Коммерциялық емес акционерлік қоғам

АЛМАТЫ ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС УНИВЕРСИТЕТІ

Автоматтандыру және басқару кафедрасы

АҚПАРАТТЫ ЖИНАУ ЖӘНЕ ТАСЫМАЛДАУ НЕГІЗДЕРІ

5В070200- Автоматтандыру және басқару мамандығының студенттері үшін дәрістер жинағы

Алматы 2019

ҚҰРАСТЫРУШЫ: Ш.Н. Сагындыкова. Ақпаратты жинау және тасымалдау негіздері. 5В070200 - Автоматтандыру және басқару мамандығының студенттері үшін дәрістер жинағы. – Алматы: АЭжБУ, 2019. – 71 б.

Дәрістер жинағында сигналдардың моделдері, ақпарат пен кодтау теориясының негіздері, сонымен қатар ақпаратты қабылдау мен өңдеудің кейбір мәселелері қарастырылады.

Дәрістер жинағы 5В070200 - Автоматтандыру және басқару мамандығының оқу түрінің барлық формасындағы студенттері үшін арналған.

Рецензент: аға оқытушы, т.ғ.к. Тергемес К.Т.

«Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2019 ж. басылу жоспары бойынша басылады.

© «Алматы энергетика және байланыс университеті» КЕАҚ, 2019 ж.

1 Дәріс №1. Детерминирленген сигналдардың моделдері

1.1 Сигнал моделінің түсінігі

Ақпаратты кеңістікте және уақыт бойынша тасымалдау үшін ол хабарлама түрінде көрсетіледі. Мазмұнына тәуелсіз түрде хабарлама әрқашан сигнал түрінде бейнеленеді. Хабарлама мен сигнал арасындағы сәйкестікті қамтамасыз ететін белгілі бір ереже бойынша сигналды құрастыру кодтау деп аталады.

Кең мағынада кодтау- хабарламаны сигналға түрлендіру. Тар мағынада кодтау- символдар деп аталатын бастапқы белгілерді, белгілер саны аз басқа алфавитте көрсету. Ол сенімділігін арттыру және байланыс каналдары бойынша тасымалдауға ыңғайлы түрге сигналдарды түрлендіру үшін жүзеге асырылады.

Сигналдар уақыт және т.б. мәндері бойынша үздіксіз және дискретті болуы мүмкін, яғни сигналдың төрт типінің біреуі мүмкін:

- үздіксіз (көп мәндер және уақыт бойынша);
- көп мәндер бойынша үздіксіз, уақыт бойынша дискретті;
- көп мәндер бойынша дискретті, уақыт бойынша үздіксіз;
- дискретті (көп мәндер және уақыт бойынша).

Кейде теорияда уақыт және мәндері бойынша үздіксіз, бірақ параметрлері бойынша дискретті сигналдарды қарастырады.

Сигналды тасушы әрқашан объект немесе процесс, алайда сигналдың математикалық моделі оның физикалық табиғатынан абстракцияланады және зерттелетін оқиғаның көзқарасынан елеулі сипаттарын ескереді. Сигналдың моделі шынайы объектілердің физикалық қасиеттерімен үйлеспеуі мүмкін. Мысалы, гармоникалық фукнциялардың шексіз санының қосындысы түріндегі сигналдың математикалық моделі практикада жүзеге асырылмайды, алайда бұл абстракция маңызды заңдылықтарды анықтауға мүмкіндік береді.

Шынайы ақпарат жүйелерінде қабылдаушыға белгісіз ақпаратты ғана тасымалдау жүзеге асады. Сондықтан әрбір хабарламаның ықтималдығын ғана ғана алдын-ала болжауға болады, ал сигналдық аналитикалық моделі кездейсоқ процесс бола алады. Дегенмен, кездейсоқ сигналдарды оқу үшін орындалулардың жиынының (ансамблінің) элементтері ретінде қарастырылатын детерминирленген сигналдардың анализі қажет. Осы тарауда детерминирленген сигналдардың моделдері қарастырылады.

1.2 Детерминирленген сигналдарды жалпыланған спектрлік көрсету

u(t) күрделі сигналының сызықты жүйе арқылы өтуін анализдеу үшін ол келесі түрде көрсетіледі:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t), \ t \in [t_1, t_2], \qquad (1.1)$$

мұндағы $\varphi_k(t)$- базистік функциялар;

c_k – өлшемсіз коэффициенттер.

c_k сигналдың дискретті спектрі деп аталады. $[t_1, t_2]$ интервалының шегінен тыс (1.1) сигналы шартты сүрелі болып саналады. Есептер қатарын қарастырған кезде осындай жорамал қателік болуы мүмкін. Ақыры ұзындықты сигналдарды көрсету үшін интеграл қолданылады:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha) * \varphi(\alpha, t) d\alpha, \qquad (1.2)$$

мұндағы S(α) – үздіксіз спектрді сипаттайтын спектрлік тығыздық;

φ(α,t) –α параметріне тәуелді базистік функция.

(1.1) және/немесе (1.2) түрінде сигналды көрсетуде пайдаланылатын әдістер жиынтығын сигналдардың жалпыланған спектрлік теориясы деп атайды. Бұл ретте пайдаланылатын базистік функциялардың түрімен ерекшелінетін жеке жағдайлар қарастырылады. Базистік функцияларға қойылатын негізгі талап- c_k коэффициенттерін есептеу жеңілдігі. Бұл талапқа $[t_1, t_2]$ кесіндісінде ортогональ базистік функциялар сай, олар келесі шартты орындайды:

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_k(t) * \varphi_j(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{егер } j \neq k, \\ \mu, & \text{егер } j = k. \end{cases} \qquad (1.3)$$

Егер барлық $\varphi_j(t)$ көбейтсе, j = $\overline{1,n}$ на $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ −де j = $\overline{1,n}$, онда j ≠k кезінде

$$\int_{t2}^{t1} \varphi_k(t) * \varphi_j(t) dt = 1. \qquad (1.4)$$

Осындай функциялар жүйесін ортонормаландырылған деп атайды.

Базистік функциялар (1.4) шартын орындайды делік.

(1.1) екі бөлігін $\varphi_j(t)$ көбейтеміз және $[t_1, t_2]$ интервалында интегралдаймыз:

$$\int_{t1}^{t2} \upsilon(t)\varphi_j dt = \int_{t1}^{t2} \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t)\varphi_j(t) dt = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{t1}^{t2} \varphi_k(t)\varphi_j dt.$$

(1.3) есебінен соңғы теңдеудің оң жағынжағы барлық интегралдар j ≠k кезінде нөлге тең. Сондықтан, (1.4) есепке алғанда:

$$c_k = \int_{t1}^{t2} \upsilon(t)\varphi_k(t) dt \, . \qquad (1.5)$$

Соңғы теңдеуден c_k коэффициенттері $k = \overline{1,n}$ тең.

Бір-бірінен тәуелсіз есептеле алады, ал оларды есептеудің күрделілігі базистік функциясының аналитикалық өрнегінің түрімен анықталады. (1.3), (1.4) шарттарымен байланысты көрсетілген қасиет сигналдардың қасиеттерін зерттегенде ортогонал функцияларды кең қолдану себебі болып табылады. Сонымен қатар, ортогонал функциялардың келесі жүйелері қолданылады: тригонометриялық функциялар жүйесі, Хаардың функциялар жүйесі, Лежандр көпмүшелері, Лаггер көпмүшелері, Чебышев көпмүшелері, Эрмит көпмүшелері және т.б.

1.3 Сигналдарды көрсетудің уақыттық формасы

u(t) кез келген функциясын (үздіксіз сигналды) уақыттың осы мезетінде сигналдың мәніне тең амплитудасы бар ұзақтығы шексіз аз, бір-біріне жалғасқан импульстердің жиыны түрінде көрсетуге болады:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) * \delta(\tau - t) * d\tau, \qquad (1.6)$$

мұндағы $\delta(\tau - t) = \begin{cases} \infty, t = \tau \text{ кезінде}, \\ 0, \ t \neq \tau \text{ кезінде}. \end{cases}$ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t) * d\tau = 1.$

(1.6)-ны көрсету $\delta(\tau - t)$ базистік функциясы бар (1.2) жалпыланған спектрлік көрсетудің жеке жағдайы екенін байқау қиын емес.

Дельта-функцияны қолданып дискретті тор функцияны тұрғызуға болады:

$$u_g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(t) * \delta(t - k\Delta t). \qquad (1.7)$$

$t = k\Delta t$ нүктелерінде $u_g(t)$ функциясы $u(k\Delta t)$-ға тең, мұндағы Δt-импульстердің және басқа нүктелерде нөлдің өту периоды. (1.7)-де қосындылау шегі (1.1)-дегіндей физикалық өткізімділігінің шарттарына негізделіп, ақырғы болып орнатылуы мүмкін.

1.4 Периодты сигналдарды жиіліктік көрсету

Базистік функциялары ретінде $p = \pm j\omega$ кезіндегі $\varphi(t) = e^{pt}$ пайдаланылатын детерминирленген сигналдарды көрсетуді қарастырамыз. Осындай көрсету Фурье түрлендіруі деп аталады. Эйлер формуласы $cos\omega t = (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})/2$ себебінен Фурье түрлендіруі күрделі сигналды гармоникалардың қосындысы түрінде көрсетуге мүмкіндік береді.

$[t_1, t_2]$ интервалында сигналдың детерминирленген жүзеге асуын сипаттайтын $u(t)$ функциясы Дирихле шарттарын қанағаттандырады (үздіксіз немесе бірінші түрдегі ажырау нүктелерінің ақырғы саны бар, сонымен қатар

экстремумдардың ақырғы саны) және $t \in (-\infty, +\infty)$ кезіндегі $T = t_2 - t_1$ периодпен қайталанады. Жоғарыда көрсетілген $\varphi(t) = e^{\pm j\omega t}$ базистік функциясын пайдаланып $u(t)$ функциясын келесі түрде көрсетуге болады:

$$u(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} A(jk\omega_1) * e^{jk\omega_1 t}, \quad (1.8)$$

мұндағы

$$A(jk\omega_1) = \frac{2}{T}\int_{t1}^{t2} u(t) * e^{jk\omega_1 t}\, dt, \quad (1.9)$$

ал период $T = t_2 - t_1 = 2\pi/\omega_1$.

Осы спектрлік көрсетуде $A(jk\omega_1)$ коэффициенттерін $u(t)$ периодты сигналының кешенді спектрі, ал нақты k үшін $A(jk\omega_1)$ мәнін кешенді амплитуда деп атайды. Кешенді спектр дискретті, бірақ $k\omega_1 = \omega$ ауыстырып, жанаушыны тұрғызуға болады:

$$A(jk\omega_1) = \frac{2}{T}\int_{t1}^{t2} u(t) * e^{-j\omega t}\, dt. \quad (1.10)$$

Әртүрлі кешенді сан сияқты, кешенді спектрді көрсетуге болады:

а) көрсеткіштік формада:

$$A(jk\omega_1) = A(k\omega_1) * e^{-j\varphi(k\omega_1)}, \quad (1.11)$$

мұндағы $A(k\omega_1)$ – амплитудалар спектрі, ал $\varphi(k\omega_1)$ – фазалар спектрі (сонымен дискретті);

б) алгебралық формада:

$$A(jk\omega_1) = A_k - jB_k, \quad (1.12)$$

Мұндағы $A_k = \frac{2}{T}\int_{t1}^{t2} u(t) * \cos(k\omega_1 t)\, dt$, $B_k = \frac{2}{T}\int_{t1}^{t2} u(t) * \sin(k\omega_1 t)\, dt$.

(1.12) көрсетілуі (1.9)-дан Эйлер формуласы бойынша ауыстыру жолымен алынады:

$$e^{-jk\omega_1 t} = \cos(k\omega_1 t) - jsin(k\omega_1 t).$$

$$A(k\omega_1) = \sqrt{A_k^2 + B_k^2},$$

ал

$$\varphi(k\omega_1) = arctg\left(\frac{B_k}{A_k}\right).$$

(1.12)-де $k = 0$ кезіндегі A_k нақты бөлігін анықтайтын теңдеуден сигналдың тұрақты құраушысы үшін теңдеуді аламыз:

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2} u(t)dt. \qquad (1.13)$$

(1.8)-де кешенді-түйіндес құраушыларды біріктіріп, тригонометриялық формада Фурье қатарын алуға болады:

$$u(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{A_0}}{2} + \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty}\left[\mathrm{A(jk\omega_1)} * \mathrm{e}^{\mathrm{jk\omega_1 t}} + \mathrm{A(-jk\omega_1)} * \mathrm{e}^{\mathrm{-jk\omega_1 t}}\right] = \frac{\mathrm{A_0}}{2} + \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty}\left[\mathrm{A(k\omega_1)} * \mathrm{e}^{\mathrm{j[k\omega_1 t - \varphi(k\omega_1)]}} + \mathrm{A(k\omega_1)} * \mathrm{e}^{\mathrm{-j[k\omega_1 t - \varphi(k\omega_1)]}}\right] = \frac{\mathrm{A_0}}{2} + \sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty}\mathrm{A(k\omega_1)}\cos\left(\mathrm{k\omega_1 t - \varphi(k\omega_1)}\right). \qquad (1.14)$$

$A(k\omega_1)$ амплитудаларының және $\varphi(k\omega_1)$ фазаларының спектрі әрқайсысы белгілі бір жиілікке сай (қосындының біреуі) сызықтар жиынтығы түріндегі спектрлік диаграмма түрінде көрсетілуі мүмкін. Сондықтан бұл спектрлерді сызық деп атайды. Гармоникалары еселік жиілік емес сызық спектрлері бар сигналдар периодты дерлік деп аталады.

1.5 Периодты сигналдың спектрінде энергияның таралуы

(1.14) сәйкес, Т периодына тең уақытта периодты сигналдың бөлетін энергиясын келесі түрде көрсетуге болады:

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt = \int_0^T \left|\frac{A_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[A(jk\omega_1) * e^{jk\omega_1 t} + A(-jk\omega_1) * e^{-jk\omega_1 t}\right]\right|^2 dt$$
$$= \frac{A_0^2}{2}\int_0^T dt + \frac{A_0}{2}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} A(jk\omega_1)\int_0^T e^{jk\omega_1 t}dt + \sum_{k=1}^{\infty} A(-jk\omega_1)\int_0^T -e^{jk\omega_1 t}dt\right\} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A(jk\omega_1)A(-jl\omega_1)\int_0^T e^{j(k-1)\omega_1 t}\,dt.$$

Келесіні көрсетуге болады:

$$\int_0^T e^{jk\omega_1 t}\,dt = \int_0^T e^{-jk\omega_1 t}dt = 0, \;\; a\int_0^T e^{j(k-1)\omega_1 t}\,dt = \begin{cases} 0, & k \neq l \text{ кезінде,} \\ T, & k = l \text{ кезінде.} \end{cases}$$

Осыны есепке ала, соңғы алатынымыз

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt = \frac{T}{2}[\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |A(jk\omega_1)|^2]. \quad (1.15)$$

Күрделі периоды сигналдың периодтағы орташа энергиясы әр гармоника бөлетін орташа энергиялардың қосындысына тең екені (1.15)-тен шығады.

1.6 Периодты емес сигналдарды жиіліктік көрсету

Шынайы периодты емес функцияға сәйкес $u(t)$ Дирихле шарттарын орындайды және абсолютті интегралданады деп болжаймыз:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| * dt < \infty.$$

Онда u(t) периоды емес сигналын спектрік көрсетуді периодты сигналдың периодын шексіздікке дейін үлкейту арқылы тұрғызуға болады. Ол үшін келесіні жасаймыз.

Периоды сигналдың $A(jk\omega_1)$ кешенді амплитудасы үшін (1.9) өрнегін (1.8)-ге қоямыз. $T = 2\pi/\omega_1$ екенін ескере отырып, аламыз:

$$u(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\omega_1}{\pi}\int_{t_1}^{t_2} u(t) * e^{jk\omega_1 t} dt\right] * e^{jk\omega_1 t}.$$

Ары қарай T → ∞ кезіндегі шектік ауысуды жүзеге асырамыз. Бұл ретте қосынды интегралға көшеді:

$$\omega_1 = \Delta\omega \to d\omega, \qquad k\omega_1 \to \omega.$$

Нәтижесінде аламыз:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t) * e^{j\omega t} dt\right] * e^{j\omega t} d\omega.$$

Тік жақшалардағы интеграл үшін соңғы теңдеуде $S(j\omega)$ белгіленуін енгізіп, Фурьенің екі түрлендіруін жазамыз:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) * e^{j\omega t} d\omega\ ; \quad (1.16)$$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) * e^{j\omega t} dt. \quad (1.17)$$

$S(j\omega)$ кешенді функциясын кешенді спектрлік тығыздық немесе спектрлік сипаттама деп атайды. Периодты сигнал жағдайындағындай, периоды емес сигналға спектрлік сипаттаманың келесі көрсетулері орын алады:

а) көрсеткіштік форма:

$$S(j\omega) = S(\omega) * e^{j\varphi(\omega)}, \quad (1.18)$$

мұндағы $S(\omega) = |S(j\omega)|$ – амплитудалардың спектрлік тығыздығы;
$\varphi(\omega)$ ω( ) – фазалар спектрі;
б) алгебралық форма (ауыстыру арқылы (1.17)-ден алынады):

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - jsin(\omega t));$$
$$S(j\omega) = A(\omega) - jB(\omega), \quad (1.19)$$

мұндағы

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) * \cos(\omega t)\, dt, \;\; B(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) * \sin(\omega t)\, dt. \quad (1.20)$$

Бұл ретте

$$S(\omega) = |S(j\omega)| = \sqrt{|A(\omega t)|^2 + |B(\omega t)|^2}, \varphi(\omega) = arctg\left[\frac{B(\omega)}{A(\omega)}\right]. \quad (1.21)$$

$S(j\omega)$-ді (1.18)-ден (1.16)-ға қойып аламыз:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) * e^{j[\omega t - \varphi(\omega)]} d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) * \cos[\omega t - \varphi(\omega)]\, d\omega + j \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) * \sin[\omega t - \varphi(\omega)]\, d\omega\right].$$

Тақ функцияның екінші интегралы нөлге тең, ал біріншісін (интеграл астындағы функцияның жұптығына байланысты) оң жиіліктер үшін жазуға болады. Осылай, Фурье қатарының тригонометриялық функциясын аламыз:

$$u(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} S(\omega) * \cos[\omega t - \varphi(\omega)] d\omega\,. \quad (1.22)$$

Ол айқын физикалық түсіндіру мүмкіндігін береді. Ең соңында тағы бір қызық қасиетті қарастырамыз. (1.17)-ге сәйкес, t_1, t_2 интервалында берілген $u(t)$ функциясы үшін жазуға болады:

$$S(j\omega) = \int_{t_1}^{t_2} u(t) * e^{-j\omega t} dt. \quad (1.23)$$

(1.10) мен (1.23) оң жақтарын салыстырып, $A(j\omega) = \frac{2}{T} * S(j\omega)$,теңдеуі орын алатынын байқаймыз, яғни $S(j\omega)$ дара импульсі бойынша оның периоды ретінің сызық спектрін тұрғызуға болады.

1.7 Периодты емес сигналдың спектрінде энергияны тарату

(1.16) ескере отырып, сигнал бөлетін энергияны сипаттайтын шама үшін өрнекті келесі түрде жазуға болады:

$$\int_{-\infty}^{\infty}[u(t)]^2dt = \int_{-\infty}^{\infty}u(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(j\omega)*e^{j\omega t}d\omega\right]*dt.$$

Интегралдау ретін өзгертіп, соңғы теңдеуді қайта жазамыз:

$$\int_{-\infty}^{\infty}[u(t)]^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(j\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty}u(t)*e^{j\omega t}dt\right]*d\omega. \quad (1.24)$$

(1.17) мен (1.24) оң жақтарын салыстырып, (1.24)-тің тік жақшаларындағы өрнек $S(-j\omega)$ екенін көреміз, демек

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|S(j\omega)|^2d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}|S(j\omega)|^2\,d\omega. \quad (1.25)$$

Осы теңдеуге байланысты, бар болу уақытында периоды емес сигнал бөлетін энергияны жиілік интервалында спектрлік сипаттаманың модулінің квадратын интегралдап анықтауға болады.

1.8 Сигналдардың ұзақтығы мен олардың спектрінің ені арасындағы қатынас

Ұзақтығы белгілі $u(t)$ сигналында $S(j\omega)$ спектрлік сипатамасы бар делік. Ұзақтығы λ есе өзгертілген $u(\lambda t)$ сигналы үшін сәйкес $S_\lambda(j\omega)$ сипаттамасын табамыз:

$$S_\lambda(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}u(\lambda t)*e^{j\omega t}dt*e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)*e^{-j\frac{\omega t}{\lambda}}d\tau = \frac{1}{\lambda}S\left(j\frac{\omega}{\lambda}\right), \quad (1.26)$$

мұндағы $\tau = \lambda t$.

λ есе қысқартылған (ұзартылған) сигналдың спектрі λ есе кең (тар) екені (1.26)-дан көрінеді, бұл ретте $1/\lambda$ коэффициенті гармоникалардың амплитудасын өзгертеді және спектрдің еніне әсер етпейді. Көрсетілген қасиет t мен ω айнымалылары көбейту түрінде Фурьенің тура және кері түрлендіруінің экспоненциалдық функциясы дәрежесінің көрсеткішіне кіретініне байланысты. Осыдан, сигналдың ұзақтығы мен оның спектрінің ені ақырғы интегралмен бір уақытта шектелмейтіні шығады. Сонымен қатар, келесі қатынас орындалады:

$$\Delta t * \Delta f = Const\ ,$$

мұндағы Δt – импульс ұзақтығы;

Δf –спектрдің ені.

2 Дәріс №2. Кездейсоқ сигналдардың моделдері

2.1 Кездейсоқ процесс сигналдың моделі ретінде

Ақпаратты тасымалдау мен түрлендіру мәселелерін қарастырған кезде сигналдың ең адекватты моделі кездейсоқ процесс болып табылады, ол үшін жоғарыда қарастырылған детерминирленген функциялар жеке орындалулар ретінде қарастырылады. Кездейсоқ процесс деп уақыттың кездейсоқ функциясын U(t) атайды, оның мәндері уақыттың әр моментінде кездейсоқ шама болып табылады. Кездейсоқ процесстер уақыт бойынша және күйлердің жиыны бойынша үздіксіз немесе дискретті бола алады, яғни детерминирленген сигналдармен аналогия бойынша кездейсоқ процесстің төрт типінің біреуі болуы мүмкін:

- үздіксіз кездейсоқ процесс (күйлер көпшілігі- үздіксіздік, ал күйлердің өзгеруі уақыттың кез келген мезетінде болуы мүмкін);
- үздіксіз кездейсоқ реттілік (күйлердің өзгеруіне уақыттың моментінің соңғы немесе есептік санында рұқсат етіледі);
- дискретті кездейсоқ процесс (күйлердің өзгеруі уақыттың кез келген моментінде болуы мүмкін, бірақ күйлердің жиынының соңы бар);
- дискретті кездейсоқ реттілік (соңғы жиынның күйі уақыттың моментінің соңғы немесе есептік санында өзгере алады).

