



Некоммерческое  
акционерное  
общество

АЛМАТИНСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
ЭНЕРГЕТИКИ И  
СВЯЗИ

Кафедра электроники  
и робототехники

## МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЯ И АНАЛИЗА НАУЧНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для магистрантов специальности 6М071600 – Приборостроение

**СОСТАВИТЕЛЬ:** Адамбаев М.Д. Методы планирования и анализа научного эксперимента. Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для магистрантов специальности 6М071600 – Приборостроение. - Алматы: АУЭС, 2017.–22 с.

Методические указания по расчетно-графическим работам (РГР) предназначены для систематизации и углубления подготовки магистрантов по узловым разделам изучаемого курса. Изучение курса по дисциплине «Методы планирования и анализа научного эксперимента» без самостоятельного решения конкретных примеров расчета по основным вопросам не позволяет магистрантам глубоко усвоить основные теоретические положения и приобрести необходимые умения и навыки по данному направлению.

В них охвачены узловые разделы, решаемые при выполнении НИРМ по математическому описанию промышленных объектов управления. Магистранты специальности 6М071600-Приборостроение в соответствии УМК ДМ этой дисциплины обязаны выполнить три РГР:

- определение статической модели объекта по экспериментальным данным и динамической модели объекта первого и второго порядка по монотонным экспериментальным кривым разгона (РГР-1);
- определение динамической модели объекта второго порядка с колебательной кривой разгона (РГР-2);
- определение динамической модели объекта по его экспериментальным частотным характеристикам (РГР-3).

Ил. 4, табл.7, библиогр. – 5 назв.

Рецензент : Ургенишбаев К.М.

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2017 г.

## Содержание

	Введение	4
1	Определение статической модели объекта по экспериментальным данным (РГР-1).....	5
1.1	Определение функциональной зависимости линейного объекта методом наименьших квадратов (МНК).....	5
1.2	Определение функциональной зависимости нелинейного объекта методом наименьших квадратов (МНК).....	6
2	Определение динамической модели объекта по экспериментальным кривым разгона (РГР-2).....	7
2.1	Определение динамической модели объекта первого порядка по кривой разгона экспоненциальной формы.....	7
2.2	Определение динамической модели объекта второго порядка по кривой разгона S-образной формы.....	13
2.3	Определение динамической модели объекта второго порядка по кривой разгона колебательной формы.....	15
3	Определение динамической модели объекта по его экспериментальным частотным характеристикам (РГР-3).....	18
	Список литературы.....	21

## Введение

Методы планирования и анализа научного эксперимента (МПиАНЭ) – прикладная дисциплина, предметом изучения которой является закономерности функционирования средств систем управления технологическими процессами и установками в электроэнергетике.

Она вооружает магистрантов методами расчета и получения адекватной математической модели промышленных объектов управления и поэтому широко используется ими при выполнении самостоятельной работы и специальных частей диссертационных работ.

Преподавание курса МПиАНЭ направлено на развитие у магистрантов понимания основных законов функционирования узловых устройств и агрегатов в электроэнергии и умение решать математическими методами конкретные инженерные задачи по идентификации этих объектов.

Но в то же время изучение МПиАНЭ без решения конкретных примеров расчета систем не позволяет магистрантам глубоко усвоить основные теоретические положения и приобрести навыки и умения в практических расчетах, поэтому данное методическое указание направлено на систематизацию РГР по отдельным основным разделам курса.

Для эффективного усвоения пройденного материала все три РГР должны быть выполнены и защищены строго в сроки предписанные УМК ДМ и SYLLABUSом дисциплины МПиАНЭ.

Оформление учебных работ должно строго соответствовать требованию соответствующего нормативов и стандартов.

Основным литературным источником для выполнения всех четырех РГР является [1], а в [2]-[11] можно почерпнуть сведения для более углубленного выполнения учебных заданий по изучаемому курсу.

# 1 Определение статической модели объекта по экспериментальным данным (РГР-1)

## 1.1 Определение функциональной зависимости линейного объекта методом наименьших квадратов (МНК)

При экспериментальном определении уравнений имеются погрешности измерений. Помимо борьбы с ними в процессе самих измерений, погрешности можно и нужно исключать, по возможности, при обработке результатов измерений. Одним из приемов является метод наименьших квадратов. Этот метод дает вероятнейший результат, если погрешности подчинены нормальному распределению и статистически независимы (некоррелированы). Предпосылкой метода является избыточность числа экспериментальных измерений. Если измеряется одно неизвестное количество, то принципиально необходим только один эксперимент. Однако экспериментов проводят больше и результаты усредняют. В данном случае усреднение выполняется по методу наименьших квадратов, который дает минимум суммы квадратов отклонений отдельных измерений от усредненной величины.

Пусть для определения неизвестного количества  $X$  произведено  $n$  измерений с результатами  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Составим разности  $y_1 - x, y_2 - x, \dots, y_n - x$  и квадраты их  $(y_1 - x)^2, (y_2 - x)^2, \dots, (y_n - x)^2$ . Величину  $X$  надо выбрать такой, чтобы сумма квадратов была минимальной:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - x)^2 \rightarrow \min. \quad (1.1)$$

Этому отвечает условие:

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n (y_i - x)^2}{\partial x} = 0 \text{ или } 2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - x) = 0.$$

Откуда получаем:

$$x = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i. \quad (1.2)$$

Если отдельные измерения неравноточны, то минимизировать надо величину:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot (y_i - x)^2 \rightarrow \min, \quad (1.3)$$

где  $\sigma_i^2$  – дисперсия погрешности отдельного измерения.

