



**Некоммерческое
акционерное
общество**

**АЛМАТИНСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ЭНЕРГЕТИКИ И
СВЯЗИ ИМЕНИ
ГУМАРБЕКА
ДАУКЕЕВА**

Колледж АУЭС

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Конспект лекций

для студентов колледжа специальности 071330103 –
Электрооборудование

Алматы 2022

СОСТАВИТЕЛИ: М.М.Аршидинов, Денисенко В.И. Теоретические основы электротехники . Конспект лекций для студентов колледжа специальности 071330103 – Электрооборудование. – Алматы: колледж АУЭС, 2022.- 45 с.

Конспект лекций содержит 20 лекций по дисциплине ТОЭ по следующим основным разделам: «Переходные процессы в линейных электрических цепях», «Цепи с распределёнными параметрами», «Нелинейные электрические и магнитные цепи» и «Теория электромагнитного поля».

Конспект лекций предназначен для студентов колледжа специальности -Электрооборудование.

Ил.25, библиогр. -6 назв.10

Рецензент: канд. техн. наук, доцент

Гали К.О.

Печатается по плану издания колледжа АУЭС на 2022 год

© НАО «Алматинский университет энергетики и связи имени Гумарбека Даукеева 2022г.

Содержание

	Введение	4
1	Лекция 1	5
2	Лекция 2	9
3	Лекция 3	13
4	Лекция 4	18
5	Лекция 5	21
6	Лекция 6	26
7	Лекция 7	31
8	Лекция 8	34
9	Лекция 9	37
10	Лекция 10	40
	Список литературы	45

Введение

Дисциплина «Теоретические основы электротехники» является основным базовым курсом для подготовки студентов колледжей в области электроэнергетики. Назначение дисциплины заключается в изучении и описании как с качественной, так и с количественной стороны электромагнитных процессов и явлений, происходящих в различного рода электротехнических установках, представленных эквивалентными схемами замещения с помощью основных элементов электрических цепей, а также в электромагнитных полях.

Предлагаемый конспект лекций содержит 9 лекций по разделам: «Переходные процессы в линейных электрических цепях», «Цепи с распределёнными параметрами», «Нелинейные электрические и магнитные цепи».

В первом разделе рассмотрены основные методы расчёта переходных процессов в линейных электрических цепях: классический, операторный, частотный, интеграл Дюамеля.

Во втором разделе рассмотрены основные понятия о цепях с распределёнными параметрами, установившийся режим в однородной линии, теория линии, согласованной с нагрузкой и линии без потерь.

В третьем разделе приведены основные понятия о нелинейных цепях и методах их расчета, графические и аналитические методы анализа нелинейных электрических цепей постоянного и переменного тока, общая характеристика задач и методов расчета магнитных цепей.

Конспект лекций предназначен для студентов, обучающихся в колледжах по специальности 071330103 – Электрооборудование (по видам и отраслям).

Переходные процессы в линейных электрических цепях с сосредоточенными параметрами

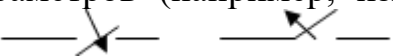
1 Лекция. Возникновение переходных процессов, законы коммутации, классический метод расчета переходных процессов

Цель лекции: дать общие сведения о переходных процессах, усвоить классический метод их расчета в линейных электрических цепях.

1.1 Возникновение переходных процессов, законы коммутации

Ранее исследовались установившиеся процессы в цепях с сосредоточенными параметрами, т.е. в таких цепях, для которых с достаточной степенью точности можно считать, что электрическое поле, магнитное поле и выделение тепла сосредоточены на отдельных участках цепи, т.е. параметром R, L, C отводилось каждому определенное место.

Не меньшую роль, чем установившийся режим, в электротехнике играют и переходные режимы или процессы.

Переходный процесс – это переход от одного установившегося режима к другому, отличному от первого. Такие процессы имеют место при коммутации, т.е. при включении или отключении электрических цепей и при изменении их параметров (например, изменении нагрузки). На схеме это обозначается так: 

Весь процесс можно разделить на три ступени.

1. Начальный установившийся режим.
2. Переходный режим. Его начало обычно принимается в расчете за $t=0$ (в некоторых случаях необходимо различать время $t=0_-$ непосредственно перед коммутацией и время $t=0_+$ непосредственно после коммутации).
3. Конечный установившийся режим, который наступает теоретически при $t=\infty$, а практически – через сравнительно короткое время. Этот режим называется принужденным.

Время переходного процесса исчисляется обычно долями секунды, но ток i и напряжение u могут достигать значений много больших, чем при установившемся режиме. Таким образом надо рассчитать токи и напряжения при переходном режиме, чтобы правильно выбрать аппаратуру и принять соответствующие меры предосторожности.

Энергия магнитного и электрического полей, связанных с цепью, для разных установившихся режимов различна. Для конечного ее изменения необходимо время. Поэтому, если цепь обладает энергией магнитного поля (такое поле всегда создается, если в цепи есть катушка индуктивности) или электрического поля (если в цепи есть конденсатор) или того и другого вместе, то переходный процесс не может совершаться мгновенно, т.к.

последнее привело бы к выделению в L и C бесконечно больших мощностей, что лишено физического смысла.

Энергия магнитного поля $W_M = L \frac{i_L^2}{2}$. Из этого следует, что ток i_L не может меняться скачком и начинает свое изменение во время переходного процесса с того значения, которое он имел до начала процесса. Это положение известно под названием *первого закона коммутации* $i_L(0_-) = i_L(0_+)$.

Напряжение u_L не связано с W_M и поэтому может изменяться мгновенно на конечную величину.

Энергия электрического поля $W_C = C \frac{U_C^2}{2}$. Значит, в этом случае не может меняться скачком напряжение на конденсаторе $U_C(0_-) = U_C(0_+)$ – *второй закон коммутации*. Ток i_C может меняться скачком.

Если в цепи только R , т.е. нет ни электрического, ни магнитного полей, то переходного процесса не будет. Ток и напряжение скачком изменятся до новых установившихся значений. В общем случае электрическая цепь содержит различные комбинации R, L, C , т.е. будет иметь место переходный процесс. Его продолжительность не зависит ни от величины тока, ни от величины напряжения, а определяется только параметрами цепи.

1.2 Классический метод расчета переходных процессов

Аналитический расчет переходных процессов сводится в конечном счете к нахождению общих интегралов обычных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Порядок дифференциального уравнения, описывающего соотношение токов и напряжений в электрической цепи при переходном режиме, определяется числом мест накопления в данной цепи энергии электрического или магнитного поля.

Известно, что ток в конденсаторе $i = C \frac{dU_C}{dt}$. Если этот же ток протекает по катушке индуктивности, то напряжение на ней

$u_L = L \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2U_C}{dt^2}$ и т.д.

В общем случае, если в цепи имеется n мест накопления энергии, уравнение может принять вид:

$$\alpha_n \frac{d^n i}{dt^n} + \alpha_{n-1} \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_1 \frac{di}{dt} + \alpha_0 i = \beta U. \quad (1.1)$$

Общий интеграл дифференциального уравнения с правой частью представляет собой сумму *частного решения* этого уравнения и решения того же уравнения без правой части, т.е. *общего решения*.

Общее решение физически определяет электромагнитные процессы, происходящие в цепи при отсутствии внешних источников энергии, за счет того запаса энергии, который был в начальный момент времени в

электрическом и магнитном полях, связанных с цепью. Но в реальных цепях всегда имеет место рассеяние энергии (на нагрев проводов и сопротивлений) и ее выделение в виде тепла. Таким образом, токи и напряжения, определяемые из линейных дифференциальных уравнений без правой части, с течением времени стремятся к нулю. Эти составляющие по своему характеру не зависят от внешних источников энергии и поэтому называются *свободными составляющими*.

Общий вид свободной составляющей, например, тока, найденной из уравнения (1):

$$i_{\text{св.}} = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t} \quad (1.2)$$

где A_k – постоянная интегрирования, найденная из начальных условий. Начальные условия – это значения при $t=0$ величин, которые не могут меняться скачком, т.е. $i_L(0), U_C(0)$;

p_k – корни характеристического уравнения.

Применительно к уравнению (1.1) характеристическое уравнение будет иметь вид: $\alpha_n p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0 = 0$. (1.3)

Число корней равно порядку дифференциального уравнения. В общем случае корни могут быть комплексными числами, вещественная часть которых всегда отрицательна

$$p_k = -\alpha_k + j\omega_k$$

где α_k характеризует скорость затухания экспоненты и называется *коэффициентом затухания*.

Постоянная времени $\tau_k = 1/\alpha_k$.

Мнимую часть корня ω_k называют *угловой частотой собственных колебаний*.

Частное решение дает значение тока, напряжения при $t = \infty$, т.е. при установившемся режиме. Характер и величина этой составляющей определяется внешними источниками энергии, поэтому она называется *принужденной составляющей*.

Например, если в (1.1) напряжение $u = U_0 = \text{const}$, то и принужденный ток $i_{\text{пр.}} = \text{const}$ и не зависит от времени. Тогда все производные обратятся в ноль и получим $i_{\text{пр.}} = \beta U_0 / \alpha_0$.

Итоговое значение тока определяется как сумма общего и частного решений: $i = i_{\text{св.}} + i_{\text{пр.}}$. Если искомым является напряжение, то $u = u_{\text{св.}} + u_{\text{пр.}}$.

Таким образом, решение свелось к методу наложения: определяя частное решение ($i_{\text{пр.}}$), полагают, что действуют только внешние источники энергии. Определяя свободные составляющие, наоборот, приравнивают к нулю внешние источники и учитывают действие только внутренних сил, обусловленных накопленной в цепи энергией. Необходимо помнить, что реально существуют только действительные токи и напряжения, а их

разложение на принужденные и свободные составляющие – лишь прием, облегчающий расчет.

1.3. Включение цепи R, L на постоянное напряжение (см. рисунок 1.1)

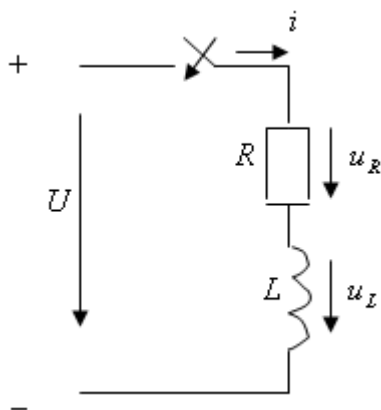


Рисунок 1.1

Дано: $U = const, R, L$

Приняв момент включения $t = 0$, определить ток i и построить график его изменения во времени.

Составляем дифференциальное уравнение электрического равновесия цепи (уравнение по второму закону Кирхгофа в дифференциальной форме)

$$u_R + u_L = U \text{ или } U - u_R - u_L = 0. \quad (1.4)$$

Известно $u_R = iR, u_L = L \frac{di}{dt}$. (1.5)

Подставим (1.5) в (1.4) $L \frac{di}{dt} + iR = U$, (1.6)

т.е. получили линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Находим частное решение (1.6), т.е. $i_{пр}$.

$$L \frac{di_{пр}}{dt} + i_{пр} \cdot R = U. \text{ Так как } U = const, \text{ то } i_{пр} = const, L \frac{di_{пр}}{dt} = 0, \text{ а } i_{пр} = \frac{U}{R} = I. \quad (1.7)$$

Получился ток установившегося режима, который был бы в цепи с первого момента замыкания ключа, если бы не возникающая в катушке ЭДС самоиндукции, которая противодействует изменению тока.

Общее решение, т.е. $i_{св}$.

$$L \frac{di_{св}}{dt} + i_{св} \cdot R = 0. \quad (1.8)$$

Решим (1.8) разделением переменных: $\frac{di_{св}}{dt} = -\frac{R}{L} dt$.

Интегрируя, получим $\ln i_{св} = -\frac{R}{L} t + A_1$. Постоянную A_1 можно определить как \ln некоторой другой постоянной A , т.е. считать, что $A_1 = \ln A$. Тогда

$$i_{св} = A \cdot e^{-\frac{R}{L} t}$$

где $-\frac{R}{L}$ - корень характеристического уравнения $pL + R = 0$, т.е. $p = -\frac{R}{L}$.

Постоянная A находится из начальных условий: при $t = 0$ ток в катушке равен нулю (по первому закону коммутации), т.е. $i(0) = i_{\text{пр}}(0) + i_{\text{св}}(0) = \frac{U}{R} + A = 0$.

Откуда $A = -\frac{U}{R} = -I$ и $i_{\text{св}} = -\frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = -I e^{-\frac{R}{L}t}$. (1.9)

В последующем будем записывать $i_{\text{св}}$ сразу в общем виде, не приводя подробного решения, а пользуясь выражением $i_{\text{св}} = Ae^{pt}$.

Так как корень p – вещественный, то постоянная времени $\tau = -\frac{1}{p} = \frac{L}{R}$.

Единица измерения $[\tau] = [L/R] = \Gamma_{\text{H}}/O_{\text{M}} = O_{\text{M}} \cdot c/O_{\text{M}} = c$. Используя τ можно записать $i_{\text{св}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$. Физический смысл τ : при $t = 0$ $i_{\text{св}}(0) = -I$, а при $i_{\text{св}}(\tau) = -Ie^{-\frac{\tau}{\tau}} = -Ie^{-1} = \frac{i_{\text{св}}}{e}$, таким образом τ – это время, за которое свободная составляющая уменьшится в $e = 2,718 \dots$ раз.

Действительное значение тока

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}} = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = I \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}). \quad (1.10)$$

На рисунке 1.2 приведен график $i = f(t)$:

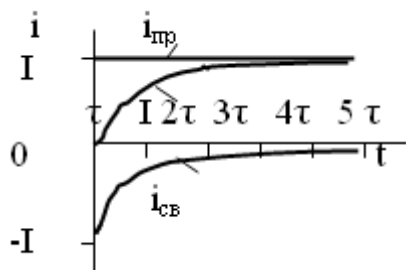


Рисунок 1.2

Через промежуток времени $t = 5\tau$ ток i отличается от тока установившегося режима всего на 0,7% ,т.е. можно считать, что практически переходный процесс завершился.

2 Лекция. Расчет переходных процессов в цепях с одним накопителем энергии

Цель лекции: усвоить классический метод расчета переходных процессов в простейших электрических цепях.