Кездейсоқ процесстің қасиеттерін сипаттау үшін $t_1, t_2, \dots, t_N$ уақыт моменттерінде алынған, $U_1 = U(t_1), U_2 = U(t_2), \dots, U_N = U(t_N)$ кездейсоқ шамаларының N жүйесінің $p_N(U_1, U_2, \dots, U_N; t_1, t_2, \dots, t_N)$ ықтималдықтарының N өлшемді тығыздықтары пайдаланылуы мүмкін. Сондай-ақ, $p_1(U; t)$ ықтималдығының бірөлшемді тығыздығы уақыттың кез келген t моментінде кездейсоқ шаманың таралуын сипаттайды, ал $p_2(U_1, U_2; t_1, t_2)$ екі өлшемді тығыздық уақыттың кез келген t_1, t_2 моменттерінде кездейсоқ шамалардың бірлескен орындалуының ықтималдығын береді. Келесі қатынас орын алады:

$$p_1(U_1; t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(U_1, U_2; t_1, t_2) * dU_2. \qquad (2.1)$$

Реті жоғары ықтималдықтың тығыздығымен операция жасау өте күрделі. Сондықтан, кездейсоқ процестің сипаттамасы үшін бірінші және екінші ретті моменттік функцияларды қолданады: математикалық күтім, дисперсия және корреляциялық функция. U(t) кездейсоқ процесінің математикалық күтімі деп $m_u(t)$ уақыттың кездейсоқ емес функциясын атайды, оның мәні уақыттың әр моментінде кездейсоқ процестің сәйкес қимасында кездейсоқ шаманың математикалық күтіміне тең.

$$m_u(t) = M\{U(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} U * p_1(U;t) * dU, \quad (2.2)$$

мұндағы $p_1(U;t)$ −ықтималдықтың бірөлшемді тығыздығы.

U(t) кездейсоқ процесінің дисперсиясы деп $D_u(t)$ уақыттың кездейсоқ функциясын атайды, оның мәні уақыттың әр моментінде кездейсоқ процестің сәйкес қимасында кездейсоқ шаманың дисперсиясына тең:

$$D_u(t) = M\{[U(t)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty}[U(t) - m_u(t)]^2 * P_1(U;t), \quad (2.3)$$

мұндағы $U(t) = \ U(t) - m_u(t) - \ \ t$ қимасындағы центрлендірілген кездейсоқ шама.

$U(t)$ кездейсоқ процесінің корреляциялық (автокорреляциялық) функциясы деп $R_u(t_1, t_2)$ екі аргументтің кездейсоқ емес функциясын атайды, t_1, t_2 ерікті алынған мәндерінің әрбір жұбы үшін кездейсоқ процесстің сәйкес қимасының корреляциялық моментіне тең:

$$R_u(t_1, t_2) = M\{\mathring{U}(t_1)\mathring{U}(t_2)\} =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathring{U}(t_1)\mathring{U}(t_2) * p_2(U_1, U_2; t_1, t_2) * dU_1 dU_2, \quad (2.4)$$

мұндағы $\mathring{U}(t_1) = [U(t_1) - m_u(t_1)]$, $\mathring{U}(t_2) = [U(t_2) - m_u(t_2)]$.

Көп жағдайда нормаланған автокорреляциялық функцияны пайдаланған ыңғайлы:

$$\rho_u\,(t_1, t_2) = R_u(t_1, t_2)/(\sigma_u(t_1) * \sigma_u(t_2)), \quad (2.5)$$

мұндағы $\sigma_u(.) = \sqrt{D_u(.)}$.

Еркін $t=t_1=t_2$ кезінде (2.4) автокорреляциялық функциясы (2.3) дисперсиясына түрленеді: $R_u(t_1, t_2) = D_u(t)$, ал сәйкес нормаланған автокорреляциялық функция (2.5) бірге тең.

Екі кездейсоқ процестер арасындағы байланысты сипаттау үшін, мысалы $U(t)$ мен $V(t)$, өзара корреляция функциясын қарастырады:

$$R_{uv}(t_1, t_2) = M\big[\dot{U}(t_1)\,\dot{V}(t_2)\big]. \quad (2.6)$$

Көрсетілген сипаттамалардың уақыт бойынша құбылмалылығы тұрғысынан стационарлы және стационарлы емес кездейсоқ процесстерді бөледі. Тар мағынада U (t) процессін стационарлы деп аталады, егер оны сипаттайтын ықтималдықтар тығыздығы уақыттың басталуына тәуелді болмаса.

Кең мағынада кездейсоқ процесті стационарлы деп атайды, егер

$$m_u(t) = m_u \ = Const; \quad (2.7)$$
$$D_u(t) = D_u = Const; \quad (2.8)$$

$$R_u(t, t+\tau) = R_u(\tau), \qquad (2.9)$$

яғни, математикалық күтім (2.2) мен дисперсия (2.3) тұрақты, ал корреляциялық функция уақыттың басталуына тәуелді емес және $\tau = -t_2 - t_1$ бір аргументінің функциясы болып табылады. (2.8) дисперсияның тұрақтылық шарты жеке жағдай ретінде, $\tau = 0$ кезінде (2.9) корреляциялық функцияға қойылатын талабынан шығады:

$$D_u(t) = R_u(t, t) = R_u(0) = Const.$$

Әдетте, стационарлық процесс эргодикалық болып табылады, яғни жүзеге асырулар ансамблі бойынша орташа бір ұзын жүзеге асырудың уақыты бойынша орташаға тең:

$$m_u = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t) * dt =; \qquad (2.10)$$

$$D_u = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [u(t) - u_0]^2 * dt\,; \qquad (2.11)$$

$$R_u(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [u(t) - u_0] * [u(t+\tau) - u_0] * dt, \qquad (2.12)$$

мұндағы u(t) –U(t) кздейсоқ процесін бір жүзеге асыру.

2.2 Кездейсоқ сигналдарды спектрлік көрсету

Детерминирленген сигналдар сияқты кездейсоқ процесс спектрлік құраушылардың қосындысы ретінде көрсетілуі мүмкін. Ол үшін U (t) кездейсоқ процестерінің каноникалық ыдырауы қолданылады:

$$U(t) = m_u(t) + \sum C_k * \varphi_k(t), \qquad (2.13)$$

мұндағы $m_u(t)$ – кездейсоқ процесстің математикалық күтімі (2.2);

$\varphi_k(t)$– кездейсоқ емес базистік (координаталық) функциялар;

C_k – математикалық күтімі нөлге тең және D_k дисперсиясы бар корреляцияланбаған кездейсоқ шамалар, яғни

$$M[C_k C_l] = \begin{cases} D_k & \text{егер } k = l \\ 0 & \text{егер } k \neq l \end{cases}. \qquad (2.14)$$

$C_k * \varphi_k(t)$ құрастырушыларын элементар кездейсоқ процестер деп атайды. Осындай процестің кездейсоқтығы C_k кездейсоқ шамасы арқылы білінеді, оны каноникалық ыдырау коэффициенті деп атайды.

(2.13) каноникалық ыдырауы арқылы көрсетілген U(t) кездейсоқ процессінің корреляциялық функциясын табамыз:

$$R_u(t_1, t_2) = M\left[\dot{U}(t_1) * \dot{U}(t_2)\right] = M[\sum_k C_k \varphi_k(t_1) \sum_l C_l \varphi_l(t_2)] = \sum_{k,l} M\,[C_k C_l]\varphi_k(t_1)\varphi_l(t_2).$$

Болжам бойынша, C_k C_l- корреляцияланбаған, (2.14) шартын есепке ала, корреляцияланған функцияның өрнегі келесі түрге енеді:

$$R_u(t_1, t_2) = \sum_k \varphi_k(t_1) * \varphi_k(t_2) * D_k\ . \qquad (2.15)$$

(2.15) қосындысы түрінде корреляциялық функцияны көрсетуді U(t) кездейсоқ процессінің корреляциялық функциясының каноникалық ыдырауы деп атайды.

(2.13) кездейсоқ процестің каноникалық ыдырауына (2.15) корреляциялық функциясының каноникалық ыдырауы сәйкес келетіні [8] дәлелденді. Кері пайымдау да дұрыс: (2.15) түріндегі корреляциялық функцияның ыдырауына центрлендірілген кездейсоқ процесстің каноникалық ыдырауы сәйкес.

(2.15) өрнегінде t_1=t_2=t деп, кездейсоқ процесстің дисперсиясы үшін формуланы аламыз:

$$D_u(t) = R_u(t, t) = \sum_k [\varphi_k(t)]^2. \qquad (2.16)$$

Осылайша, координаталық функциялардың таңдалған жинағында центрлендірілген кездейсоқ процесс ыдырау коэффициенттерінің дисперсиялар жиынтығынмен сипатталады, оны кездейсоқ процесстің жалпыланған спектрі деп қарастырса болады.

(2.13), (2.15) және/немесе (2.16) көрсетулерін құрастыру үшін C_k корреляцияланбаған кездейсоқ шамалардың $\varphi_k(t)$ координаталық функцияларын ату керек, ол көп жағдайларда елеулі қиындықтар туғызады.

Егер $\varphi_k(t)$- ортогональ координаталық функциялар болса, ал $\int_{-r/2}^{r/2} m_u^2(t) * dt < \infty$, T интервалындағы m_u(t) кездейсоқ емес функциясын (1.1) ұқсас ыдыратуға да болады:

$$m_u(t) = \sum_k m_{uk}\varphi_k(t), \qquad (2.17)$$

мұндағы

$$m_{uk} = \int_{-T/2}^{T/2} m_u(t) * \varphi_k(t)dt.$$

m_u (t) (2.17)- ден (2.13)-ке қойып, нөлден өзгеше орташа мәні бар U(t) кездейсоқ процессі үшін каноникалық ыдырауды келесі түрде аламыз:

$$U(t) = \sum_k (m_{uk} + C_k) * \varphi_k(t). \qquad (2.18)$$

(2.18) қатынасы кездейсоқ сигнал үшін (1.1) типті жалпыланған спектрлік көрсету ретінде қарастырылуы мүмкін.

2.3 Стационар кездейсоқ сигналдарды жиіліктік көрсету, дискретті спектрлер

Кездейсоқ процесс [–T, T] уақыттың соңғы интервалында берілген деп болжаймыз. Онда, сәйкес корреляциялық функция R_u (τ) 4T интервалында қарастырылуы керек, себебі $-T<t_1,t_2<T$ кезінде $-2T<\tau<2T$ теңсіздіктері орындалуы тиіс.

$R_u(\tau)$ 4T периодпен шартты жалғасады деп есептеп, жазуға болады:

$$R_u(\tau) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k * e^{jk\omega_1\tau}; \quad (2.19)$$

$$D_k = \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T} R_u(\tau) * e^{-jk\omega_1\tau}\, d\tau \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \dots), \quad (2.20)$$

мұндағы

$$\omega_1=2\pi/(4T)=\pi/(2T).$$

$R_u(\tau)$ жұп функция екенін ескеріп, (2.20) келесі түрде жазуға болады:

$$D_k = \frac{1}{T}\int_{0}^{2T} R_u(\tau) * e^{-jk\omega t}.$$

(2.19) $\tau = t_1 - t_2$ қойып, аламыз:

$$R_u(t_1, t_2) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k * e^{jk\omega_1 t_1} e^{-jk\omega_1 t_2}. \quad (2.21)$$

Соңғы өрнекті (2.15) салыстырып, (2.21) корреляциялық функцияның каноникалық ыдырауының мәні екенін байқауға болады. Жоғарыда айтылғандай, оған центрлендірілген кездейсоқ процестің каноникалық ыдырауы сәйкес:

$$U(\dot{t}) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k * e^{jk\omega_1 t}, \quad (2.22)$$

мұндағы

$$C_k : M\{[C_k]^2\} = D_k.$$

Жалпы жағдайда (2.22) оң жағына стационар кездейсоқ процестің математикалық күтімін- m_u қосу керек.

Әртүрлі таңба индекстары бар абсолют шамалары бірдей экспоненциалды құраушыларды біріктіргенде стационарлы кездейсоқ шама уақыттың шектеулі интервалында гармоникалардың суммасы болып қалады.

$$U(t) = m_u \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\,\omega_1 t + b_k \sin k\,\omega_1 t), \quad (2.23)$$

мұндағы

$$\omega_1 = \frac{\pi}{(2T)}, m_u = M\{U(t)\},$$
$$M\{a_k\} = M\{b_k\} = 0\ , M\{[a_k]^2\} = M\{[b_k]^2\} = D_k.$$

(2.23) тригонометриялық формада спектрлік ыдырау көрсетуінен спектрлік сызықты болатынын көруге болады, яғни спектрлік диаграммадағы әр гармоникаға ұзындығы амплитуданың дисперсиясына D_k пропорционал вертикаль кесінді сәйкес болады.

2.4 Стационар кездейсоқ процестерді жиіліктік көрсету, үздіксіз спектрлер

Кез келген $-\infty < t < \infty$ кезінде стационар кездейсоқ процесті сипаттау үшін интегралды каноникалық ыдырау құрастырамыз. Ол үшін (2.19) формуласын өзгертеміз:

$$R_u(\tau) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{D_k}{\Delta\omega} e^{jk\omega_t\tau}\Delta\omega, \quad (2.24)$$

мұндағы $\Delta\omega=\omega_{k+1}-\omega_k=\pi/(2T)$ – көрші гармоникалар арасындағы жиіліктер интервалы. Белгілейміз:

$$S_u(k\omega_1) = \frac{D_k}{\Delta\varphi} = \frac{2T}{\pi} D_k. \quad (2.25)$$

$S_u(k\omega 1)$ функциясын стационар процестің дисперсиясының орташа тығыздығы деп атайды. Бұл дисперсия көрші гармоникалар арасындағы жиіліктік интервал ұзындығының бірлігіне сәйкес.

(2.25) ескеріп, (2.24) формуласы келесі түрге ие болады:

$$R_u(\tau) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} S_u(k\omega_1) * e^{jk\omega_1\tau}\Delta\omega\ . \quad (2.26)$$

D_k үшін өрнекті (2.20)-дан (2.25)-ке қойып жазуға болады:

$$S_u(k\omega_1) = \frac{1}{\pi}\int_{-2T}^{2T} R_u(\tau) * e^{-jk\omega_1\tau}\, d\tau. \quad (2.27)$$

Ары қарай, $T \to \infty$ кезінде (2.26), (2.27) шектік ауысуын жүзеге асырамыз. Бұл ретте қосынды интегралға өтеді.

$$S_u(k\omega_1) \to S_u(\omega), k\omega_1 \to \omega,\ \Delta\omega \to d\omega\ .$$

Нәтижесінде аламыз:

$$R_u(\tau) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega\,; \quad (2.28)$$
$$S_u(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_u(\tau) * e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.29)$$

(2.28)-де болған $S_u(\omega) * d\omega$ шама (2.25) енгізген белгілену бойынша, [ω,ω +dω] жиілік интервалындағы спектрлік құраушыларға келетін дисперсия болып табылады. Жиілік бойынша кездейсоқ процестің дисперсиясының таралуын көрсететін S_u (ω) функциясы стационар кездейсоқ процестің спектрлік тығыздығы деп атайды.

(2.21)-ге ұқсас $R_u(\tau)$ корреляциялық функциясының интергралды каноникалық ыдырауының өрнегін (2.28)-ге $\tau = t_1 - t_2$ қойып жазуға болады:

$$R_u(\tau) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega) * e^{j\omega t_1} e^{-j\omega t_2} d\omega. \qquad (2.30)$$

Корреляциялық функцияның ыдырауы сияқты кездейсоқ процестің ыдырауын тұрғызуға болады. Бұл үшін (2.22) формуласын келесі түрде көрсетуге болады:

$$\dot{U}(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{C_k}{\Delta\omega} * e^{jk\omega_k t}\Delta\omega.$$

Ары қарай $G_u(\omega_k) = C_k/\Delta\omega$ белгіленуін енгіземіз және (2.26), (2.27) жасағандай $T \to \infty$ кезіндегі шектік ауысуды жүзеге асырамыз. Нәтижесінде стационар кездейсоқ функцияның каноникалық ыдырауын аламыз.

$$\dot{U}(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} G_u(\omega) * e^{j\omega t} d\omega. \qquad (2.31)$$

Корреляциялық функцияның ыдырауы (2.21) және (2.22) кездейсоқ процесстің ыдырауы арасындағы жоғарыда айтылған сәйкестік есебінде, (2.31)-дегі $G_u(\omega)$ dω дисперсиясы $S_u(\omega)$dω кездейсоқ функция болып табылады, ол жиілік (ω,ω+ dω) интервалындағы спектрлік құраушыларға сәйкес.

2.5 Қуаттың спектрлік тығыздығы

Оң жиіліктер үшін бір жақты спектрге өтеміз. Эйлер формуласын қолданып (2.29) екі құраушы түрінде көрсетеміз:

$$S_u(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} R_u(\tau) * \cos\omega\,\tau\, d\tau - \frac{j}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_u(\tau) * \sin\omega\tau\ \ d\tau.$$

$R_u(\tau)$ жұп функция болғандықтан, екінші құраушы нөлге тең, ал бірінші интегралды оң жиіліктер үшін жазуға болады:

$$S_u(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} R_u(\tau) * \cos\omega\,\tau\, d\tau. \qquad (2.32)$$

Осыдан, жеке жағдайда, S_u (ω) нақты және оң функция екені шығады. Сондықтан, (2.28)-де де оң жиіліктермен шектелуге болады:

$$R_u(\tau) = \int_0^\infty S_u(\omega) * \cos\omega\tau * d\omega.$$

Көрші теңдікте τ = 0 қойып, аламыз:

$$R_u(0) = D_u = \int_0^\infty S_u(\omega) * d\omega. \quad (2.33)$$

Дисперсия сигналдың қуатын сипаттайтындықтан:

$$D_u = M\left\{\left[\dot{U}\right]^2\right\} = P_u,$$

жиі S_u (ω) спектрік тығыздығын қуаттың спектрлік тығыздығы деп атайды.

3 Дәріс №3. Үздіксіз сигналдарды дискреттіге түрлендіру

3.1 Дискреттеу есебін тұжырымдау

Сигналды дискреттеу – үздіксіз аргумент функциясын дискретті уақыт функциясына түрлендіру. Оның мәні u(t) үздіксіз сигналын координаталар жиынына ауыстыруда:

$$[C_1, C_2, \dots, C_N] = A[u(t)], \quad (3.1)$$

мұндағы A[·] – бір оператор.

Жүзеге асырудың жеңілдігі жағынан сызықты операторларды пайдаланған жөн. Көп жағдайда, сигналдардың координаталарын анықтау үшін қатынасты қолданған ыңғайлы:

$$C_i = Au(t) = \int_T \varphi_i(t) * u(t) * dt, \quad (3.2)$$

мұндағы $\varphi_i(t), i = \overline{1, N}$ – берілген базистік (көп жағдайларда ортогональ пайдаланылуы мүмкін) функциялар.

Басқару мақсатында дискретті сигналдарды келесі қолдануда оны кейбір берілген операторды пайдаланып қалпына келтіруді жүзеге асырады:

$$\dot{u(t)} = B[C_1, C_2, \dots, C_N]. \quad (3.3)$$

Егер сигналды дискреттеу (3.2) түрдегі операторымен жүзеге асырылса, (1.1) сай үздіксіз сигналды қалпына келтіру үшін операторды қолдануға болады

$$u(\dot{t}) = \sum_{i=1}^{N} C_i \varphi_i(t). \quad (3.4)$$

Интегралдау операторын қолдану салдарынан (3.2) қатынасы бойынша дискреттеудің бөгеуілге төзімділігі жоғары. Алайда, бұл ретте Т интегралдау уақытында сигналдың кідірісі орын алады. Сондықтан, көп жағдайда, дискреттеу сигналды оның лездік мәндерінің (таңдаулар) жиынына $u(t_1)$, i=1,2,… ауыстыру болып табылады, ол (1.6) қатынасымен сипаталады. Бұл (3.2) дельта-функцияларды пайдаланумен жүзеге асырылады:

$$\varphi_i(t) = \delta(t - t_1).$$

Нәтижесінде тор функция (1.7) алынады, ал сигналдың C_i координаталары анықталады:

$$C_i = u(t_i). \quad (3.5)$$

Егер дискреттеу қадам $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} = Const$ болса, дискреттеу бірқалыпты деп аталады.

Құрылғыларды жүзеге асырудың қарапайымдылығын қамтамасыз ету үшін үздіксіз сигналдарды жүзеге асыруда ортогонал емес базистік функциялар, көп жағдайда келесі түрдегі дәрежелік алгебралық полиномдар кең қолданылады:

$$u(\dot{t}) = \sum_{i=0}^{N} a_i * t^i \text{ или } u(\dot{t}) = \sum_{i=0}^{N} a_i * (t - t_0)^i,$$

мұндағы a_i – шынайы коэффициенттер.

Үздіксіз сигналды бір қашықтықтағы санаулардың жиыны ретінде көрсету- дискреттеудің ең көп тараған түрі. Әдетте, ол сигналды ары қарай сандық формаға түрлендіру мақсатында пайдаланылады. Дискретті сигналды сандық кодтау нәтижесінде оның квантталуы- сәйкес уақыт моменттерінде рұқсат етілген жақын мәндеріне сигналдың лездік мәндерін ауыстыру болады. Бұл ретте сигнал уақыт бойынша да, мәндер жиыны бойынша да дискретті болады. Сигналды көрсетудің сандық түрінің маңызды артықшылығы кванттаудың көп деңгейлерін разрядтардың аз санымен көрсетуге болатындығы. Сонымен қатар, сандық түрде көрсетуде ЭЕМ-де өңдеудің күрделі алгоритмдері жүзеге асырылуы мүмкін, соның ішінде қателіктерді табатын және жөндейтін кодтарды құрастыру.