При  $\sigma_i^2 = \text{const}$  получаем выражение (1.1).

При измерении функциональных зависимостей между несколькими количествами этот метод требует более сложных вычислений.

Подробные методические указания с решением подобного численного примера дано в [1, с.35-40].

Задания по этому разделу СРМ-1 приведены в таблице 1.1. Задания имеют десять вариантов (0,1,...,9). Магистрант выполняет вариант, совпадающий с последней цифрой своей зачетной книжки.

В таблице 1.1, кроме заданий по вариантам, в последней строке даны эталонные значения коэффициентов искомой линейной зависимости для оценки точности полученных результатов.

## 1.2 Определение функциональной зависимости нелинейного объекта МНК

Прежде всего необходимо задать вид аналитической зависимости. По экспериментальным данным можно принять выравнивание полученных точек параболой:

$$y = A + Bx + Cx^2. \quad (1.4)$$

Тогда задача сводится к определению вероятнейших значений констант  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Первым шагом определяются приближенные значения  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$ . Для этого можно взять три произвольные экспериментальные точки и трижды подставить их координаты в искомое уравнение. Это дает три уравнения, из которых определяются приближенные значения  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$ . Наиболее целесообразно выбрать точки, равномерно распределенные в заданном промежутке изменения входа. Найдя  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$ , можно методом наименьших квадратов отыскать поправки к ним. Введя поправки в ранее приближенно вычисленные параметры, получим уравнения параболы. Отсюда получаем уравнение усредненной параболы. Уточненные коэффициенты используются при технико-экономических расчетах работы системы управления объектом.

Для выполнения этого раздела СР-1 рекомендуется обратиться к [1, с.35-36, 40-45], где даны необходимые методические рекомендации с решением численного примера.

Задания по этому разделу СР-1 приведены в таблице 1.2, где искомая нелинейная зависимость является параболой вида  $y = A + Bx + Cx^2$ .

Задания составлены для десяти вариантов. В таблице 1.2 также даны эталонные значения искомых коэффициентов параболы, для оценки точности полученных результатов.



## 2 Определение динамической модели объекта по экспериментальным кривым разгона (РГР-2)

### 2.1 Определение динамической модели объекта первого порядка по кривой разгона экспоненциальной формы

На рисунке 2.1 показана кривая разгона  $y(t)$  одноемкостного линейного объекта. В момент времени  $t_0 = 0$  входную величину  $x$  изменили скачком на  $a$  единиц.

Необходимо написать в численном виде уравнение объекта.

Искомое уравнение имеет вид:

$$T \cdot \frac{dy}{dt} + y = k \cdot x \quad \text{или} \quad \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{Tp+1}, \quad (2.1)$$

и нужно определить константы  $T$  и  $K$ .



Рисунок 2.1 - К определению уравнения объекта первого порядка по кривой разгона

Вначале найдем аналитическое выражение решения уравнения при данных условиях. Это решение будет содержать константы  $T$  и  $K$ . Полученная кривая разгона есть графическое решение, тогда, сравнив график с его аналитическим выражением, найдем константы этого аналитического выражения. Общий вид решения для условий  $y = 0$  при  $t = 0$  и  $x = a$  при  $t > 0$  имеет вид [2]:

$$y(t) = k \cdot a \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right). \quad (2.2)$$

Принципиально достаточно взять пару любых точек из графика, подставить их координаты в решение и затем из полученных двух уравнений вычислить  $T$  и  $K$ . Но уравнения эти трансцендентные:

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= k \cdot a \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \\ y_2(t) &= k \cdot a \cdot \left(1 - e^{-\frac{2t}{T}}\right) \end{aligned} \right\}, \quad (2.3)$$

и вычислить корни их  $K$  и  $T$  затруднительно. Поэтому можно применить следующий прием. При  $t \rightarrow \infty$  имеем  $y(t) = k \cdot a$ , следовательно, ордината асимптоты, к которой стремится  $y$ , дает возможность определить  $k$  простым делением на  $a$ , т. е.:

$$k = \frac{b}{a}. \quad (2.4)$$

Для вычисления  $T$  продифференцируем решение:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k \cdot a \cdot \frac{1}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

и устремим  $t$  к нулю

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dt} = k \cdot a \cdot \frac{1}{T} = \frac{b}{T} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.5)$$

где  $\alpha$  — угол наклона касательной, проведенной к графику  $y(t)$  при  $t = 0$ . Поэтому

$$T = \frac{b}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (2.6)$$

Итак,  $T$  численно равна длине подкасательной в пределах от начала координат до точки пересечения ее с упомянутой асимптотой.

Такое решение самое простое, но не точное, так как трудно указать ординату асимптоты значения «в» (рисунок 2.1). При таком решении используется только начало и конец графика, а все промежуточные его точки из рассмотрения выпадают.