2.1 Короткое замыкание цепи с R, L

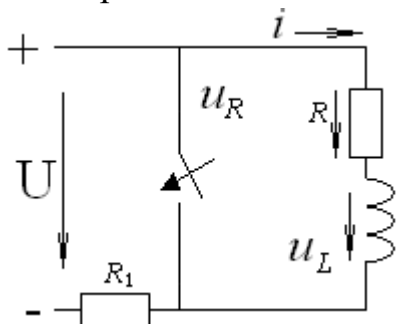


Рисунок 2.1

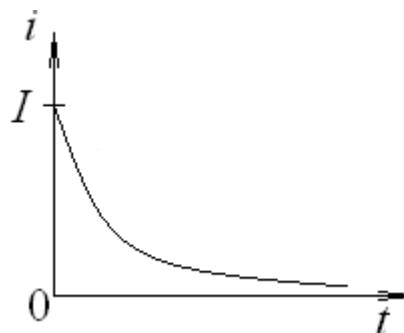


Рисунок 2.2

Пусть заданы значения $u = U = const, R, L$. Определить $i = f(t)$

Составляем уравнение замкнутого контура по второму закону Кирхгофа в дифференциальной форме:

$$u_R + u_L = i \cdot R + L \frac{di}{dt} = 0. \quad (2.1)$$

Находим принужденную составляющую тока $i_{пр} = i_{уст.} = 0$ (переходный процесс в катушке не зависит от внешнего напряжения U). Следовательно $i = i_{св.}$

Свободная составляющая тока из (2.1) $i_{св} = i = Ae^{pt}$.

Характеристическое уравнение $pL + R = 0$, т.е. $p = -\frac{R}{L}$.

Постоянную интегрирования A определяем из начальных условий:

при $t = 0$ $i(0) = i_{св.}(0) = \frac{U}{R + R_1} = I = A$.

На рисунке 2.2 приведена кривая $i = I \cdot e^{pt} = I \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{R + R_1} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$. (2.2)

Проверим расход энергии. До начала переходного процесса в магнитном поле катушки была запасена энергия $W_M = \frac{LI^2}{2}$. Энергия, перешедшая за время переходного процесса в тепловую

$$\int_0^{\infty} i^2 \cdot R \cdot dt = \int_0^{\infty} I^2 \cdot R \cdot e^{-\frac{2R}{L}t} \cdot dt = -\frac{I^2 \cdot R}{\frac{2 \cdot R}{L}} \left| e^{-\frac{2R}{L}t} \right|_0^{\infty} = -\frac{L \cdot I^2}{2} (0 - 1) = \frac{L \cdot I^2}{2}.$$

Таким образом, весь запас энергии магнитного поля перешел в тепловую энергию в сопротивлении R .

2.2 Включение цепи R, C на постоянное напряжение

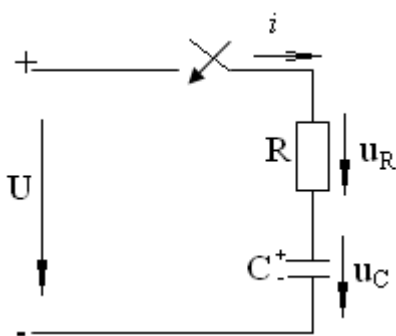


Рисунок 2.3

Будем считать, что конденсатор предварительно был заряжен до напряжения U_0 . Для цепи рисунка 2.3 уравнение по второму закону Кирхгофа имеет вид

$$u = u_R + u_C = i \cdot R + u_C. \quad (2.3)$$

Так как в цепи есть конденсатор, то расчет целесообразно вести через напряжение u_C , т.е. величину, определяющую запас энергии.

Выражаем ток i через u_C $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$. (2.4)

С учетом (2.4) уравнение электрического равновесия цепи запишем в виде

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u, \quad (2.5)$$

где $u_C = u_{C \text{ пр.}} + u_{C \text{ св.}}$

$$\text{Определяем } u_{C \text{ пр.}} \quad u_{C \text{ пр.}} = u_{C \text{ ycT}} = U. \quad (2.6)$$

Здесь ток будет протекать до тех пор, пока конденсатор не зарядится.

Так как уравнение (2.5) первого порядка, то свободная составляющая напряжения $u_{C \text{ св.}} = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$. (2.7)

Характеристическое уравнение $RCp + 1 = 0$, откуда $p = -1/RC = -1/\tau$.

$$[\tau] = [R] \cdot [C] = \text{Ом} \cdot \Phi = \text{Ом} \cdot \text{Ом}^{-1} \cdot \text{с} = \text{с}.$$

Определяем постоянную интегрирования A

$$u_C = u_{C \text{ пр.}} + u_{C \text{ св.}} = U + Ae^{pt}. \quad (2.8)$$

При $t = 0$ $u_C(0) = U + A = U_0$, откуда $A = U_0 - U$, таким образом,

$$u_{C \text{ св.}} = (U_0 - U) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (2.9)$$

$$\text{Итоговый результат: } u_C = U + (U_0 - U) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (2.10)$$

$$\text{При } U_0 = 0 \quad u_C = U \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

$$\text{Зарядный ток конденсатора: } i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U - U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (2.11)$$

$$\text{При } U_0 = 0 \quad i = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (2.12)$$

На рисунке 2.4 приведен примерный вид кривых $u_C = f(t)$ и $i = f(t)$.

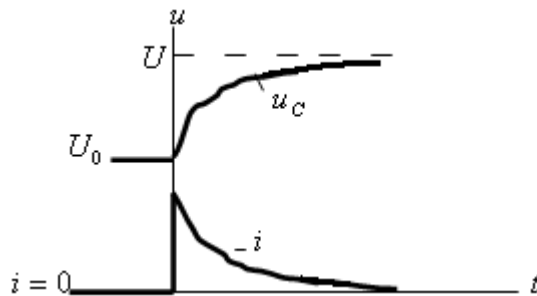


Рисунок 2.4

3.3 Включение цепи R, L на синусоидальное напряжение

Пример такого переходного процесса – включение трансформатора в режиме холостого хода при малом насыщении сердечника.

Переходные процессы в цепях переменного тока сильно зависят от того, в какой момент, при каком мгновенном значении напряжения происходит включение цепи. Поэтому обязательно надо учитывать не только действующее значение или амплитуду напряжения сети, но и начальный фазовый угол в момент включения цепи.

Рассмотрим цепь рисунка 2.5.

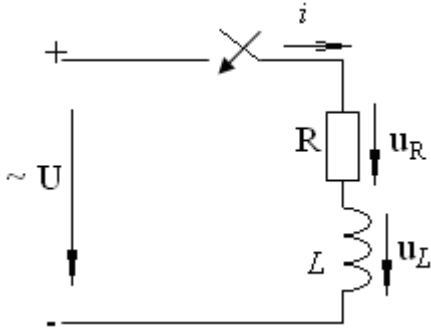


Рисунок 2.5

Пусть данная цепь включается на синусоидальное напряжение, начальная фаза которого составляет α градусов, т.е. $u = U_m \cdot \sin(\omega t + \alpha)$. Здесь порядок расчета тот же, что и раньше, только $i_{пр.}$ тоже зависит от времени.

Составляем уравнение электрического равновесия цепи

$$L \frac{di}{dt} + i \cdot R = u. \quad (2.13)$$

Принужденная составляющая тока $i_{пр.} = i_{уст.}$, но при установившемся режиме ток определяется законом Ома

$$i_{пр.} = i_{уст.} = \frac{U_m}{z} \cdot \sin(\omega t + \alpha - \varphi) \quad (2.14)$$

где $z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$;

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}.$$

В более сложных цепях ток установившегося режима удобнее определять в комплексной форме, а затем от $\dot{I}_{уст.}$ перейти к $i_{уст.}$.

$$\text{Свободная составляющая тока } i_{св} = A \cdot e^{pt} = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (2.15)$$

$$\text{где } p = -\frac{R}{L}, \text{ а } \tau = -\frac{1}{p} = \frac{L}{R}.$$

$$\text{Общий ток } i = i_{пр.} + i_{св} = \frac{U_m}{z} \cdot \sin(\omega t + \alpha - \varphi) + A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.16)$$

$$\text{При } t = 0 \quad i(0) = \frac{U_m}{z} \cdot \sin(\alpha - \varphi) + A = 0 \quad (\text{по первому закону коммутации}).$$

$$\text{Откуда } A = -\frac{U_m}{z} \cdot \sin(\alpha - \varphi).$$

$$\text{Окончательно получим } i_{св} = -\frac{U_m}{z} \cdot \sin(\alpha - \varphi) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (2.17)$$

$$\text{а } i = \frac{U_m}{z} \cdot \sin(\omega t + \alpha - \varphi) - \frac{U_m}{z} \cdot \sin(\alpha - \varphi) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.18)$$

Из (2.18) видно, что ток состоит из двух частей – синусоидального тока с постоянной амплитудой и постоянного тока, убывающего по экспоненте. Величина общего тока существенно зависит от начального угла α . Рассмотрим два крайних случая:

а) $\alpha - \varphi = 0$ или $\alpha - \varphi = \pi$.

В этом случае $i_{св} = 0$ и переходного процесса не будет, т.к. ток установившегося режима (а значит и связанная с ним энергия магнитного

поля) в момент включения проходит через ноль. Скачка энергии не получается и ток сразу становится током установившегося режима;

б) $\alpha - \varphi = \pm \pi / 2$. Здесь $\sin(\alpha - \varphi) = \pm 1$ принимает наибольшее значение, и амплитуда тока переходного процесса также будет наибольшей. Это объясняется тем, что включение происходит в момент, когда ток установившегося режима максимален. Рассмотрим график рисунка 2.6.

Из графика видно, что ток особенно увеличивается во второй и третьей четверти первого периода, причем это увеличение сильно зависит от постоянной времени τ . Если τ велико, то ток через время $T/2$ после включения может достичь почти удвоенной амплитуды $I_{m \text{ уст.}}$ (но ни при каких условиях не превзойдет $2 \cdot I_{m \text{ уст.}}$).

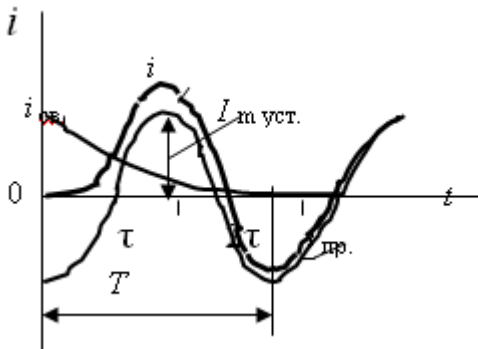


Рисунок 2.6

3 Лекция. Переходные процессы в цепях с двумя накопителями энергии

Цель лекции: познакомить с особенностями протекания переходных процессов в цепях с последовательным соединением элементов R, L, C и при их подключении на постоянное напряжение.

3.1 Переходный процесс в цепи R, L, C

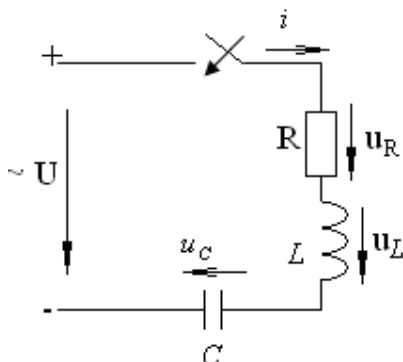


Рисунок 3.1

В цепи рисунка 3.1 запасается энергия двух видов - магнитного поля и электрического поля. Следовательно, в цепи не будет скачков ни тока, ни напряжения.

Найдем ток i и напряжение u_C при включении данной цепи на любое напряжение u .

Пусть до включения $u_C(0_-) = 0$.

Уравнение электрического равновесия цепи имеет вид

$$u_R + u_L + u_C = u. \quad (3.1)$$

Так как расчет с конденсатором удобнее вести через u_C , то все входящие в (3.1) величины выразим через это напряжение $i = C \frac{du_C}{dt}$;

$u_R = i \cdot R = RC \frac{du_C}{dt}$; $u_L = L \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2u_C}{dt^2}$. Подставив эти выражения в (3.1), получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$LC \frac{d^2u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u.$$

Освободимся от коэффициента при $\frac{d^2u_C}{dt^2}$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{L \cdot C} = \frac{u}{L \cdot C} \quad (3.2)$$

Где $u_C = u_{C \text{ пр.}} + u_{C \text{ св.}}$.

Определяем $u_{C \text{ пр.}}$ по закону Ома. Принужденная составляющая зависит от формы приложенного напряжения. Если $u = \text{const}$, то $u_{C \text{ пр.}} = u$. Если $u = U_m \cdot \sin(\omega t + \alpha)$, то напряжение и ток установившегося режима так же будут синусоидальными. В этом случае расчет ведется в комплексной форме, а затем находятся мгновенные значения как функции времени.

Находим $u_{C \text{ св.}}$, которая и определяет длительность и характер переходного процесса.

$$\frac{d^2U_{C \text{ св.}}}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dU_{C \text{ св.}}}{dt} + \frac{U_{C \text{ св.}}}{LC} = 0 \quad (3.3)$$

Решением (3.3) будет: $u_{C \text{ св.}} = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t}$ (3.4)

Корни характеристического уравнения $p^2 + \frac{R}{L} \cdot p + \frac{1}{L \cdot C} = 0$ определяются

как
$$p_{1,2} = -\frac{R}{2 \cdot L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4 \cdot L^2} - \frac{1}{L \cdot C}}. \quad (3.5)$$

Значения корней зависят от соотношения параметров цепи. Может быть три случая:

а) $R > 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \left[\sqrt{\frac{\Gamma_H}{\Phi}} = \sqrt{\frac{O_M \cdot c}{O_M^{-1} \cdot c}} = O_M \right].$

При этом условии $\frac{R^2}{4 \cdot L^2} > \frac{1}{L \cdot C}$ и корни p_1, p_2 получаются вещественными, отрицательными, различными по величине

В самом деле, если обозначить $\sqrt{\frac{R^2}{4 \cdot L^2} - \frac{1}{L \cdot C}} = a$, где a – вещественное число, меньше чем $\frac{R}{2 \cdot L}$, то $p_1 = -\frac{R}{2 \cdot L} + a < 0$; $p_2 = -\frac{R}{2 \cdot L} - a < 0$. (3.5a)

По абсолютной величине $|p_1| < |p_2|$. Такой режим называется *апериодическим*, т.к. ток и напряжение приближаются к установившемуся режиму, не меняя своего направления;

б) $R = 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$. При этом условии $\frac{R^2}{4 \cdot L^2} = \frac{1}{L \cdot C}$ и корни $p_1 = p_2 = -\frac{R}{2 \cdot L}$ также вещественные, отрицательные.

$$\text{В этом случае } u_{C_{CB}} = (A_1 + A_2 \cdot t) \cdot e^{p_1 t}. \quad (3.6)$$

Этот режим называют *критическим*;

в) $R < \sqrt{\frac{L}{C}}$. В этом случае корни p_1 и p_2 комплексно-сопряженные с отрицательной вещественной частью $p_1 = -\alpha + j\omega$;

$$p_2 = -\alpha - j\omega, \quad (3.7)$$

где $\alpha = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания;

$\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{4 \cdot L^2}}$ – угловая частота собственных колебаний.

