ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
«Алматы энергетика және байланыс университеті»
Коммерциялық емес акционерлік қоғамы

Л.К.Ибраева

БАСҚАРУ ЖҮЙЕЛЕРІНДЕГІ ОБЪЕКТІЛЕРДІ МОДЕЛЬДЕУ

Оқу құралы

Алматы
АЭжБУ
2017

ӘОЖ 681.5.015 (075.8)
КБЖ 32.965я73
И15

Пікір берушілер:
техника ғылымдарының докторы, К.И.Сәтпаев атындағы КазҰТЗУ автоматтандыру және басқару кафедрасының профессоры
Б.А. Сулейменов,
техника ғылымдарының докторы, Әль-Фараби атындағы КазҰУ ақпараттық технологиялар кафедрасының профессоры
Б.К. Айтчанов
АЭжБУ электроника кафедрасының доценті
Е.О.Елеукулов
Алматы энергетика және байланыс университетінің Ғылыми кеңесі басуға ұсынды (16.05.2017 ж. №9 хаттама). АЭжБУ 2017 ж. ведомостік әдебиеттер басылымдарын шығарудың қосымша тақырыптық жоспары бойынша басылады, реті 5

Ибраева Л.К.
И15 Басқару жүйелеріндегі объектілерді модельдеу: Оқу құралы (жоғары оқу орындарының «Автоматтандыру және басқару» мамандығы студенттеріне арналған)/Л.К.Ибраева – Алматы: АУЭС, 2017 – 128 б.: кесте - 1, без. - 33, әдеб. көрсеткіші – 7 атау.

ISBN

Ұсынылып отырған оқу құралында басқару жүйелеріндегі объектілерді математикалық модельдеудің жалпы сұрақтары қарастырылады. Басқару жүйелерінің жинақталған және таратылған параметрлері бар объектілерінің динамикалық сипаттамаларын аналитикалық және идентификациялау әдістері көмегімен анықтау әдістері сипатталған. Динамикалық жүйелерді модельдеуге заманауи компьютерлік бағдарламаны қолдану бейнеленген.

Оқу құралы 05070200 – «Автоматтандыружәне басқару» мамандығы бойынша білім алатын студенттерге арналған.

ӘОЖ 681.5.015 (075.8)
КБЖ 32.965я73

ISBN 978-601-7889-59-9

©АЭжБУ, 2017
Ибраева Л.К., 2017

Кіріспе. Басқару жүйесінің құрылымындағы модельдер орны

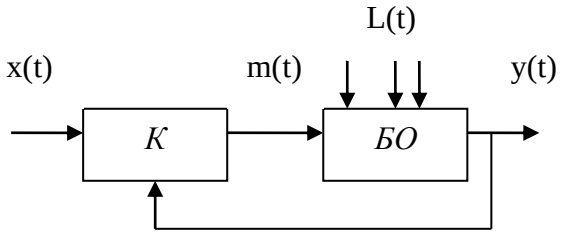
Күрделі объектілерді (соның ішінде басқару объектілерді) өңдегенде, жобалағанда және жасағанда қарастырып отырған объектілердің сандық және сапалық қасиеттерін білу қажет. Өзара және қоршаған ортамен үздіксіз байланысатын материалды денелердің жиыны объектілер мен жүйелер болып табылады. Әдетте көп деген жағдайлар себебінен күрделі объектілерде орындалатын заңдылықтарын практикалық тексеру мүмкін емес. Сонымен бірге осындай тексеру көп материалдар шығындарын және көп уақытты талап етеді. Осы себептерден қарастырып отырған күрделі объектілердің қасиеттері мен заңдылықтарын *модельдеу әдістері* негізінде зерттеудің өте көп мағынасы бар. Объектінің маңызды қасиеттері туралы ақпарат алу мақсатымен оны басқа модель-объектпен орын басу процесін *модельдеу* деп атайды. Нақты объектіні зертеу процесінде оның осы зерттеуге маңызды болатын кейбір қаситеттерін сақтап, оның орнын басатын материалды немесе ойда елестететін объектіні *модель* деп атаймыз. Объектіні модель арқылы көрсетіп, осы модельде тәжірибелерді орындау жолымен объект туралы ақпаратты алуды модельдеу деп түсінуге болады.