Рассмотрим более точный прием. Разобьем график равноотстоящими на интервал  $\Delta t$  ординатами  $y_0, y_1, y_2$  и т.д. Для этих точек согласно решению уравнения можно записать:

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= k \cdot a \cdot \left(1 - e^{-\frac{0}{T}}\right) \\ y_1 &= k \cdot a \cdot \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{T}}\right) \\ y_2 &= k \cdot a \cdot \left(1 - e^{-\frac{2\Delta t}{T}}\right) \\ y_3 &= k \cdot a \cdot \left(1 - e^{-\frac{3\Delta t}{T}}\right) \\ &\text{и т.д.} \end{aligned} \right\}. \quad (2.7)$$



Вычтем попарно из последующих уравнении предыдущие:

$$\left. \begin{aligned} y_1 - y_0 &= k \cdot a - k \cdot a \cdot e^{-\frac{\Delta t}{T}} \\ y_2 - y_1 &= k \cdot a \cdot e^{-\frac{\Delta t}{T}} - k \cdot a \cdot e^{-\frac{2\Delta t}{T}} \\ y_3 - y_2 &= k \cdot a \cdot e^{-\frac{2\Delta t}{T}} - k \cdot a \cdot e^{-\frac{3\Delta t}{T}} \\ \text{и т.д.} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Обозначим для краткости  $e^{-\frac{\Delta t}{T}} = q$ , тогда:

$$\left. \begin{aligned} y_1 - y_0 &= k \cdot a \cdot (1 - q) \\ y_2 - y_1 &= k \cdot a \cdot q \cdot (1 - q) \\ y_3 - y_2 &= k \cdot a \cdot q^2 \cdot (1 - q) \\ \text{и т.д.} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Разделив каждое последующее из этих равенств на предыдущее, получим ряд значений  $q$ :

$$q_1 = \frac{y_2 - y_1}{y_1 - y_0}; q_2 = \frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1}; q_3 = \frac{y_4 - y_3}{y_3 - y_2}; \text{ и т.д.}, \quad (2.10)$$

число, отличающиеся одно от другого из-за погрешностей экспериментального измерения и регистрации  $y(t)$ .

Более точное усредненное значение дает среднеарифметическое  $\bar{q}$  из вычисленных рассмотренным путем отдельных  $q_i$ . Затем уточненная постоянная времени  $\bar{T}$  определяется из выражения:

$$\bar{T} = -\frac{\Delta t}{\ln \bar{q}}. \quad (2.11)$$

Аналогично по известным  $q_i$  определяется отдельные  $k_i$ :

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{y_1 - y_0}{a \cdot (1 - q)}; \\ k_2 &= \frac{y_2 - y_1}{a \cdot q_2 \cdot (1 - q_2)}; \text{ и т. д.} \\ k_3 &= \frac{y_3 - y_1}{a \cdot q^2 \cdot (1 - q_3)}; \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Затем находится среднеарифметическое  $\bar{k}$  из  $k_1, k_2, k_3$  и т. д.

Для самостоятельной работы магистрантов предлагается задаться масштабами по оси графика на рисунке 2.2 величиной  $a$ , величиной  $\Delta t$  и, взяв 7-8 ординат  $y_0, y_1, \dots, y_8$ , вычислить  $\bar{k}$  и  $\bar{T}$  сравнить их с полученными значениями  $K$  и  $T$ , полученных графически.

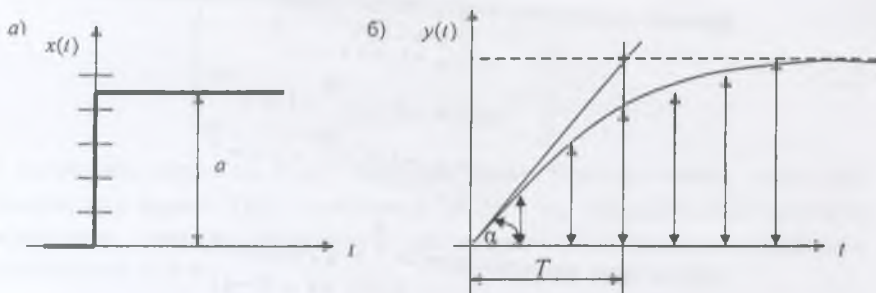


Рисунок 2.2 - Ступенчатое воздействие на входе объекта (а) и кривая разгона на выходе объекта (б)

На рисунке 2.2 показана кривая разгона  $y(t)$  одноемкостного звена. В момент времени  $t_0 = 0$  входную величину  $x(t)$  изменили скачком на  $a$  единиц.

По экспериментальной кривой разгона необходимо определить в численном виде уравнение динамики объекта в виде:

$$T \frac{dy}{dt} + y = k \cdot x \quad \text{или} \quad \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{Tp + 1}. \quad (2.13)$$

Необходимо определить динамические параметры  $K$  и  $T$ . Для этого каждому студенту необходимо:

а) построить экспоненциальную кривую разгона, ориентируясь на заданные параметры динамической модели, приведенные в таблице 1.3;

б) определить  $K$  и  $T$  упрощенным методом. Методические указания даны в [1, с. 45-46]; в) определить  $K$  и  $T$  точным методом с разбивкой кривой разгона равностоящими на интервал  $\Delta t$  ординатами  $y_0, y_1, y_2, \dots$  и т.д. Методические указания даны в [1, с. 47-48];

г) оценить точность определения  $K$  и  $T$ , взяв эталонные их значения из таблицы 1.3. ( $T$  – задано,  $K = b/a$ ).