Такой режим называется *периодическим* или *колебательным*. Здесь происходит многократный обмен энергии между катушкой и конденсатором: энергия как бы переливается то в магнитное поле (когда растет ток), то в электрическое поле (когда растет напряжение на конденсаторе).

Постоянные интегрирования находятся из начальных условий.

$$U_C = U_{C_{np.}} + A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t}. \quad (3.8)$$

$$i = C \cdot \frac{dU_C}{dt} = i_{np.} + C \cdot A_1 \cdot p_1 \cdot e^{p_1 t} + C \cdot A_2 \cdot p_2 \cdot e^{p_2 t}. \quad (3.9)$$

При $t = 0$: $U_C(0) = U_{C_{np.}}(0) + A_1 + A_2 = 0$,

$$i(0) = i_{np.}(0) + C \cdot A_1 \cdot p_1 + C \cdot A_2 \cdot p_2 = 0. \quad (3.10)$$

Из уравнений (3.10) легко определяются A_1 и A_2 .

3.2 Включение цепи R, L, C на постоянное напряжение

Считаем, что цепь рисунка 3.1 включается на постоянное напряжение $u = U_0 = \text{const}$ и U_0 . Тогда $U_{C_{nn.}} = U_0, i_{np.} = 0$ и начальные условия (3.10) примут вид

$$U_0 + A_1 + A_2 = 0;$$

$$A_1 \cdot p_1 + A_2 \cdot p_2 = 0, \text{ откуда } A_1 = \frac{U_0 \cdot p_2}{p_1 - p_2}, A_2 = -\frac{U_0 \cdot p_1}{p_1 - p_2}.$$

С учетом полученного из (3.8) и (3.9.) имеем

$$\begin{aligned} U_C &= U_0 + \frac{U_0}{p_1 - p_2} \cdot (p_2 \cdot e^{p_1 t} - p_1 \cdot e^{p_2 t}), \\ i &= \frac{C \cdot U_0 \cdot p_1 \cdot p_2}{p_1 - p_2} \cdot (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Исследуем полученные выражения при разных значениях корней.

а) *апериодический режим* В этом случае, согласно (3.5а), имеем

$$p_1 - p_2 = 2a > 0, \quad p_1 \cdot p_2 > 0 \quad \text{и} \quad \tau_1 = -1/p_1 > \tau_2 = -1/p_2.$$

В соответствии с этим графики $u_C = f(t)$ и $i = f(t)$ имеют вид, представленный на рисунке 3.2;

б) *колебательный режим*. Так как в этом случае p_1 и p_2 – сопряженные комплексы, то $p_1 - p_2 = 2 \cdot j\omega$, а $p_1 \cdot p_2 = \alpha^2 + \omega^2 = \frac{1}{L \cdot C} = \omega_0^2$

где ω_0^2 - резонансная частота.

Подставим комплексные корни в выражения (3.11) и проведем некоторые

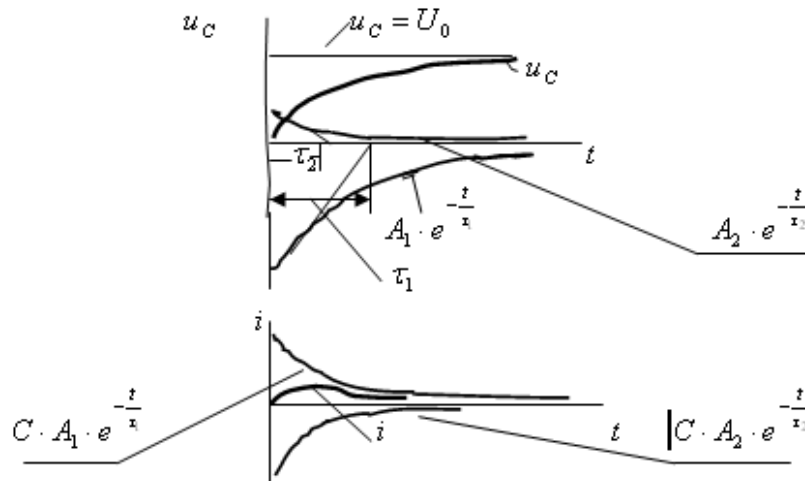


Рисунок 3.2

преобразования:

$$U_C = U_0 + \frac{U_0}{p_1 - p_2} \cdot (p_2 \cdot e^{p_1 t} - p_1 \cdot e^{p_2 t}) = U_0 + \frac{U_0}{2 \cdot j\omega} \cdot e^{-\alpha t} \cdot [(\alpha - j\omega) \cdot e^{-j\omega t} - (\alpha + j\omega) \cdot e^{j\omega t}],$$

т.к. $e^{p_1 t} = e^{(-\alpha + j\omega)t} = e^{-\alpha t} \cdot e^{j\omega t}$, $e^{p_2 t} = e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega t}$. (3.12)

Переведем стоящие в скобках комплексы в показательную форму (см. рисунок 3.3)

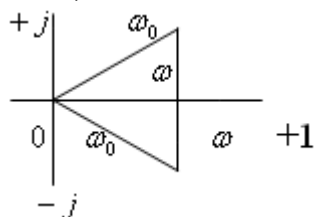


Рисунок 3.3

$$\begin{aligned} \alpha - j\omega &= \omega_0 \cdot e^{-j\gamma}; \\ \alpha + j\omega &= \omega_0 \cdot e^{j\gamma} \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$.

Подставив (3.13) в (3.12), получим

$$u_C = U_0 + \frac{U_0}{2 \cdot j\omega} \cdot \omega_0 \cdot e^{-\alpha t} \cdot [e^{-j(\omega t + \gamma)} - e^{j(\omega t + \gamma)}] = U_0 - \frac{U_0 \cdot e^{-\alpha t}}{\sin \gamma} \cdot \sin(\omega \cdot t + \gamma). \quad (3.14)$$

Подобным же образом можно преобразовать выражение тока

$$i = \frac{C \cdot U_0 \cdot p_1 \cdot p_2}{p_1 - p_2} \cdot (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \frac{C \cdot U_0 \cdot \omega_0^2}{2 \cdot j\omega} \cdot e^{-\alpha t} \cdot (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) = \frac{C \cdot U_0 \cdot \omega_0}{\sin \gamma} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega \cdot t \quad (3.15)$$

Если учесть, что $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$, то можно получить ток i в несколько ином виде: $i = \frac{U_0}{L \cdot \omega} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega \cdot t$.

Для построения графиков $u_C = f(t)$ и $i = f(t)$ нужно знать период собственных колебаний $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$ и постоянную времени $\tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{2 \cdot L}{R}$.

Порядок построения затухающей синусоиды:

1. По обе стороны от оси строятся огибающие.
2. В том же масштабе, что и τ откладываются доли периода (при этом надо учитывать начальный угол).
3. Вписывается синусоида, которая в точках максимума касается огибающих.

Так как u_C представляет собой разность постоянной величины и затухающей синусоиды, то для уменьшения графической работы на рисунке 3.4 эта синусоида построена с учетом знака, причем линия $u_{Cnp} = U_0$ использована как ось, т.е. сразу построен график $u_C = f(t)$, а не составляющие этого напряжения.

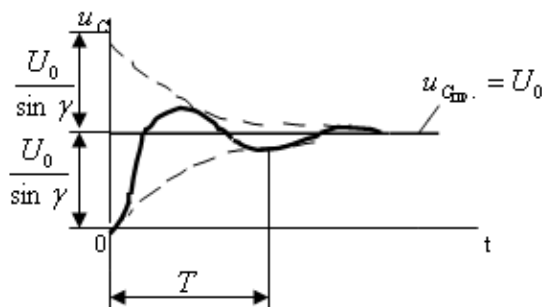


Рисунок 3.4

На рисунке 3.5 приведен график тока $i = f(t)$

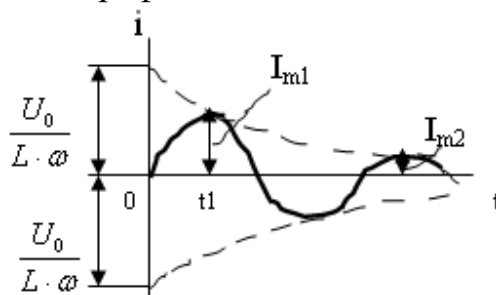


Рисунок 3.5

Если обозначить амплитуды напряжения и тока через U_m и I_m , то их

отношение
$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{\frac{U_0}{\sin \gamma} \cdot e^{-\alpha t}}{\frac{U_0}{C \cdot U_0 \cdot \omega_0} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin \gamma} = \frac{1}{C \cdot \omega_0} = \sqrt{\frac{L}{C}},$$
 т.е. равно волновому

сопротивлению. Идеальный случай, когда $R \approx 0$ и цепь можно считать сверхпроводящей. При этом $\alpha \approx 0$ и $\omega \approx \omega_0$. Но при $\alpha = 0$ энергия будет

переходить от магнитного поля к электрическому без затухания. Отсюда еще одно название ω_0 - угловая частота незатухающих колебаний и $T_0 = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$ - период собственных незатухающих колебаний. Угол γ при $\omega = \omega_0$ получается равным 90° .

В реальных цепях $R \neq 0$ и процесс будет затухающим. Для оценки быстроты затухания сравним две соседние амплитуды тока (или напряжения) с одинаковым знаком. Пусть $I_{m1} = \frac{U_0}{L \cdot \omega} \cdot e^{-\alpha \cdot t}$, $I_{m2} = \frac{U_0}{L \cdot \omega} \cdot e^{-\alpha \cdot (t_1 + T)}$, т.к.

$$\sin \omega \cdot t = \sin \omega \cdot (t_1 + T) = 1. \text{ Отношение этих амплитуд } \frac{I_{m1}}{I_{m2}} = \frac{e^{-\alpha \cdot t_1}}{e^{-\alpha \cdot (t_1 + T)}} = e^{\alpha \cdot T} \quad (3.16)$$

называется декрементом колебания. Он не зависит от времени t , а зависит лишь от параметров цепи R, L, C . Обычно пользуются не им, а логарифмическим декрементом колебания

$$\ln \left(\frac{I_{m1}}{I_{m2}} \right) = \alpha \cdot T = \frac{T}{\tau} = \Delta. \quad (3.17)$$

В колебательных контурах стремятся сделать Δ как можно меньше, т.к. тогда затухание в контуре почти не сказывается. На графиках $\tau(T, \text{ т.е. } \Delta) \gg 1$ и процесс затухает довольно быстро.

4 Лекция. Операторный метод расчета переходных процессов, теорема разложения

Цель лекции: познакомить с основами операторного метода, переходом от операторных изображений к временным функциям.

4.1 Основы операторного метода, отыскание операторных изображений некоторых функций.

Идея – замена интегро-дифференциальных уравнений алгебраическими путем замены функций времени функциями некоторого комплексного переменного $p = s + j\sigma$, называемого оператором.

Заданная функция времени $f(t)$ – оригинал. Функция $F(p)$, полученная в результате замены переменной, – изображение. Эти функции не равны друг другу. Поэтому между ними ставится знак не равенства, а соответствия, т.е. $f(t) \Leftrightarrow F(p)$.

Преимущество операторного метода – решение системы алгебраических уравнений много легче решения системы дифференциальных уравнений.

Расчет операторным методом сводится к решению двух задач:

- перевод заданных временных функций в операторные (т.е. алгебраизация уравнений);

- перевод вычисленных в результате расчета операторных функций во временные.

Первая задача решается с помощью преобразования Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f(t) \cdot dt. \quad (5.1)$$

Изображение постоянной. $f(t) = A = const.$

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f(t) \cdot dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot A \cdot dt = A \cdot \left| \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^{\infty} = A, \text{ т.е. величина, не зависящая}$$

от времени, не зависит и от новой переменной.

Изображение суммы двух функций.

Пусть известны изображения

$$f_1(t) \Leftrightarrow F_1(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f_1(t) \cdot dt; \quad f_2(t) \Leftrightarrow F_2(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f_2(t) \cdot dt.$$

Найти изображение $f(t) = f_1(t) + f_2(t) \Leftrightarrow F(p).$

Согласно (5.1):

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot [f_1(t) + f_2(t)] \cdot dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f_1(t) \cdot dt + \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f_2(t) \cdot dt = F_1(p) + F_2(p).$$

Изображение показательной функции.

Если задано $f(t) = e^{-at}$, где a - постоянная величина, то

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot e^{-at} \cdot dt = \left| \frac{e^{-(p+a)t}}{-(p+a)} \right|_0^{\infty} = -\frac{1}{p+a} \cdot (0-1) = \frac{1}{p+a}.$$

$$e^{\pm at} \Leftrightarrow \frac{1}{p \mp a}.$$

Изображение синуса и косинуса.

По изображению показательной функции находятся изображения $\sin \omega \cdot t$

и $\cos \omega \cdot t$. По формулам Эйлера $\sin \omega \cdot t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$, $\cos \omega \cdot t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$.

Можно показать, что $\sin \omega \cdot t \Leftrightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$, $\cos \omega \cdot t \Leftrightarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}$.

$$\sin(\omega \cdot t + \alpha) = \sin \omega \cdot t \cdot \cos \alpha + \cos \omega \cdot t \cdot \sin \alpha \Leftrightarrow \frac{\omega \cdot \cos \alpha + p \cdot \sin \alpha}{p^2 + \omega^2}.$$

Изображение производной.

