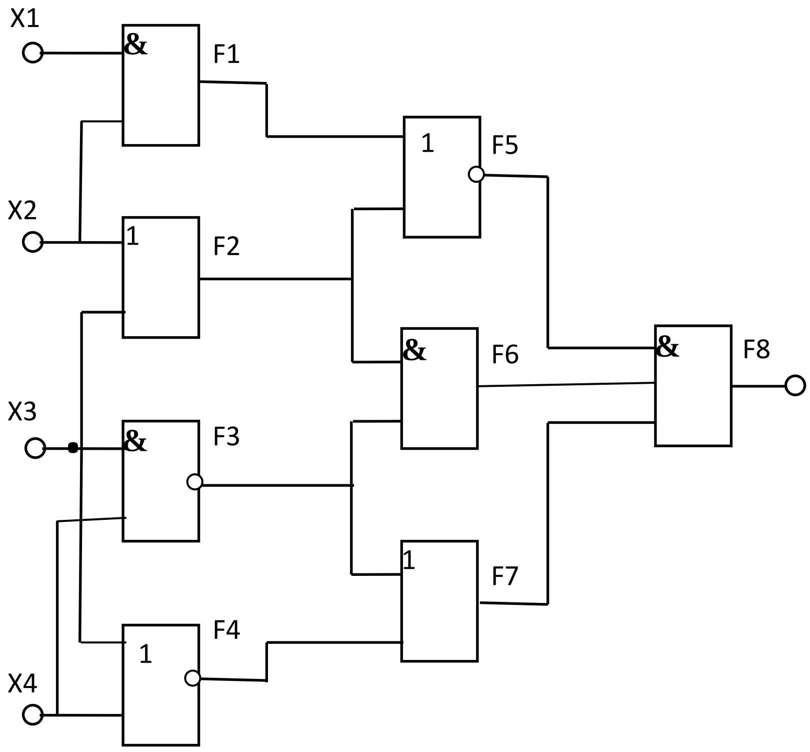

Рисунок 2.2 - Структурная схема системы

Таким образом, записываются логические функции последовательно от F1 до F8. F8 является булевой функцией входных сигналов F5, F6, F7.

2.2.3 Целью дальнейших логических преобразований заданной системы является получение для данного варианта задания зависимости выходной логической функции F8 от входных логических переменных X1…X4. Полученная зависимость должна содержать минимальное количество входных логических переменных. Промежуточные логические переменные в процессе преобразований должны быть исключены. Для этого проводятся логические преобразования, аналогичные выполненным в расчетно – графической работе №1. Процедура упрощения, основанная на использовании законов алгебры логики, позволяет сократить количество логических преобразований до минимума.

Эквивалентность полученного математического описания исходному необходимо проверить, например, построением таблиц истинности.

2.2.4 На основе полученной логической функции необходимо построить построить схему упрощенной логической системы, эквивалентной заданной системе.

Таблица 2.1 - Варианты заданий на расчетно - графическую работу №2

№ ЛЭ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	3	2	1	5	4	3	2	5	3	2	1	1	2	3
2	2	1	3	2	1	5	4	3	4	5	3	2	1	1	2
3	3	2	1	3	2	1	5	4	3	4	5	3	2	1	1
4	4	3	2	1	3	2	1	5	2	3	4	5	3	2	1
5	5	4	3	2	1	3	2	1	1	2	3	4	5	3	2
6	1	5	4	3	2	1	3	2	1	1	2	3	4	5	3
7	2	1	5	4	3	2	1	3	2	1	1	2	3	4	5
8	3	2	1	5	4	3	2	1	3	2	1	1	2	3	4

№ ЛЭ	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27			
1	4	3	3	5	4	1	4	1	2	1	5	3	Логические элементы		
2	3	2	3	3	5	4	1	4	1	3	1	5		1	И
3	2	1	2	3	3	5	4	1	4	5	3	1		2	ИЛИ
4	1	4	1	2	3	3	5	4	1	2	5	3		3	НЕ
5	1	1	4	1	2	3	3	5	4	4	2	5		4	И-НЕ
6	2	4	1	4	1	2	3	3	5	1	4	2		5	ИЛИ-НЕ
7	3	5	4	1	4	1	2	3	3	3	1	4			
8	5	3	5	4	1	4	1	2	3	5	3	1			