Таблица 2.1 - Экспериментальные значения переменных линейного объекта

№ варианта	0		1		2		3		4		5		6		7		8		9	
	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$
1	0	0,96	0	1,95	0	3,05	0	0,51	0	1,98	0	9,99	0	10,8	0	6,9	0	8,1	0	4,97
2	1	2,05	1	2,68	1	3,77	1	0,98	1	2,51	1	9,15	1	10,5	1	6,6	1	7,4	1	4,71
3	2	2,98	2	3,15	2	4,67	2	1,52	2	2,98	2	8,15	2	9,4	2	5,8	2	7,15	2	4,10
4	3	4,06	3	3,75	3	5,50	3	1,97	3	3,52	3	7,35	3	8,2	3	5,6	3	6,43	3	3,85
5	4	4,97	4	4,41	4	6,25	4	2,52	4	3,97	4	6,25	4	6,9	4	4,9	4	6,05	4	3,30
6	5	6,08	5	5,05	5	6,98	5	2,97	5	4,6	5	5,50	5	6,05	5	4,6	5	5,45	5	3,00
7	6	6,97	6	5,70	6	7,80	6	3,51	6	5,0	6	4,50	6	4,05	6	3,9	6	5,10	6	2,60
8	7	8,0	7	6,30	7	8,70	7	3,97	7	5,55	7	3,75	7	4,05	7	3,55	7	4,4	7	2,30
9	8	9,05	8	6,85	8	9,50	8	4,45	8	5,95	8	2,70	8	2,97	8	3,15	8	4,0	8	1,78
10	9	9,98	9	7,40	9	10,2	9	4,99	9	6,6	9	2,00	9	2,05	9	8,85	9	3,55	9	1,40
11	10	11,05	10	8,05	10	11,01	10	5,52	10	6,98	10	0,98	10	1,00	10	2,0	10	3,05	10	0,99
Эталон значения	$A = 1$		$A = 0,6$		$A = 0,8$		$A = 0,5$		$A = 0,5$		$A = -0,9$		$A = -1$		$A = -0,5$		$A = -0,5$		$A = -0,4$	
	$B = 1$		$B = 2$		$B = 3$		$B = 0,5$		$B = 2$		$B = 10$		$B = 11$		$B = 7$		$B = 8$		$B = 5$	

Таблица 2.2 - Экспериментальные значения переменных нелинейного объекта

№ варианта	0		1		2		3		4		5		6		7		8		9	
	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$
1	3	7,95	5	3,05	0	12,1	20	-5,8	-5	22,9	5	7,05	2	8,23	0	1,02	1	0,51	3	6,22
2	4	7,58	6	2,55	1	11,1	30	-11,1	0	20,05	6	7,35	3	9,15	1	3,47	2	2,98	4	7,28
3	5	7,51	7	2,42	2	10,9	40	-13,9	5	17,95	7	7,61	4	9,83	2	5,05	3	4,55	5	8,05
4	6	7,6	7	2,37	2,5	10,74	50	-15,0	10	17,0	7,5	7,624	5	9,95	3	5,48	4	5,05	6	8,31

Оканчание таблицы 2.2

5	7	7,88	8	2,41	3	10,75	60	-14,1	15	17,05	8	7,60	6	9,83	4	5,04	5	4,45	7	8,21
6	8	8,50	9	2,57	4	11,22	70	10,85	20	18,07	9	7,41	7	9,18	5	3,48	6	2,97	8	7,72
7	9	9,12	10	3,05	5	11,99	80	-6,05	30	23,1	10	7,01	8	8,22	6	0,97	7	0,49	9	6,78
Эталон. значения	A = 10	A = 8	A = 12	A = 10	A = 10	A = 20	A = 2	A = 5	A = 1	A = 1	A = 2	A = 2	A = 5	A = 1	A = 1	A = 5	A = -3	A = -3	A = 0,5	A = 0,5
	B = -1	B = -1,5	B = -1	B = -1	B = -1	B = -0,5	B = 1,5	B = -1	B = -1	B = -0,5	B = 1,5	B = 1,5	B = 2	B = 3	B = 3	B = 2	B = 4	B = 4	B = 2,5	B = 2,5
	C = 0,1	C = 0,1	C = 0,2	C = 0,1	C = 0,2	C = 0,02	C = -0,1	C = 0,01	C = 0,2	C = 0,02	C = -0,1	C = -0,1	C = -0,2	C = -0,5	C = -0,5	C = -0,2	C = -0,5	C = -0,5	C = -0,2	C = -0,2

Таблица 2.3 - Динамические параметры

Var.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	2,6	3,0	3,1	1,3	1,0	1,5	0,5	3,0	1,6	2,0
bσ	5,2	6,4	8,2	4,6	2,8	3,5	1,4	2,1	0,8	1,0
T	0,8	1,0	1,2	1,5	2,0	2,4	2,5	1,8	1,4	1,2

Таблица 2.4 - Значения переменных объекта второго порядка

№ вариант	0		1		2		3		4		5		6		7		8		9	
	t	y	t	y	t	y	t	y	t	y	t	y	t	y	t	y	t	y	t	y
0	0	0	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0
1	1	0,1	1	1,0	1	0,05	1	0,08	1	0,5	1	0,6	1	0,5	1	0,08	1	1,0	1	0,05
2	2	0,25	2	2,5	2	0,25	2	0,45	2	1,3	2	1,7	2	1,3	2	0,45	2	2,5	2	0,25
3	3	0,38	3	3,8	3	0,6	3	0,9	3	2,0	3	2,2	3	2,0	3	0,9	3	3,8	3	0,6
4	4	0,45	4	4,5	4	0,85	4	1,27	4	2,3	4	2,45	4	2,3	4	1,27	4	4,5	4	0,85
5	5	0,5	5	5,0	5	0,98	5	1,46	5	2,5	5	2,5	5	2,5	5	1,46	5	5,0	5	0,98