$f'(t) \Leftrightarrow p \cdot F(p) - f(0)$. При нулевых начальных условиях $f'(t) \Leftrightarrow p \cdot F(p)$,

$f''(t) \Leftrightarrow p^2 \cdot F(p)$.

Изображение интеграла.

Найдем изображение $\varphi(t) = \int_0^t f(t) \cdot dt$, если известно изображение функции

$F(p) \Leftrightarrow f(t)$.

$$\varphi(t) = \int_0^t f(t) dt \Leftrightarrow \frac{F(p)}{p} + \frac{\varphi(0)}{p}$$

где $\varphi(0) = \int_a^{0+} f(t) \cdot dt$, $a < 0$.

Если $f(t)$ - ток, протекающий через конденсатор, то $\varphi(t)$ - заряд на его пластинах ($q = \int_0^t i \cdot dt$). Если в начальный момент конденсатор не заряжен,

$\varphi(0) = 0$, то $\varphi(t) = \int_0^t f(t) \cdot dt \Leftrightarrow \frac{F(p)}{p}$. Таким образом, интегрированию функции времени соответствует в операторной форме деление изображение этой функции на оператор p .

Пример - Найти ток $i(t)$ при включении цепи R, L на постоянное напряжение U (см. рисунок 1.1).

Уравнение электрического равновесия цепи имеет вид

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = U.$$

Переходим к операторным изображениям

$$i(t) \Leftrightarrow I(p), \quad \frac{di}{dt} \Leftrightarrow p \cdot I(p), \quad \text{т.к. } i(0) = 0. \quad U \Leftrightarrow \frac{U}{p}.$$

В операторной форме получим: $L \cdot p \cdot I(p) + R \cdot I(p) = \frac{U}{p}$ и изображение

тока

$$I(p) = \frac{U}{(pL + R) \cdot p}.$$

Для обратного перехода к временным функциям преобразуем выражение $I(p)$

$$I(p) = \frac{U}{p \cdot L \cdot \left(\frac{R}{L} + p\right)} \cdot \frac{R}{R} = \frac{U \cdot \frac{R}{L}}{pR \cdot \left(p + \frac{R}{L}\right)}.$$

Известно, что $1 - e^{-at} \Leftrightarrow F(p) = \frac{a}{p \cdot (p + a)}$, а т.к. полученное изображение

$$I(p) \text{ сходно с указанным, то } I(p) \Leftrightarrow i(t) = \frac{U}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

4.2 Теорема разложения

Если операторное изображение $F(p)$ может быть представлено в виде

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}, \quad \text{где } A(p) \text{ и } B(p) - \text{многочлены различных степеней } p, \text{ то}$$

оригинал определяется с помощью теоремы разложения.

$$\text{Пусть } F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_m \cdot p^m}{b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_n \cdot p^n}.$$

Теорема разложения применима к определению оригинала такой операторной функции при следующих условиях:

- степень числителя \leq степени знаменателя, т.е. $m \leq n$;
- все корни знаменателя p_1, p_2, p_n , находимые из условия $B(p) = 0$, различны;
- ни один из корней знаменателя не совпадает с корнями числителя.

Согласно математическому анализу, дробь, удовлетворяющая этим условиям, может быть разложена в ряд, состоящий из простых дробей

$$\frac{A(p)}{B(p)} = \frac{c_1}{p-p_1} + \frac{c_2}{p-p_2} + \dots + \frac{c_k}{p-p_k} + \dots + \frac{c_n}{p-p_n} \quad (5.2)$$

где p_1, p_2, p_n - корни знаменателя.

Найдем коэффициенты уравнения (5.2). Для определения коэффициента c_k умножим обе части равенства (5.2) на $(p-p_k)$, а затем приравняем $p = p_k$

$$\frac{A(p)}{B(p)} \cdot (p-p_k) = c_1 \cdot \frac{p-p_k}{p-p_1} + c_2 \cdot \frac{p-p_k}{p-p_2} + \dots + c_k + \dots + c_n \cdot \frac{p-p_k}{p-p_n}. \quad (5.3)$$

Если в (5.3) подставить $p = p_k$, то в правой части остается только c_k , а в левой получается неопределенность, т.к. $(p-p_k)_{p=p_k} = 0$ и $B(p)_{p=p_k} = 0$. Раскроем ее

$$c_k = \lim_{p \rightarrow p_k} \left[\frac{A(p)}{B(p)} \cdot (p-p_k) \right] = A(p_k) \cdot \lim_{p \rightarrow p_k} \left[\frac{p-p_k}{B(p)} \right] = A(p_k) \cdot \frac{1}{[B'(p)]_{p=p_k}}, \text{ т.е. } c_k = \frac{A(p_k)}{B'(p_k)}.$$

Подставив найденные значения коэффициентов в $F(p)$, получим

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{A(p_k)}{B'(p_k)} \cdot \frac{1}{p-p_k} \right], \text{ но } \frac{1}{p-p_k} \Leftrightarrow e^{p_k \cdot t}. \text{ Следовательно}$$

$$F(p) = \frac{F(p)}{B(p)} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k) \cdot e^{p_k \cdot t}}{B'(p_k)} \quad - \text{ теорема разложения.} \quad (5.4)$$

Если операторное изображение получилось в виде $F(p) = \frac{G(p)}{p \cdot H(p)}$, то теорема разложения запишется в виде

$$F(p) = \frac{G(p)}{p \cdot H(p)} \Leftrightarrow \frac{G(0)}{H(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{G(p_k) \cdot e^{p_k \cdot t}}{p_k \cdot H'(p_k)} \quad (5.5)$$

где $G(0)$ и $H(0)$ - числитель и знаменатель дроби $F(p)$ при $p = 0$.

5 Лекция. Схемы замещения элементов, основные законы электрической цепи, расчет переходных процессов операторным методом

Цель лекции: усвоить операторный метод расчета переходных процессов в электрических цепях.

5.1 Расчетные схемы основных элементов электрической цепи для переходных процессов

Пусть параметры заменяемых элементов $R, L, C = const$. Операторные изображения тока и напряжения определяются как

$$i(t) \Leftrightarrow I(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot i(t) \cdot dt, \quad u(t) \Leftrightarrow U(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot u(t) \cdot dt, \text{ а их начальные}$$

значения $i(0)$ и $u(0)$.

Ток и напряжение на активном сопротивлении R связаны законом Ома $u = i \cdot R$. В операторной форме $U(p) = I(p) \cdot R$, т.е. $Z_R(p) = R$ (рисунок 6.1).

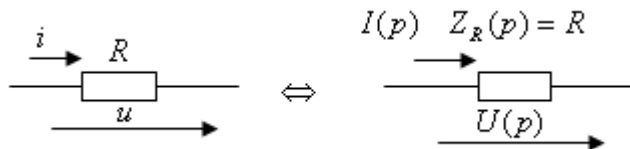


Рисунок 5.1

В случае идеальной индуктивности $u = L \cdot \frac{di}{dt}$, а в операторной форме $U(p) = p \cdot L \cdot I(p) - L \cdot i(0)$ (рисунок 6.2).

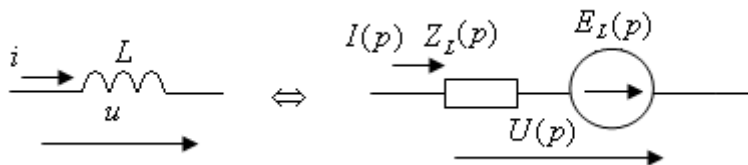


Рисунок 5.2

Таким образом, операторная схема включает в себя $Z_L(p) = L \cdot p$ и $E_L(p) = L \cdot i(0)$ - внутреннюю ЭДС, получающуюся вследствие ненулевых начальных условий и совпадающую по направлению с током.

Ток конденсатора $i = C \frac{du_C}{dt}$. Его операторное изображение $I(p) = C \cdot [p \cdot U(p) - U(0)]$. Первое слагаемое можно рассматривать как $\frac{U(p)}{Z_C(p)}$ (где $Z_C(p) = \frac{1}{C \cdot p}$), а второе – как ток, определяемый начальным напряжением на конденсаторе $U(0)$ (рисунок 6.3). $E_C(p) = -\frac{U(0)}{p}$.

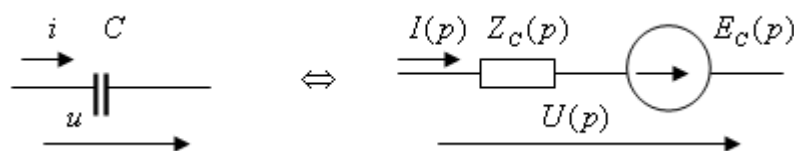


Рисунок 5.3

5.2 Основные законы электрической цепи в операторной форме

Закон Ома. Он применяется только при включении строго пассивной цепи, не имеющей никаких источников энергии, т.е. при нулевых начальных условиях (рисунок 6.4).



Рисунок 5.4

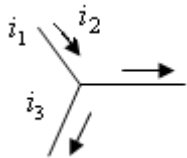
Пусть известно, что $i(0) = 0$ и $u_c(0) = 0$. Тогда $U(p) = (R + p \cdot L + \frac{1}{C \cdot p}) \cdot I(p)$,

или
$$U(p) = Z(p) \cdot I(p) \tag{5.1}$$

где $Z(p) = R + p \cdot L + \frac{1}{C \cdot p}$.

$Z(p)$ легко получить из формулы сопротивления цепи в комплексной форме $Z(p) = R + j\omega \cdot L + \frac{1}{j\omega \cdot C}$, заменив $j\omega$ на p .

Первый закон Кирхгофа.



$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \Leftrightarrow I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) = 0$. В общем случае

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0 \tag{5.2}$$

Второй закон Кирхгофа.

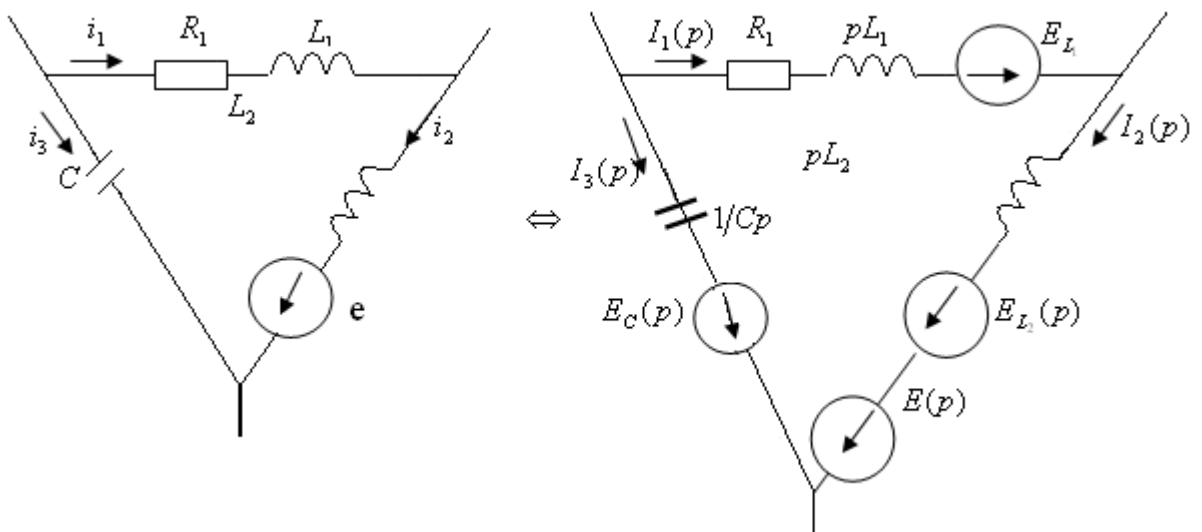


Рисунок 5.5

Составим уравнение по второму закону Кирхгофа в дифференциальной форме $-\frac{1}{C} \cdot \int i_3 \cdot dt + i_1 \cdot R_1 + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} = e$.

Переходя к операторной форме, получим

$$-I_3(p) \cdot \frac{1}{C \cdot p} + I_1(p) \cdot (R_1 + p \cdot L_2) + I_2(p) \cdot p \cdot L_2 = E(p) + E_{L_1}(p) + E_{L_2}(p) - E_C(p),$$

где $E_{L_1}(p) = L_1 \cdot i_1(0)$, $E_{L_2}(p) = L_2 \cdot i_2(0)$, $E_C(p) = -\frac{U_C(0)}{p}$.

В общем случае для любого замкнутого контура:

$$\sum_{k=1}^n I_k \cdot Z_k(p) = \sum_{k=1}^n E_k(p). \quad (5.3)$$

Причем, здесь при обходе контура должны учитываться и ЭДС, получающиеся за счет ненулевых начальных условий.

Расчет операторных схем замещения можно вести любым, известным для расчета цепей постоянного тока при установившемся режиме способом.

5.3 Расчет переходных процессов операторным методом

Порядок расчета цепи указанным методом:

- заменить заданную цепь расчетной операторной схемой замещения, в которой вместо ЭДС источников также стоят их операторные изображения;
- рассчитать схему замещения любым из известных методов;
- переходя от операторных функций к оригиналам, найти действительные токи и напряжения цепи при переходном режиме.

Пример 1 - Для цепи рисунка 6.6 дано: u, R_1, R_2, L . Найти токи $i_1(t), i_2(t), i_3(t)$.