Сыртқы және ішкі факторлар әсер ететін жүйені бақылап, оның белгілі немесе белгісіз бүр күйіне жеткенін анықтау модельдеу принципі болып табылады. Осы күйге жету процесінде жүйе қалай жұмыс жасайтынын модельдеу барысында бақылауға болады. Күрделі жүйенің жұмыс жасау сапасын, тиімді құрылымын және жүріс-тұрысының алгоритмін анықтау, қойылған талаптарға сай жүйені құру заманауи күрделі жүйелерді жобалаудың маңызды есебі болып табылады.

Күйі мен жүріс-тұрысы кейбір физикалық шамалармен сипатталатын құрылғыны немесе процесті автоматты басқару теориясында объект деп атайды. Осы физикалық шамаларды тура немесе жанама әдістермен өлшеу мүмкін болуы керек. Жалпы жағдайда объект кейбір өлшенбейтін физикалық шамалармен де сипатталуы мүмкін. Осы шамалар белгілі бір деңгейде тұрақтануы, не берілген программа бойынша өзгеріп отыруы тиіс. Әдетте технологиялық процестің бірқалыпты жүруі белгілі бір қызмет алгоритмінің орындалуына байланысты болады. Осы қызмет алгоритмін орындау үшін сыртқы бұйрықтарды орындайтын қондырғыны (машинаны, процесті) басқару объектісі дейді. Басқару объектісі сыртқы әсерлерді қабылдап, сыртқы шамаларының мәндерін өзгерту жолымен оларға өзінің реакциясын көрсетеді. Объект реакциясын уақытқа және кірістегі әсерлерге тәуелді функциясы ретінде көрсету басқару объектіні бейнелеу болып табылады. Әдетте технологиялық объектілердің бірнеше кіріс және бірнеше шығыс шамалары болады; есептің қойылуына қарай олар басқарылатын, басқару және қобалжытқыш әсерлер болып табылады.

Алдын-ала орнатылған талаптар мен шектеулер орындалуымен бірге объектінің күйінің мақсаттылықты өзгеруін қамтамасыздандыратын бұйрықтарды іске асыру техникалық объектіні басқару болып табылады.

Жүйенің элементтерімен орындалатын функциялары бойынша кез келген басқару жүйесі жалпы түрде екі негізгі элементтен тұрады: басқарылатын объект (онда басқарылатын процесс өтіп жатады) және техникалық құралы – контроллер (процесті басқару функцияларын орындайды). Осындай жүйенің қарапайым құрылымдық сұлбасы 1.1 суретте келтірілген. Бұндағы *К* контроллері басқару мақсаты туралы ақпаратты *t* уақыты бойынша өзгеретін *x(t)* сигналы түрінде қабылдап, басқару объектіге әсер ететін *m(t)* басқару сигналын тудырады; бұл сигнал басқарылатын *y(t)* шамасын *x(t)* сигналдың өзгеруіне сәйкес өзгертеді, яғни басқару мақсатына *y(t)=x(t)* жеткізеді. Сұлбада *l(t)* – қобалжыту әсерлер, олардың саны кез келген болуы мүмкін (соның ішінде басқарылмайтын әсерлер де).



1.1 сурет – Басқару жүйесінің құрылымдық сұлбасы

Осындай басқару жүйесі нақты жұмыс істеуі үшін объектінің шығуындағы *y(t)* сигналдың өзгеруімен оның себебі болған *m(t)* сигналдың өзгеруі арасында бірмағыналы сәйкестік болуы керек. Осындай сәйкестік объектінің *математикалық моделінде* орнатылады. Бұл модель алдын ала белгілі деп есептеледі және контроллер жұмысының алгоритмін (басқару алгоритмін) анықтауға қолданылады. Басқару жүйесінің осындай құрылымының жұмыс істеуі үшін объектінің математикалық бейнелеуі уақыттың кез келген моментінде жеткілікті жоғарғы дәлдікпен анықталған болуы керек. Басқа сөзбен айтқанда объектінің кірістері мен шығуындағы шамалар арасындағы статикалық және динамикалық байланыстарын сипаттайтын осы объектінің теңдеулер түрінде көрсетілген негізгі заңдылықтарын білу керек.