## 2.2 Определение динамической модели объекта второго порядка по кривой разгона S-образной формы

На рисунке 2.3. дана кривая разгона объекта, описываемая уравнением второго порядка

$$T_1 \cdot T_2 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + (T_1 + T_2) \cdot \frac{dy}{dt} + y = k \cdot x. \quad (2.13)$$

Ступенчатое воздействие входа  $x = a$ . Вычислить константы  $T_1, T_2$  и  $k$ , если известно, что возмещение входа было единичным:  $x = a = 1$  при  $t > 0$ .

Так же, как и в начале следует написать в общем виде решение уравнения.

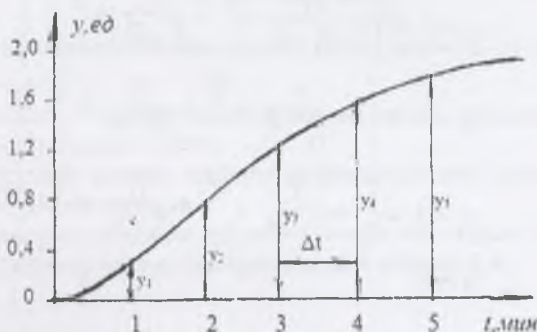


Рисунок 2.3 - К определению уравнения объекта второго порядка с монотонной кривой разгона

Запишем его в общем виде

$$y_{инн}(t) = C_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + C_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + k \cdot a, \quad (2.14)$$

затем из начальных условия  $y = 0$ ;  $\frac{dy}{dt} = 0$  при  $t = 0$  определяют произвольные постоянные:

$$\left. \begin{aligned} y_{инн}(0) &= C_1 \cdot e^{-\frac{0}{T_1}} + C_2 \cdot e^{-\frac{0}{T_2}} + k \cdot a = 0; \\ y'_{инн}(0) &= -C_1 \cdot \frac{1}{T_1} \cdot e^{-\frac{0}{T_1}} - C_2 \cdot \frac{1}{T_2} \cdot e^{-\frac{0}{T_2}} = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.15)$$

откуда

$$C_1 = \frac{k \cdot a \cdot T_1}{T_2 - T_1}; C_2 = \frac{k \cdot a \cdot T_2}{T_1 - T_2}. \quad (2.16)$$

Искомое частное решение получается в виде:

$$y(t) = k \cdot a \cdot \left( 1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \right). \quad (2.17)$$



Теперь принципиально достаточно взять координаты  $y_i, t_i$  трех произвольных точек из заданного графика, подставить их трижды в решение и из полученных этим путем трех уравнений найти корни  $k, T_1, T_2$ . Но эти уравнения трансцендентны и корни вычислять сложно, поэтому проще и удобнее использовать метод А. Н. Крылова.

Для этого разобьем график  $y(t)$  равноотстоящими с интервалом  $\Delta t$  ординатами  $y_0, y_1, y_2$  и т.д. и запишем:

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= k \cdot a + \frac{k \cdot a \cdot T_1}{T_2 - T_1} + \frac{k \cdot a \cdot T_2}{T_1 - T_2} \\ y_1 &= k \cdot a \cdot \left( 1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} \cdot e^{-\frac{\Delta t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{\Delta t}{T_2}} \right) \\ y_2 &= k \cdot a \cdot \left( 1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} \cdot e^{-\frac{2\Delta t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{2\Delta t}{T_2}} \right) \\ y_3 &= k \cdot a \cdot \left( 1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} \cdot e^{-\frac{3\Delta t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{3\Delta t}{T_2}} \right) \\ &\text{и т.д.} \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Обозначив

$$A_1 = k \cdot a; \quad A_2 = \frac{k \cdot a \cdot T_1}{T_2 - T_1}; \quad A_3 = \frac{k \cdot a \cdot T_2}{T_1 - T_2}; \quad p = e^{-\frac{\Delta t}{T_1}}; \quad q = e^{-\frac{\Delta t}{T_2}},$$

перепишем их в виде:

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= A_1 + A_2 + A_3 \\ y_1 &= A_1 + A_2 \cdot p + A_3 \cdot q \\ y_2 &= A_1 + A_2 \cdot p^2 + A_3 \cdot q^2 \\ y_3 &= A_1 + A_2 \cdot p^3 + A_3 \cdot q^3 \\ y_4 &= A_1 + A_2 \cdot p^4 + A_3 \cdot q^4 \\ y_5 &= A_1 + A_2 \cdot p^5 + A_3 \cdot q^5 \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Будем считать числа  $1, p$  и  $q$  корнями кубического уравнения:

$$\lambda^3 + B_1 \cdot \lambda^2 + B_2 \cdot \lambda + B_3 = 0. \quad (2.20)$$

Умножим первую строку на  $B_3$ , вторую на  $-B_2$ , третью на  $-B_1$ , четвертую на  $-1$  и сложим их, тогда правые части дадут в сумме ноль, поэтому получим:

$$y_0 \cdot B_3 + y_1 \cdot B_2 + y_2 \cdot B_1 + y_3 = 0. \quad (2.20)$$

Прделаем ту же операцию со следующими четырьмя строками:

$$y_1 \cdot B_3 + y_2 \cdot B_2 + y_3 \cdot B_1 + y_4 = 0. \quad (2.21)$$

Следующие четыре строки дадут



$$y_2 \cdot B_3 + y_3 \cdot B_2 + y_4 \cdot B_1 + y_5 = 0. \quad (2.22)$$

В этих трех равенствах ординаты  $y_i$  известны из кривой разгона, а константы  $B_1, B_2, B_3$  – искомые. Найдя их, далее следует вычислить корни кубического уравнения:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1; \\ \lambda_2 &= p = e^{\frac{-\Delta t}{T_1}}; \\ \lambda_3 &= q = e^{\frac{-\Delta t}{T_2}} \end{aligned} \quad (2.23)$$

затем

$$T_1 = -\frac{\Delta t}{\ln p} \quad \text{и} \quad T_2 = -\frac{\Delta t}{\ln q}. \quad (2.24)$$

Из любого уравнения системы (2.18), кроме первого, нужно вычислить  $k$ .

Для повышения точности можно брать не шесть исходных ординат, а больше затем, усреднить результаты.

По существу, этот способ является аппроксимацией заданного графика суммой экспоненциальных членов.

Методические рекомендации для выполнения этой задачи подробно даны в [1, с. 48-51]. Задания по вариантам приведены в таблице 2.4.

### 2.3 Определение динамической модели объекта второго порядка по кривой разгона колебательной формы

Определим уравнение объекта по реакции выхода  $\Delta\theta(t)$  (рис 2.4) на скачкообразное изменение входной величины  $v$  до значения  $\vartheta = a$ , м/мин;  $\Delta\theta(t)$  – разность температур в последних отсасывающих камерах,  $\vartheta$  – скорость движения объекта.

Кривая разгона имеет колебательную форму, и можно предположить, что искомое уравнение – уравнение второго порядка с комплексными корнями [2]:

$$\frac{d^2 \Delta\theta}{dt^2} - (\gamma_1 + \gamma_2) \cdot \frac{d\theta}{dt} + \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \Delta\theta = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot k \cdot v. \quad (2.25)$$

Необходимо вычислить константы  $\gamma_1, \gamma_2, k$ .

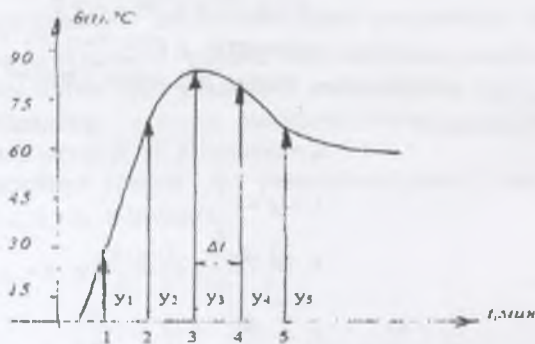


Рисунок 2.4 – К определению уравнения объекта второго порядка с колебательной кривой разгона

Уравнения можно записать аналитически в виде функции времени и коэффициентов, изменено лишь обозначение констант:

$$\gamma_1 = -\frac{1}{T_1};$$

$$\gamma_2 = -\frac{1}{T_2},$$

так как постоянное времени здесь, в случае колебательной системы, не имеют физического смысла. Уравнение колебательной системы обычно записывается в виде:

$$\frac{d^2 \Delta \theta}{dt^2} + 2 \cdot \varepsilon \cdot \omega_0 \cdot \frac{d \Delta \theta}{dt} + \omega_0^2 \cdot \Delta \theta = k \cdot \omega_0^2 \cdot u, \quad (2.26)$$

где  $\varepsilon$  – коэффициент демпфирования;

$\omega_0$  – собственная частота системы.

Отсюда видна связь между физическими константами  $\varepsilon$ ,  $\omega_0$  и числами  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ . Последние введены для удобства вычислений.

Используя результаты приведенные в вышеупомянутых разделах, сразу напишем решение уравнения:

$$\Delta \theta(t) = k \cdot a + \frac{k \cdot a \cdot \gamma_2 \cdot e^{\gamma_1 t}}{\gamma_1 - \gamma_2} + \frac{k \cdot a \cdot \gamma_1 \cdot e^{\gamma_2 t}}{\gamma_2 - \gamma_1}.$$

Так как объект управления имеет колебательные свойства, то прием вычисления констант, примененный в предыдущей задаче, даст в результате не действительные числа  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , а комплексные, т.е.

$$\gamma_1 = \alpha + j\beta; \quad \gamma_2 = \alpha - j\beta. \quad (2.27)$$

Переходя к действительным количествам, форму записи решения нужно соответственно преобразовать по формуле Эйлера ( $e^{\pm j\varphi} = \cos \varphi \pm j \sin \varphi$ ) [2]:

$$\begin{aligned}
\Delta\theta(t) &= k \cdot a \cdot \left[ 1 + \frac{\alpha - j\beta}{2j\beta} \cdot e^{(j\alpha + \beta)t} + \frac{\alpha + j\beta}{-2j\beta} \cdot e^{(j\alpha - \beta)t} \right] = \\
&= k \cdot a \cdot \left\{ 1 + e^{\alpha t} \cdot \left[ \frac{j\alpha + \beta}{-2\beta} \cdot (\cos \beta t + j \sin \beta t) + \frac{j\alpha - \beta}{2\beta} \cdot (\cos \beta t - j \sin \beta t) \right] \right\} = \\
&= k \cdot a \cdot \left[ 1 + e^{\alpha t} \cdot \left( -\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \sin \beta t \right) \right] = \\
&= k \cdot a \cdot \left[ 1 + e^{\alpha t} \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^2} \cdot \sin \left( \beta t - \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} \right) \right].
\end{aligned} \tag{2.28}$$

(3.4) соответствует сложению двух гармоник.