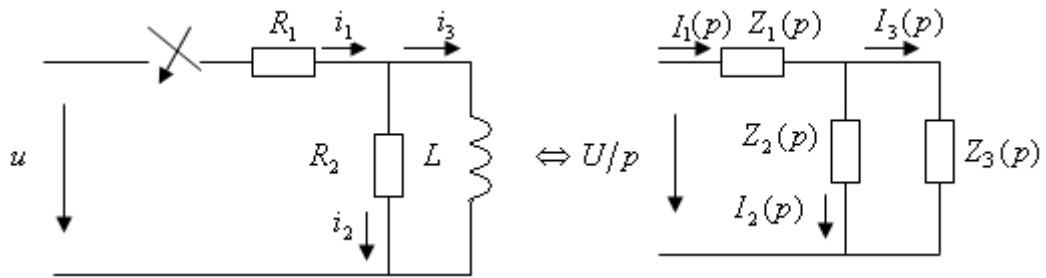


Рисунок 6.6

Составляем расчетную схему замещения, где $U(p) = \frac{U}{p}$, $Z_1(p) = R_1$,

$$Z_2(p) = R_2, \quad Z_3(p) = p \cdot L.$$

Рассчитываем полученную цепь по закону Ома

$$I_1(p) = \frac{\frac{U}{p}}{Z_1(p) + \frac{Z_2(p) \cdot Z_3(p)}{Z_2(p) + Z_3(p)}} = \frac{\frac{U}{p}}{R_1 + \frac{R_2 \cdot p \cdot L}{R_2 + p \cdot L}} = \frac{U(R_2 + p \cdot L)}{[R_1 \cdot R_2 + p \cdot L(R_1 + R_2)] \cdot p}.$$

По теореме разложения

$$I_1(p) = U \cdot \frac{G(p)}{p \cdot H(p)} \Leftrightarrow u \cdot \left[\frac{G(0)}{H(0)} + \frac{G(p) \cdot e^{pt}}{p \cdot H'(p)} \right] = i_1 \quad (5.4)$$

где $H(p) = (R_1 \cdot R_2 + p \cdot L \cdot (R_1 + R_2)) = 0$, $H'(p) = L \cdot (R_1 + R_2)$,

$$p = -\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}, \quad G(0) = R_2, \quad G(p) = R_2 + L \cdot \left[-\frac{R_1 \cdot R_2}{L \cdot (R_1 + R_2)} \right] = \frac{R_2^2}{R_1 + R_2}, \quad H(0) = R_1 \cdot R_2.$$

Подставляя найденные величины в (6.4), получим

$$i_1 = u \cdot \left\{ \frac{R_2}{R_1 \cdot R_2} + \frac{R_2^2 \cdot e^{p \cdot t}}{(R_1 + R_2) \cdot \left[-\frac{R_1 \cdot R_2}{L \cdot (R_1 + R_2)} \right] \cdot (R_1 + R_2) \cdot L} \right\} = \frac{U}{R_1} - \frac{U \cdot R_2 \cdot e^{-\frac{R_1 \cdot R_2}{L \cdot (R_1 + R_2)} \cdot t}}{R_1 \cdot (R_1 + R_2)}.$$

Остальные токи можно найти, используя законы Кирхгофа

$$i_2 = \frac{U - R_1 \cdot i_1}{R_2} = \frac{U}{R_1 + R_2} \cdot e^{-\frac{R_1 \cdot R_2}{L \cdot (R_1 + R_2)} \cdot t}, \quad i_3 = i_1 - i_2 = \frac{U}{R_1} \cdot \left[1 - e^{-\frac{R_1 \cdot R_2}{L \cdot (R_1 + R_2)} \cdot t} \right].$$

Пример 2 - Дано: U, C, R_1, R_2 (рисунок 6.7). Определить $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, $u_c(t)$.

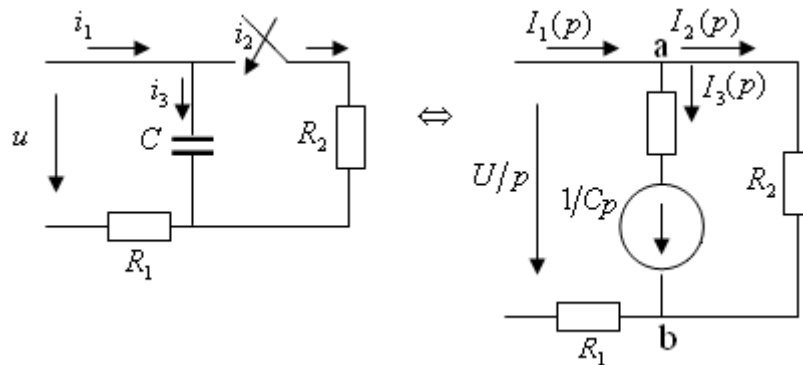


Рисунок 6.7

Составляем расчетную схему замещения. Здесь конденсатор C заменяется изображением сопротивления $1/Cp$ и ЭДС $E_c(p) = -\frac{U_c(0)}{p} - \frac{U}{p}$, т.к. до начала переходного процесса тока в контуре и падения напряжения в R_1 не было.

Расчет схемы замещения удобно вести методом двух узлов

$$U_{ab}(p) = \frac{\frac{U}{p \cdot R_1} + \frac{U_c(0)}{p} \cdot C \cdot p}{\frac{1}{R_1} + C \cdot p + \frac{1}{R_2}} = \frac{U \cdot R_2 \cdot (1 + R_1 \cdot C \cdot p)}{p \cdot (R_1 + R_2 + R_1 \cdot R_2 \cdot C \cdot p)} = U \cdot R_2 \cdot \frac{G(p)}{p \cdot H(p)}.$$

Определяем $u_c(t)$ с помощью теоремы разложения:

$$u_c(t) = U \cdot R_2 \cdot \left[\frac{G(0)}{H(0)} + \frac{G(p) \cdot e^{p \cdot t}}{p \cdot H'(p)} \right]$$

где $G(p) = 1 + R_1 \cdot C \cdot \left(-\frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot C} \right) = 1 - \frac{R_1 + R_2}{R_2} = -\frac{R_1}{R_2}$;

$$H(p) = R_1 + R_2 + R_1 \cdot R_2 \cdot C \cdot p = 0;$$

$$H'(p) = R_1 \cdot R_2 \cdot C;$$

$$p = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot C};$$

$$G(0) = 1;$$

$$H(0) = R_1 + R_2.$$

Тогда

$$u_c(t) = U \cdot R_2 \cdot \left[\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{-\frac{R_1}{R_2} \cdot e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot C} t}}{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot C} \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot C} \right] = U \cdot \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot C} t} \right).$$

Остальные величины можно определить через u_c , не прибегая к операторным функциям $i_1 = \frac{U - u_c}{R_1}$; $i_2 = \frac{u_c}{R_2}$; $i_3 = C \cdot \frac{du_c}{dt} = i_1 - i_2$.

Цепи с распределенными параметрами

6 Лекция. Токи и напряжения в длинных линиях, уравнения однородной длинной линии (общий случай), установившийся синусоидальный режим в однородной линии

Цель лекции: познакомить с основными понятиями и уравнениями длинной линии в общем случае, с установившимся синусоидальным режимом в однородной линии.

6.1 Основные понятия, токи и напряжения в длинных линиях

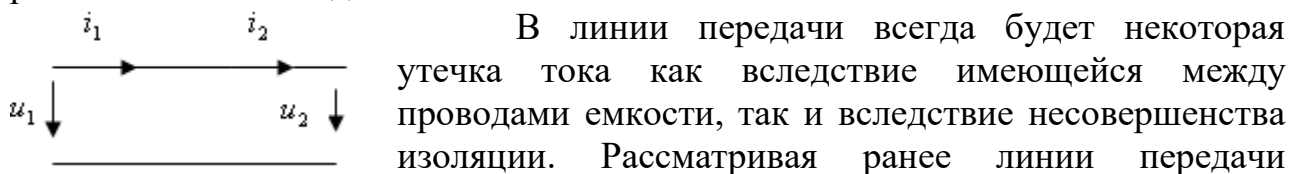
В рассмотренном ранее считалось, что в каждой цепи магнитному и электрическому полю и потерям на тепло, а значит, и связанными с ними параметрами R, L, C отводится свое определенное место. В реальных цепях тепло при протекании тока выделяется во всех проводниках, магнитное и электрическое поля также связаны со всеми частями цепи. Также предполагалось, что распространение энергии вдоль цепи происходит с бесконечной скоростью, что справедливо только для цепей, протяженность которых много меньше, чем длина электромагнитной волны, дающей в эту цепь энергию.

Длиной волны называется расстояние, на которое распространяется электромагнитная волна в течение одного периода колебаний $\lambda = v \cdot T = \frac{v}{f}$.

При $f = 50$ Гц $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3 \cdot 10^5}{50} = 6000$ км. При постоянном токе $f = 0$ и $\lambda = \infty$.

В цепях, размеры которых соизмеримы с λ , приходится учитывать, что электрическое и магнитное поля, связанные с этими цепями, распределены по всем участкам цепи, как по всем участкам происходит и превращение электромагнитной энергии в тепловую. Такие цепи называются *цепями с распределенными параметрами*. К ним относятся линии передачи длиной 100 км и более, линии связи, радиотехнические устройства. Эти цепи называются

еще *длинными линиями*, но следует помнить, что они являются длинными только для низких частот. При высоких же частотах λ измеряется метрами и даже долями метра (например, при $f = 10^6$ Гц $\lambda = 300$ м), так что антенна длиной в несколько метров вполне соизмерима с длиной волны и должна рассчитываться как длинная линия.



В линии передачи всегда будет некоторая утечка тока как вследствие имеющейся между проводами емкости, так и вследствие несовершенства изоляции. Рассматривая ранее линии передачи

небольшой длины при $f = 50$, Гц мы считали, что токи в начале i_1 и конце i_2 линии равны между собой. При больших напряжениях и высоких частотах недопустимо пренебрегать токами утечки. Следовательно, величина токов в проводах линии будет меняться.

Кроме того, токи вызывают падение напряжения в сопротивлениях проводов линии и вызывают вокруг проводов переменное магнитное поле, которое наводит в проводах ЭДС самоиндукции. На преодоление последней также затрачивается напряжение. Следовательно, и напряжение между проводами также непрерывно меняется вдоль линии.

Указанные изменения тока и напряжения учитываются тем, что линия разбивается на элементарные участки и считается, что каждый участок обладает активным сопротивлением R , индуктивностью L , а между проводами – активной проводимостью g и емкостью C , т.е. считаем параметры, характеризующие линию, распределенными вдоль всей ее длины. Отсюда и название – цепи с распределенными параметрами. Внутри же каждого участка параметры линии считают сосредоточенными.

Будем считать, что R , L , g и C равномерно распределены вдоль линии. Такая линия называется однородной. Обычно линия характеризуется параметрами, отнесенными к 1 км ее длины:

- R_0 – активное сопротивление прямого и обратного проводов линии;
- L_0 – индуктивность петли, образованной прямым и обратным проводами;
- C_0 – емкость между проводами;
- g_0 – утечка между проводами.

6.2 Уравнения однородной длинной линии в общем случае

Составим дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют токи и напряжения в любой момент времени. Для этого представим линию в виде множества соединенных цепочкой бесконечно малых элементов длиной dx . Каждый из этих элементов имеет активное сопротивление $R_0 \cdot dx$, индуктивность $L_0 \cdot dx$, утечку $g_0 \cdot dx$ и емкость $C_0 \cdot dx$ (см рисунок 6.1).

За начало отсчета расстояний примем нагрузочный конец, т.к. чаще задаются параметры потребителей. Обозначим через x – расстояние

рассматриваемого элемента от нагрузочного конца. Поскольку напряжение и ток зависят от двух аргументов (x и времени t), то расчет придется вести в частных производных и приращения u и i при изменении расстояния на dx равны $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx$ и $\frac{\partial i}{\partial x} \cdot dx$.

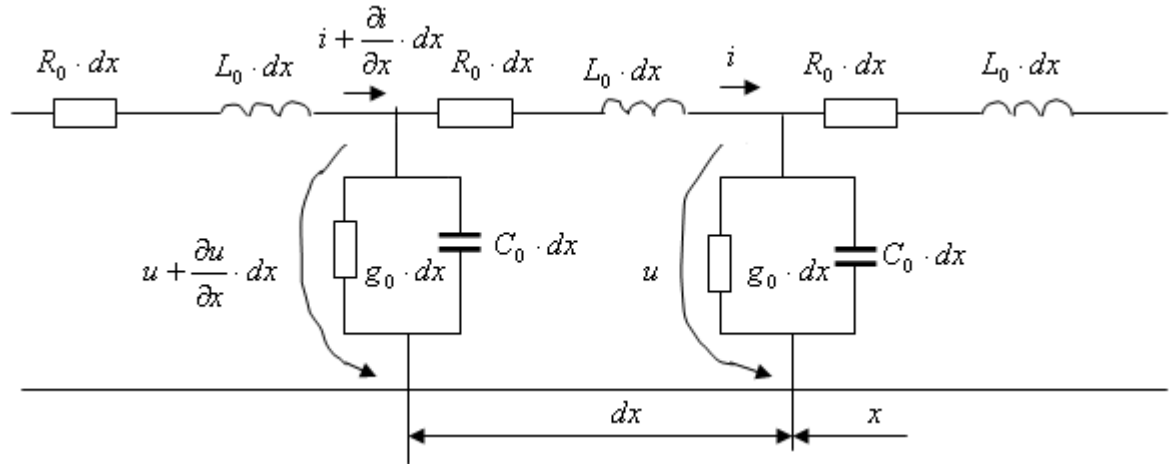


Рисунок 6.1

По второму закону Кирхгофа $u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx = R_0 \cdot dx \cdot i + L_0 \cdot dx \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + u$.

По первому закону Кирхгофа

$$i + \frac{\partial i}{\partial x} \cdot dx = i + g_0 \cdot dx \cdot (u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx) + C_0 \cdot dx \cdot (\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial t} \cdot dx).$$

Сократив оба уравнения на dx и отбросив во втором уравнении величины второго порядка малости, получим основные уравнения однородной длинной линии в общем случае при отсчете расстояний от нагрузочного конца линии

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= R_0 \cdot i + L_0 \cdot \frac{\partial i}{\partial t}, \\ \frac{\partial i}{\partial x} &= g_0 \cdot u + C_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Если отсчет вести от генераторного конца, то уравнения запишутся в несколько ином виде

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= R_0 \cdot i + L_0 \cdot \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= g_0 \cdot u + C_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

6.3 Установившийся синусоидальный режим в однородной линии

Здесь токи и напряжения в любой точке линии будут синусоидальны, причем фазы тока и напряжения в общем случае различны.