3.2 Үздіксіз сигналды қалпына келтірудің сапа критерийлері

Сигналды қалпына келтіру сапасын бағалау үшін келесі критерийлер қолданылады. Бірқалыпты жақындату (кішкене ауытқу критерийі):

$$\max_{t \epsilon T} u(t) - u^*(t) \leq \varepsilon_{\text{қос}}. \quad (3.6)$$

Жүзеге асырулар ансамблі үшін бірқалыпты жақындату:

$$\sup_{u(t)=U} u(t) - u^*(t) \le \varepsilon_{\text{қос}}. \quad (3.7)$$

Орташа квадраттық ауытқу критерийі (ОКА):

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T |u(t) - u^*(t)|dt} \ll \sigma_{\text{қос}}. \quad (3.8)$$

N жүзеге асырулар ансамблі үшін ОКА- $\sigma_\sum$ p_i, i=1,N жүзеге асырулар ықтималдықтарын есепке ала ансамбль бойынша орташалаумен есептеледі:

$$\sigma_\Sigma = \sum_{i=1}^{N} p_i \sigma_i \le \sigma_{\Sigma,доп} . \quad (3.9)$$

Интегралды критерий:

$$\varepsilon = \frac{1}{T}\int_T \left|u(t) - u^*(t)\right| dt \le \varepsilon_{доп} . \quad (3.10)$$

N жүзеге асырулар үшін $\varepsilon_\sum$ интегралды критерий шамасын ансамбль бойынша орташалау жолымен есептейді:

$$\varepsilon_\Sigma = \sum_{i=1}^{T} p_i \varepsilon_i . \quad (3.11)$$

Тағы қателік $\varepsilon_{\text{қос}}$ рұқсат етілген мәнінен аспайтын $P_{\text{қос}}$ ықтималдықтың рұқсат етілген деңгейі ретінде анықталатын ықтималдық критерийі пайдаланылады.

$$P\left\{\left|u(t) - u^*(t)\right| \le \varepsilon_{доп}\right\} \le P_{доп} . \quad (3.12)$$

(3.6)-(3.11) көрсетілген критерийлерінің біреуін қолдану әрбір жағдайда жүйеге қойылатын талапқа және қолжетімді априорлы ақпаратқа тәуелді.

3.3 Котельников теоремасы

Жоғары айтылғандай, бірқалыпты дискреттеу көп пайдаланылады. Бұл ретте дискреттеу қадамының шамасын таңдау үшін эргодикалық кездейсоқ процесс түріндегі сигналдың моделі пайдаланылады, оның әр жүзеге асуы спектрі шектеулі функция түрінде болады. Котельниковтың келесі теоремасы осындай тәсілдің теориялық негізі болып табылады.

Фурье түрлендіруіне рұқсат беретін және үздіксіз спектрі бар, 0-ден $f_c=\omega_c/2\pi$ дейін жиілік жолағымен шектелген кез келген u(t) функциясы $\Delta t = 1/(2\cdot f_c)=\pi/\omega_c$ уақыт интервалы арқылы саналған өзінің лездік мәндерінің дискретті қатарымен толық анықталады.

Дәлелдеуі. Жорамал бойынша $u(t)$ функциясының спектрі шектелген болғандықтан, яғни $|\omega|>\omega_c$ кезінде $S(j\omega)=0$, (1.16) сәйкес теңдеу жазуға болады:

$$u(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega}^{+\varpi} S(j\omega)*e^{i\omega t}d\omega. \qquad (3.13)$$

$S(j\omega)$ функциясын $[-\omega_C,\omega_C\ ]$ *соңғы интервалында* Фурье қатарына ажыратуға болады. $S(j\ \omega)\ 2\omega_c$ периодымен шартты жалғасады деп және (1.8), (1.9) t-ны на ω-ға, ал $\omega_1\ \ \Delta t\ =\pi\omega_c$-ға ауыстырып Фурьенің бір-екі түрлендіруін жазамыз:

$$S(j\omega)=\frac{1}{2}\sum_{-\omega_c}^{+\infty} S(j\omega)*e^{j\omega t}\,d\omega\ ; \qquad (3.14)$$

$$A_k=\frac{1}{\omega_c}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} S(j\omega)*e^{-jk\Delta t\omega}d\omega\ . \qquad (3.15)$$

$t_k=k\Delta t$ уақыттың дискретті моменттері үшін (3.13) теңдеуін алдын-ала қайта жазып, (3.15) пен (3.13) қатынастарын салыстырамыз:

$$u(k\Delta t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} S(j\omega)*e^{j\omega\Delta t}d\omega. \qquad (3.16)$$

Төмендегіні байқау қиын емес:

$$A_k=\frac{2\pi}{\omega_c}*u(-k\Delta t)\ . \qquad (3.17)$$

(3.17)-ден (3.14)-ке $A_к$ мәнін қойып жазуға болады:

$$S(j\omega)=\frac{\pi}{\omega_c}\sum_{-\infty}^{+\infty} u(k\Delta t)*e^{jk\Delta t\omega}\ . \qquad (3.18)$$

Соңғы теңдеуде k алдындағы минус таңбасын керіге ауыстыруға болады, себебі қосынды оң да, теріс те сандар бойынша жүргізіледі.

4 Дәріс №4. Дискретті жиынтықтардың анықталмағандық өлшемі

4.1 Дискретті ансамбльдерді ықтималды сипаттау

$Z=\{z_1,z_2,z_3,\dots,z_N\}$ – N элементтерден тұратын жиынтық болсын. Егер

әрбір z_1-ге p(z_1) санына сай қойылып, барлық $i = \overline{1,N}$ $p(z_i) \geq 0$, а $\sum p(z_i) = 1$ болса, Z жиынтығына p(z) ықтималдықтардың таралуы берілген деп айтады. Берілген ықтималдықтардың таралуы бар Z жиынтығы дискретті ықтимал ансамбль немесе қарапайым дискретті ансамбль деп аталады және $\{Z, p(z)\}$ деп белгіленеді.

$Z = \{z_1, z_2, z_3, \dots, z_N\}$ мен $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_K\}$- соңғы жиынтық болсын. Жиынтықтардың көбейтіндісі $\{ZV\}$ деп барлық мүмкін реттелген $z_i v_j$ жұптардың көбейтіндісі түрінде болатын элементтерді атайды.

$$i = \overline{1, \mathrm{N}}, j = \overline{1, K}.$$

Егер әрбір $z_i v_j$ жұбына сәйкесінше p(z_i, v_j) ықтималдығы қойылса, онда $\{ZV, p(z)\}$ ансамбльдерінің көбейтіндісін аламыз. Біріктірліген ансамбль элементтері үшін ықтималдықтардың қарапайым қасиеттері тән:

$$\sum_{j=1}^{K} p(z_i, v_j) = p(z_i); \qquad \sum_{i=1}^{N} p(z_i, v_j) = p(v_j)\,. \qquad (4.1)$$

Көрсетілген қасиеттерден шығатыны, атап айтқанда, ансамбльдер көбейтіндісі берілсе, онда әрқашан бастапқы ансамбльдер $\{Z, p(z)\}$ мен $\{V, p(v)\}$ табылуы мүмкін екені шығады. Керісі тек бастақы ансамбльдер тәуелсіз болғанда шығады, бұл ретте $p(z_i, v_j) = p(z_i)p(v_j)$. Тәуелді ансамбльдер жағдайы үшін $p(z_i, v_j) = p(z_i)p\left(\frac{v_j}{z_i}\right) = p(v_j)p(z_i/v_j)$, яғни біріктірілген ансамбль элементінің ықтималдығын анықтау үшін, басқа ансамбль элементы орындалды деген шартпен, ансамбльдердің біреуінің элементінің пайда болуының шартты ықтималдығын беру керек:

$$p\left(\frac{z_i}{v_j}\right) = \frac{p(z_i,v_j)}{p(v_j)}, \quad p\left(\frac{v_j}{z_i}\right) = \frac{p(z_i,v_j)}{p(z_i)}, \qquad (4.2)$$

4.2 Энтропия таңдау анықталмағандығының өлшемі ретінде

N мүмкін күйлері бар дискретті ансамбль берілсін:

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 & z_i & z_N \\ p_1 & p_i & p_N \end{bmatrix}, \quad p_i = p(z_i) \geq 0, \sum p_i = 1\,. \qquad (4.3)$$

N шамасы көп болған сайын, ансамбльдің нақты элементін таңдау анықталмағандығы көп болатыны интуитивті түрде белгілі. Бұл N санын таңдау анықталмағандығының өлшемі ретінде қабылдауға бағыт береді. Алайда, N = 1 кезінде өлшем нөлден өзгеше болса да, таңдау анықталмағандығы 0-ге тең. Әлбетте, бұл қолайсыздық келесі анықталмағандық өлшемін енгізудің бір себебі болды:

$$H(Z) = log_a N \ . \qquad (4.4)$$

Өлшемді 1928 ж. Р. Хартли ұсынды. Хартли өлшемінің қасиеттері:

- ол элементтер санының бірсарынды функциясы болып табылады;
- N=1 H(Z)=0, яғни өлшем нөлге тең болған кезде, анықталмағандық болмағанда;
- өлшем аддитивті, яғни біріктіру, мысалы, N мен M элементтер саны бар Z мен V екі жиынын, N x M тұратын $z_i v_j,\ i = \overline{1,N},\ j = \overline{1,M}$ әр түрлі комбинацияларынан тұратын бір жиын ретінде қарастыруға болады, бұл ретте

$$H(ZV) = log_a(NM) = log_a N + log_a M.$$

Өкінішке орай, Р. Хартли өлшемі (4.3)-тегі $p_i,\ i = \overline{1,N}$ ықтималдықтары әр түрлі болуы мүмкін екенін ескермейді. Сондықтан, ол тек жиынтықтың тең ықтимал элементтері жағдайында қолданылады. Тең ықтимал емес элементтерде анықталмағандық аз. Мысалы, априорлы ықтималдықтары 0,9 мен 0,1 екі элементтің анықталмағандық таңдауы тең ықтимал (0,5; 0,5) элементтер жағдайына қарағанда аз. Сондықтан, анықталмағандық өлшемі элементтердің $p_i,\ i = \overline{1,N}$ ықтималдықтарының үздіксіз функциясы болуы талабы орынды. Осы талапты орындайтын өлшемді К. Шеннон ұсынды және энтропия деп аталады:

$$H(Z) = -\sum_{i=1}^{N} p(z_i) log_a p(z_i). \qquad (4.5)$$

Логарифмнің *a* негізінің, жалпы айтқанда мағынасы жоқ. Егер логарифм ондық (lg) болса, энтропия мен ақпарат мөлшері ондық бірлікте *битпен* анықталады, егер логарифм натурал (ln) болса, өлшем бірлігі *нит* болады. Кең қолданылатыны ақпараттың екілік бірлігі- *bit* (ағылшыннан қысқартылған *binary digit),*ол негізі екіге тең логарифмге сөйкес ($\log_2$), әрі қарай сол қолданылады.

Жиынтықтың тәуелсіз орындалатын элементтері үшін өлшем ретінде априорлы жеке анықталмағандық қолданылуы мүмкін:

$$H(z_i) = -log_2 p(z_i). \qquad (4.6)$$

Көздің жалпы анықталмағандығын сипаттайтын К. Шеннон өлшемі жеке анықталмағандықтарды (4.6) жиынның барлық элементтерін орташалаумен табылатын байқауға болады.

К. Шеннон өлшемінің Р. Хартли өлшемімен байланысын көрсетеміз. Егер жиынтықтың барлық элементтері тең ықтималды болса, яғни $p_i = 1/N$, барлығы үшін $i = \overline{1,N}$, онда

$$H(Z) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} log_2 \frac{1}{N} = log_2 N. \qquad (4.7)$$

Осылай, Р. Хартли өлшемі- тең ықтимал элементтер үшін К. Шеннон өлшемінің жеке жағдайы. Сонымен бірге, К. Шеннон өлшемі тең ықтимал емес элементтер жағдайы үшін Хартли өлшемін жалпылауы болып табылатынын көрсетуге болады.

4.3 Энтропиялардың қасиеттері

1. Энтропия нақты және теріс емес шама. Қасиеттері барлық $i = \overline{1,N}$ үшін $0 \le p(z_i) \le 1$ ескере отырып (4.5) формуласы бойынша оңай тексеріледі.

2. Энтропия шектелген шама. $0 \le p_i \le 1$ кезінде бұл қасиет тікелей (4.5) формуласынан шығады. p = 0 кезінде:

$$\lim_{p\to 0}(-p\log_2 p) = \lim_{p\to 0}\frac{\log_2 1/p}{1/p} = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{\log_2 \alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{\log_2 e}{\alpha\cdot 1} = 0.$$

(бұл жерде $1/p = \alpha$ ауыстырылуы орындалды және ары қарай анықталмағандық Лопиталь әдісі бойынша ашылды). Осылайша, $0 \le p_i \le 1$ $i = \overline{1,N}$ кез келген мәнінде $H(Z) < \infty$.

3. 2 қасиетті дәлелдеу барысында, жиынтықтың бір элементінің ықтималдығы 1-ге тең болса, H (Z)=0 екенін байқауға болады.

4. Жиынтықтың барлық элементтері тең ықтимал болғанда энтропия максимал және

$$H\max(Z) = \max_{\forall p_i} H(Z) = \log_2 N. \qquad (4.8)$$

$\sum p_i = 1$ шартында (4.5) максимумын іздейміз.

Сәйкес шартсыз экстремум есебі үшін Лагранж функциясы:

$$F(p,\lambda) = -\sum_{p=1}^{N} p_{i\log_2 p_i} + \lambda\,(\sum_{i=1}^{N} p_i - 1) \to extr.$$

Экстремумның қажетті шарттары:

$$\frac{\partial F(p,\lambda)}{\partial p_i} = -\log_2 e + \lambda = 0;$$

$$\frac{\partial F(p,\lambda)}{\partial p_i} = \sum_{i=1}^{N} p_i - 1 = 0.$$

Осыдан $p_i = 2^{\lambda-\log_2 e} = Const = \frac{1}{N}$ шығады. Берілген мән максимум болатынын тексеріп оңай дәлелдеуге болады.

5. Жеке жағдайда екі элементі бар жиынтықтарда элементтердің біреуінің ықтималдығына энтропия тәуелділігінің түрі. Осыған, (4.5) қатынасына 2 мен 3 қасиеттерін қарастырғанда алынған қатынастар мен қортындыларға қарап көз жеткізуге болады, бұл жағдайда келесі түрге ие:

$$H(Z) = -\,\mathrm{p}\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p). \qquad (4.9)$$

6. Статистикалық тәуелсіз жиынтықтарды біріктіру энтропиясы бастапқы жиынтықтардың энтропияларының қосындысына тең. Осы қасиетті орнатқанда тәуелсіз элементтердің ықтималдықтарының қасиеті қолданылады:

$$p(z_i, v_j) = p(z_i)\cdot p(v_j).$$

Бұл ретте $\log_2 p(z_i, v_j) = \log_2 p(z_i) + \log_2 p(v_j)$ аламыз

$$H(ZV) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{K} p(z_i, v_j)\log_2 p(z_i, v_j) =$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} p(z_i)p(v_j)\log_2[p(z_i)p(v_j)] = -\sum_{i=1}^{N} p(z_i)\log_2 p(z_i)\sum_{j=1}^{K} p(v_j) -$$
$$\sum_{j=1}^{K} p(v_j)\log_2 p(v_j)\sum_{j=1}^{N} p(z_i) = H(Z) + H(V). \qquad (4.10)$$

Ұқсас түрде тәуелсіз көздердің кез келген санын біріктіру үшін формулалар алына алады.

Қортындылай келе, энтропия құрамдық жақты толық ескермей, жиынтықтың бір элементінің таңдаудың орташа анықталмағандығын сипаттайтынына баса назар аударамыз.

4.4 Шартты энтропия және оның қасиеттері

Әртүрлі жиынтықтардың элементтері арасында және бір жиынтықтың элементтері арасында байланыстар жиі орын алады. {ZV} біріктірілген ансамблі оның барлық мүмкін элементтерінің $z_i v_j$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,K}$ матрицасы түрінде берілсін:

$$\begin{bmatrix} p(z_1, v_1) & p(z_2, v_1) & \dots & p(z_N, v_1) \\ p(z_1, v_2) & p(z_2, v_2) & \dots & p(z_N, v_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(z_1, v_K) & p(z_2, v_K) & \dots & p(z_N, v_K) \end{bmatrix}. \qquad (4.11)$$

Ықтималдықтарды (4.1) сәйкес жол мен бағандар бойынша қосып (4.11) $\{Z, p(z)\}$, $\{V, p(v)\}$ ансамбльдерін анықтауға болады:

$$\{Z, p(z)\} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_N \\ p(z_1) & p(z_2) \dots & & p(z_N) \end{bmatrix};$$

$$\{V, p(v)\} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_K \\ p(v_1) & p(v_2) \dots & & p(v_K) \end{bmatrix}.$$

Тәуелді элементтер жағдайында:

$$p(z_i, v_j) = p(z_i) p\left(\frac{v_j}{z_i}\right) = p(v_j) p(z_i / v_j), \quad (4.12)$$

(4.12) көрсетілген теңдеулердің біріншісін қолданып жазуға болады:

$$H(ZV) = -\sum_{ij} p(z_i, v_j) \log_2 p(z_i, v_j) = -\sum_{i=1} p(z_i) \log_2 p(z_i) \sum_j p(v_j / z_i) - \sum_i p(z_i) \sum_j p(\frac{v_j}{z_i}) \log_2 p(z \frac{v_j}{z_i}) \quad . \quad (4.13)$$

Нормалау шарты бойынша, кез келген $i = \overline{1, N}$ үшін $\sum_j p(\frac{v_j}{z_i}) = 1$. Сондықтан, оң жақтың бірінші қосылғышы $\{ZV, p(z)\}$ ансамблінің H(Z) энтропиясы болып табылады. Екінші қосылғыштағы екінші сумма (j бойынша) жеке анықталмағандықты сипаттайды, ол Z ансамблінің z_1 күйі жүзеге асуы шартымен V ансамблінің бір күйіне келетін жеке анықталмағандықты сипаттайды. Оны *жеке шартты энтропия* деп атайды және $H_{z1}(V)$ деп белгілейді:

$$H_{z1}(V) = -\sum_{j=1}^{K} p(v_j / z_i) \log_2 p(v_j / z_i). \quad (4.14)$$

z_i барлық элементтері бойынша жеке энтропияны орташаландырумен алынатын $H_z(V)$ шамасы:

$$H_z(V) = \sum_{i=1}^{N} p(z_i) H_{z1}(V) \quad (4.15)$$

толық шартты энтропия немесе жай шартты энтропия деп аталады.

Осылайша, (4.14), (4.15) ескере отырып (4.13) жазуға болады:

$$H(ZV) = H(Z) + H_z(V). \quad (4.16)$$

(4.12) екінші теңдеуді ұолданып, ұқсас түрде жазуға болады:

$$H(ZV) = H(V) + H_V(Z). \quad (4.17)$$

Элементтері тәуелді жиынтықтардың кез келген санын $\{ZVW \dots\}$ біріктіру жағдайында, келесі теңдеу орын алады:

$$H(ZVW \dots) = H(Z) + H_Z(V) + H_{zV}(W), + \cdots$$

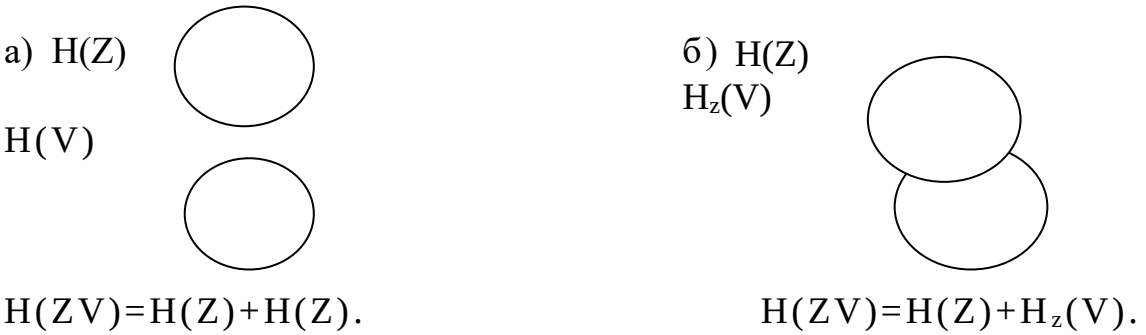
Шартты энтропия шартсыздан әрқашан аз немесе тең екендігін атап өтеміз:

$$H_v(Z) \le H(Z), H_z(V) \le H(V). \quad (4.18)$$

(4.18) теңсіздігінің әділеттілігі интуитивті түрде түсінікті: элементтерімен өзара байланысы бар басқа жиынтықтың элементі белгілі болса бір жиынтықтан элементті таңдау анықталмағандығы тек азаюы мүмкін. (4.16)- (4.18) шығады:

$$H(ZV) \le H(Z) + H(V). \quad (4.19)$$

(4.16) - (4.19) қатынастарының геометриялық түсіндірілуін берген пайдалы. 4.1 суретте тәуелді (а) және тәуелсіз (б) элементтері жағдайында біріктірілген жиынтық энтропиясын есептегенде орын алатын айырмашылықтар көрсетілген.



4.1 сурет – Біріктірілген ансамблдердің энтропиясын жасау

Жиі байланыстың басқа типі орын алады: тізбек элементтері арасындағы статистикалық тәуелділік. Егер тізбектің көрші екі элементтері арасында байланыс болса, ол $p(z_i/z_j)$ шартты ықтималдығымен сипатталады. Көрсетілген қасиеті бар элементтер тізбегін *Марковтың бір байланысты қатары* деп атайды. Әр элементтің алдыңғы екеуімен байланысы $p(z_i/z_j z_k)$ шартты ықтималдығымен сипатталады, ал сәйкес тізбек *Марковтың екі байланысты қатары* деп аталады.

Марковтың бір байланысты қатары үшін N көлемді алфавиттен z_j элементі белгілі (қабылданған) деген тұжырымда, жеке шартты энтропия:

$$H\left(\frac{Z}{z_j}\right) = -\sum_{i=1}^{N} p(z_i/z_j)\log_2 p(z_i/z_j).$$

Бұл ретте толық (орташа) шартты энтропия анықталады:

$$H(Z) = -\sum_{j=1}^{N} p(z_j)\sum_{i=1}^{N} p(z_i/z_j)\log_2 p(z_i/z_j)\ . \quad (4.20)$$

Марковтың екі байланысты қатары үшін ұқсас:

$$H\left(\frac{Z}{z_j z_k}\right) = -\sum_{i=1}^{N} p(z_i/z_j z_k)\log_2 p\left(\frac{z_i}{z_j z_k}\right).$$

$$H(Z) = -\sum_{j,k} p(z_j, z_k)\sum_{i=1} p(z_i/z_j z_k)\log_2 p(z_i/z_j z_k). \quad (4.21)$$

Элементтері арасында байланысы ұзағырақ болғанда энтропия үшін өрнек тұғызуға болады.

5 Дәріс №5. Үздіксіз кездейсоқ шамалардың анықталмағандық өлшемдері

5.1 Дифференциал энтропия түсінігі

Шығыс сигналдары үздіксіз кездейсоқ шама болатын ақпарат көздерін қарастырайық. Осындай көздің мүмкін күйлерінің жиынтығы үздіксіздік (континуум) құрайды, ал нақты бір мәннің ықтималдығы 0-ге тең, ол мысалға (4.5) өлшемін қолдануды мүмкін емес жасайды. Ертерек енгізілген дискретті ансамбльдерге негізделе осындай көздер үшін анықталмағандық өлшемдерін тұрғызайық.