3 Расчетно - графическая работа №3. Синтез логических схем

3.1 Задание на расчетно - графическую работу

По словесному описанию технологического процесса составить аналитическое описание (логическую функцию) и логическую схему. Минимизировать логическую функцию с помощью карты Карно и составить схему в булевом базисе (с использованием только элементов И, ИЛИ, НЕ) и в базисах И-НЕ, ИЛИ-НЕ.

3.2 Методические указания к расчетно - графической работе

Разработка логической схемы по её аналитическому описанию имеет название задачи синтеза логической схемы [1,4,7].

3.2.1 Разработка логической схемы начинается с определения логической функции, которую должна реализовать логическая схема. Первым шагом является построение таблицы истинности логической схемы по методике, использованной в расчетно - графической работе № 1.

3.2.2 На основании полученной таблицы истинности составляем логическую функцию. Минимизацию булевой функции проводим методом Карно.

Для примера минимизируем логическую функцию трех переменных:

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C. \qquad (3.1)$$

1) Строим таблицу истинности функции F:

Таблица 3.1

A	B	C	F
0	0	0	1
0	1	0	1
1	1	0	0
1	0	0	1
0	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0
1	0	1	1

2) Заданную функцию представим с помощью карты Карно:

C \ AB	00	01	11	10
0	1	1		1
1				1

Рисунок 3.1 - Карты Карно

3) Затем производится объединение 2-х, 4-х или 8-ми единиц (рисунок 3.2).

В данном случае объединение двух единиц по горизонтали соответствует операции склеивания, в результате которой исключается переменная B:

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} = \bar{A}\bar{C}(B + \bar{B}) = \bar{A}\bar{C}.$$

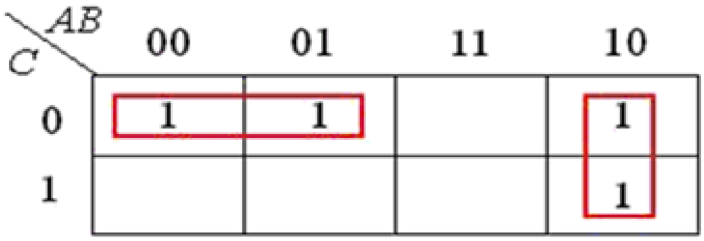

Рисунок 3.2 - Объединение двух единиц по горизонтали и по вертикали карты Карно

Объединение двух единиц по вертикали соответствует операции склеивания, в результате которой исключена переменная С:

$$A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C = A\bar{B}(\bar{C} + C) = A\bar{B}. \qquad (3.2)$$

4) Следовательно, минимальная форма заданной функции примет следующий вид:

$$F = \bar{A}\bar{C} + A\bar{B}. \qquad (3.3)$$

3.2.3 Первая схема проектируется в Булевом базисе (И, ИЛИ, НЕ). Каждой дизъюнкции (логической сумме) соответствует элемент «ИЛИ», число входов которого определяется количеством переменных в дизъюнкции. Каждой конъюнкции (логическому произведению) соответствует элемент «И», число входов которого определяется количеством переменных в конъюнкции. Каждому отрицанию (инверсии) соответствует элемент «НЕ».

Для построения логической схемы необходимо элементы, реализующие логические операции, указанные в выходной функции, располагать в порядке, заданной этой функцией. Например, из выражения

$$f = \overline{X1} \cdot X2 \cdot X4 + \overline{X2} \cdot \overline{X3} + X3 \cdot \overline{X4} \qquad (3.4)$$

видно, что понадобятся 4 схемы «НЕ», одна трёхвходовая схема «И», 2 двухвходовые схемы «И» и одна трёхвходовая схема «ИЛИ». В соответствии с этим получаем логическую схему, изображенную на рисунке 1.5.