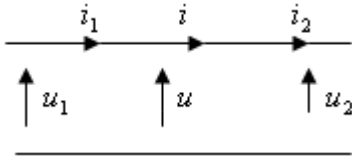


Рисунок 6.2

Пусть в некоторой точке, находящейся на расстоянии x от нагрузочного конца линии (рисунок 6.2), напряжение и ток соответственно равны

$$\begin{aligned} u &= U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi), \\ i &= I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi - \varphi). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Переходя от мгновенных значений синусоид к их комплексным изображениям, можно записать, что

$$u \longleftrightarrow \dot{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi}, \quad i \longleftrightarrow \dot{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j(\psi - \varphi)}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \longleftrightarrow j\omega \cdot \dot{U}, \quad \frac{\partial i}{\partial t} \longleftrightarrow j\omega \cdot \dot{I}. \quad (6.4)$$

Полученные комплексы не зависят от времени. Следовательно, заменив синусоидальные функции соответствующими комплексными изображениями, получим дифференциальные уравнения для величин, зависящих только от одной переменной – расстояния x , и расчет можно вести без частных производных.

Уравнения (6.1) в символической форме примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{U}}{dx} &= R_0 \cdot \dot{I} + j\omega \cdot L_0 \cdot \dot{I}, \\ \frac{d\dot{I}}{dx} &= g_0 \cdot \dot{U} + j\omega \cdot C_0 \cdot \dot{U}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} R_0 + j\omega \cdot L_0 &= Z_0; \\ g_0 + j\omega \cdot C_0 &= Y_0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

где Z_0 - продольное сопротивление линии на единицу ее длины;

Y_0 - поперечная проводимость линии на единицу длины.

Так как Z_0 и Y_0 относятся к разным элементам линии, то $Y_0 \cdot Z_0 \neq 1$.

Подставив (6.6) в (6.5), получим
$$\frac{d\dot{U}}{dx} = \dot{I} \cdot Z_0, \quad (6.7)$$

$$\frac{d\dot{I}}{dx} = \dot{U} \cdot Y_0. \quad (6.8)$$

Продифференцируем (6.7) и (6.8) по x еще раз и подстановкой разделим искомые переменные

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = Z_0 \cdot \frac{d\dot{I}}{dx} = Z_0 \cdot Y_0 \cdot \dot{U}, \quad (6.9)$$

$$\frac{d^2\dot{I}}{dx^2} = Y_0 \cdot \frac{d\dot{U}}{dx} = Z_0 \cdot Y_0 \cdot \dot{I}. \quad (6.10)$$

Решим уравнение (8.9).

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} - Z_0 \cdot Y_0 \cdot \dot{U} = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$\dot{U} = \dot{A}_1 \cdot e^{\bar{\gamma}_1 \cdot x} + \dot{A}_2 \cdot e^{\bar{\gamma}_2 \cdot x} \quad (6.11)$$

где корни характеристического уравнения $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_2$ и постоянные интегрирования \dot{A}_1 и \dot{A}_2 являются в общем случае комплексными числами.

Характеристическое уравнение в нашем случае будет

$$\bar{\gamma}^2 - Z_0 \cdot Y_0 = 0. \text{ Отсюда } \bar{\gamma}_1 = \sqrt{Z_0 \cdot Y_0} = \bar{\gamma}, \quad \bar{\gamma}_2 = -\sqrt{Z_0 \cdot Y_0} = -\bar{\gamma}. \quad (6.12)$$

γ - коэффициент распространения волны. Он характеризует изменение напряжения \dot{U} и тока \dot{I} вдоль линии на протяжении 1 км. В алгебраической форме комплекс $\bar{\gamma} = \alpha + j\beta$

где α - коэффициент затухания волны на 1 км, $[\alpha] = \left[\frac{1}{\text{км}} \right]$;

β - коэффициент изменения фазы на 1 км, $[\beta] = \left[\frac{1}{\text{км}} \right]$.

$$\text{С учетом (6.12) напряжение } \dot{U} = \dot{A}_1 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot x} + \dot{A}_2 \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x}. \quad (6.13)$$

Для определения общего выражения тока подставим (6.13) в (6.7)

$$\dot{I} = \frac{1}{Z_0} \cdot \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\bar{\gamma}}{Z_0} \cdot \dot{A}_1 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot x} - \frac{\bar{\gamma}}{Z_0} \cdot \dot{A}_2 \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x}. \quad (6.14)$$

Перепишем (6.14) в виде

$$\dot{I} = \frac{\dot{A}_1}{Z_B} \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot x} - \frac{\dot{A}_2}{Z_B} \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x} \quad (6.15)$$

$$\text{где } Z_B = \frac{Z_0}{\bar{\gamma}} = \frac{Z_0}{\sqrt{Z_0 \cdot Y_0}} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}, \quad [Z_B] = \sqrt{\frac{[Z_0]}{[Y_0]}} = \sqrt{\frac{\text{Ом/км}}{\frac{1}{\text{Ом}} \cdot \text{км}}} = \text{Ом} \quad (6.16)$$

волновое или характеристическое сопротивление линии.

$$Z_B = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega \cdot L_0}{g_0 + j\omega \cdot C_0}} = z_B \cdot e^{j\theta}$$

$$\text{где } z_B = \sqrt{\frac{z_0}{y_0}} = \sqrt{\frac{R_0^2 + (\omega \cdot L_0)^2}{g_0^2 + (\omega \cdot C_0)^2}}; \quad \theta = \frac{1}{2} \cdot \text{arctg} \frac{\omega \cdot (g_0 \cdot L_0 - R_0 \cdot C_0)}{R_0 \cdot g_0 + \omega^2 \cdot L_0 \cdot C_0}. \quad (6.17)$$

Для воздушных линий $z_B = 300 - 600$ Ом, для кабельных ≈ 50 Ом.

Постоянные интегрирования \dot{A}_1 и \dot{A}_2 определяются из граничных условий:

$$\text{при } x=0 \quad \dot{U} = \dot{U}_2, \quad \dot{I} = \dot{I}_2. \quad (6.18)$$

Используем уравнения (6.13) и (6.15)

$$\dot{A}_1 + \dot{A}_2 = \dot{U}_2, \quad \dot{A}_1 - \dot{A}_2 = Z_B \cdot \dot{I}_2, \text{ откуда}$$

$$\dot{A}_1 = \frac{\dot{U}_2 + Z_B \cdot \dot{I}_2}{2} = A_1 \cdot e^{j\psi_1}, \quad \dot{A}_2 = \frac{\dot{U}_2 - Z_B \cdot \dot{I}_2}{2} = A_2 \cdot e^{j\psi_2}. \quad (6.19)$$

Подставив \dot{A}_1 и \dot{A}_2 в (6.13) и (6.15), определим напряжение и ток

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_2 + Z_B \cdot \dot{I}_2}{2} \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot x} + \frac{\dot{U}_2 - Z_B \cdot \dot{I}_2}{2} \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x} = A_1 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot e^{j(\beta \cdot x + \psi_1)} + A_2 \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot e^{j(\psi_2 - \beta \cdot x)},$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_2 + Z_B \cdot \dot{I}_2}{2 \cdot Z_B} \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot x} - \frac{\dot{U}_2 - Z_B \cdot \dot{I}_2}{2 \cdot Z_B} \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x} = \frac{A_1}{z_B} \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot e^{j(\psi_1 + \beta \cdot x - \theta)} - \frac{A_2}{z_B} \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot e^{j(\psi_2 - \beta \cdot x - \theta)}. \quad (6.20)$$

Отсюда мгновенные значения напряжения и тока

$$u = A_1 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\omega \cdot t + \beta \cdot x + \psi_1) + A_2 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_2 - \beta \cdot x),$$

$$i = \frac{A_1}{z_B} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_1 + \beta \cdot x - \theta) - \frac{A_2}{z_B} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_2 - \beta \cdot x - \theta). \quad (6.21)$$

7 Лекция. Бегущие волны, уравнения длинной линии в гиперболических функциях

Цель лекции: познакомить с расчетом движущихся вдоль линии напряжений и токов, представляемых как результат наложения падающей и отраженной волн, с уравнениями длинной линии в гиперболических функциях при синусоидальном режиме.

7.1 Бегущие волны

Каждое из слагаемых правой части (6.21) можно рассматривать как волну, движущуюся в направлении возрастания или убывания x и при этом затухающую в направлении движения. Это нетрудно показать, построив их графики изменения вдоль линии.

На рисунке 7.1 представлен график изменения первого слагаемого напряжения $A_1 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_1 + \beta \cdot x)$ в разные моменты времени. Сначала с обеих сторон от оси абсцисс строятся огибающие $A_1 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{\alpha \cdot x}$, в которые затем вписаны затухающие синусоиды.

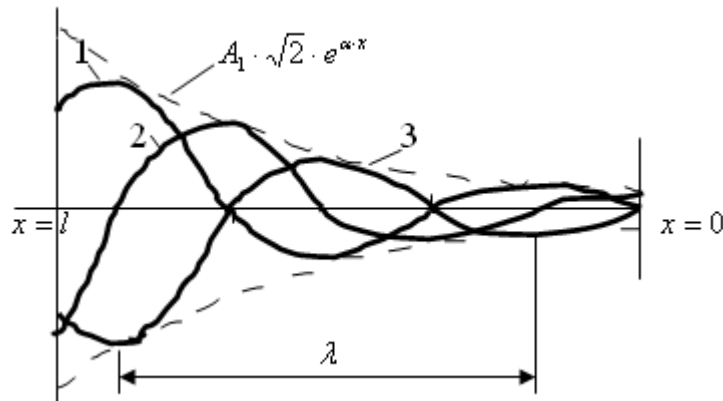


Рисунок 7.1

Кривая 1 построена для момента времени $t = t_1$, когда $\omega \cdot t_1 + \psi_1 = 0$. Тогда $\sin(\omega \cdot t_1 + \beta \cdot x + \psi_1) = \sin \beta \cdot x$, и, задаваясь значениями $\beta \cdot x$, равными $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ и т.д., получим различные точки кривой: при $\sin \beta \cdot x = 0$ они лежат на оси абсцисс, при $\sin \beta \cdot x = \pm 1$ кривая касается огибающих. Через четверть периода ($t = t_2$) $\sin(\omega \cdot t_2 + \psi_1) = \frac{\pi}{2}$ и $\sin(\omega \cdot t_2 + \psi_1 + \beta \cdot x) = \cos \beta \cdot x$. Задаваясь теми же значениями

$\beta \cdot x$, строим кривую 2. Кривая 3 построена еще через четверть периода, т.е. при $t = t_3 = t_2 + \frac{T}{4}$, что соответствует $\omega \cdot t_3 + \psi_1 = \pi$ и $\sin(\omega \cdot t_3 + \psi_1 + \beta \cdot x) = -\sin \beta \cdot x$.

При сравнении этих кривых получается, что волна, постепенно затухая, как бы движется вдоль линии от генератора к нагрузке с некоторой скоростью v .

v - фазовая скорость, т.е. скорость перемещения точек, фаза которых остается неизменной. Ее можно определить из условия $\omega \cdot t + \psi_1 + \beta \cdot x = const$,

$$\frac{d(\omega \cdot t + \psi_1 + \beta \cdot x)}{dt} = \omega + \beta \cdot \frac{dx}{dt} = 0, \text{ откуда } v = -\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (7.1)$$

Минус получился потому, что при движении волны от генератора к приемнику у нас x уменьшается. Аналогично можно показать, что второе слагаемое представляет собой волну, движущуюся с той же скоростью $v = \frac{\omega}{\beta}$ от приемника к генератору (т.е. в сторону возрастания x), затухая в направлении движения.

Такие волны, движущиеся вдоль линии, называются *бегущими*. Волна, идущая от генератора к приемнику, *падающая* и обозначается индексом φ . Волна, идущая в обратном направлении, *отраженная*, и обозначается индексом ψ .

Истинную картину распределения напряжения вдоль линии в данный момент времени можно получить, сложив алгебраически ординаты обеих волн для этого момента времени.

Длину волны λ можно найти как расстояние между точками, фазы колебания которых отличаются на $2 \cdot \pi$: $\beta \cdot \lambda = 2 \cdot \pi$, т.е. $\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{\beta}$. (7.2)

Из выражения тока следует, что i также можно рассматривать как результат наложения двух затухающих синусоидальных волн, бегущих навстречу друг другу со скоростью v .

Условимся о положительных направлениях для падающих и отраженных волн. Обе слагающие напряжения имеют знаки «+», так что естественно выбрать положительные направления u_φ и u_ψ , совпадающими с положительным направлением действительного напряжения u .

Для тока имеются две возможности:

– считать положительное направление i_φ , совпадающим с положительным направлением i , а положительное направление i_ψ – противоположным ему, т.к. $i = i_\varphi - i_\psi$;

– для обеих составляющих взять положительные направления, как для действительного тока, находить последний как сумму $i = i_\varphi + i_\psi$, а минус включить в состав второго слагаемого. Такой выбор удобнее для однотипности записи уравнений, им и будем пользоваться.

Можно записать
$$\dot{U} = \dot{U}_\varphi + \dot{U}_\psi,$$

$$i = i_{\varphi} + i_{\psi}, \quad (7.3)$$

где $\dot{U}_{\varphi} = \dot{A}_1 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot x}$;

$\dot{U}_{\psi} = \dot{A}_2 \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x}$;

$i_{\varphi} = \frac{\dot{A}_1}{Z_B} \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot x}$;

$$i_{\psi} = \frac{\dot{A}_2}{-Z_B} \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x}. \quad (7.4)$$

Из (7.4) следует, что ток и напряжение каждой волны связаны между собой законом Ома

$$i_{\varphi} = \frac{\dot{U}_{\varphi}}{Z_B}, \quad i_{\psi} = \frac{\dot{U}_{\psi}}{-Z_B}. \quad (7.5)$$

Физически в линии существуют только действительные токи и напряжения.