Егер мүмкін мәндерінің диапазонын шектеп, осы диапазонды мысалы, бірдей интервалға бөлсек, онда біз үздіксіз кездейсоқ шаманың бір мәнін таңдау анықтмалмағандығын (4.5) формула бойыншажуықтап бағалай аламыз, осы интервалға түсуі нөлден басқа және осылай анықталады:

$$P\{z_i \le Z < z_i + \Delta z\} \approx p(\dot{z}_\iota)\Delta z,$$

мұндағы $p(\dot{z}_\iota)$ - $[z_i, z_i + \Delta z\,]$ интервалына кіретін $\dot{z}_\iota$ мәнінде үздіксіз кездейсоқ шаманың p(z) таралу тығыздығының ординатасы.

(4.5)-те $p(z_i)$ оның жуықтаған мәндері $p(\dot{z}_\iota) * \Delta z$ ауыстырып аламыз:

$$H(Z) = -\sum_{i=1}^{N} p(\dot{z}_\iota)\Delta z \log_2(p(\dot{z}_\iota)\Delta z) =$$
$$-\sum_{i=1}^{N} p(\dot{z}_\iota)\log_2 p(\dot{z}_\iota)\Delta z - \log_2\Delta z \sum_{i=1}^{N} p(\dot{z}_\iota)\Delta z\,. \quad (5.1)$$

Ары қарай $\Delta z \to 0$ кезіндегі шектік ауысуды жасаймыз. Бұл ретте сумма интегралға өтеді $\Delta z \to dz$, а $\sum_{i=1}^{N} p(\dot{z}_\iota)\Delta z \to 1$.

Жалпы жағдайда үздіксіз кездейсоқ шаманың өзгеру диапазоны $(-\infty; +\infty)$ екенін ескеріп, аламыз:

$$H(Z) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(z)\log_2 p\,(z)dz - \lim_{\Delta z\to 0}\log_2\ \Delta z. \quad (5.2)$$

(5.2) формуладан үздісіз кездейсоқ шаманың энтропиясы ықтималдық тығыздығының түріне тәуелсіз шексіздікке тең. Үздіксіз сигналдың нақты

мәнінің ықтималдығы 0-ге тең, ал күйлер жиынтығы шексіз болғандықтан бұл дерек таңғаралықтай емес.

Осындай өлшемді іс жүзінде пайдалану мүмкін емес екені түсінікті.

Ақпараттық қасиеттердің соңғы сипаттамасын алу үшін тек бірінші қосынды пайдаланылады, ол дифференциал энтропия деп аталады:

$$h(Z) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(z)\log_2 p(z)\,dz. \qquad (5.3)$$

Дифференциал энтропия термині, оны анықтау үшін (5.3) формуласында анықтау үшін $p(z)$ таралудың дифференциал заңын қолдану қажеттілігімен байланысты.

Орынды сұрақ туындайды: бұл келісім жасанды және мағынасыз емес па?

Бірлік интервалда біркелкі таралған кездейсоқ шаманың анықталмағандығын алып тастағанда, кез келген таралу заңы бар кездейсоқ шаманы таңдаудың орташа анықтмалмағандығының мәні дифференциал энтропияда бар екен.

Расында, Z_r кездейсоқ шаманың δ интервалында біркелкі таралған (5.2) энтропия анықталады:

$$H(Z_r) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\delta}\log_2 \frac{1}{\delta}\,dz = \lim_{\Delta z\to 0} \log_2\ \Delta z_r. \qquad (5.4)$$

δ=1 кезінде

$$H(Z_r) = \lim_{\Delta z\to 0} \log_2\ \Delta z_r.$$

(5.2) мен (5.4) салыстырып, $\Delta z = \Delta z_r$ кезінде байқаймыз:

$$H(Z) - H(Z_r) = h(z). \qquad (5.5)$$

5.2 Дифференциал шартты энтропия түсінігі

Енді үздіксіз кездейсоқ шамалар (ары қарай екеу) статистикалық байланысқан жағдайды қарастырайық. Келесі шарт орындалатындай кездейсоқ шамалардың мүмкін мәндерінің диапазонын бірдей интервалдарға бөлеміз:

$$P\{z_i \le Z < z_i + \Delta z,\ v_j \le V < v_j + \Delta z\} \cong p(\dot{z_\iota}\,\dot{v_j})\Delta z\Delta v, \qquad (5.6)$$

мұндағы $p(\dot{z_\iota}\,\dot{v_j})$ - $\Delta z\,\Delta v$: $(z_i \le \dot{z_\iota} < z_i + \Delta z,\ v_j \le \dot{v_j} < v_j + \Delta v)$ жақтары бар тікбұрыштың $(\dot{z_\iota}\,\dot{v_j})$ нүктесінде таралудың екіөлшемді тығыздығының ординатасы. (5.6) ықтималдықтардың жуықталған мәндерін (4.5) энтропия формуласына салып, аламыз:

$$H(Z,V) = -\sum_i \sum_j p\left(z_\iota\, v_j\right) \log_2 p\left(z_\iota\, v_j\right) \Delta z\, \Delta v -$$
$$\log_2 \Delta z \sum_i \sum_j p\left(z_\iota\, v_j\right) \Delta z\, \Delta v - \log_2 \Delta v \sum_i \sum_j p\left(z_\iota\, v_j\right) \Delta z\, \Delta v.$$

$p\left(z_\iota\, v_j\right) = p(z_\iota)p(v_j/z_i)$ ескере отырып, соңғы теңдіктің оң бөлігіндегі қосылғышты сумма түрінде көрсетуге болады:

$$-\sum_i p(z_\iota) \log_2 p(z_\iota)\, \Delta z \sum_j p(v_j/z_i)\, \Delta v -$$
$$\sum_i \sum_j p\left(z_\iota\, v_j\right) \log_2 p(v_j/z_i) \Delta z\, \Delta v.$$

Ары қарай $\Delta z \to 0, \Delta v \to 0$ кезінде шектік ауысу жасап, нормалау шартын ескеріп:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \sum_i \sum_j p\left(z_\iota\, v_j\right) \Delta z\, \Delta v = 1;$$
$$\lim_{\Delta z \to 0} \sum \quad \sum_j p\left(v_j/z_i\right) \Delta v = 1;$$
$$\lim_{\Delta z \to 0} \sum_i \sum_j p(z_\iota)\, \Delta v = 1,$$

аламыз

$$H(Z,V) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(z) \log_2 p\,(z) dz - \iint_{-\infty}^{\infty} p(z,v) \log_2 p\,(v/z) dz dv -$$
$$\lim_{\Delta z \to 0} \log_2 \Delta z - \lim_{\Delta v \to 0} \log_2 \Delta v. \qquad (5.7)$$

Бірінші және үшінші қосылғыштар– (5.2) үздіксіз көзінің H(Z) энтропиясының мәні, оның шығыс сигналы Z кездейсоқ шама болады, ал шама:

$$H_Z(V) = -\iint_{-\infty}^{\infty} p(z,v) \log_2 p\,(v/z) dz dv - \lim_{\Delta v \to 0} \log_2 \Delta v\,. \qquad (5.8)$$

үздіксіз кездейсоқ шаманың *шартты энтропиясы* болып табылады. Ол күтілгендей, оң жақтағы екінші қосылғыш шексіздікке тең. Сондықтан, бір тәуелсіз көз жағдайындағыдай тек бірінші қосылғышты ескереді:

$$h_Z(V) = \iint_{-\infty}^{\infty} p(z,v) \log_2 \frac{p(z,v)}{p(z)} dz dv. \qquad (5.9)$$

(5.9) шамасын *шартты дифференциал энтропия* деп атайды.

Бірлік интервалында біркелкі таралуы бар кездейсоқ шаманы таңдаудың орташа анықталмағандығын алып тастап, оның статистикалық байланысқан үздіксіз кездейсоқ шаманы жүзеге асыруының нәтижесі бар шартында, шартты дифференциал энтропия кез келген таралу заңы бар үздіксіз кездейсоқ шаманы таңдаудың орташа анықталмағандығын сипаттайды.

(5.2), (5.3), (5.7), (5.8), (5.9) салыстырып, екі статистистикалық байланысқан үздіксіз көздердің дифференциал энтропиясын келесі түрде көрсетуге болады:

$$h(ZV) = h(Z) + h_z(V) = h(V) + h_V + (Z). \qquad (5.10)$$

(5.10)-дағы екінші теңдік бірінші сияқты $p(\dot{z_\iota}\, \dot{v_j}) = p(\dot{v_j})p(\dot{z_\iota}\, /\dot{v_j})$ кезінде алынады. (5.7), (5.8) сай үздіксіз көздер үшін $H(ZV) = H(Z) + H_Z(V) = H(V) + H_V(Z),$ дискретті хабарламалар үшін (4.16) мен (4.18) ұқсас теңдеулерді жазуға болады, бірақ олардың тек теориялық мәні бар, себебі іс жүзінде шексіз анықталмағандықтармен операциялар жасау мүмкін емес.

5.3 Дифференциал энтропия қасиеттері

Мәні үздіксіз шаманың масштабына тәуелді болғандықтан дифференциал энтропия дискретті көздің энтропиясына қарағанда анықталмағандықтың салыстырмалы мәні болып табылады. Z кездейсоқ шамасы k рет өзгерді деп есептейік. Әрқашан келесі нормалау шарты орындалуы қажет болғандықтан:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(kz)\, d(kz) = k \int_{-\infty}^{\infty} p(kz)\, dz = 1,$$

бастапқы және масштабталған шамалардың тығыздығы үшін келесі қатынас орын алады:

$$p(kz) = \frac{p(z)}{k}. \qquad (5.11)$$

(5.3)-ке сай (5.11) ескеріп аламыз:

$$h(kZ) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(kz) * \log_2 p\,(kz) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(z)\,[\log_2 p\,(z) - \log_2 k]\, dz = =$$
$$-\int_{-\infty}^{\infty} p(z) \log_2 p\,(z) dz + \log_2 k \int_{-\infty}^{\infty} p(z)\, dz = h(Z) + \log_2 k. \qquad (5.12)$$

(5.12)-ден әртүрлі k таңдау әсерінен дифференциал энтропия оң, теріс және нөлдік мән қабылдай алатындығы шығады.

Дифференциал энтропия жылжу параметріне тәуелді емес Θ=Const, яғни h(Z+Θ)=h(Z). Расында, интегралдау шегі өзгермейтін V= Z+Θ ауыстыруын қолданып, *dz=dv* болғанда аламыз:

$$h(\mathrm{Z} + \Theta) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(\mathrm{z} + \Theta) \log_2 p\,(\mathrm{z} + \Theta) dz = -\int_{-\infty}^{\infty} p(\mathrm{v}) \log_2 p\,(\mathrm{v}) dv = h(V). \qquad (5.13)$$

5.4 Максимал дифференциал энтропиясы бар таралулар

Келесі есепті құрастырауық. Функционалдың максимал мәнін қамтамасыз ететін p(z) тығыздығын анықтау:

$$h(Z) = \int_{\alpha}^{\beta} p(z) log_2 p(z) dz \,, \qquad (5.14)$$

келесі шекте

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{p(z)}\, \mathrm{dz} = 1 \,. \qquad (5.15)$$

Көрсетілген (изопериметрлік) есептегі Лагранж функциясының түрі:

$$F(p, \mu) = p(z) \log_2 p(z) + \mu * p(z), \qquad (5.16)$$

мұндағы μ, осы жағдайда Лагранждың тұрақты, анықталмаған көбейткіші.

Экстремумның (5.16) қажетті шарттары келесі қатынаспен беріледі:

$$\frac{\partial \mathrm{F(p,\mu)}}{\partial \mathrm{p}} = \log_2 p(z) + \log_2 e + \mu = 0. \qquad (5.17)$$

Ізделіп отырған тығыздық $p(z) = 1/(\beta - \alpha), \alpha \le z \le \beta$ (5.15), (5.17) бірге шешу нәтижесінде алынады. Бұл, егер кездейсоқ шама үшін жалғыз шектеу мүмкін мәндерінің облысы $\mathrm{Z} \in [\alpha,\beta]$ болса, онда осы облыста ықтималдықтардың біркелкі таралуы максимал дифференциал энтропияға ие болатынын білдіреді.

Енді осы мүмкін мәндер облысына шектеуді шешеміз, бірақ дисперсия шамасына шектеу қосамыз:

$$h(Z) = -\int_{-\infty}^{\infty} p\,(z) \log_2 p(z)\, dz \to max, \qquad (5.18)$$

кезінде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{p(z)}\, dz = 1; \qquad (5.19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{z^2\, p(z) dz} = \sigma^2. \qquad (5.20)$$

Бұл жағдайда Лагранж функциясы келесі түрге ие болады:

$$F(p, \mu_1, \mu_2) = p(z)\ log_2\ p(z) + \mu_1\ p(z) + \ \mu_2 z^2 \mathrm{p(z)},$$

сәйкес Эйлер теңдеуі:

$$\frac{\partial F(\mu,p)}{\partial p} = \ log_2\ p(z) + \ log_2\ e + \mu_1 + \mu_2 z^2 = 0. \qquad (5.21)$$

Тікелей алмастырып қою арқылы гаусс тығыздығы:

$$\mathrm{p(z)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, exp\left\{-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right\},$$

(5.18) функционалдың (5.21) экстремумының қажетті шартына (бұл жағдайда максимум) және берілген изопериметрлік шектеулер (5.19), (5.20) шарттарын орындайтынына көз жеткізуге болады. Жеңілдету үшін шығыста математикалық күтімді нөлге тең деп алды, себебі дифференциал энтропия бәрібір жылжу параметріне тәуелді емес.

6 Дәріс №6. Ақпарат мөлшері түсірілген анықталмағандық өлшемі ретінде

6.1 Дискретті хабарламаның жеке элементін беру кезіндегі ақпарат мөлшері

Дискретті ықтималдық ансамблімен сипатталатын бір дискретті ақпарат көзі берілген деп санаймыз:

$$Z=\begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ p(z_1) & p(z_2) & \dots & p(z_n) \end{bmatrix},$$

мұндағы z_i, i=1,N – оның мүмкін күйлері. Көздің әр күйіне сәйкесінше жеке бірінші ретті сигнал қоюға болады. Ақпарат көзінің шығысынан байланыс каналының кірісіне келетін бірінші ретті сигналдардың берілген жиынтығын хабарлама; z_i – хабарламаның элементі деп атау қалыптасқан.

Егер көздің күйлері бір-бірінен тәуелсіз орындалса, онда жеке априорлы анықталмағандық z_1 хабарлама элементінің каналының кірсінде пайда болады, (4.6) сәйкес анықталады:

$$H(z_i)= - log_2\, p(z_i). \qquad (6.1)$$

Бөгеуіл мен хабарлама элементтері арасында статистикалық байланыс жоқ деп және z_i орнына v_j қабылдануының ықтималдығы белгілі деп аламыз:

$$p\left(z_i/v_j\right),\ \text{i=1,N},\ \ \text{j=1,K}.$$

Осылайша, каналдың шығысында v_j элементі алынса, онда апостериор ықтималдық $p\left(z_i/v_j\right)$ белгілі болады.

Демек, апостериор жеке анықталмағандықты анықтауға болады:

$$H_{v_j}(z_i) =- log_2\, p\left(z_i/v_j\right). \qquad (6.2)$$

v_j элементі белгілі болуы нәтижесінде алынатын ақпараттың жеке мөлшерін априор мен апостериор анықталмағандықтарының айырмасы деп анықтаймыз:

$$I(z_i, v_j) = H(z_i) - H_{v_j}(z_i) = -\log_2 p(z_i) + \log_2 p\left(\frac{z_i}{v_j}\right) \quad (6.3)$$

$$= \log_2 \frac{p\left(z_i/v_j\right)}{p(z_i)}.$$

Осылайша, ақпараттың жеке мөлшері v_j хабарлама элементін алу нәтижесінде түсірілген анықталмағандық шамасына сай.

6.2 Ақпараттың жеке мөлшерінің қасиеттері

1. $p(z_i)$ априорлы ықтималдық өсуімен ақпараттың жеке мөлшері азаяды, $p\left(z_i/v_j\right)$ апостериор ықтималдығының өсуімен өседі және олардың ара-қатынасына байланысты оң, теріс және нөлдік (қасиет тікелей (6.3)-тен шығады) бола алады.

2. Егер $p\left(z_i/v_j\right) = p(z_i)$ болса, онда (6.3) сәйкес $I(z_i, v_j) = 0$.

3. Шуыл болмаған кезде ақпараттың жеке мөлшері z_i элементінің жеке априорлы анықталмағандығына тең:

$I(z_i, v_j) = H(z_i) = -\log_2 p(z_i)$, бұл ретте $H_{v_j}(z_i) = 0$.

4. z_i туралы v_j бар ақпараттың жеке мөлшері v_j туралы z_i-дегіге тең. Расында:

$$I(z_i, v_j) = \log_2 \frac{p\left(z_i/v_j\right)}{p(z_i)} = \log_2 \frac{p(v_j)p\left(z_i/v_j\right)}{p(v_j)p(z_i)} =$$

$$\log_2 \frac{p(z_i)p\left(v_j/z_i\right)}{p(v_j)p(z_i)} = \log_2 \frac{p\left(v_j/z_i\right)}{p(v_j)} = I(v_j, z_i).$$

6.3 Дискретті хабарламаның кез келген элементіндегі ақпараттың орташа мөлшері

Хабарламаның бір элементіне априорлы анықталмағандық (4.5) энтропиясымен сипатталады:

$$H(Z) = -\sum_{i=1}^{N} p(z_i) \log_2 p(z_i), \quad (6.4)$$

ал апостериор анықталмағандық – (4.15) шартты энтропиясымен:

$$H_v(Z) = -\sum_{i=1}^{k} p(v_j) \sum_{i=1}^{k} p\left(z_i/v_j\right) \log_2 p\left(\frac{z_i}{v_j}\right). \quad (6.5)$$

(6.4), (6.5)-ке сәйкес, ақпараттың жеке мөлшеріне ұқсас хабарламаның бір элементіне келетін ақпарат мөлшерін келесідей анықтаймыз:

$$I(Z,V)=H(Z)- H_v(Z) =$$
$$-\sum_{i=1}^{N} p(z_i)\ log_2\ p(z_i) + \sum_{i=1}^{k} p(v_j)\ \sum_{i=1}^{k} p\left({}^{z_i}/_{v_j}\right)\ log_2\ p\left(\frac{z_i}{v_j}\right).$$

Егер бірінші қосылғышты $\sum_{j=1}^{k} p\left({}^{v_j}/_{z_i}\right) = 1$ көбейтсек, соңғы теңдеуде ешнарсе өзгермейді. Онда келесіні ескеріп:

$$\sum_i p(z_i) \sum_j p\left({}^{z_i}/_{v_j}\right) = \sum_i p(z_i) \sum_j p\left({}^{z_i}/_{v_j}\right) = \sum_{ij} p(z_i, v_j),$$

және логарифм қасиеттерін пайдаланып, бір элементке келетін ақпараттың орташа мөлшері үшін формуланы келесі түрде жазуға болады:

$$I(Z,V) = \sum_{ij} p(z_i, v_j)\ log_2 \frac{p\left({}^{z_i}/_{v_j}\right)}{p(z_i)} = \sum_{ij} p(z_i, v_j)\ log_2 \frac{p(z_i,v_j)}{p(z_i)p(v_j)}. \qquad (6.6)$$

Ары қарай, егер ақпараттың мөлшерінің жеке сипаты арнайы айтылмаса, онда (6.6) хабарламаның бір элементіне ақпараттың орташа мөлшері деп түсінеді.

6.4 Хабарлама элементіндегі ақпараттың орташа мөлшерінің қаситеті

1. Теріс еместік. I(Z,V) ≥ 0, себебі әрқашан H(Z)≥ $H_v(Z)$.

2. H(Z)= $H_v(Z)$ болғандықтан, Z мен Vарасында статистикалық байланыс болмаған кезде I(Z,V)=0.

3. I(Z,V)=I(V,Z) , яғни Z қатысты V-дағы ақпарат мөлшері V қатысты Z-дағы ақпарат мөлшеріне тең. Расында,

$$I(Z,V)-I(V,Z) =H(Z)- H_v(Z)-(H(V)- H_v(V)) =$$
$$=H(Z)+H_z(V)-(H(V)+ H_z(V) = H(Z,V) - H(V,Z) = 0.$$

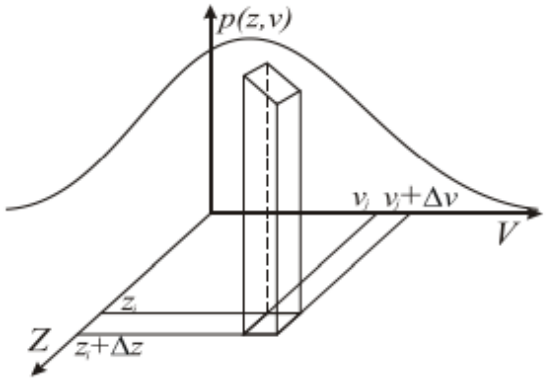
4. Бөгеуілдер жоқ болған кезде I(Z,V)=H(Z), себебі бұл ретте $H_v(Z) = 0$. Бұл көзден алына алатын ақпараттың максимал мөлшері.

6.5 Үздіксіз көзден хабарламаларды тасымалдағандағы ақпараттың мөлшері

Дискретті жағдай үшін үздіксіз көздің ақпарат мөлшерінің қатынасын (6.6) формуласынан аламыз. Жіберілген және қабылданған үздіксіз сигналдарды Z пен V сәйкес белгілеп, осы сигналдардың мүмкін мәндерінің облысын бірдей интервалдарға бөлеміз және жуықталған ықтималдықтарды жазамыз (6.1 сурет):

$$P\{z_i \le Z \le z_i + \Delta z, v_j \le \mathrm{V} < v_j + \Delta v\} \cong p(z_i^*, v_j^*)\Delta z \Delta v,$$

мұндағы $p(z_i^*, v_j^*)$ - i,j нөмірлі тікбұрышқа тиесілі бір нүктедегі p(z,v) екіөлшемді таралу тығыздығының ординатасы.



6.1 сурет – Z, V облыстарын дискреттеу

Біз дифференциал энтропия үшін қатынасты алу кезінде жасағанға ұқсас, p(z,v) берілген екіөлшемді тығыздығына сәйкес $p(z_i)$, $p(v_j)$ бірөлшемді тығыздықтары үшін жазуға болады:

$$\mathrm{P}\{z_i \le Z \le z_i + \Delta z\} \cong p(z_i^*)\Delta z;$$
$$\mathrm{P}\{v_i \le V \le v_i + \Delta v\} \cong p(v_j^*)\Delta v,$$

мұндағы $p(z_i^*)\Delta, p(v_j^*)$– сәйкесінше $[z_i, z_i + \Delta z]$ мен $[v_i, v_i + \Delta v]$ интервалдарында алынған z_i^* пен v_j^* мәндері үшін бірөлшемді тығыздықтардың ординаталары.