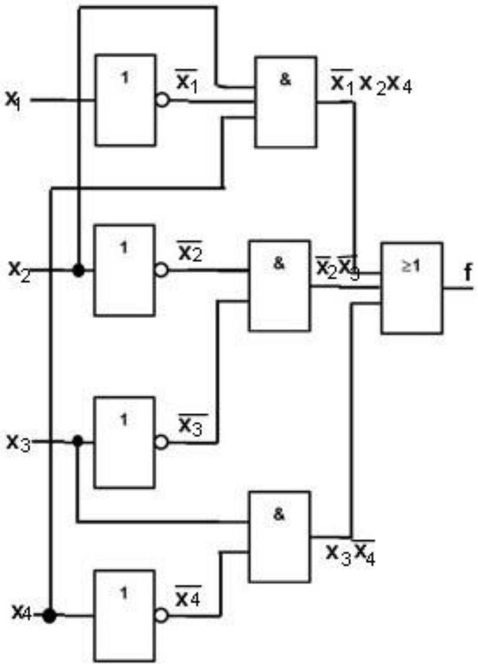

Рисунок 3.3 - Логическая схема

3.2.4 Часто для сокращения числа микросхем используют элементы «И-НЕ» или/и «ИЛИ-НЕ». Рассмотрим примеры, как построить схему, реализующую ту же функцию (3), но сначала в базисе «И-НЕ», а затем в базисе «ИЛИ-НЕ» [1,4,7].

В качестве примера построим в базисе «И-НЕ» логическую схему, реализующую функцию алгебры логики:

$$f = \overline{X1} \cdot X2 \cdot X4 + \overline{X2} \cdot \overline{X3} + X3 \cdot \overline{X4} \,.$$

Для этого логическая функция должна быть приведена к виду, содержащему только операции логического умножения (конъюнкции) и инвертирования (отрицания). Это делается при помощи двойного инвертирования исходного выражения функции и применения закона де Моргана:

$$f = \overline{X1} \cdot X2 \cdot X4 + \overline{X2} \cdot \overline{X3} + X3 \cdot \overline{X4} = \overline{\overline{\overline{X1} \cdot X2 \cdot X4 + \overline{X2} \cdot \overline{X3} + X3 \cdot \overline{X4}}} = \overline{\overline{\overline{\overline{X1} \cdot X2 \cdot X4} + \overline{\overline{\overline{X2}} \cdot \overline{\overline{X3}}} + \overline{X3 \cdot \overline{X4}}}}. \quad (3.5)$$

Для построения логической схемы потребуются 8 схем «И-НЕ». Получаем логическую схему, изображенную на рисунке 3.5.

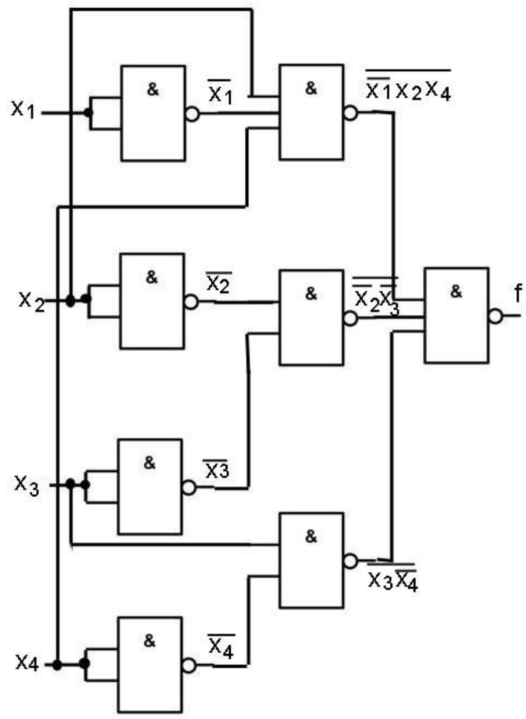

Рисунок 3.5 - Логическая схема

3.1.5 Построим логическую схему, реализующую функцию алгебры логики в базисе «ИЛИ-НЕ»:

$$f = \overline{X1} \cdot X2 \cdot X4 + \overline{X2} \cdot \overline{X3} + X3 \cdot \overline{X4}.$$