7.2 Уравнения длинной линии в гиперболических функциях

Перепишем уравнения (7.20), сгруппировав члены, содержащие напряжение \dot{U}_2 и ток i_2 :

$$\dot{U} = \frac{e^{\bar{\gamma} \cdot x} + e^{-\bar{\gamma} \cdot x}}{2} \cdot \dot{U}_2 + Z_B \cdot \frac{e^{\bar{\gamma} \cdot x} - e^{-\bar{\gamma} \cdot x}}{2} \cdot i_2,$$

$$i = \frac{e^{\bar{\gamma} \cdot x} - e^{-\bar{\gamma} \cdot x}}{2 \cdot Z_B} \cdot \dot{U}_2 + \frac{e^{\bar{\gamma} \cdot x} + e^{-\bar{\gamma} \cdot x}}{2} \cdot i_2,$$

но $\frac{e^{\bar{\gamma} \cdot x} + e^{-\bar{\gamma} \cdot x}}{2} = ch\bar{\gamma} \cdot x$, $\frac{e^{\bar{\gamma} \cdot x} - e^{-\bar{\gamma} \cdot x}}{2} = sh\bar{\gamma} \cdot x$. (7.6)

С учетом (7.6) уравнения длинной линии при установившемся синусоидальном режиме примут вид

$$\dot{U} = ch\bar{\gamma} \cdot x \cdot \dot{U}_2 + Z_B \cdot sh\bar{\gamma} \cdot x \cdot i_2,$$

$$i = \frac{sh\bar{\gamma} \cdot x}{Z_B} \cdot \dot{U}_2 + ch\bar{\gamma} \cdot x \cdot i_2. \quad (7.7)$$

Если требуется найти напряжение и ток на входе линии, т.е. \dot{U}_1 , i_1 , то нужно подставить в эти уравнения $x = l$.

(7.7) – уравнения симметричного пассивного четырехполюсника, постоянные которого равны соответственно

$$\bar{A} = \bar{D} = ch\bar{\gamma} \cdot x, \quad \bar{B} = Z_B \cdot sh\bar{\gamma} \cdot x, \quad \bar{C} = \frac{sh\bar{\gamma} \cdot x}{Z_B}.$$

Как и всякий симметричный четырехполюсник, линия легко может быть заменена Т-образной или П-образной симметричной схемой замещения, параметры которой можно определить через постоянные четырехполюсника.

Некоторую трудность представляет определение гиперболических функций от комплексного аргумента, которые можно определить или из (7.8)

$$ch\bar{\gamma}x = ch\alpha x \cdot ch(j\beta x) + sh\alpha x \cdot sh(j\beta x) = ch\alpha x \cdot \cos \beta x + jsh\alpha x \cdot \sin \beta x,$$

$$\operatorname{sh} \bar{\gamma} x = \operatorname{sh} \alpha x \cdot \operatorname{ch}(j\beta x) + \operatorname{ch} \alpha x \cdot \operatorname{sh}(j\beta x) = \operatorname{sh} \alpha x \cdot \cos \beta x + j \operatorname{ch} \alpha x \cdot \sin \beta x, \quad (7.8)$$

т.к. $\operatorname{ch}(j\beta x) = \cos \beta x$, $\operatorname{sh}(j\beta x) = j \sin \beta x$,

или по формулам Эйлера

$$\operatorname{ch} \bar{\gamma} \cdot x = \frac{e^{\alpha x}}{2} \cdot e^{j\beta x} + \frac{e^{-\alpha x}}{2} \cdot e^{-j\beta x}, \quad \operatorname{sh} \bar{\gamma} \cdot x = \frac{e^{\alpha x}}{2} \cdot e^{j\beta x} - \frac{e^{-\alpha x}}{2} \cdot e^{-j\beta x}. \quad (7.8a)$$

8 Лекция. Однородная линия при различных режимах работы, линия без потерь

Цель лекции: познакомить с режимами согласованной нагрузки, холостого хода, короткого замыкания, уравнениями длинной линии без потерь.

8.1 Режим согласованной нагрузки

Пусть сопротивление приемника, включенного на выходе линии, равно ее волновому сопротивлению $Z_2 = Z_B = z_B \cdot e^{j\theta}$.

Тогда напряжение $\dot{U}_2 = Z_2 \cdot \dot{I}_2 = Z_B \cdot \dot{I}_2$ и уравнения (7.20) примут вид

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot x}, \quad \dot{I} = \dot{I}_2 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot x}, \quad (8.1)$$

т.е. где бы ни производились измерения, в любой точке линии отношение напряжения к току остается неизменным

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = Z_B. \quad (8.2)$$

Следовательно, Z_B - такое сопротивление, замкнув на которое выходные зажимы линии, будем иметь между входными зажимами точно такое же сопротивление Z_B .

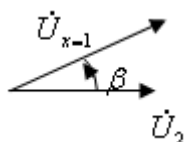
Из (7.20) следует, что при $Z_2 = Z_B$ никакого отражения от нагрузки нет ($U_{\psi} = 0, I_{\psi} = 0$). В линии находится только падающая волна.

Рассматриваемый режим называется режимом *согласованной нагрузки*. Т.к. при этом в линии имеется только одна волна, то можно точнее выяснить смысл коэффициента распространения $\bar{\gamma} = \alpha + j\beta$.

$\dot{U} = \dot{U}_2 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot x} = \dot{U}_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{j\beta x}$, т.е. модуль напряжения изменяется по закону $U = U_2 \cdot e^{\alpha x}$.

Если $x = 1$, то $U_{x=1} = U_2 \cdot e^{\alpha}$, а коэффициент затухания $\alpha = \ln \frac{U_{x=1}}{U_2}$. (8.3)

Угол между векторами $\dot{U}_{x=1}$ и \dot{U}_2 равен коэффициенту изменения фазы β :



β - это угол, на который повернется вектор напряжения или тока на длине $x = 1$ при согласованной нагрузке.

Так как ток \dot{I} и напряжение \dot{U} меняются вдоль линии по одному и тому же закону, то и угол сдвига между ними также в любой точке будет одинаков и равен углу волнового сопротивления θ . Поэтому мощности на выходе и входе линии определяются соответственно как

$$P_2 = U_2 \cdot I_2 \cdot \cos \theta,$$

$$P_1 = U_1 \cdot I_1 \cos \theta = U_2 \cdot e^{\alpha l} \cdot I_2 \cdot e^{\alpha l} \cos \theta = P_2 \cdot e^{2\alpha l}.$$

$$\text{КПД линии передачи } \eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-\alpha l}. \quad (8.4)$$

Из (8.4) видно, что КПД линии сильнее зависит от коэффициента затухания α , чем напряжение и ток в отдельности.

8.2 Режим холостого хода ($Z_2 = \infty$)

При холостом ходе ток $I_2 = 0$ и уравнения длинной линии (9.7) примут вид

$$\dot{U}_{xx} = ch\bar{\gamma} \cdot x \cdot \dot{U}_{2xx}, \quad \dot{I}_{xx} = \frac{sh\bar{\gamma} \cdot x}{Z_B} \cdot \dot{U}_{2xx}. \quad (8.5)$$

Входное сопротивление линии при холостом ходе

$$Z_{1xx} = \frac{\dot{U}_{1xx}}{\dot{I}_{1xx}} = \frac{Z_B}{th\bar{\gamma} \cdot x}. \quad (8.6)$$

Максимум и минимум как U_{xx} , так и I_{xx} сдвинуты друг относительно друга на четверть длины волны.

8.3 Режим короткого замыкания ($Z_2 = 0$)

При режиме короткого замыкания напряжение $U_2 = 0$ и напряжение, и ток в любой точке линии определяется как

$$\dot{U}_{k3} = Z_B \cdot sh\bar{\gamma} \cdot x \cdot \dot{I}_{2k3}, \quad \dot{I}_{k3} = ch\bar{\gamma} \cdot x \cdot \dot{I}_{2k3}. \quad (8.7)$$

Входное сопротивление линии при коротком замыкании

$$Z_{1k3} = \frac{\dot{U}_{1k3}}{\dot{I}_{1k3}} = Z_B \cdot th\bar{\gamma} \cdot l \quad (8.8)$$

Следует отметить, что по данным холостого хода и короткого замыкания можно определить волновое сопротивление и коэффициент распространения волны, т.к. из (8.6) и (8.8) следует, что

$$Z_B = \sqrt{Z_{1xx} \cdot Z_{1k3}}, \quad th\bar{\gamma} \cdot l = \sqrt{\frac{Z_{1k3}}{Z_{1xx}}}. \quad (8.9)$$

8.4 Линия без потерь

Если положить $R_0 = 0$ и $g_0 = 0$, то получим так называемую линию без потерь. Вообще говоря, это идеализация действительной линии, но в высокочастотных линиях, применяемых в радиотехнических устройствах, $R_0 \ll \omega \cdot L_0$ и $g_0 \ll \omega \cdot C_0$, так что расчеты этих линий ведутся обычно как линий без потерь.

Для такой линии все найденные соотношения упрощаются. Т.к. $R_0 = 0$ и $g_0 = 0$, то продольное сопротивление и поперечная проводимость на единицу длины линии будут

$$Z_0 = j\omega \cdot L_0, Y_0 = j\omega \cdot C_0. \quad (8.10)$$

$$\text{Тогда волновое сопротивление линии } Z_B = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = z_B, \quad (8.11)$$

т.е. оказывается чисто вещественным числом, не зависящим от частоты генератора, питающего линию. Следовательно, токи падающей и отраженной волн совпадают по фазе со своими напряжениями.

Коэффициент распространения $\bar{\gamma}$ на единицу длины линии оказывается числом мнимым $\bar{\gamma} = \sqrt{Z_0 \cdot Y_0} = j\omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}$,

$$(8.12)$$

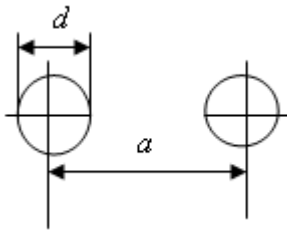
т.е. коэффициент затухания $\alpha = 0$, коэффициент изменения фазы

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}. \quad (8.13)$$

Это означает, что величина амплитуд падающей и отраженной волн меняться вдоль линии не будет, меняется только фаза этих напряжений и токов.

$$\text{Фазовая скорость, как и } Z_B, \text{ не зависит от частоты } v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 \cdot C_0}}. \quad (8.14)$$

Индуктивность и емкость двухпроводной линии (рисунок 10.1):



$$L_0 = \frac{\mu_a}{\pi} \ln \frac{2 \cdot a}{d}; \quad C_0 = \frac{\pi \cdot \varepsilon_a}{\ln \frac{2 \cdot a}{d}}$$

$$\text{где } \mu_a = \mu \cdot \mu_0; \quad \mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}, \quad \varepsilon_a = \varepsilon \cdot \varepsilon_0;$$

$$\varepsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$$

Рисунок 10.1

Для воздуха $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$, поэтому $v = 3 \cdot 10^5 \frac{\text{км}}{\text{с}}$, т.е. равна скорости света.

Упрощается и уравнение длинной линии. Т.к. $\bar{\gamma} = j\beta$, а $Z_B = z_B$, то

$$\dot{U} = ch(j\beta \cdot x) \cdot \dot{U}_2 + z_B \cdot sh(j\beta \cdot x) \cdot \dot{I}_2,$$

$$\dot{I} = \frac{sh(j\beta x)}{z_B} \cdot \dot{U}_2 + ch(j\beta \cdot x) \cdot \dot{I}_2.$$

Но $ch(j\beta \cdot x) = \cos \beta \cdot x$, а $sh(j\beta \cdot x) = j \sin \beta \cdot x$. Поэтому

$$\dot{U} = \cos \beta \cdot x \cdot \dot{U}_2 + jz_B \cdot \sin \beta \cdot x \cdot \dot{I}_2,$$

$$\dot{I} = j \frac{\sin \beta \cdot x}{z_B} \cdot \dot{U}_2 + \cos \beta \cdot x \cdot \dot{I}_2. \quad (8.15)$$

Если принять $\dot{U}_2 = U_2$, а $\dot{I}_2 = I_2 \cdot e^{-j\varphi_2}$, то мгновенные значения напряжения и тока в любой точке линии будут

$$u = U_2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \beta \cdot x \cdot \sin \omega \cdot t + I_2 \cdot \sqrt{2} \cdot z_B \cdot \sin \beta \cdot x \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi_2 + \frac{\pi}{2}),$$

$$i = \frac{U_2 \cdot \sqrt{2}}{z_B} \cdot \sin \beta \cdot x \cdot \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}) + I_2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \beta \cdot x \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi_2). \quad (8.16)$$

9 Лекция. Основные понятия и законы магнитных цепей

Цель лекции: изучить основные характеристики и законы магнитных цепей.

9.1 Основные величины, описывающие магнитные цепи

Для концентрации магнитного поля и придания ему желаемой конфигурации отдельные части электротехнических устройств выполняются из ферромагнитных материалов. Эти части называют магнитопроводами или сердечниками. Магнитный поток создается токами, протекающими по обмоткам электротехнических устройств, реже – постоянными магнитами. Совокупность устройств, содержащих ферромагнитные тела и образующих замкнутую цепь, вдоль которой замыкаются линии магнитной индукции, называют магнитной цепью. Магнитное поле характеризуется тремя векторными величинами, которые приведены в таблице

9.1

Т а б л и ц а 9.1

Наименование	Обозначение	Единицы измерения	Определение
Вектор магнитной индукции	\vec{B}	Тл (тесла)	Векторная величина, характеризующая силовое действие магнитного поля на ток по закону Ампера
Вектор намагниченности	\vec{J}	А/м	Магнитный момент единицы объема вещества
Вектор напряженности магнитного поля	\vec{H}	А/м	$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{J} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \vec{B}$

Основные скалярные величины, используемые при расчете магнитных цепей, приведены в таблице 9.2.

Т а б л и ц а 9.2

Наименование	Обозначение	Единицы измерения	Определение
Магнитный поток	Φ	Вб (вебер)	Поток вектора магнитной индукции через поперечное сечение S магнитопровода $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$
Магнитодвижущая	F	А	$F = Iw$, где I - ток в

(намагничивающая) сила МДС (НС)			обмотке, W -число витков обмотки
Магнитное напряжение	U_M	А	Линейный интеграл от напряженности магнитного поля $U_M = \int_a^b \vec{H} d\vec{l}$

9.2 Характеристики ферромагнитных материалов

Свойства ферромагнитных материалов характеризуются зависимостью $B(H)$ магнитной индукции от напряженности магнитного поля. При этом различают кривые намагничивания, представляющие собой однозначные зависимости $B(H)$, и гистерезисные петли - неоднозначные зависимости $B(H)$ (см. рисунок 9.1).