(6.6)-да $p(z_i, v_j), p(z_i), p(v_j)$ сәйкесінше жуық мәндерімен ауыстырып, жазуға болады:

$$\mathrm{I(Z,V)} = \sum_i \sum_j p(z_i^*, v_j^*)\Delta z \Delta v \ \ log_2 \frac{p(z_i^*, v_j^*)}{p(z_i^*)p(v_j^*)}. \qquad (6.7)$$

(6.7)-де $\Delta z \to 0$, $\Delta v \to 0$ кездінде шектік ауыстужасап, аламыз:

$$\mathrm{I(Z,V)} = \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \sum_i \sum_j p^*(z_i, v_j) \log_2 \frac{p^*(z_i, v_j)}{p^*(z_i)p^*(z_i)} \Delta z \Delta v = \qquad (6.8)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(z, v) \log_2 \frac{p(z,v)}{p(z)p(v)} \mathrm{dzdv}.$$

(6.8) формуласы дифференциал энтропия түсінігін қолданып алынуы мүмкін. Дискретті жағдайға ұқсас ақпарат мөлшерін априорлы және апостериор (бұл жағдайда дифференциал) энтропиялар айырымы ретінде анықтаймыз:

$$\text{I(Z,V)=h(Z)-}h_v(Z) = \\ -\int_{-\infty}^{\infty} p(z)\, log_2 p(z) dz + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(z,v) log_2 p\left(\frac{z}{v}\right) dzdv. \qquad (6.9)$$

Егер оң жақтағы бірінші көбейткішті $\int_{-\infty}^{\infty} p(v/z)\, dv = 1$ көбейтсек ешнарсе өзгермейді. Онда, p(z,v)=p(v)p(z/v)=p(z)p(v/z) ескеріп, (6.9) қатынасын келесі түрде жазуға болады:

$$\text{I(Z,V)=h(Z)-}\, h_v(Z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(z,v) \log_2 \frac{p(z,v)}{p(z)p(v)} \text{dzdv}. \qquad (6.10)$$

I(Z,V) (6.10)-да h(Z) - $h_v(Z)$ айырмасы ретінде анықталатындықтан, үздіксіз көзден тасымалдағандағы ақпарат мөлшері дифференциал энтропияға қарағанда кездейсоқ шаманың масштабына тәуелді емес. Энтропия мен ақпараттың үздіксіз көзі түсініктері арасындағы қатынасты потенциал мен зарядты шексіздіктен өрістің берілген нүктесіне алып келуге кеткен жұмыстың арасындағы қатынас және физикада қарастырылатын потенциалдар айырымы деп анықталатын керек сияқты екенін байқаймыз.

6.6 Эпсилон-кездейсоқ шаманың энтропиясы

Бұл тарауда біз белгілі ақпарат мөлшері түсінігін пайдаланып, үздіксіз кездейсоқ шаманың энтропиясы түсінігін қарастыруға қайта келеміз.

(5.1) формулаға тарауда жүзеге асырулар мейлінше кіші шамалармен ерекшеленуі салдарынан біз үздіксіз кездейсоқ шаманың энтропиясы шексіз екенін көрсеттік. Іс жүзінде өлшеу аппаратураларының қателіктері салдарынан жүзеге асырулардың мейлінше аз айырмашылықтарын белгілеуге мүмкіндік жоқ, бір шетінен бұл қажет те емес. Сондықтан келесі ой дұрыс деп саналады: егер олардың айырмашылық өлшемі берілген жаңғырту ықтималдығынан асып түспесе, Z үздіксіз кездейсоқ шамасы туралы онымен статистикалық байланысқан басқа V кездейсоқ шамасының мәні бойынша жорамалдау.

Ұқсастық деңгейін сандық сипаттау үшін ρ(z,v) функциясын енгізеді, ол жүзеге асырулар арасындағы «қашықтық» түсінігіне ие, ал ұқсастық өлшемі ретінде- z пен v мәндерінің барлық жиынтығы бойынша оның орташа мәні:

$$\mu(\text{Z,V}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(z,v)\, p(v,z) dzdv, \qquad (6.11)$$

мұндағы p(z,v) – Z пен V кездейсоқ шамаларының ықтималдықтарының ортақ таралуының тығыздығы.

Ең кең таралғаны ортаквадраттың критерий. Бұл ретте, p(z,v)=p(z/v)p(v) теңдігін ескеріп, ұқсастық критерийі келесі түрде жазылуы мүмкін:

$$\mu(\mathrm{Z},\mathrm{V}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(z-v)^2 p(z/v)\,p(v)dzdv \le \varepsilon^2, \qquad (6.12)$$

мұндағы p(z/v) – нақты z сигналын v сигналы арқылы жаңғыртудың ықтималдығын сипаттайтын шартты тығыздық;

ε – жаңғырту дұрыстығының берілген мәні.

(6.10) сәйкес, V жаңғырту шамасында бар Z кездейсоқ шамасы туралы ақпарат мөлшері:

$$\mathrm{I(Z,V)=h(Z)-}\ h_v(Z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(z/v)\,\mathrm{p(v)}\log_2\frac{p(z/v)}{p(z)}\,\mathrm{dzdv}. \qquad (6.13)$$

Z кездейсоқ шамасының берілген жаңғырту дұрыстығын қабылданатын ақпараттың аз мөлшерінде қамтамасыз еткен жөн. Сондықтан, z сигналы белгіленгенде v сигналының орын алуының p(z/v) ықтималдығының шартты тығыздығын (6.13)-те барлық p(z/v) бойынша I(Z,V) минимум ақпараты орын алатындай таңдау керек.

Келесідей анықталатын $H_\varepsilon(Z)$ шамасын:

$$H_\varepsilon(Z) = \min_{p(z,v)} I(Z,V), \qquad (6.14)$$

Осы шартта

$$\mu(Z,V) < \varepsilon^2, \qquad (6.15)$$

Z үздіксіз кездейсоқ шамасының эпсилон-энтропиясы (ε -энтропия) деп атайды. (6.10)-ға сәйкес оны анықтауға болады:

$$H_\varepsilon(Z) = \min_{p(z,v)}\{\mathrm{h(Z)} - h_v(Z)\} = \mathrm{h(Z)} - \max_{p(\frac{Z}{v})} h_v(Z)\,,$$

6.7 Хабарламалардың артықтығы

Энтропиясы максимал хабарламалар тасымалданатын ақпараттың көп мөлшері жағынан оңтайлы болып табылады. Шынайы хабарламаның энтропиясының оңтайлыдан айырмашылығының мөлшері сығу коэффициенті саналады:

$$\mu = \frac{H(Z)}{H_{opt(Z)}}. \quad (6.16)$$

Егер оңтайлы және оңтайлы емес хабарламалар бірдей ортақ энтропиямен сипатталса, келесі теңдік орын алады:

$$nH(Z)=n'H_{opt(Z)}, \quad (6.17)$$

мұндағы n – оңтайлы емес хабарламалардағы элементтер саны;

n′ – оңтйлы хабарламаның элементтерінің саны.

(6.17) ескеріп, (6.16) сығу коэффициентін көрсетуге болады:

$$\mu = \frac{H(Z)}{H_{opt(Z)}} = \frac{n'}{n}.$$

Шынайы хабарламалардың энтропиясының оңтайлыға жақындығын сипаттау үшін артықтық коэффициенті енгізіледі:

$$K_z = 1 - \mu = \frac{n-n'}{n} = \frac{H_{opt(Z)}-H(Z)}{H_{opt(Z)}}.$$

Артықтықтың артуы хабарламаны тасымалдау уақытының артуына әкеледі. Бірақ, жүйенің сенімділігін арттыру жағынан кейбір артықтық пайдалы болуы мүмкін.

7 Дәріс №7. Хабарлама көздерінің ақпараттық сипаттамаларын бағалау

7.1 Эргодикалық хабарлама көзі түсінігі

Дискретті хабарламалар көздерінің моделін құрастыру үшін алфавит көлемі мен көздің шығысында жеке белгілердің пайда болу ықтималдығын беру жеткілікті. Шеннон моделі- хабарламаның эргодикалық көзі кең қолданыс тапты. Бұл модель көз эргодикалық кездейсоқ тізбек болып ұсынылатынын болжайды.

Эргодикалық моделдің қасиеттері:

- белгілердің ықтималдықтары олардың тізбектегі орнына тәуелді емес;
- бір ұзын хабарламада алынған статистикалық сипаттамалар осы көзден шығатын барлық хабарламаларға тән.

Егер белгілердің ықтималдықтары уақытқа тәуелді болмаса, көз стационарлы деп аталады. Егер ықтималдықтар алдыңғы күйлеріне де тәуелді болмаса, онда көз жадысыз стационарлы деп аталады. Әр белгі басқалардан тәуелсіз алынатын жадысыз стационар көз әрқашан эргодикалық.

Белгілер арасында корреляция болса, онда модель ретінде Марков тізбегін қолданады. Осы көздердің анықталмағандығы (4.20), (4.21) формулаларымен сипатталады (4 дәріс). Тізбектің реті корреляциялық тәуелділікпен қанша белгі байланысты екеніне тәуелді.

Үш мүмкін күйлері бар көз жасайтын белгілердің ықтималдықтары келесі деп ойлайық: p(z_1)=0.1, p(z_2)=0.3, p(z_3)=0.6. Бұл жағдайда z_2 белгісі орташа есеппен z_1-ге қарағанда үш есе жиі, z_3-ке қарағанда екі есе сирек кездесу керектігі белгілі. Алайда, ұзындығы шектелген нақты тізбекте көрсетілген ықтималдыққа қарағанда белгілер болмауы немесе сирек немесе жиі кездесуі мүмкін. Белгілердің эргодикалық тізбегінің қасиеттеріне байланысты әр түрлі тізбектерді жасаудың ықтималдықтары келесі теоремамен беріледі.

7.2 Белгілердің эргодикалық тізбектерінің қасиеттері туралы теорема

δ>0 мен μ<0 сандары қанша аз болса да, жеткілікті үлкен N кезінде эргодикалық тізбектер екі топқа бөлінуі мүмкін:

- әдеттегі емес тізбектер. Осындай тізбектердің әртүрлі варианттарының саны көп, алайда олардың әрқайсысының ықтималдығы аз ғана, осындай тізбектердің ықтималдықтарының суммасы өте аз және үлкен N кезінде аз саннан өте кіші;
- әдеттегі тізбектер, олардың p ықтималдықтары үлкен N кезінде бірдей және келесі теңсіздікті қанағаттандырады:

$$\left|\frac{1}{N} log_2 \frac{1}{p} H(Z)\right| < \mu. \qquad (7.1)$$

(7.1) қатынасын асимптоталық біркелкілік қасиеті деп атайды.

Дәлелдеу. Белгілердің пайда болу ықтималдықтары p_1 , p_2 ,..., p_m, көлемі m z_1 , z_2 ,..., z_m алфавиттің N элементтерінен тұратын ұзын тізбектің жадысы жоқ эргодикалық көзі үшін z_1 элементтерінің Np_1, z_2 элементтерінің Np_2 болады. Онда белгілердің тәуелсіздігі қасиетін ескере отырып нақты тізбектің пайда болу ықтималдығы p

$$p=p_1^{N_{p1}} p_2^{N_{p2}} \ldots\ldots p_m^{N_{pm}}=\prod_{i=1}^{m} p_i^{Npi}. \qquad (7.2)$$

(7.2) теңдеуінің екі жағын логарифмдеп аламыз:

$$log_2 p = N \sum_{i=1}^{m} p_i log_2 p_i. \qquad (7.3)$$

(7.3)-тен N∞ кезінде шығады:

$$\frac{1}{N} log_2 \frac{1}{p} = H(Z), \qquad (7.4)$$

ол теореманың екінші жағын дәлелдейді.

Осы пайымдауды басқа позициядан түсіндіруге болады. Болжам бойынша көз тек эргодикалық тізбек беретін болғандықтан, белгілердің пайда болуының N кезінде белгілердің пайда болуы ықтималдығы оларда осы тізбектердің әдеттегі мәндеріне сәйкес, демек, осы тізбектердің пайда болуының p ықтималдығы бірдей. Осы (әдеттегі) тізбектердің жалпы саны сәйкесінше 1/p тең. (4.4), (4.6) формулаларымен сәйкес осындай әрбір тізбектің жеке анықталмағандығы $-\log_2 p = \log_2 (1/p)$, ал бір белгіге тізбектің орташа анықталмағандығы $\log_2 (1/p) / N$ болады, бірақ бұл шама анықтама бойынша энтропия болып табылады.

Жеткілікті үлкен N кезінде әдеттегі тізбектер әр түрлі тізбектердің мүмкін нұсқаларының жалпы санының кішкентай бөлігін құрайтынын көрсетеміз.

Көлемі m алфавит белгілерінен құралатын n_1 тізбектерінің мүмкін нұсқаларының жалпы санын көрсетуге болады:

$$n_1 = m^N = 2^{log_2 m^N = 2^{N log_2 m}} \quad .$$

Бір шетінен, (7.4) сәйкес, әдеттегі тізбектердің саны анықталады

$$n_T = \frac{1}{p} = 2^{NH(z)}.$$

Олардың қатынасын жазамыз:

$$\frac{n_r}{n_r} = \frac{2^{N log_2 m}}{2^{NH(z)}} = 2^{N(log_2 m - H(z))}.$$

(4.3) формулаға тарауда энтропия максимумы $H(Z) = \log_2 m$ белгілер тең ықтимал болғанда ғана орын алатынын анықтадық. Бұл хабарламалардың элементтерін тең ықтимал таңдау жағдайын алып тастағанда, екінің деңгейінің көрсеткіші $H(Z) < \log_2$, және $N \to \infty$ кезінде $n_1 >> n_T$.

7.3 Дискретті хабарламалардың көзінің өнімділігі

Хабарлама көзінің өнімділігі- көздің уақыт бірлігінде өндіретін ақпарат мөлшері. Әдетте, көзде бөгеуілдер аз және оны байланыс каналының эквивалентті өзгеруімен ескереді. Бұл ретте $I_u(Z)$ көзінің өнімділігінің сандық мәні уақыт бірлігіндегі энтропияға тең және қатынаспен анықталады:

$$I_u(Z) = \frac{H(z)}{\tau} \quad . \qquad (7.5)$$

Жалпы жағдайда хабарламаның әр элементін беру ұзақтығы жасалатын белгінің типіне ғана емес, көздің жағдайына да тәуелді. Сондықтан, жалпы жағдайда көздің бір белгіні беруінің орташа ұзақтығы τ анықталады:

$$\tau=\sum_q p(q)\sum_{i=1}^{N} p(\frac{z_i}{q})\,\tau_{z/q}, \qquad (7.6)$$

мұндағы $\tau_{z/q}$ –q жағдайындағы z_i белгісін беру ұзақтығы;

p (z_i /q) – q жағдайындағы z_i белгісін беру ықтималдығы;

p (q) –q жағдайының ықтималдығы.

Энтропиясын арттыру жолымен, немесе белгілерді жасаудың орташа ұзақтығын қысқарту есебінен көздің өнімділігін арттыруға болатыны (7.5)-тен шығады. (7.6) сәйкес орташа ұзындықты қысқарту пайда болуының жоғары ықтималдығы бар белгілерді жасаудың ұзақтығын қысқарту да тиімді. Егер белгілерді жасау ұзақтығы көздің жағдайына тәуелді емес және бірдей болса, онда өнімділікті арттыру тек оның энтропиясын арттыру есебінен болады.

7.4 Үздіксіз хабарлама көздерінің эпсилон-өнімділігі

Көздің эпсилон-өнімділігі түсінігі (6.6) формалага тарауда үздіксіз кездейсоқ шаманың эпсилон-энтропия түсінігі сияқты енгізіледі.

H(Z) үздіксіз хабарлама көзінің эпсилон-өнімділігін (ε-өнімділік) z(t) кез келген жүзеге асыруды берілген ықтималдықпен орындауға болатын уақыт бірлігінде көздің жасауы қажет ақпараттың минималды мөлшері деп анықтайды.

T жеткілікті ұзын интервалында z_T (t) үздіксіз сигналы v_T (t) жүзеге асырылуымен орындалады деп ойлайық. Егер көрсетілген сигналдар F шектелген спектірне ие болса, онда Котельников теоремасына сәйкес осы жүзеге асырулардың әрқайсысын есептеулерден құрастырылған N өлшемді (N=T / t=2FT) векторлары ретінде, (z_1, z_2 ,..., z_N) мен (v_1, v_2 ,...,v_N) сәйкесінше көрсетуге болады. Хабарламалардың сәйкес ансамблін N өлшемді Z, V кездейсоқ векторлары ретінде көрсетуге болады, олардың компоненттері Z_1 , Z_2 ,..., Z_N, V_1,V_2,...,V_N кездейсоқ шамалары болып табылады. Бұл векторлар N өлшемді p (Z) , p (V) , p (Z, V) , p(Z / V) , p(V / Z) таралу тығыздықтарымен статистикалық сипатталуы мүмкін.

Бастапқысына қатысты орындаушы векторда бар ақпарат мөлшері үшін (6.10) формулаға қатынасын көрсетілген N өлшемді таралу тығыздықтарын қолданып жазуға болады (бұндағы интегралдар N өлшемді):

$$I_N(Z,V)=\iint_{ZV} p(Z,V)\log_2\frac{p(Z,V)}{p(Z)p(V)}dZdV. \qquad (7.7)$$

Бір есептеуге кететін ақпараттың көлемі

$$I_N(Z,V) = I_N(Z,V)/N. \quad (7.8)$$

N өлшемді p (Z/V) пен p V таралу тығыздықтарын пайдаланып (6.11)-ге ұқсас Z , V кездейсоқ векторларының ұқсастық деңгейін сандық бағалау үшін жазуға болады:

$$\mu(Z,V) = \int_Z \int_V p\left(\frac{Z}{V}\right) p(V)p(Z,V)dZdV, \quad (7.9)$$

мұндағы p(Z,V) - Z пен V кездейсоқ векторларының жақындығын сипаттайтын вектор.

Үздіксіз хабарламалар көзінің өнімділігін анықтауға сәйкес жазуға болады:

$$\dot{H}_\varepsilon(Z) = \frac{1}{\tau_u} \min_{p(Z/V)} I(Z,V), \quad (7.10)$$

шартымен

$$\mu(Z,V) \leq \varepsilon^2,$$

I(Z,V), μ(Z,V) (7.7)-(7.9) қатынастарымен анықталады, ал τ_u=1/2F көздің бір есептеу жасау уақыты.

Үздіксіз сигналды орындаудың берілген дұрыстығын қамтамасыз етудің геометриялық талабын N өлшемді (z_1, z_2,..., z_N) векторының z_T (t) хабарламасына сәйкес соңы v_T (t) орындаушы үздіксіз сигналына сәйкес N өлшемді (v_1,v_2,...,v_N) векторының ε- облысына түсуі деп көрсетуге болады. Орындаудың берілген дұрыстығы хабарламалардың зор ұзақтығында жетіледі, бұнда N=T / Δt=2FT, яғни үздіксіз хабарламаларды есептеулер жиынтығымен ауыстыру қателіктерін елемеуге болады.

8 Дәріс №8. Байланыс каналдарының ақпараттық сипаттамалары

8.1 Дискретті каналдардың моделдері

Байланыс каналы - хабарламаны бір орыннан екіншісіне немесе уақыттың бір моментінен басқасына тасымалдауға арналған құрылғылардың жиынтығы. Дискретті хабарламаларды тасымалдауға арналған каналды дискретті деп атайды. Осындай каналда сигнал кірістен шығысқа берілгенде әдетте, келесі қондырғылар ретімен түрлендіруге ұшырайды: хабарлама көзі - көздің кодері – модулятор – таратқыш – байланыс сызығы қабылдаушы – демодулятор – декодер - хабарлама қабылдаушы.

Байланыс каналы бойынша әдеттегідей үздіксіз сигнал беріледі. Дәл осы байланыс сызығында шағын бөгеуілдер пайда болады деп саналады. Сондықтан, бөгеуілі бар каналды теоретикалық зерттегенде көзде бөгеуіл жоқ деп есептейді, себебі каналдағы бөгеуілге қарағанда олар өте аз. Байланыс

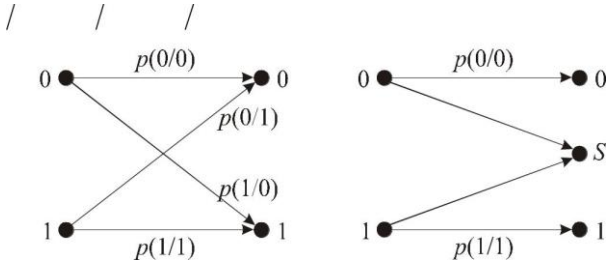
каналындағы бөгеуілдер де аз болған жағдайда, онда теоретикалық анализ үшін бірінші жуықтауда дәріптелген бөгеуілі жоқ каналдың моделін қолдануға болады. Егер кірістегі және шығыстағы символдардың (алфавиттің) жиынтықтары, сонымен қатар осы символдарды жасаудың (тасымалдаудың) ықтималдық қасиеттері белгілі болса дискретті канал берілген деп саналады.

Канал бойынша хабарламаны тасымалдау үшін көздің z_1, z_2,...z_l алфавитінің белгілерінен v_1 , v_2 ,...v_m басқа алфавиттің дискретті символдар тізбегіне, әдетте көлемі аз, түрлендіреді.

Канал әр күйде тасымалданған z_i символы шығыста v_j символы деп қарастырылуының $p(v_j/z_i)$ бір өтпелі ықтималдығымен сипатталады. Егер көрсетілген ықтималдықтар уақытқа тәуелсіз болса, онда каналды стационар, уақытқа тәуелді болса- стационар емес деп атайды.

Егер бұл ықтималдықтар алдыңғы күйіне тәуелді болса, онда жадысы бар канал орын алады, тәуелсіз болса, онда бұл каналдың жадысы жоқ.

Егер каналдың кірісіндегі және шығысындағы символдар саны бірдей және k-ға тең болса, осындай каналды k ретті деп атайды.Жадысы жоқ екілік канал төрт өтпелі ықтималдықпен сипатталады (8.1 сурет). Егер *p(0/0) =p(1/1)* мен *p(1/0)= p(0/1)* болса, канал симметриялық деп аталады



а) екілік; б) тазалауы бар екілік.

8.1 сурет – Каналдардың сұлбалары

Кейде тазалауы бар канал моделін қарастырады. 8.1 б суретте тазалауы бар екілік каналдың сұлбасы келтірілген. Бұл жағдайда каналдың шығысында S күйлері орнайды, олар бірдей ықтималдықпен нөлге де, бірге де жатқызылуы мүмкін. Қайта кодтағанда осы S символын қосымша ақпаратты есепке ала шифрден шешеді.

Егер каналда қателік анықталған жағдайда қайта тасымалдауға сұраныс жасау мүмкіндігі болса, осындай каналда кері байланысы бар канал деп атайды.

8.2 Дискретті канал бойынша ақпаратты тасымалдау жылдамдығы

Дискретті канал бойынша тасымалдаудың техникалық және ақпаратты жылдамдығын ажыратады. Техникалық жылдамдық деп уақыт бірлігінде тасымалданатын хабарлама (көз) элементтерінің санын түсінеді:

$$V_\tau = \frac{1}{\tau_{ср}}, \qquad (8.1)$$

мұндағы $\tau_{ср}$– бір симолды тасымалдаудың орташа ұзақтығы.