Принципиально можно было бы взять координаты трех произвольных точек их графика  $\Delta\theta(t)$ , поставив их в решение, вычислить из трех уравнений действительные корни  $\alpha, \beta$  и  $k$ . Но так как уравнений получаются трансцендентными, то решить их весьма сложно, и поэтому целесообразнее применить прием, рассмотренный в предыдущей задаче.

Для этого возьмем из кривой разгона шесть равноотстоящих на интервал  $\Delta t = 5 \text{ мин}$ , ординат:

$$\Delta\theta_0 = 0,0; \quad \Delta\theta_1 = 29,3; \quad \Delta\theta_2 = 69,0; \quad \Delta\theta_3 = 84,3; \quad \Delta\theta_4 = 79,8; \quad \Delta\theta_5 = 71,1.$$

Составим систему уравнений для определения коэффициентов промежуточного кубического уравнения (2.19):

$$\begin{aligned}
0,0 \cdot B_3 + 29,3 \cdot B_2 + 69,0 \cdot B_1 + 84,3 &= 0; \\
29,3 \cdot B_3 + 69,0 \cdot B_2 + 84,3 \cdot B_1 + 79,8 &= 0; \\
69,0 \cdot B_3 + 84,3 \cdot B_2 + 79,8 \cdot B_1 + 71,1 &= 0.
\end{aligned}$$

Из нее вычислим  $B_1 = -1,654$ ;  $B_2 = 1,12$ ;  $B_3 = -0,366$  и получим следующее кубическое уравнение:  $\lambda^3 - 1,654 \cdot \lambda^2 + 1,12 \cdot \lambda - 0,366 = 0$ .

Вычислим его корни (один корень  $\lambda_1 = 1$  заранее известен):

$$\lambda_1 = 0,327 + j \cdot 0,509; \quad \lambda_2 = 0,327 - j \cdot 0,509; \quad \lambda_3 = 1.$$

Комплексные корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  представим в показательной форме:

$$\lambda_1 = e^{-0,3 + j \cdot 1,0}; \quad \lambda_2 = e^{-0,3 - j \cdot 1,0}.$$

Далее найдем константы  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ :

$$\left. \begin{aligned}
\gamma_1 &= -\frac{1}{T_1} = \frac{\ln \lambda_1}{\Delta t} = \frac{-0,5 + j \cdot 1,0}{5} = -0,1 + j \cdot 0,2 \\
\gamma_2 &= -\frac{1}{T_2} = \frac{\ln \lambda_2}{\Delta t} = \frac{-0,5 - j \cdot 1,0}{5} = -0,1 - j \cdot 0,2
\end{aligned} \right\} \tag{2.29}$$

$$(\alpha = -0,1; \beta = 0,2).$$

Остается вычислить статический коэффициент передачи  $k$ . Это легко сделать, подставив в решение дифференциального уравнения координаты произвольной точки кривой разгона и вычисленные константы  $\alpha$  и  $\beta$ . Возьмем, например, точку  $t = \Delta t = 5 \text{ мин}$ ,  $\Delta\theta(\Delta t) = \Delta\theta_1 = 29,3$ :

$$\Delta\theta = k \cdot 1 \cdot \left[ 1 + e^{\alpha} \cdot \left( -\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right) \right]$$

$$\text{или } 29,3 = k \cdot 1 \cdot \left[ 1 + e^{-0,15} \cdot \left( -\cos 0,2 \cdot 5 + \frac{-0,1}{0,2} \cdot \sin 0,2 \cdot 5 \right) \right],$$

откуда найдем  $k = 70 \frac{\text{град}}{\text{м/час}}$ .

Искомое численное уравнение колебательного объекта будет иметь вид:

$$\frac{d^2 \Delta\theta}{dt^2} + 0,2 \cdot \frac{d\theta}{dt} + 0,05 \cdot \Delta\theta = 0,05 \cdot 70 \cdot \nu, \quad (3.30)$$

где  $\nu = \text{м/час}$ ;  $\Delta\theta = {}^{\circ}\text{C}$ ;  $[t] = \text{мин}$ ;

Собственная частота объекта:

$$\omega_0 = \sqrt{\gamma_1 \cdot \gamma_2} = 0,224 \text{ рад/мин}. \quad (3.31)$$

Коэффициент демпфирования:

$$\varepsilon = \frac{-\lambda_1 - \lambda_2}{2 \cdot \omega_0} = \frac{0,2}{2 \cdot 0,234} = 0,45. \quad (3.32)$$

При распространении этого приема на системы более высокого порядка общая схема метода остается аналогичной.