Логическая функция должна быть приведена к виду, содержащему только операции логического сложения (дизъюнкции) и инвертирования (отрицания). Это делается также при помощи двойного инвертирования исходного выражения функции и применения закона де Моргана:

$$f = \overline{X1} \cdot X2 \cdot X4 + \overline{X2} \cdot \overline{X3} + X3 \cdot \overline{X4} = \overline{\overline{\overline{\overline{X1} \cdot X2 \cdot X4 + \overline{X2} \cdot \overline{X3} + X3 \cdot \overline{X4}}}} = \overline{\overline{\overline{X1 \cdot \overline{\overline{X2}} \cdot \overline{\overline{X4}} + \overline{X2 \cdot X3} + \overline{\overline{X3}} \cdot X4}}}. \quad (3.6)$$

Для построения логической схемы потребуются 8 схем «И-НЕ». Получаем логическую схему, изображенную на рисунке 3.6.

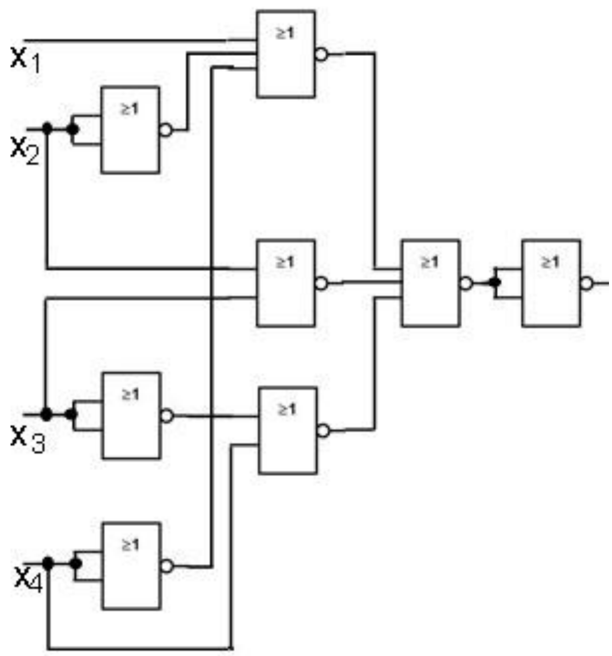

Рисунок 3.6 - Логическая схема

Список литературы

1 Серебряков А. С. Автоматика: Учебник и практикум для академического бакалавриата / А. С. Серебряков, Д. А. Семенов, Е. А. Чернов; под общ. ред. А. С. Серебрякова. - М.: Издательство Юрайт, 2017. - 431 с.

2 Собакин Е.Л. Цифровая схемотехника: Учеб. пособие. - Ч.I. - Томск: Изд. ТПУ, 2002. - 160 с.

3 Горбатов В. А. Основы дискретной математики. - М.: Высш. шк., 1986.

4 Сборник задач по дискретной математике. Для практических занятий в группах: Ю. П. Шевелев, Л. А. Писаренко, М. Ю. Шевелев. - Санкт-Петербург, Лань, 2013 г. - 528 с.

5 Савельев А. Я. Прикладная теория цифровых автоматов. - М.: Высш. шк. , 2007 г. - 272 с.

6 Р. Токхейм. Основы цифровой электроники. - М.: Мир, 1988 г.

7 Б. Аладышкин. Статьи о булевой алгебре для электриков. http://electrik.info.

Сводный план 2019 г., поз.31

Мустафин Марат Аскарович
Чныбаева Данна Максуткановна
Жаркымбекова Макпал Бексултановна

ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Методические указания по выполнению расчетно - графических работ
для студентов специальности 5В071800

Редактор Л.Т. Сластихина

Специалист по стандартизации Г. И. Мухаметсариева

Подписано в печать ______ Формат 60х84 1/16
Тираж 50 экз. Бумага типографская №
Объем 1.0 уч. - из. л. Заказ 500 Цена тг.

Копировально-множительное бюро
некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013, Алматы, ул. Байтурсынова, 126/1