Тасымалдаудың техникалық жылдамдығының бірлігі *бод*- бір секудта бір символ болып табылады.

Ақпаратты жылдамдық деп уақыт бірлігінде тасымалданатын ақпараттың орташа мөлшерін түсінеді. Ол анықталады

$$\text{İ}(V,Z) = \frac{I(V,Z)}{\tau ср} = V_\tau I(V,Z), \qquad (8.2)$$

мұндағы I (V,Z) – бір символмен тасымалданатын ақпараттың орташа көлемі.

8.3 Бөгеуілі жоқ дискретті каналдың өткізу қабілеті

8.3 Бөгеуілі жоқ дискретті каналдың өткізу қабілеті - $С_д$ берілген канал бойынша ақпаратты тасымалдаудың максимал жылдамдығы ретінде анықталады, оған жетуге болады:

$$C_{д=max}\text{İ}(V,Z) = maxV_\tau I(V,Z). \qquad (8.3)$$

(8.3) сәйкес тасымалдаудың белгіленген техникалық жылдамдығында (V_τ=const) каналдың өткізу қабілеті қабылданған сигналдың бір символына келетін I (V, Z) ақпараттың орташа мөлшерінің максимумымен анықталады. Бөгеуілдер жоө кезде каналдың кірісі мен шығысы арасындағы бір мәнді өзара сәйкестік орын алады, ал

$$I\,(V,Z)=H\,(\,Z\,)\,.$$

Бір шетінен, алдында айтылғандай m алфавиттің белгіленген көлемінде H (Z) максимумы символдардың тең ықтималдығында орын алады және анықталады:

$$max\ H\,(Z\,)=log_2\,m\,.$$

Осылайша, бөгеуілі жоқ дискретті канал бойынша ақпаратты тасымалдау жылдамдығын арттыру үшін хабарламаның элементтері тәуелсіз және тең ықтимал болатын хабарламаны түрлендіру қажет. Каналдың өткізу қабілетін m алфавит көлемін арттыру арқылы жоғарылатуға болатыны соңғы

теңдеуден көрінеді, алайда бұл пайдаланылатын техникалық құралдардың элементтік базасын елеулі өзгертулермен байланысты болуы мүмкін.

8.4 Бөгеуілі бар дискретті каналдың өткізу қабілеті

Көзден келетін және байланыс каналымен тасымалданатын хабарламаның орта есеппен бір элементіне келетін ақпарат мөлшері (6.6) формулаға қатынасымен есептелетіні (6.3) формулаға тарауда көрсетілді:

$$\text{I(Z,V)}=\sum_{ij} p(z_i v_j) log_2 \frac{p(z_i v_j)}{p(z_i)p(v_j)}. \quad (8.4)$$

Сәйкесінше, бөгеуілі бар канал канал блойынша ақпаратты тасымалдау жылдамдығы (8.2) есебінен келесі теңдеумен беріледі:

$$\text{I(Z,V)}=V_\tau \sum_{ij} p(z_i v_j) log_2 \frac{p(z_i v_j)}{p(z_i)p(v_j)}, \quad (8.5)$$

ал бөгеуілі бар дискретті каналдың өткізу қабілеті канал бойынша тасымалдау жылдамдығының шекті мәні ретінде анықталады:

$$\text{C}_\partial = \max_{p(z)} \text{İ}(V,Z) = max V_\tau I(V,Z). \quad (8.6)$$

Мұнда p(z) – көз жасайтын кіріс сигналдарының ықтималдықтарының таралуының жиынтығы.

Егер хабарламаның элементтерін тасымалдаудың V_τ техникалық жылдамдығы белгіленген болса, онда өткізу қабілеті оларды түрлендіру (кодтау) арқылы символдар тізбегінің статистикалық қасиеттерін өзгертумен көз жеткізуге болады.

Тәжірбиеде әдетте каналдың шекті мүмкіндіктеріне жетпейді.

Каналды жүктеу дәңгейі пайдалану коэффициентімен анықталады:

$$\lambda = \frac{I(Z)}{C_\partial},\ (0 \le \lambda \le 1),$$

мұндағы İ (Z) – хабарлама көзінің өнімділігі.

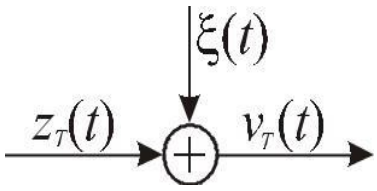
8.5 Үздіксіз гаусстық байланыс каналы бойынша тасымалдау жылдамдығы

Гаусстық байланыс каналы деп нақты каналдың математикалық моделін түсінеді, ол келесі талаптарды қанағаттандырады:

- каналдың физикалық параметрлері белгілі және детерминирленген;
- каналдың өткізу жолағы F_k герц жолағымен шектелген;
- каналда аддитивті гаусстық ақ шуыл бар (біркелкі жиіліктік спектрі мен амплитудалардың қалыпты таралуы бар);

- сигнал мен шуыл арасында статистикалық байланыс жоқ, ал сигналдың спектрі мен бөгеуілдері каналдың өткізу жолағымен шектелген.

Берілген гаусстық канал бойынша (8.2 сурет) $P_\xi = \sigma_\xi^2$ орташа қуаты бар $z_T(t)$ үздіксіз сигналы беріледі деп ойлайық. Каналдың шығысында v_T (t) сигналы белгіленеді, ол $P_\xi = \sigma_\xi^2$ орташа қуаты бар ε(t) аддитивті гаусстық шуылымен бұрмаланған.



8.2 сурет – Гаусстық байланыс каналының сұлбасы

Тасымалданатын сигналдың ұзындығы T жеткілікті үлкен деп санаймыз, сондықтан Котельников теоремасына сай $z_T(t)$ мен $v_T(t)$ үздіксіз жүзеге асыруларын $\Delta t = (2F_k)^{-1}$ интервалдары арқылы алынған $N=2F_kT$ есептеулерінің тізбектерімен ауыстыруға болады, мұндағы F_k– өткізу жолағы. Онда канал бойынша тасымалданатын ақпараттың орташа көлемі:

$$I(Z,V)=H(Z)-H_V(Z)=H(V)-H_Z(V), \quad (8.7)$$

мұндағы N– өлшемді V кездейсоқ векторының H(V) мен $H_z(V)$ априорлы және апостериорлы энтропиялары.

Гаусстық каналдың анықтамасы бойынша бөгеуіл аддитивті және кіріс сигналына статистикалық тәуелсіз, сондықтан:

$$H_Z(V) = H_Z(Z + \Xi) = H_Z(\Xi) = H(\Xi), \quad (8.8)$$

мұндағы H(Ξ) – бөгеуілдің N- өлшемді кездейсоқ векторының энтропиясы, оның компоненттері ζ(t) үздіксіз аддитивті гаусстық ақ шуылдың сәйкес қималарындағы кездейсоқ шамалар.

Есептеулер моменттерінде ақ шуылдың мәндері корреляцияланбағандықтан:

$$H(\Xi) = N * h(\zeta) = 2F_k T h(\zeta), \quad (8.9)$$

мұндағы h(ζ) – бір есептеуге кететін дифференциал энтропия.

Бұл жағдайда, шуыл қалыпты заң бойынша таралғандықтан:

$$P(\xi)=(\sigma_\xi\sqrt{2\pi})^{-1}\exp(-\xi^2/2\sigma_\xi^2),$$

дифференциал энтропия анықталады:

$$h(\xi)=-\int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi)\, log_2 p(\xi)d\xi= -\ log_2(\sigma_\xi 2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi)d\xi + \frac{log_2 e}{2\sigma_\xi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2 p(\xi)\,d\xi = log_2(\sigma_\xi\sqrt{2\pi})+\frac{1}{2}log_2 e=\frac{1}{2}log_2 2\pi e\sigma_\xi^2. \quad (8.10)$$

Энтропия H(V) шығыс сигналының бір есептеуінің дифференциал энтропиясы h(v) арқылы (8.9) ұқсас өрнектеледі:

$$H(V)=2F_kT\cdot h(v). \quad (8.11)$$

(8.9) мен (8.11) теңдеулерімен анықталатын энтропияларды қойып, (8.10) есепке ала (8.7)-де канал бойынша тасымалданатын ақпараттың орташа көлемі үшін келесі өрнекті аламыз:

$$I(Z,V)= 2F_kT[h(v)]-\frac{1}{2}\cdot log_2 2\pi e\sigma_\xi^2. \quad (8.12)$$

Үздіксіз гаусстық байланыс каналы бойынша ақпаратты тасымалдау жылдамдығы анықталады:

$$I(Z,V)= 2F_k[h(v)]-\frac{1}{2}\cdot log_2 2\pi e\sigma_\xi^2. \quad (8.13)$$

8.6 Үздіксіз Гаусстық байланыс каналының өткізу қабілеті

$C_н$ үздіксіз каналының өткізу қабілеті анықталады:

$$C_н=\max_{p(Z)} I(Z,V). \quad (8.14)$$

Демек, (8.13) қатынасына сай, оны анықтау үшін дифференциал энтропия h (v) максимал болатын кіріс сигналдарының ансамблін іздеу керек.

Болжам бойынша, гаусстық байланыс каналында сигналдың орташа қуаты мен бөгеуілдер шектеулі. Алдында көрсетілгендей, дисперсия шамасына шектеген кезде h(v) максимал мәніне қалыпты таралу кезінде жетеді. Болжам бойынша, ξ(t) шуыл қалыпты таралады, демек, шығыс сигналында v(t) қалыпты таралу болуы үшін кіріс сигналы z(t) да қалыпты және центрленген болуы қажет (себебі берілген орташа қуатта сигналдың центрленуі дисперсияның максимал мәніне сәйкес). Сонымен қатар, F_k жеткілікті кең жиіліктер жолағының берілген шегінде кіріс сигналы біркелкі энергетикалық спектрге ие болуы қажет. Тек осы жағдайда ғана есептеулердің тәуелсіздігі жайлы айтуға болады. Бұл ретте шығыс сигналының орташа қуаты кіріс сигналы мен бөгеуілдің орташа қуаттарының қосындысына тең:

$$P_v = \sigma_v^2 = \sigma_z^2 + \sigma_\xi^2 = P_z + P_\xi. \qquad (8.15)$$

Егер барлық болжамдар орындалса, онда (8.15) есепке ала

$$Max\ h(v) = \frac{1}{2} \cdot log_2 2\pi e P_v = \frac{1}{2} \cdot log_2 2\pi e \left(\frac{1}{2} \cdot log_2 2\pi e\right) = \frac{1}{2} \cdot log_2 2\pi e(P_z + P_\xi),$$

ал үздіксіз гаусстық каналдың өткізу қабілеті:

$$C_н = F_k\left[log_2 2\pi e\left(P_z + P_\xi\right) - log_2 2\pi e P_\xi\right] = F_k log_2\left(1 + \frac{P_z}{P_\xi}\right). \qquad (8.16)$$

Гаусстық каналдың өткізу қабілеті өткізу жолағының еніне қалай тәуелді екенін орнату қызығушылық тудырады. Ауыстыру жасаймыз:

$$P_\xi = P_o F_k,$$

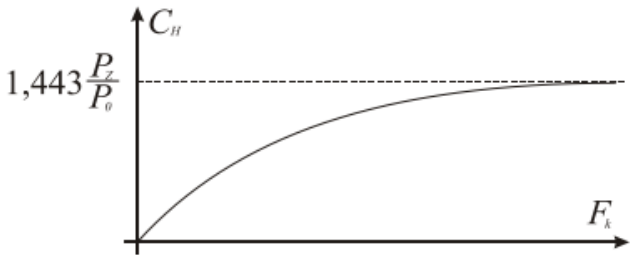
мұндағы P_o- жиілік бірлігіне келетін шуылдың (меншікті) қуаты және (8.16) келесі түрде көрсетеміз:

$$C_н = [log_2(1 + P_z\gamma/P_o)]/\gamma, \qquad (8.17)$$

мұндағы $\gamma = \frac{1}{F_k}.\gamma \to 0$ (Fk $\to \infty$) кезінде шекті есептеп, аламыз:

$$\lim_{F_k} C_н = \lim_{\gamma \to 0} \frac{log_2(1+P_z\gamma/P_o)}{\gamma} = \frac{1{,}443 \cdot P_z}{P_o}. \qquad (8.18)$$

Үздіксіз гаусстық байланыс каналының өткізу қабілетінің (8.17), (8.18), сәйкес өткізу жолағының еніне тәуелділік графигі 8.3 суретте көрсетілгендей түрге ие.



8.3 сурет – Каналдың өткізу жолағының өткізу қабілетіне тәуелділігі

8.7 Сигналдың физикалық сипаттамаларын сәйкестендіру және канал

Үздікіз канал үш параметрмен сипатталады:

- F_kсигналының өткізу жолағының ені;

-сигналды тасымалдау үшін каналды беру уақыты T_k;
-бөгеуілден сигналдың рұқсат берілген артуы, анықталады:

$$H_k = \log(P_{z,max}/P_\xi),$$

мұндағы $P_{z,max.}$ –сигналдың каналдағы максимал рұқсат етілген қуаты.
Көрсетілген параметрлердің көбейтіндісін каналдың көлемі деп атайды:

$$V_k = T_k F_k H_k.$$

Ұқсас параметрлармен сигналды сипаттауға болады:
- F_c сигнал жиіліктерінің спектрінің ені;
- T_c сигналының ұзақтығы;
- H_c=log($\frac{P_z}{P_\xi}$) бөгеуілінен сигналдың артуы.

Сәйкесінше, сигналдың көлемі анықталады $V_c = T_c F_c H_c$, ал бұрмаланбай тасымалдануы үшін қажетті шарты- $V_k \geq V_c$. Бұрмаланбай тасымалдаудың қажетті шарттары:

$$T_k \geq T_c, F_k \geq F_c, H_k \geq H_c.$$

Бұрмаланбай тасымалданудың қажетті шарты орындалса, онда жеткілікті шарттары әрқашан сигналды сәйкес түрлендіру арқылы орындалады. Мысалы, сигнал жоғары жылдамдықпен жазылуы мүмкін, ал каналда төменірекпен тасымалданады. Бұл ретте F_c төмендейді, ал T_c сәйкесінше артады. Егер сигналдың бөгеуілден артуы берілген шектеулерді қанағаттандырмаса, онда оны рұқсат етілген деңгейге дейін төмендетеді, бірақ бұл ретте сәйкесінше берілген дұрыстықты қамтамасыз ету үшін сигналды тасымалдау уақыты артуы керек. (8.16) сәйкес T_k уақытта гаусстық байланыс каналы бойынша тасымалданатын ақпараттың шекті көлемі:

$$I_{max}(\mathrm{Z,V}) = T_k F_k log_2(1 + P_z/P_\xi).$$

P_z/P_ξ>>1 кезінде ақпарат мөлшері канал көлемімен сәйкес.

9 Дәріс №9. Эффективті кодтау

9.1 Кодтаудың мақсаты, негізгі түсініктер мен анықтамалар

1.1 тарауда белгіленгендей, кең мағынада кодтау- хабарламаларды сигналдарға түрлендіру. Тар мағынада кодтау- дискретті хабарламаларды символдардың белгілі бір үйлесіммен көрсету. Біз ары қарай кодтауды тек тар мағынада қарастырамыз. Кодтау, бір жағынан хабарлама көзі мен каналдың сипаттамаларының жақсы келісуін қамтамасыз ету үшін, басқа жағынан бөгеуіл болған кезде ақпаратты тасымалдаудың сенімділігін арттыру үшін жүзеге асырылады. Бұдан басқа, кодтау жүйесін (хабарламаларды көрсету) таңдағанда, қондырғылардың аппараттық жүзеге асырылуының қарапайымдылығы мен сенімділігін қамтамасыз етуге тырысады. Хабарламаларды кодтау процесінде, әдетте, ұзын тізбектерден (мысалы N символдардан) әрқайсысы бір белгіге (әріпке) сәйкес кодтық қиыстырулардан жасалады. Осындай кодтық қиыстыру жасалған n символдардың саны мәнділік немесе код ұзындығы деп аталады. Кодтық қиыстыру жасауға пайдаланылған m әр түрлі символдардың саны кодтың негізі деп аталады. Физикалық түрде символдар кейбір белгілері бар сигналдар түрінде жүзеге асырылады. Белгілер ретінде, мысалы амплитуда, импульстар ұзақтығы және т.б. қолданылуы мүмкін. Әрбір кодталатын белгіге бір реттік нөмір тіркеуге болады. Бұл ретте кодтау есебі қандайда-бір санау жүйесінде сандармен кодтық қиыстыру көрсетуге әкеледі. Ең көп пайдаланылатыны позициялық санау жүйесі, онда санның (символдың) мәні оның орнына (позициясына) байланысты. Позициялық санау жүйесінде кез келген A_n санын көрсетуге болады:

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i-1} m^{i-1} = a_{n-1} m^{n-1} + a_{n-2} m^{n-2} + \ldots + a_1 m + a_0, \qquad (9.1)$$

мұндағы m – санау жүйесінің негізі;

і –разряд нөмірі,

$$i = \overline{1,n};$$

a_i– коэффициент і- разрядтың коэффициенті, 0-ден m –1-ге дейін бүтін санды мән алады.

Хабарламаны тасымалдау уақытын үнемдеу жағынан санды көрсетуге аз цифрге ие болған тиімді. Алайда, n-ді азайту мақсатымен m-ді арттыру m белгілерді (орнықты күйлер) жүзеге асыратын қондырғылардың күрделендіруге алып келеді. Сондықтан, жүйелердің эффективтілігінің сипаттамасы үшін $m \times n$ көбейтіндісін қолданады. Осы критерий бойынша ең тиімдісі үштік жүйе деп көрсетуге болады. Дегенмен, үштік жүйеге аз орын беретін екілік кодтар қолданылады. (9.1) сәйкес екілік кодтың математикалық жазылуы түрге ие:

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i-1} m^{i-1}.$$

Қарапайым екілік кодтың кодтық комбинацияларының максимал мүмкін саны $N_{max} = 2^n$. Төменде ары қарай мәтінде қолданылатын екілік жүйеде қосу, көбейту, модуль бойынша қосу ($\oplus$) ережелері келтірілген.

Қосу

	0	1
0	0	1
1	1	10

Көбейту

	0	1
0	0	0
1	0	1

Модуль бойынша қосу

	0	1
0	0	1
1	1	0

Екілік санау жүйесінен бөлек, негізі екінің бүтін дәрежесіне тең жүйелер (сегіздік, он алтылық) кең қолданыс тапты, олар екілікке де, ондыққа да оңай түсіріледі, бірақ ықшам жазба береді. Мысалы, сегіздік жүйеде сегіз цифрдың әрқайсысына (0-7) үш разрядты екілік сан сәйкестікке қойылады. Он алтылық жүйеде сандарды екілікке ауыстыру әрбір он алтылық цифрды төрт разрядты екілік кодпен ауыстыру жолымен жүзеге асады.

Тағы да екілік-ондық кодтар қолданылады, оларда ондық санның әр цифрын төрт разрядты екілік код түрінде жазады. Бұл код өлшенген кодтар санына жатады. Ондық санның цифрларын белгілеу үшін кең тәжірбиелік қолданыс тапқан кодтар: 8-4-2-1; 7-4-2-1; 5- 1-2-1 мен 2-4-2-1. Кодтың атындағы цифрлар сәйкес разрядтағы бірліктердің салмағын өрнектейді. Үздіксіз хабарламаларды кодтаудың кейбір әдістерінде (мысалы, екілік кодтағы маскасы қондырылған дисктің айналу бұрышын түрлендіргенде) бірнеше разрядтағы сандардың өзгеруі көп қателік көзі болып саналады. Мысалы, қарапайым екілік кодта төрт разрядта цифрлардың бір уақытта өзгеруі 7 цифрының бейнесінен (маска) 8 цифрының маскасына өткенде болады. Бұл құбылысты болдырмау үшін арнайы екілік кодтарды қолданады, оларда бір санның бейнесінен келесі көрші санның бейнесіне өткенде тек бір разрядының цифры өзгереді. Бұл ретте санаудың бірмәнді еместік қателігі кіші разрядтың бірлігінен аспайды. Осындай кодтардың қатарына Грей коды жатады.

9.2 Бөгеуілі жоқ канал үшін кодтау туралы Шеннонның негізгі теоремасы

Хабарламаның бір белгісін көрсетуге қажет символдардың орташа санын ықшамдайтын хабарламаны эффективті кодтау келесі (Шеннонның) теоремаға сүйенеді:

- каналдың өткізу қабілетінен аз көздің кез келген өнімділігінде $\dot{I}(Z) < C_д$, көз жасайтын барлық хабарламаларды каналға беруге мүмкіндік беретін кодтау тәсілі бар;

- $\dot{I}(Z) > C_д$ болса, шексіз жинаусыз хабарламаларды тасымалдауды қамтамасыз ететін кодтау тәсілі жоқ.

Теореманың әділдігін асимптоталық біркекілік қасиетіне сүйеніп көрсетеміз.

Тізбектегі белгілердің саны N, ал көздің энтропиясы H(Z) болсын. Тағы хабарлама ұзындығы T үлкен және барлық хабарламалар типті деп жобалайық. Онда осы тізбектер үшін (7.1) теңсіздігі орындалады:

$$\left|\frac{1}{N} * \log\left(\frac{1}{p}\right) - H(Z)\right| < \mu, \;\; 0 \leftarrow \mu > 0,$$

осыған сәйкес N_T=1/p типті тізбектер саны:

$$N_T = 2^{NH(Z)} = 2^{\frac{T}{\tau_u}H(Z)} = 2^{TI(Z)}. \qquad (9.2)$$

Белгінің орташа ұзақтығы τ_u белгілі, сондықтан $N = T/\tau_u$ және анықтама бойынша $I(Z) = H(Z)/\tau_u$.

Кодтау көлемі m алфавитті қолданумен жүзеге асады деп болжаймыз. Дискретті каналдың өткізу қабілеті $C_∂ = (\log_2 m)/\tau_k$ есепке ала отырып, канал өткізетін T ұзындығының тізбектерінің саны (белгілер саны $N = T/\tau_k$) анықталады:

$$N_k = m^N = m^{\frac{T}{\tau_k}} = 2^{\frac{T}{\tau_k}\log_2 m} = 2^{T\frac{\log_2 m}{\tau_k}} = 2^{TC_∂}. \qquad (9.3)$$

(9.2) мен (9.3) салыстырып, $I(Z) < C_∂$ болса, $N_k > N_T$ теңсіздігі орын алады. Бұл канал өткізетін тізбектердің саны белгілердің барлық типті тізбектерін кодтауға жеткілікті екенін білдіреді. N →∞ кезінде типті емес тізбектердің пайда болуы ықтималдығы 0-ге ұмтылады, ол теореманың бірінші бөлігін дәлелдейді.

$I(Z) < C_∂$ кезінде тасымалдауды мүмкін етпейтіндігін көрсететін теореманың екінші бөлігінің әділеттігі, ақпаратты тасымалдаудың максимал мүмкін жылдамдығы ретінде, каналдың өткізу қабілетінен шығады.