### 3 Определение модели объекта по его экспериментальным частотным характеристикам

Известно, что объект описывается передаточной функцией вида:

$$W(p) = \frac{b_1 p^2 + b_2 p + b_3}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3}. \quad (3.1)$$

Необходимо выполнить следующие операции:

- произвести формальную замену оператора  $p$  на  $j\omega$  в (1.1) и выделить вещественную  $P(\omega)$  и мнимую частотные характеристики  $Q(\omega)$ , т.е. получить:

$$W(j\omega) = P(\omega) + Q(\omega) \cdot j; \quad (3.2)$$

- определить аналитические выражения амплитудно-частотной характеристики АЧХ-  $A(\omega)$  и фазочастотной характеристики ФЧХ -  $\varphi(\omega)$  по следующим соотношениям:

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}; \quad (3.3)$$

- рассчитать и построить АЧХ и ФЧХ. Значения  $a$ , и  $b$ , взять из таблицы 1.5 (по вариантам);

- выбрать восемь последовательных парных значений  $A(\omega_i)$  и  $\varphi(\omega_i)$  из графиков АЧХ и ФЧХ (достаточно полно описывающих форму этих кривых с равными интервалами частоты  $\Delta\omega$ , занести полученные значения в таблице 2.6;

- значения  $A(\omega_i)$  и  $\varphi(\omega_i)$  обычно легко можно получить экспериментальным методом, но определение передаточной функции намного упрощается, если использовать вместо  $A(\omega_i)$  и  $\varphi(\omega_i)$  значения  $P(\omega_i)$  и  $Q(\omega_i)$ , которые легко вычисляются по следующим формулам:

$$P(\omega_i) = A(\omega_i) \cdot \cos\varphi(\omega_i), \quad (3.4)$$

$$Q(\omega_i) = A(\omega_i) \cdot \sin\varphi(\omega_i). \quad (3.5)$$

А результаты занести в таблицу 3.3;

- с этого момента необходимо решить обратную задачу, т.е. по известным значениям  $P(\omega_i)$  и  $Q(\omega_i)$ , которые даны в таблице 3.3, необходимо определить коэффициенты передаточной функции объекта, эталонные значения которых приведены в таблице 3.1 (по вариантам).

Методические указания и пример решения подобной задачи подробно рассмотрен в [1, с. 58-61].

Таблица 3.1- Эталонные значения коэффициентов передаточной функции объекта

Вар. \ Коэф.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a_1$	2	2,5	3	4	5	6	7	5	4	3
$a_2$	2	4	6	8	10	8	6	4	2	1,5
$a_3$	3	1,5	2	3	4	5	6	5	4	2
$b_1$	2,5	1,5	2,0	2,5	3	2	1,5	1,8	2,2	2,5
$b_2$	2,1	2,0	1,8	1,7	1,5	1	1,2	1,4	1,6	1,3
$b_3$	1,5	2	1,5	2	1,5	2	3	3,5	4,0	4,5

Таблица 3.2 - Значения АЧХ и ФЧХ объекта

ЧХ \ $\omega_i$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$	$\omega_7$	$\omega_8$
$A_i$								
$\varphi_i$								



Таблица 3.3 - Значения ВЧХ и МЧХ объекта

$\omega$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$	$\omega_7$	$\omega_8$
ЧХ								
$P(\omega_i)$								
$Q(\omega_i)$								



## Список литературы

### *Основной*

1 Адамбаев М.Д. Повышение эффективности процесса сухого измельчения. Научное издание (монография). – Берлин (Германия): LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. – 237 с.

2 Адамбаев М.Д. Автоматическое управление в электроэнергетике. Прикладная математика и идентификация. Учебное пособие. – Алматы: КазНТУ, 2015-220 с.

3 Адамбаев М.Д. Вероятностно-статистические методы в электроэнергетике и их применение для идентификации динамики промышленных процессов. – Алматы: КазНТУ 2016– 19 с.

4 Адамбаев М.Д. Математические методы идентификации. Учебник . – Алматы: Комплекс, 2005.-180 с.

5 Адамбаев М.Д. Теория и практика технического эксперимента в электроэнергетике. Учебник (рек. МОН РК). –Алматы:КазНТУ, 2013.- 237 с.

### *Дополнительный*

1 Тихонов О.Н. Решение задач по автоматизации процессов обогащения и металлургии. – Л.: Недра, 1969.- 430 с.

2 Расчет автоматических систем /Под. ред. проф. А.В.Фатева. –М.: Высшая школа, 1973.- 336 с.

3 Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов /Под.ред. Э.К. Лецкого. –М., 1977.- 552 с.

4 Стефании Е.П. Основы расчета и настройки регуляторов теплоэнергетических процессов. –М.: Энергия, 1972.- 376 с.

Мурат Джамантаевич Адамбаев

МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЯ И АНАЛИЗА НАУЧНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для магистрантов специальности 6М071600 - Приборостроение

Редактор Л.Т.Сластикина  
Специалист по стандартизации Н.К. Молдабекова

Подписано в печать 01.06.17г.  
Тираж 20 экз.  
Объем 1,5 уч.-изл.

Формат 60x84 1/16  
Бумага типографская №1  
Заказ 199 цена 750 тг.

Копировально-множительное бюро  
некоммерческого акционерного общества  
«Алматинский университет энергетики и связи»  
050013 Алматы, Байтурсынова, 126