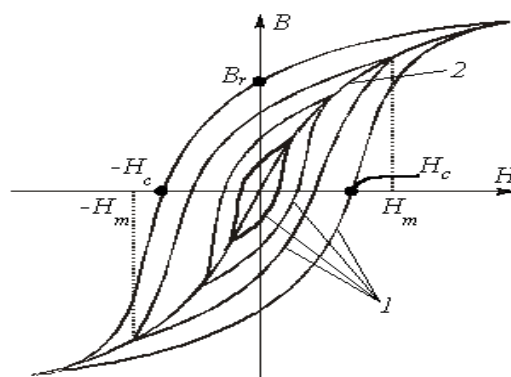


Рисунок 9.1

Перемагничивание ферромагнитного материала связано с расходом энергии на этот процесс. Площадь петли гистерезиса характеризует энергию, выделяемую в единице объема ферромагнетика за один цикл перемагничивания. В зависимости от величины этих потерь и соответственно формы петли гистерезиса ферромагнитные материалы подразделяются на магнитомягкие и магнитотвердые. Первые характеризуются относительно узкой петлей гистерезиса и круто поднимающейся основной кривой намагничивания; вторые обладают большой площадью гистерезисной петли и полого поднимающейся основной кривой намагничивания. Магнитомягкие материалы (электротехнические стали, железоникелевые сплавы, ферриты) определяют малые потери в сердечнике и применяются в устройствах, предназначенных для работы при переменных магнитных потоках (трансформаторы, электродвигатели). Магнитотвердые материалы (углеродистые стали, вольфрамовые сплавы) используются для изготовления постоянных магнитов.

9.3 Основные законы магнитных цепей

Закон (принцип) непрерывности магнитного потока: поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность равен нулю

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Закон полного тока: циркуляция вектора напряженности вдоль произвольного контура равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \sum I.$$

При анализе магнитных цепей и, в первую очередь, при их синтезе обычно используют следующие допущения:

- магнитная напряженность, соответственно магнитная индукция, во всех точках поперечного сечения магнитопровода одинакова ($B = \Phi/S$);
- потоки рассеяния отсутствуют (магнитный поток через любое сечение неразветвленной части магнитопровода одинаков);
- сечение воздушного зазора равно сечению прилегающих участков магнитопровода. Это позволяет использовать при расчетах законы Кирхгофа и Ома для магнитных цепей, сформулированные в таблице 13.3.

Т а б л и ц а 13.3

Наименование закона	Аналитическое выражение закона	Формулировка закона
Первый закон Кирхгофа	$\sum \Phi = 0$	Алгебраическая сумма магнитных потоков в узле магнитопровода равна нулю
Второй закон Кирхгофа	$\sum F = \sum U_M = \sum Hl$	Алгебраическая сумма падений магнитного напряжения вдоль замкнутого контура равна алгебраической сумме МДС, действующих в контуре
Закон Ома	$U_M = \Phi R_M,$ где $R_M = l / \mu_0 \mu S$	Падение магнитного напряжения на участке магнитопровода длиной l равно произведению магнитного потока и магнитного сопротивления R_M участка

Сформулированные законы и понятия магнитных цепей позволяют провести формальную аналогию между основными величинами и законами электрических и магнитных цепей, представленную в таблице 13.4.

Т а б л и ц а 9.4

Электрическая цепь	Магнитная цепь
Ток I, A	Поток $\Phi, Bб$
ЭДС E, B	МДС (НС) F, A
Электрическое сопротивление $R, Ом$	Магнитное сопротивление $R_M, ГН^{-1}$
Электрическое напряжение U, B	Магнитное напряжение U_M, A
Первый закон Кирхгофа: $\sum I = 0$	Первый закон Кирхгофа: $\sum \Phi = 0$
Второй закон Кирхгофа: $\sum E = \sum U$	Второй закон Кирхгофа: $\sum F = \sum U_M$
Закон Ома: $U = IR$	Закон Ома: $U_M = \Phi R_M$

10 Лекция. Общая характеристика задач и методов расчета магнитных цепей

Цель лекции: изучить аналитические и графические методы расчёта магнитных цепей.

10.1 Методы расчета магнитных цепей

Нелинейность магнитных цепей определяется нелинейным характером зависимости $\Phi(U_M)$, являющейся аналогом ВАХ $I(U)$ и определяемой характеристикой ферромагнитного материала $B(H)$. При расчете магнитных цепей при постоянных потоках обычно используют основную кривую намагничивания. При расчете магнитных цепей на практике встречаются две типичные задачи: задача определения величины намагничивающей силы (НС), необходимой для создания заданного магнитного потока (заданной магнитной индукции) на каком - либо участке магнитопровода (задача синтеза или “прямая“ задача); задача нахождения потоков (магнитных индукций) на отдельных участках цепи по заданным значениям НС (задача анализа или “обратная” задача). Следует отметить, что задачи второго типа являются обычно более сложными и трудоемкими в решении. В общем случае в зависимости от типа решаемой задачи (“прямой” или “обратной”) решение может быть осуществлено следующими методами: аналитическими, графическими, итерационными. При использовании каждого из этих методов первоначально необходимо указать на схеме направления НС, если известны направления токов в обмотках, или задаться их положительными направлениями, если их нужно определить. Затем задаются положительными направлениями магнитных потоков, после чего можно переходить к составлению эквивалентной схемы замещения и расчетам.

10.2 Аналитические методы расчёта

Данными методами решаются задачи первого типа - "прямые" задачи. При этом в качестве исходных данных для расчета заданы конфигурация и основные геометрические размеры магнитной цепи, кривая (кривые) намагничивания ферромагнитного материала и магнитный поток или магнитная индукция в каком-либо сечении магнитопровода. Требуется найти НС, токи обмоток или, при известных значениях последних, число витков.

10.2.1. "Прямая" задача для неразветвленной магнитной цепи

Решение задач подобного типа осуществляется в следующей последовательности.

1. Намечается средняя линия (пунктирная линия на рисунке 10.1), которая затем делится на участки с одинаковым сечением магнитопровода.

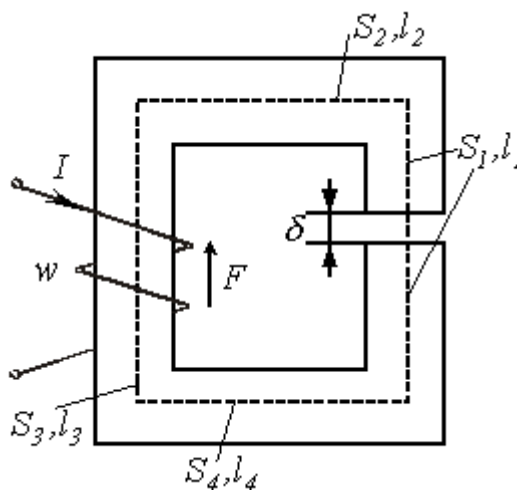


Рисунок 10.1

2. Исходя из постоянства магнитного потока вдоль всей цепи,

определяются значения индукции для каждого i -го участка $B_i = \frac{\Phi}{S_i}$.

3. По кривой намагничивания для каждого значения B_i находятся напряженности H_i на ферромагнитных участках; напряженность поля в

воздушном зазоре определяется согласно $H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0} = 0,796 \cdot 10^6 \text{ Вб}.$

4. По второму закону Кирхгофа для магнитной цепи определяется искомая НС путем суммирования падений магнитного напряжения вдоль контура:

$$F = Iw = \sum H_i l_i + H_\delta \delta$$

где δ - длина воздушного зазора.

10.2.2 "Прямая" задача для разветвленной магнитной цепи

Расчет разветвленных магнитных цепей основан на совместном применении первого и второго законов Кирхгофа для магнитных цепей.

Последовательность решения задач данного типа в целом соответствует рассмотренному выше алгоритму решения “прямой” задачи для неразветвленной цепи.

В качестве примера анализа разветвленной магнитной цепи при заданной геометрии магнитной цепи на рисунке 10.2 и характеристике $B(H)$ ферромагнитного сердечника определим НС $F = Iw$, необходимую для создания в воздушном зазоре индукции B_δ .

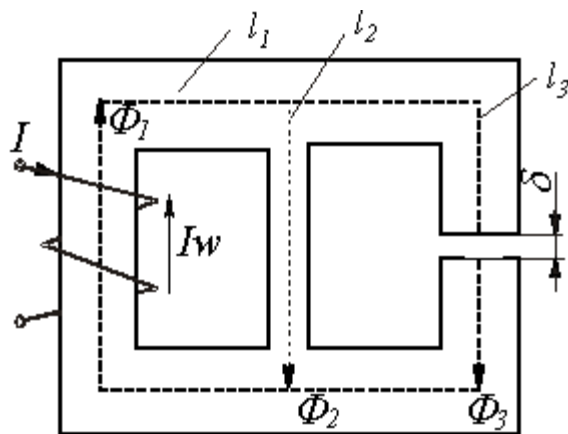


Рисунок 10.2

Алгоритм решения задачи следующий.

1. Задаем положительные направления магнитных потоков в стержнях магнитопровода (рисунок 10.2).

2. Определяем напряженность в воздушном зазоре $H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0}$ и по зависимости $B(H)$ для $B_3 = B_\delta$ - значение H_3 .

3. По второму закону Кирхгофа для правого контура можно записать

$$H_3 l_3 + H_\delta \delta - H_2 l_2 = 0,$$

откуда находим H_2 и по зависимости $B(H)$ - B_2 .

4. В соответствии с первым законом Кирхгофа $\Phi_1 = B_2 S_2 + B_3 S_3$.

Тогда $B_1 = \Phi_1 / S_1$, и по зависимости $B(H)$ определяем H_1 .

5. В соответствии со вторым законом Кирхгофа получаем искомую НС

$$F_1 = H_1 l_1 + H_2 l_2.$$

10.3 Графические методы расчета

Графическими методами решаются задачи второго типа - “обратные” задачи. При этом в качестве исходных данных для расчета заданы конфигурация и геометрические размеры магнитной цепи, кривая намагничивания ферромагнитного материала, а также НС обмоток. Требуется найти значения потоков (индукций) на отдельных участках магнитопровода. Данные методы основаны на графическом представлении вебер-амперных характеристик $\Phi(U_M)$ участков магнитной цепи с последующим решением алгебраических уравнений, записанных по законам Кирхгофа, с помощью соответствующих графических построений.

10.3.1 “Обратная” задача для неразветвленной магнитной цепи

Решение задач подобного типа осуществляется в следующей последовательности.

1. Задаются значениями потока и определяют для них НС $F = \sum Hl$, как при решении “прямой” задачи. При этом следует стремиться подобрать два достаточно близких значения потока, чтобы получить $\sum Hl$, несколько меньшую и несколько большую заданной величины НС.

2. По полученным данным строится часть характеристики $\Phi(\sum Hl)$ магнитной цепи (вблизи заданного значения НС), и по ней определяется поток, соответствующий заданной величине НС. При расчете неразветвленных магнитных цепей, содержащих воздушные зазоры, удобно использовать метод пересечений, при котором искомое решение определяется точкой пересечения нелинейной вебер-амперной характеристики нелинейной части цепи и линейной характеристики линейного участка, строящейся на основании уравнения $\sum Hl = \sum Iw - \sum H_\delta \delta = \sum Iw - \Phi \sum R_{M\delta}$, где $R_{M\delta} = \delta / (\mu_0 S_\delta)$ - магнитное сопротивление воздушного зазора.

10.3.2 “Обратная” задача для разветвленной магнитной цепи

Замена магнитной цепи эквивалентной электрической схемой замещения (на рисунке 14.3 представлена схема замещения магнитной цепи рисунка 14.2) позволяет решать задачи данного типа с использованием всех графических методов и приемов, применяемых при анализе аналогичных нелинейных электрических цепей постоянного тока.

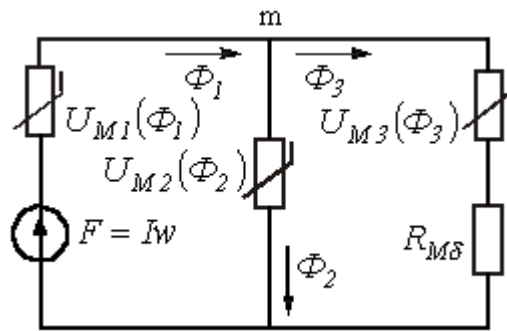


Рисунок 14.3

В этом случае при расчете магнитных цепей, содержащих два узла (такую конфигурацию имеет большое число используемых на практике магнитопроводов), широко используется метод двух узлов. Идея решения данным методом аналогична рассмотренной для нелинейных резистивных цепей постоянного тока и заключается в следующем.

1. Вычисляются зависимости $\Phi_i(U_{Mmn})$ потоков во всех i -х ветвях магнитной цепи в функции общей величины - магнитного напряжения U_{Mmn} между узлами m и n .

2. Определяется, в какой точке графически реализуется первый закон Кирхгофа $\sum \Phi_i(U_{Mmn}) = 0$. Соответствующие данной точке потоки являются решением задачи.

Список литературы

1. К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин. Теоретические основы электротехники. – том 2. – СПб.: Питер, 2003.-463с.
2. Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. Основы теории цепей.- М.: Энергоатомиздат, 1989.-528с.
3. Л.А. Бессонов. Теоретические основы электротехники. – М.: Гардарики, 1999.-638с.
4. Г.В. Бакалов, В.Ф. Дмитриков, Б.Е. Крук. Основы теории цепей.- М.: Радио и связь, 2000.-592с.
5. Сборник задач по теоретическим основам электротехники/Л.Д. Бессонов, И.Г. Демидова, М.Е. Заруди и др.-М.: Высшая школа, 2003.-543с.
6. Л.А. Бессонов. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. – М.: Высшая школа, 1989.-231с.

Аршидинов Маликжан Мамежанович
Владислав Иосифович Денисенко

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Конспект лекций

для студентов колледжей специальности 071330103–
Электрооборудование (по видам и отраслям)

Редактор:
Специалист по стандартизации:

Жанабаева Е.Б.
Ануарбек Ж.А.

Подписано в печать _____

Тираж 100 экз.

Объем 2,9 уч. - изд. л.

Формат 60x84 1/16

Бумага типографская №1

Заказ ____ . Цена 1450 тенге.

Копировально-множительное бюро
Некоммерческого акционерного общества
«Алматинский институт энергетики и связи»
050013, Алматы, Байтурсынова 126/1