9.3 Белгілердің корреляцияланбаған тізбектерін эффективті кодтау әдістері, Шеннон-Фано

Шеннон теоремасы көз жасайтын барлық хабарламаларды тасымалдауды қамтамасыз ететін кодты құрастыру қандай жағдайларда мүмкін деген сұраққа жауап береді. Әрине, тасымалданатын ақпарат максимумы көзқарасынан ең жақсы кодтарды тұрғызуға талпыну. Кодтың әрбір символы (мысалы, екілік) максимум ақпарат әкелуі үшін кодтық комбинацияның символдары тәуелсіз болуы керек және теңықтимал мәндер (0 мен 1) қабылдауы керек. Хабарламалардың символдарының статистикалық тәуелсіздігі жағдайында эффективті кодтарды тұрғызу Шеннон мен Фаноның әдістемесіне (Шеннон-Фано кодына) негізделеді.

Код келесідей тұрғызылады. Кодталатын белгілерді хабарламаларда ықтималдықтарының төмендеуі ретімен кестеге жазады. Кейін оларды әрқайсысында ықтималдықтарының қосындысы тең болатындай екі топқа бөледі. Бір топтың әр белгілері сәйкес разрядта кодаталды, мысалы, бірмен, онда кезекті бөлу нәтижесінде әр топта бір белгі қалатындай екінші топтың белгілеріне жоғарыда айтылған операцияға жасайды (9.1 кесте).

Келтірілген мысалда бір белгіге келетін символдардың орташа саны:

$$l_{\text{орт}} = \sum_{i=1}^{8} p_i\, l_i = \sum_{i=1}^{7} \frac{i}{2^i} + \frac{7}{2^7} = \frac{127}{64},$$

мұндағы l_i – і- разрядтағы символдардың саны, бір белгіге келетін орташа энтропия сияқты шамасы бар:

$$H(z) = -\sum_{i=1}^{8} p_i \log_2 p_i = -\left(\sum_{i=1}^{7} \frac{1}{2^i} \log_2 2^{-i} + \frac{1}{2^7} \log_2 2^{-7}\right) = \frac{127}{64}.$$

9.1 кесте

Белгілер	Ықтималдықтар	Кодтар
z_1	1/2	1
z_2	1/4	01
z_3	1/8	001
z_4	1/16	0001
z_5	1/32	00001
z_6	1/64	000001
z_7	1/128	0000001
z_8	1/128	0000000

Ықтималдықтардың белгілері екінің бүтін санды теріс деңгейі болатынына байланысты нәтижелер сәйкес. Жалпы жағдайда $l_{\text{орт}} \geq H(z)$.

Егер белгіге келетін символдардың орта санының шамасы энтропиядан көп болса, бұл кодтың артықтығы туралы айтады. Бұл артықтықты блоктармен кодтауға өту арқылы жоюға болады.

Хабарламада пайда болу ықтималдықтары сәйкесінше 0,1 мен 0,9 z_1 , z_2 екі белгімен кодтаудың қарапайым мысалын қарастырайық. Егер осы белгілердің біреуін кодтаса, мысалы, нөлмен, ал екіншісін бірмен, яғни белгіге бір символдан, сәйкесінше:

$$l_{орт}= 0.1*1+0.9*1=1.0;$$

$$H(z)=-0.1*\log_2 0.1-0.9*\log_2 0.9=0.47.$$

Екі белгі бойынша блоктармен кодтауға өтуде (9.2 кесте) :

$$l_{орт}= l_{орт,бл}/2=1/2(0,81*1+0,09*2+0,09*3+0,01*3)=0,645.$$

9.2 кесте

Блоктар	Ықтималдықтар	Кодтар
z_1 z_1	0,81	1
z_2 z_2	0,09	01
z_3 z_3	0,09	001
z_4 z_4	0,01	000

Үш символмен блоктармен кодтауда белгіге келетін символдардың орташа саны азаяды және 0,53-ке тең болатынын тексеруге болады.

Блоктарды ірілеткенде топтарды суммалық ықтималдықтарының мәні бойынша жақын топшаларға бөлуге болатындығы есебінен осы эффект болады. Негізі $\lim_{n\to\infty} l_{\text{орт}} = H(z)$, мұндағы n-блоктағы символдардың орташа саны.

9.4 Хаффманның кодтау әдістемесі

Кодталатын белгілердің жиынтығын топшаларға қалай бөлетініне қатысты нақты ұсыныстардың жоқтығына байланысты жоғарыда қарастырылған кодтаудың әдістемесі әрқашан жақсы нәтижеге әкелмейді. Осындай кемшілігі жоқ Хаффманның кодтау әдістемесін қарастырайық. Кодталатын белгілер Шеннон-Фано әдісін пайдаланғандай ықтималдықтарының төмендеуі бойынша орналасады (9.3 кесте). Ары қарай тізімнің соңғы екі позициясы біреуге ауыстырылады және оған ауысатын позициялардағы ықтималдықтардың қосындысына тең ықтималдықты жазады. Осыдан кейін, әр сатыда нақты қандай белгілер біріктірілгені жайлы ақпаратты сақтап, ықтималдықтарының төмендеуі бойынша тізімді қайта сұрыптайды. Ықтималдығы 1-ге тең жалғыз позиция қалғанша процесс жалғаса береді.

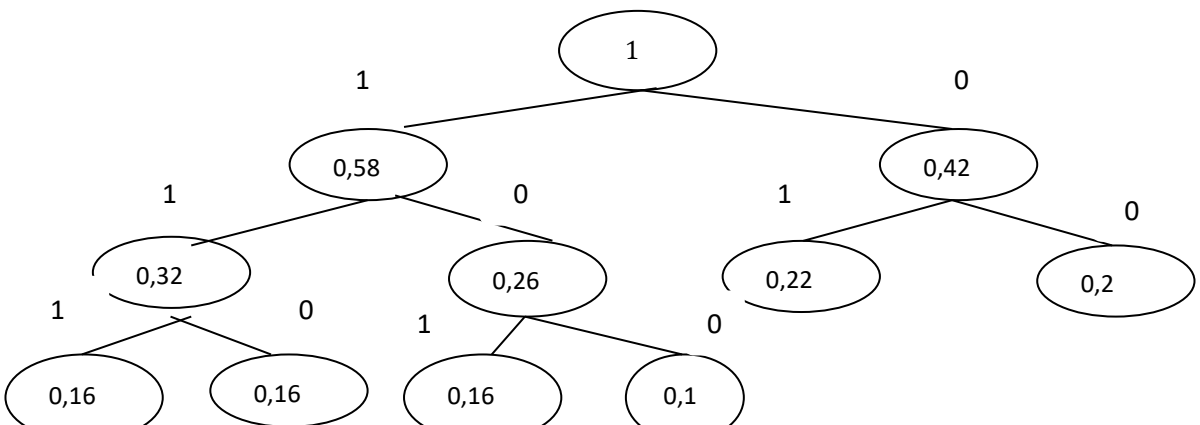
9.3 кесте

Белгілер	p_i	Көмекші бағандар						
		1	2	3	4	5	6	7
z_1	0,22	0,22	0,22	0,26	0,32	0,42	**0,58**	**0,1**
z_2	0,2	0,2	0,2	0,22	0,26	**0,32**	**0,42**	
z_3	0,16	0,16	0,16	0,2	**0,22**	**0,26**		
z_4	0,16	0,16	0,16	**0,16**	**0,2**			
z_5	0,1	0,1	**0,16**	**0,16**				
z_6	0,1	**0,1**	**0,1**					
z_7	**0,04**	**0,06**						
z_8	**0,02**							

Осыдан кейін кодтық ағаш тұрғызылады. Ағаштың тамырына ықтималдығы 1-ге тең түйін сәйкестікке қойылады. Ары қарай әрбір түйінге өңделетін түйіннің ықтималдықтарының белгісін жасағанда қатысқан ықтималдықтары бар екі ұрпақ жазылады. Осылай бастапқы белгілердің ықтималдықтарына сәйкес түйіндерге жеткенше жалғастырады. Кодтық ағаш бойынша кодтау процессі келесі түрде жүзеге асады. Әр түйіннен шығатын бұтақтардың бірі, мысалы, ықтималдығы жоғары, сәйкестікке 1 символы қойылады, ал азына-0. Тамырдан қажетті белгіге түсу осы белгінің кодын береді. Теңықтималдық жағдайында кодтау ережесі ерекше айтылады. 9.3, 9.4 кестелері мен 9.1 сурет Хаффман әдістемесін пайдалануды көрсетеді. 9.3 кестеде қалың шрифтпен біріктірілетін позициялар көрсетілген, ал асты сызылғанмен- біріктіру кезінде алынатын позициялар.

9.4 кесте

Белгілер	Кодтар
z_1	01
z_2	00
z_3	111
z_4	110
z_5	100
z_6	1011
z_7	10101
$0z_8$	10100



9.1 сурет – Кодтық ағаш

Шеннон-Фано немесе Хаффман әдістемелерін қолданып тұрғызған кодтардың тамаша қасиеті- олардың префикстілігі. Оның мәні кодтың комбинациясы ұзынырақ басқа комбинацияның басы болмайтындығында. Бұл қателік жоқ болған кезде, арасында бөлу символдары жоқ, бірінің артында бірі жүретін кодтық комбинациялардың қатарын бірмәнді қайта кодтауды жүзеге асыруға мүмкіндік береді.

9.5 Белгілердің корреляцияланған тізбектерін эффективті кодтау әдістері

Көздер мен каналдардың өнімділігін арттыру шуыл тәрізді сигналдарды (символдары бір-бірінен тәуелсіз және біркелкі таралған) жасау мен тасымалдау жолымен жүзеге асатынын алдында көрсетілді. Егер хабарламалардағы белгілер корреляцияланса бұл қасиет орындалмауы мүмкін. Корреляцияланған тізбектің кодтау эффективтілігін арттыру үшін жасанды декорреляция жасайды. Оның бір тәсілі белгілер алфавитін ірілету. Бұл ретте тасымалданатын хабарламалар екі, үш, n ретті белгілік тіркесулерге (қиылыспайтын блоктар) бөлінеді, олардың ықтималдықтары белгілі. Әрбір тіркесу жоғарыда сипатталған әдістердің біреуімен кодталады:

$$\underbrace{z_1 z_1 z_3 \ldots . z_4 z_1 z_2}_{n} \underbrace{z_3 z_1 z_2 \ldots . z_4 z_1 z_3}_{n} .$$

Тіркесулердегі белгілер санын арттырғанда хабарламадағы белгілер корреляциясы азаяды. Алайда, бұл ретте тіркесулерді жасау уақытында сигналдарды тасымалдауда кідіріс артады. Бұл кемшіліктен l белгілерден (l-грамма) тұратын әрбір тіркесу хабарламаның ағымдағы белгісін қосу мен l-грамманың соңғы белгісін алып тастау жолымен жасалатын әдіс еркін:

$$\underbrace{z_1 \overbrace{z_3 z_2 \ldots z_4 z_2 z_1 z_3}}_{\text{1- } l\text{-грамма}} z_1 z_2 \ldots .$$
2- l-грамма

Екі белгінің тіркесуін диграмма, үшеуін- триграмма және т.с.с. деп атайды. Кодтау процессінде l-грамма хабарлама текстінде үздіксіз ауысады, ал әрбір белгінің кодтық белгіленуі алдыңғы белгілердің l-1 тәуелді және Шеннон-Фано немесе Хаффман әдістерін қолданып анықталуы мүмкін. Бұл жағдайда сигналдың кідірісі біріші l-грамманы жасаудың бастапқы сатысында ғана орын алады.

9.6 Эффективті кодтау әдістерінің кемшіліктері

1. Кодтық комбинациялардың ұзындығындағы айырмашылықтар. Әдетте, кодтау қондырғысының кірісіне белгілер уақыттың бірдей аралығында түседі. Егер оларға әртүрлі ұзындықты комбинациялар тән болса, онда шығынсыз тасымалдау кезінде каналды толық жүктеуді қамтамасыз ету үшін қабылдайтын жақта да, тасымалдаушы жақта да буферлік қондырғыны ескеру қажет.

2. Ақпаратты тасымалдаудағы кідіріс. Көрсетілгендей, эффективті кодтаудың артықшылықтары ұзын блоктармен кодтауда толық көрсетіледі. Бұл үшін кодтағанда да, қайта кодтағанда да белгілерді жинау керек, ол елеулі кідіріске алып келеді.

3. Бөгеуілден төмен қорғанушылық. Тасымалдау процесінде туындаған тіпті жалғыз қателік кодтың префикстілік қасиетін бұзуы және келесі комбинациялар қатарын дұрыс емес қайта кодтауға әкелуі мүмкін.

4. Техникалық жүзеге асуының күрделілігі. Кодтық комбинациялардың әр түрлі ұзындығында каналдың бірқалыпты жүктелуін қамтамасыз ету үшін буферлі қондырғыларды пайдалану және эффективтілікті жоғарылату үшін блоктармен кодтауды ұйымдастыру эффективті кодтау жүйелерінің іске асырылуын қиындатады. Егер оған қоса бөгеуілден қорғанушылықты арттыруды қамтамасыз ететін аппараттық шешімдер қолданылса, онда бәрінің жиынтығы ықтималдықтары жоғары белгілер қысқалау кодтық сөздермен кодталатынына байланысты, эффективті кодтау жүйесінің басты артықшылығын жоққа шығаруы мүмкін.

10 Дәріс №10. Бөгеуілге төзімді кодтау теориясына кіріспе

10.1 Бөгеуілі бар канал үшін кодтау туралы Шеннонның теоремасы

Бөгеуілге төзімді кодтаудың теоретикалық негізі болып келесі теорема (Шеннонның) табылады:

- каналдың өткізу қабілетінен аз көздің кез келген өнімділігінде қателіктің қаншалықты аз ықтималдығымен көзден барық хабарламаны тасымалдауды қамтамасыз ететін кодтау әдісі бар;

- егер көздің өнімділігі каналдың өткізу қабілетінен жоғары болса, қателігінің кез келген ықтималдығында ақпаратты тасымалдауға мүмкіндік беретін кодтау әдісі жоқ.

Дәлелдеу. Көз символдар саны $N = T/\tau_u$, мұндағы τ_u-бір символды жасаудың орташа уақыты, Т үлкен ұзындықты типті (рұқсат етілген) тізбектерді түрлендірсін.

Онда (7.1) теңсіздігі әділ, ал (9.2) сәйкес типті тізбектердің саны:

$$N_T(Z) = 2^{NH(Z)} = 2^{\frac{T}{\tau_u}H(Z)}. \qquad (10.1)$$

Егер тізбектер символдары статистикалық тәуелсіз болатындай көлемі m алфавитінің символдарынан жасалады деп болжасақ, онда каналдың кірісінде жасалуы мүмкін Т ұзындықты тізбектердің жалпы саны:

$$N_T(Z) = m^N = 2^{N\log_2 m} = 2^{\frac{T}{\tau_k}\log_2 m}, \qquad (10.2)$$

мұндағы τ_u- байланыс каналы бойынша бір символды тасымалдау уақыты.

Теорманың бірінші бөлігінің шарты орындалсын- каналдың өткізу қабілеті көздің өнімділігінен көп:

$$C_d > \dot{I}(Z) = H(Z)/\tau_u. \qquad (10.3)$$

(8.6) сәйкес дискретті каналдың өткізу қабілеті:

$$C_d = \max_{p(z)} \frac{I(Z,V)}{\tau_k} = \frac{\max_{p(z)} H(Z) - H_V(Z)}{\tau_k} = \frac{\log_2 m - H_V(Z)}{\tau_k}. \qquad (10.4)$$

(10.4) оң жағын (10.3) сол жағына қойып, аламыз:

$$\frac{\log_2 m - H_V(Z)}{\tau_k} > \frac{H(Z)}{\tau_k}.$$

Соңғы теңдеудің екі жағын Т-ға көбейтсек ешнарсе өзгермейді:

$$\frac{T}{\tau_k}(\log_2 m - H_V(Z)) > \frac{T}{\tau_u}\mathrm{H(Z)}. \qquad (10.5)$$

Шартты энтропия $H_V(Z) \geq 0$ болғандықтан, оны алып тастағаннан кейін (10.5) теңсіздігі күшейеді:

$$\frac{T}{\tau_k}\log_2 m \gg \frac{T}{\tau_u}H(Z).$$

Соңғы теңдеудің сол және оң бөліктері (10.1) мен (10.2) дәреже көрсеткіштері, демек дәрежелер қасиеттеріне байланысты:

$$2^{\frac{T}{\tau_k}\log_2 m} >> 2^{\frac{T}{\tau_u}H(Z)}.$$

Осыдан шығады:

$$N(Z) >> N_T(Z). \quad (10.6)$$

Бұл әрбір типті тізбекке N(Z) жиынынан тізбекті сәйкестікке қоюға мүмкіндік беретін $C_{N(Z)}^{N_T(Z)}$ түрлі кодтау әдістері барын білдіреді. Осы жиыннан тізбектерді тең ықтимал таңдау кезінде осы тізбек шешілетін болуының p ықтималдығы:

$$p=\frac{N_T(Z)}{N(Z)} = \frac{2^{T\frac{H(Z)}{\tau_u}}}{2^{T\frac{\log_2 m}{\tau_k}}} = \frac{1}{2^{T\left(\frac{\log_2 m}{\tau_k}-\frac{H(Z)}{\tau_u}\right)}}. \quad (10.7)$$

Каналдың шығысынан v нақты тізбегін алғанда берілген z тізбекке қатысты $H_V(Z)$ байланысты анықталмағандық қалады, ол каналдағы шуылдардың деңгейімен анықталады. Бұл анықталмағандық келесі тізбектерден таңдау анықталмағандығына эквивалентті:

$$N_V(Z) = 2^{\left(\frac{T}{\tau_k}\right)H_V(Z)}. \quad (10.8)$$

(10.8) қатынасы (10.1)-мен аналогия бойынша алынуы мүмкін екенін байқаймыз. Егер $N_V(Z)$ тізбектерден жалғыз өзі шешілген болса, онда нақты тізбек қателігінің қаншалықты аз ықтималдығымен идентификациялануы мүмкін. Осыдан, жеке жағдайда, кодтау мен қайта кодтаудың кез келген әдісі барлық тізбектер жиынын әрқайсысында тек бір шешілгені бар ішкі жиынтыққа бөлуге келуі тиіс.

$N_V(Z) - 1$ тізбектердің ешқайсысы шешілмеген деп, кодтаудың барлық әдістері бойынша $\bar{p}$ ықтималдығын бағалаймыз:

$$\bar{p} = (1-p)^{N_V(Z)-1}, \quad (10.9)$$

Мұндағы p – осы тізбек шешілгендігінің (10.7) ықтималдығы.

$(1-p)<1$ болғандықтан, (10.9) теңдеуінің орынан келесі теңсіздікті жазуға болады:

$$\bar{p} > (1-p)^{N_V(Z)}. \qquad (10.10)$$

(10.10) оң бөлігін p=0 аймағында Тейлор қатарына ашамыз:

$$(1-p)^{N_V(Z)} = 1 - N_V(Z)p + \frac{1}{2}N_V(Z)(N_V(Z)-1)p^2 - \cdots.$$

Осы тізбектің мүшелері абсолют шама бойынша азаятынын көрсетуге болады. Лейбниц белгісі бойынша, егер қатар айнымалы таңбалы болса және мүшелері абсолют шама бойынша кемісе, онда қалдықтың шамасы бірінші тасталатын мүшенің шамасынан артпайды және бірдей белгісі бар. Осылай, екі бірінші мүшемен шектелсе, (10.10) теңдеуі тек күшейеді:

$$\bar{p} > 1 - N_V(Z)p, \qquad (10.11)$$

мұндағы p- (10.7)-де анықталатын ықтималдық. Оны (10.11)-де ауыстыруды жүзеге асырмай тұрып, (10.7) түрлендіреміз. Бұл үшін (10.5) теңсіздігін қолданамыз, оны келесі түрде көрсетеміз

$$\frac{T}{\tau_k}\log_2 m - \frac{T}{\tau_u}H(Z) > \frac{T}{\tau_k}\mathrm{H_V(Z)}. \qquad (10.12)$$

(10.12) оң бөлігіне бір ŋ оң санын қойып, бұл теңсіздікті теңдікке айналдырамыз:

$$T\left(\frac{\log_2 m}{\tau_k} - \frac{H(Z)}{\tau_u}\right) = T\left(\frac{\mathrm{H_V(Z)}}{\tau_k} + \eta\right). \qquad (10.13)$$

Ақырында, (10.7)-де екінің дәреже көрсеткішін (10.13) оң жағымен ауыстырып аламыз:

$$\mathrm{p}=\frac{1}{2^{T\left(\frac{\mathrm{H_V(Z)}}{\tau_k}+\eta\right)}} = \frac{1}{2^{\frac{TH_V(Z)}{\tau_k}}2^{T\eta}} = \frac{1}{\mathrm{H_V(Z)}*2^{T\eta}}. \qquad (10.14)$$

Алынған ықтималдықтың мәнін p (10.11)-ге қойып, аламыз:

$$\bar{p} > 1 - \frac{1}{2^{T\eta}}. \qquad (10.15)$$

Еске саламыз, $\bar{p}$- $N_V(Z)-1$ ешқайсысы шешілмегендігінің ықтмалдығы, демек, $N_V(Z)$ тізбектердің біреуі шешілген. Онда қателігінің ықтималдығы:

$$\bar{p}_{\text{ош}} = 1 - \bar{p} < 2^{-T\eta}. \qquad (10.16)$$

$T \to \infty$ кезінде $\bar{p}_{\text{ош}} \to 0$ екенін (10.16)-дан көруге болады. Осылай, кодтаудың барлық тәсілдері бойынша қателігінің орташа ықтималдығы аз болатындай тізбектердің ұзындығын таңдауға болады. Теореманың екінші жағын дәлелдеусіз аламыз. Дегенмен, онда кодтарды қалай тұрғызу керек екендігі түсіндірілмейді, ол қаншама жоғары дәлдікпен тасымалдауды қажет ететін қодтарды тұрғызудың қағидалы мүмкіндігін негіздейді. Теорема бөгеуілі бар каналда қателіксіз тасымалдау мүмкін емес деген интуитивті дұрыс болжамды жоққа шығарады. Хабарламаның Т ұзындығын шексіз арттырғанда тасымалдаудың жоғары дәлдігіне қалай болса да жетуге мүмкін екені (10.16)-дан шығады. Әрине, бөгеуіл болған кезде қателіксіз тасымалдау тек теория жүзінде мүмкін, өйткені кодталатын тізбектің ұзындығын шексіз арттыруға болмайды.

10.2 Бөгеуілге төзімді кодтарды тұрғызудың жалпы принциптері

Ақпаратты тасымалдау мен сақтаудың сенімділігін арттыруға артықтықты (қосымша символдарды) енгізумен жетеді. Осы символдарды таңдауда қайта кодтау кезінде қателіктерді анықтауға және жоюға мүмкіндік беретін шарттар қолданылады.Осы қасиетке ие кодтарды бөгеуілге төзімді деп атайды. Әдетте көрсетілген қасиеттер кодтың алгебралық құрылымымен байланысты, бұл ретте сәйкес кодты алгебралық деп атайды. Алгебралық кодтар блоктық немесе үздіксіз сияқты тұрғызыла алады. Блоктық кодтар жағдайында кодтау процедурасының мәні кодталатын белгілерге сәйкес k ақпараттық символдарды n символдардан тұратын блокпен сәйкестендіруде.

n символдардан тұратын кодтық комбинацияға түрленетін ақпараттық символдарға (кодталатын белгілерге сәйкес) тізбек кодтайтын қондырғының кірісіне түседі деп есептейік, бұл ретте n> k. Барлығы 2^k түрлі кіріс және 2^n түрлі шығыс тізбектер болуы мүмкін. Көрсетілген шығыс тізбектерінің арасында кіріс ақпараттық тізбектеріне сай тек 2^k рұқсат етілген тізбектер. Қалған 2^n-2^k комбинациялар рұқсат етілмеген. Рұқсат етілген 2^k комбинациялардың кез келгені бөгеуілмен кез келген 2^n комбинацияға өзгертілуі мүмкін. Бұл ретте келесі жағдайлар болуы мүмкін:

1) қателіксіз (бұрмаланбай) тасымалдаудың 2^k жағдайлары;

2) рұқсат етілген комбинациялар бөгеуілмен рұқсат етілмегенге, бірақ анықталатынға өзгеруінің $2^k(2^n-2^k)$ жағдайлары;

3) басқа рұқсат етілген комбинацияларға өтудің $2^k(2^k-1)$ жағдайлары. Бұндай қателіктер анықталған болуы мүмкін емес.

Тасымалдаудың барлық жағдайлары 2^k*2^n болғандықтан, анықталатын қателіктердің салыстырмалы саны (қателікті анықтау ықтималдығы) құрайды:

$$p = \frac{2^k\,(2^n - 2^k)}{2^k * 2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n-k}}.$$

n→ ∞ кезінде қателікті анықтау ықтималдығы бірге ұмтылады. Жүзеге асырудың оңайлығы жағынан кодтың артықтығын сипатайтын n-k тексеру разрядтарының санын шектейді. Артықтық бөгеуілге төзімді кодтың негізгі сипаттамаларының бір болып табылады. Салыстырмалы артықтықты анықтайды:

$$R_1=\frac{n-k}{n} \quad \text{немесе} \quad R_\infty=\frac{n-k}{k}.$$

n→ ∞ кезінде R_1 шекті мәні 1-ге тең, ал R_∞ − шексіздікке.

Тексеру символдарын анықтау белгілі ақпараттық символдарға сызықты операциялар ретінде тұрғызылады. Сондықтан кодтарды сызықты деп атайды.

10.3 Сызықты кодтарға математикалық енгізу

Кодтық комбинацияларды бір жиынтықтың элементтері ретінде қарастыруға болады. Бір негізгі операция анықталған, тұйықтық пен ассоциативтілік аксиомалары орындалатын, нөлдік (егер негізгі операция-қосу) немесе бірлік (егер негізгі операция- көбейту) және әрбір элементіне қарсы (кері) элементі бар элементтердің жиыны топ деп аталады. Егер негізгі операция коммутативті болса, топ коммутативтік немесе абелдік деп аталады. Ақырлы топтағы элементтер санын топтың реті деп атайды. Екілік кодтарды тұрғызу үшін 2 модулі бойынша қосудың коммутативтік операциясы қолданылады. Сондықтан екілік кодтың n- разрядты комбинацияларының жиыны ақырлы абелдік топ деп аталады. Операцияға қатысты өзі топ болатын топтың ішкі жиынын топша деп атайды. Г абелдік тобында А топшасы және $b_j \notin A$ элементі берілсін. $b_j \oplus A=\{b_j \oplus a,\ a \in A\}$ А топшасының әрбір элементімен b_j элементін (2 модулі бойынша) сумма ретінде анықталған элементтердің жиыны көршілес класс, ал $b_j \notin A$ элементі жасаушы элемент деп аталады. Топты жасаушы элементтерді жасалған класстарға кірмейтіндей етіп беріп, барлық топты А топшасы бойынша көршілес класстарға бөлуге болады. Шеннон теоремасына сай кодтаудың кез келген әдісін рұқсат етілмеген кодтық комбинациялардың жиынын әрқайсысында тек бір рұқсат етілген комбинациясы бар 2^k қиылыспайтын ішкі жиындарға бөлу ережесі деп қарастыруға болады. Көршілес класстарға бөлу операциясы осындай бөлудің формалды ережесін көрсетеді.

11 Дәріс №11. Топтық кодтарды құрастыру

11.1 Кодтың түзетуші қабілеті түсінігі

Кодтың арақашықтық d тізбектері бір-бірінен ерекшеленетін символдар санымен көрсетіледі. Екілік кодтың екі комбинациясы арасындағы кодтық арақашықтықты анықтау үшін оларды 2 модулі бойынша қосып, алынған нәтижеде бірліктердің санын есептеген жеткілікті. Рұқсат етілген кодтық комбинациялардың барлық жұптары бойынша есептелген минималды арақашықтықты осы кодтың минималды кодтық арақашықтығы деп атайды. Кодтың тізбектің (Хэммингтің) салмағы осы тізбектің нөлдік емес компоненттерінің саны ретінде анықталады. Екі тізбектің арасындағы кодтық арақашықтық олардың суммасы болатын, (екі модулі бойынша қосу операциясының қасситетіне байланысты) осы кодтың тізбегі болуы міндет басқа үшінші тізбектің салмағына тең. Демек, сызықты код үшін минималды кодтық арақашықтық оның нөлдік емес векторларының минималды салмағына тең.

Қателіктердің векторы деп разрядтарында қателікке ұшыраған бірліктері және басқа разрядтарында нөлдері бар n-разрядты екілік тізбекті айтады. Кез келген бұрмаланған комбинация бастапқы рұқсат етілген комбинация мен мен қателік векторын 2 модулі бойынша қосу нәтижесі ретінде қарастырылуы мүмкін. Кодтық комбинацияның бұрмаланған символдарының r санын қателігінің еселігі деп атайды. r қателік еселігін кезінде C_n^r n-разрядты екілік қателік векторы болуы мүмкін. Кез келген комбинацияның пайда болу ықтималдығы r бұрмаланған символдар саны мен p бір симолдың бұрмалану ықтималдығына тәуелді символдардың қателігін өзара тәуелсіз деп атайды. Өзара тәуелсіз қателіктер кезінде n- разрядты кодтық комбинацияда кез келген r символдарды бұрмалау ықтималдығы:

$$p_r = C_n^r p^r (1-p)^{n-r}.$$

Кодтың түзетуші қабілеті анықталатын r қателіктердің еселігінің мен түзетуші кодпен дұрыстала алатын s қателіктерінің еселігінің мәндерімен сипатталады. Нақты түзетуші код қателіктердің кез келген комбинациясын дұрыстауға міндет емес екеніне көңіл аударамыз. Ол оны құрастырғанда есепке алынған берілге еселікті қателіктерді анықтап және түзете алады.

11.2 Топтық кодты тұрғызудың жалпы сұлбасы

Топтық кодты тұрғызуға бастапқы мәліметтері Q кодтың көлемі (тасымалданатын дискретті хабарламалардың мөлшері) және берілген түзетуші қабілеті болып табылады. Мәселе n кодтың разрядтар санын анықтауда және тексеруші разрядтарды жасауда. Берліген Q бойынша k ақпаратты разрядтар саны шарттан анықталады

$$2^k - 1 \geq Q, \qquad (11.1)$$

(әдетте нөлдік комбинация қолданылмайтыны ескерілген, себебі байланыс каналының күйін өзгертпейді). Ары қарай осы әрбір $2^k - 1$ нөлдік емес ақпаратты тізбектерге сәйкестендіруге n- разрядты артық кодты (рұқсат етілген комбинацияны) қою керек.

n- разрядты рұқсат етілген комбинациялардың 2^k жиыны (нөлдікпен бірге) n- разрядты комбинациялардың 2^k барлық топтарының топшасын құрайды. Осы топша бойынша топты көршілес кластарға жіктейміз. Көршілес кластарды жасаушы элементтер ретінде біз дұрыстайтын қателіктердің векторын аламыз.

Егер, мысалы барлық жеке (еселігі s =1) қателіктерді дұрыстау мәселесі қойылса, онда жасаушы элементтер ретінде n разрядтардың біреуінде бір бірлігі бар n түрлі векторлар алынуы тиіс. Егер жекеден бөлек барлық екілік қателіктерді (еселігі s =2) дұрыстау қажет болса, онда $C_n^s = C_n^2$ қателіктер векторы (кластар элементін құрайтын) қосылады және т.с.с.

Рұқсат етілген комбинациялардың топшаларынан бөлек барлық n-разрядты комбинациялардың тобын ыдырату нәтижесінде $2^{n-k} - 1$ қиылыспайтын көршілес кластар түзілуі мүмкін. Егер дұрыстауға жататын қателіктер векторының саны көршілес кластардың санынан артпаса, олардың әрқайсысына сәйкестікке бір көршілес класты қоюға болады. Осылай, s- қа дейін (s-ті қоса) еселік қателіктерін анықтау және жөндеу мүмкіндігі қамтамасыз етілуі үшін жалпы жағдайда теңсіздік орындалуы керек:

$$2^{n-k} - 1 \geq C_n^1 + C_n^2 \ldots C_n^s,$$

немесе

$$2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^{s} C_n^i. \qquad (11.2)$$

(11.2) сәйкес, s еселігінде қателіктерді түзетуге арналған түзетуші кодтың разрядтар саны теңсіздікпен анықталады:

$$\mathrm{n} \geq \mathrm{k} + \log_2 \sum_{i=0}^{s} C_n^i. \qquad (11.3)$$

Қателіктерді түзету үшін алынған кодтық тізбек қай көршілес класқа жататынын анықтау қажет, ал содан кейін осы класқа сәйкес жасаушы элементті (қателік векторы) алынған тізбекке (екі модулі бойынша) қосу қажет. Көршілес класты анықтау үшін әрқайсысына сәйкестікке n-k символдардың сәйкестігі қойылады, ол танушы немесе синдром деп аталады. Қателіктерді түзету көршілес кластар (қателіктер векторы) жиыны мен танушы жиындар арасында өзара бірмәнді сәйкестік кезінде болады.

11.3 Түзетуші қабілеттің кодтық арақашықтықпен байланысы

Әдетте, кез келген қабылданған рұқсат етілмеген кодтық комбинация одан минималды кодтық арақашықтықта орналасқан рұқсат етілген комбинациямен бірдейленеді жолымен қайта кодтау жүзеге асады. Егер берілген кодтың минималды кодтық арақашықтығы d=1 болса, яғни кодтың барлық комбинациялары рұқсат етілген болып табылса, онда қателікті анықтауға болмайды. Егер d=2, онда бірлік қателікті табуға болады және т.с.с. Жалпы жағдайда r-ға дейінгі (r-ді қоса) еселік қателігін анықтау қажеттілігі туындаса, минималды кодтық арақашықтық келесі шартты орындауы тиіс:

$$d_{min} \geq r + 1. \qquad (11.4)$$

11.2 тарауда сипатталған топтық кодты тұрғызудың жалпы сұлбасына сәйкес s еселік қателіктерін түзету үшін әрбір рұқсат етілген кодтық комбинацияға сәйкестікке ішкі жиындар қиылыспайтындай етіп рұқсат етілмеген комбинациялардың ішкі жиынын қою керек. Бұл үшін теңсіздік орындалуы керек:

$$d_{min} \geq 2s + 1. \qquad (11.5)$$

Берліген рұқсат етілгеннен і қашықтықта орналасқан комбинациялардың саны C_n^i тең. Демек, (11.5) шартын орындағанда, түзетілетін қателіктердің саны рұқсат етілген комбинацияларға сәйкес, ішкі жиында орналасқан рұқсат етілмеген комбинациялардың санына тең болады:

$$\sum_{i=0}^{s} C_n^i.$$

s еселік қателіктерін түзету және бір мезгілде r (r≥ s) еселігінің барлық қателігін анықтау үшін минималды кодтық (хэмиингтік) арақашықтық үшін келесі теңсіздік орындалуы тиіс:

$$d_{min} \geq r + s + 1. \qquad (11.6)$$

Жоғарыда келтірілген қатынасқа геометриялық түсіндірме берейік. Кез келген n- разрядты екілік кодтық комбинация қабырғасының ұзындығы 1-ге тең n-өлшемді гиперкубтың төбесі ретінде түсіндірілуі мүмкін. Мысалы, n=2 кезінде бұл квадрат, n=3 кезінде бірлік куб. Жалпы жағдайда n-өлшемді гиперкубта 2^n төбе бар, ол n разрядты екілік кодтық комбинацияның мүмкін санына сәйкес. Кодтық арақашықтықты бір рұқсат етілген комбинациядан басқасына түсу үшін өту керек қабырғалардың ең саны деп түсіндіруге болады. (11.5) сәйкес әрбір рұқсат етілген комбинацияның ішкі жиынына радиус сферасына кіретін барлық қабырғалар жатады

$$s \leq (d - 1)/2. \qquad (11.7)$$

Егер шуылдың нәтижесінде рұқсат етілген комбинация сфераның нүктесіне өтсе, онда ол түзетіле алады.

11.4 Қателікті танушыларды жасау

Топты кодты тұрғызудың жалпы сұлбасына сәйкес $2^k - 1$– нөлдік емес ақпаратты тізбектердің әрқайсысына сәйкестікке n-k символдары тексеруші n-разрядты рұқсат етілген кодтық комбинация қойылады. Олар түзетілетін қателер (көршілес кластар) мен танушылар жиындары өзара бірмәнді сәйкестік орын алатындай танушылармен толтырылуы керек. s-*қа дейінгі (s қоса) еселіктің барлық қателіктерін түзетуге арналған екілік код (11.2), (11.3)-де келесі теңсіздік орын алатындай етіп тұрғызылған деп ойлайық:

$$2^{n-k} - 1 = \sum_{i=1}^{s} C_n^i.$$

Жеке жағдайда, түзетуге тек бірлік қателіктер ұшыраса, онда

$$2^{n-k} - 1 = n.$$

Бұл теңсіздікті мысалы n=7 мен k=4 орындайды. Көрсетілген мәндер үшін $\frac{2^7}{2^4} - 1 = 2^3 - 1 = 7$ көршілес кластары бар. Осы 7 көршілес кластың әрқайсысына сәйкестікке үш разрядты қателік векторын қоюға болады. Бұл жағдайда, танушы ретінде қателік орын алған разряд нөмірін көрсететін екілік сандарды алуға болады (11.1 кесте).

Еселігі жоғарырақ қателіктерді танушыларды тұрғызуда (қателік векторларының бірнеше разрядтарында бірліктер бар) бірмәнді қателіктердің екі модулі бойынша қосындысы ретінде тұрғызуға болады. Бұл ретте, (келесі разрядта бірмәнді қателіктің кезекті танушысын таңдауда), кезекті кодтық комбинация мен оны пайдаланып жасалатын жоғары еселікті қателіктер векторын танушылары алдыңғы разрядтардағы бірмәнді және еселік қателіктерді танушылары ретінде де пайдаланылатынын бақылау керек. Осындай тексеруді бірлік қателіктің әрбір келесі разрядына көшуде жасау керек. Кейін, келесі тарауда сөз болатын тексеру теңдіктерін құрастыру үшін танушыларды жасаудың көрсетілген процедурасын қолданғанда әрбір разрядтағы бірмәнді қателіктердің танушыларын білу жеткілікті.

11.1 кесте

Қателік векторы	Разряд №	Танушы
0000001	1	001
0000010	2	010
0000100	3	011
0001000	4	100

0010000	5	101
0100000	6	110
1000000	7	111

11.5 Тексеру теңдіктері мен кодтау теңдеулерін анықтау

Жоғарыда айтылғандай, кодты тұрғызу сатысында қателіктерді жөндеу мүмкіндігін қамтамасыз ету үшін қателіктер векторы жиыны, көршілес кластар мен танушылардың жиыны арасында өзара бірмәнді сәйкестікті қамтамасыз ету қажет. Қайта кодтау сатысында танушылардың символдарын анықтау процедурасы жұптыққа тексеру сияқты тексеру теңдіктерін қолданумен жүзеге асады. Қайта кодталатын тізбекте жұптыққа тексерудің барлығында қателіктер болмаған жағдайда құры нөлдерден тұратын танушы болуы тиіс. Танушының сәйкес разрядтарында қателіктер болған жағдайда бірліктер пайда болады. Тексеру теңдіктері мен кодтау теңдеулерін тұрғызудың жалпы қағидаларын қарастырайық. Көрнекілік үшін мазмұндауды тек иллюстрациялық сипаты бар жоғарыда тұрғызылған код (7,4) мысалында жүргіземіз.

Жұптыққа тексерудің әрқайсысына кіретін разрядтар танушылар кестесі бойынша анықталады. (7,4) кодында тексеру разрядтарының саны, демек, тексеру теңдіктерінің саны да үшке тең болу керек: n-k= 7-4=3. Бұл жағдайда, танушылар ретінде қателік болған разрядтар нөмірінің екілік кодтары алынды. Әрбір тексеру теңдігі осы теңдікке сай танушылар разрядындағы символдардың мәні бойынша тұрғызылады. Танушылардағы бірініші (кіші) разрядтағы бірлік келесі разрядтардың: 1, 3, 5, 7 біреуіндегі қателік салдарынан болады; сондықтан бірінші тексеру теңдігі ретінде алуға болады:

$$a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 = 0. \qquad (11.8)$$

Танушылардағы екінші разрядтағы бірлік келесі разрядтардың: 2, 3, 6, 7 біреуіндегі қателік салдарынан болады. Сондықтан екінші тексеру теңдігі анықталады:

$$a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 = 0. \qquad (11.9)$$

Ұқсас, танушылардағы үшінші разрядтағы бірлік келесі разрядтардың: 4, 5, 6, 7 біреуіндегі қателік салдарынан болады, яғни үшінші тексеру теңдігін жазуға болады:

$$a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 = 0. \qquad (11.10)$$

Тексеру разрядтарының нөмірін олардың әрқайсысы бір тексеру теңдігіне (11.8)- (11.10) кіретіндей алған жөн. Бұл оларды кодтау кезінде

тексеру разрядтарындағы символдардың мәндерін бірмәнді анықтауды қамтамасыз етеді:

$$\begin{cases} a_{1=}a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 \\ a_2 = a_3 \oplus a_6 \oplus a_7. \\ a_4 = a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \end{cases} \quad (11.11)$$

Бұл жағдайда (11.11) кодтау теңдеуіне сәйкес, рұқсат етілген комбинацияларды жасау сатысында толтырылатын бірінші, екінші және төртінші разрядтар тексеруші болады.

Қарастырылатын мысалда min d_{min} = 3, сондықтан (11.4), (11.5) сәйкес берілген код бірлік немес екілік қателіктерді анықтауға немесе бірлік қателіктерді жөндеуге қолданылуы мүмкін. Бірлік қателіктердің кез келген екі танушыларының қосындысы екілік қателікті анықтауға қолданылуы мүмкін нөлдік емес танушыны беретінін 11.1 кестеден көруге болады. Бір мезгілде бірлік қателіктерді жөндеп және екіліктерді табу үшін (11.6) сәйкес min $d_{min} \geq$ 4 код тұрғызу қажет, мысалы, жұптыққа қосымша тексеру үшін тағы бір (8-разрядты) қосу арқылы.

Әдебиеттер тізімі

Негізгі әдебиттер

1 Кузнецов Н.А. Информационное взаимодействие в технических и живых системах. Электронный научный журнал «Информационные процессы», 2001, т. 1, № 1, бет.. 1-9.

2 Кузнецов И.Н. Информация : сбор, защита, анализ. Учебник по информационно-аналитеской работе. – М. ООО Изд. Яуза,2001 г., 93 с.

3 Дядюнов, А. Н. Адаптивные системы сбора и передачи аналоговой информации / А.Н. Дядюнов, Ю.А. Онищенко, А.И. Сенин. - М.: Машиностроение, 2016. - 288 с.

4 Глотова, М. Ю. Математическая обработка информации. Учебник и практикум / М.Ю. Глотова, Е.А. Самохвалова. - М.: Юрайт, 2015. - 352 с.

Қосымша әдебиттер

1 Дмитриев В.И.. Прикладная теория информации. Учебн. пособие. – М.: Высшая школа, 1989. – 320 б.

2 Кузьмин И.В., Кедрус В.А. Основы теории информации и кодирования. 2-е изд. перераб. и доп. – К.: Вища школа. 1986. – 238 б.

3 Фурсов В.А. Определение характеристик объектов в адаптивных системах управления: Учебн. пособие. – Под ред. Б.М. Шамрикова – М.: МАИ, 1983. –46 б.

4 Цыпкин Я.З. Основы информационной теории идентификации. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1984. – 320 б.

5 Остроух, А. В. Ввод и обработка цифровой информации / А.В. Остроух. - М.: Academia, 2014. - 288 с.6

Мазмұны

1 Дәріс №1. Детерминирленген сигналдардың моделдері..... 3
2 Дәріс №2. Кездейсоқ сигналдардың моделдері..... 11
3 Дәріс №3. Үздіксіз сигналдарды дискреттіге түрлендіру..... 18
4 Дәріс №4. Дискретті жиынтықтардың анықталмағандық өлшемі..... 21
5 Дәріс №5. Үздіксіз кездейсоқ шамалардың анықталмағандық өлшемдері 28
6 Дәріс №6. Ақпарат мөлшері түсірілген анықталмағандық өлшемі ретінде..... 33
7 Дәріс №7. Хабарлама көздерінің ақпараттық сипаттамаларын бағалау.... 39
8 Дәріс №8. Байланыс каналдарының ақпараттық сипаттамалары..... 43
9 Дәріс №9. Эффективті кодтау..... 51
10 Дәріс №10. Бөгеуілге төзімді кодтау теориясына кіріспе..... 59
11 Дәріс №11. Топтық кодтарды құрастыру..... 64
Әдебиеттер тізімі..... 70

2019 ж. қосымша жоспары, реті 243

Шолпан Назаровна Сагындыкова

АҚПАРАТТЫ ЖИНАУ ЖӘНЕ ТАСЫМАЛДАУ НЕГІЗДЕРІ

5В070200- Автоматтандыру және басқару мамандығының
студенттері үшін дәрістер жинағы

Редактор Изтелеуова Ж.
Стандарттау бойынша маман Ж. Н. Изтелеуова

Басуға қол қойылды
Тираж 50 дана
Көлемі 4,3 есептік-баспа табақ

Пішімі 60х84 1/16
Баспаханалық қағаз № 1
Тапсырыс_____Бағасы 2150тг.

«Алматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірмелі-көбейткіш бюросы
050013, Алматы, Байтұрсынұлы көшесі, 126/1