Басқару жүйелерін жобалау процесінің ерекшелігі оның технологиялық қондырғыларды әзірлеу және өндіру уақытымен бірге өтетіні. Сондықтан әлі жасалмаған техникалық жүйенің қасиеттері туралы ақпаратты алу үшін жалғыз жол бар - осы жүйенің қасиетті процестерін *аналитикалық* бейнелеуді қолдану. Зерттелетін объектінің белгілі ерекшеліктеріне физиканың (кей кезде химияның да) теориялық заңдылықтар жиындарын қолдану аналитикалық әдістерінің негізі болып табылады. Басқа сөзбен айтқанда модельдеудің аналитикалық әдістері басқару объектісінде өтетін барлық процестердің құрылымдары мен физика-химия ерекшеліктерін есепке алады.

Көптеген жағдайларда жобалау қадамында қабылданған модель нақты объектіден айтарлықтай өзгеше болады, осы себептен жасалған басқару жүйесінің тиімділігі төмендейді. Осыған байланысты басқару теориясында

тағы бір бағыт пайда болды: объектінің жұмыс істеп тұрған кезінде оның кірістегі және шығыстағы айнымалыларын бақылау негізіндегі ақпаратты қолданып модельдерді құрастыру. Бұл бағыт жүйелерді *идентификациялау* деп аталады.

Модельдің біреуі де объектіні толық сипаттамайды. Әр модель шектелген және модельдеу мақсаттарына сәйкес болады. Модель нақты бастапқы объектінің белгілі зерттеуге қажетті қасиеттерін керекті көлемде көрсетеді. Сонымен бірге алынған модель нақты объектідегі заңдылықтарын шешілетін басқару есептің талаптарына сәйкес қажетті дәлдікпен көрсетуі керек. Осыған басқарудың сапасы тәуелді.

1 Басқару объектілерінің қасиеттерін математикалық модельдермен бейнелеу

1.1 Жалпы мәліметтер

Технологияны басқаруды автоматтандыру үшін басқару объектілерінің қасиеттерін, олардың статикалық, динамикалық сипаттамаларын және берілген режимнен қобалжытатын әсерлерді білу керек. Басқару объектісінің қасиеттерінің бейнелеуін модельдеу әдістерімен өткізу ең ыңғайлы амал болып табылады. Берілген объектінің барлық немесе кейбір қасиеттерімен сәйкес келетін қасиеттері бар кез келген объектіні берілген объектінің *моделі* деп атаймыз. Басқа сөзбен айтқанда зерттелетін процестің орнына оның қажетті бағытта шектелген бөлек сипаттамаларын бейнелейтін қарапайымдалған жүйені қолданамыз.

Модельдерді жағдайға байланысты екі топқа бөлуге болады: *материалды* және *идеалды*; сондықтан *заттық* және *абстрактты* модельдеуді қарастыруға болады.

Заттық (материалды) модельдеудің негізгі түрлері *физикалық* және *аналогты* модельдеу болып табылады.

Егерде зерттеулер оқылатын оқиғалар мен процестердің маңызды физикалық табиғатын сақтайтын модельдерде (стендтерде, қондырғыларда, макеттерде) өткізілсе, модельдеуді *физикалық* деп атайды. Физикалық модельдерде зерттелетін процестің қасиеттері толығымен іске асырылады. Физикалық модельдерді жасаудың негізі ұқсастық және өлшемдік теориясы болып табылады, сондықтан модельде қажетті қасиеттер сақталынды деп айтуға болады. Физикалық модельді жасағанда келесіні есепке алу керек: нақты жүйеге қарағанда талдаудың қуатты әдістерін қолдануға мүмкіндік беретіндей модельмен жұмыс істеу қарапайым және қауіпсіз болуы керек.

Зерттелетін процестің параметрлері өзгерсе немесе объекттің жаңа нұсқасы қарастырылса, жаңа физикалық модельді құрастыруға мәжбүр боламыз. Осы жағдай физикалық модельдеудің негізгі кемшілігі болып табылады, себебі материалды ресурстары мен жұмыстың көп көлемін қажет етеді және күрделі объектілердің модельдерінің бағасы өте жоғары болады.

Осындай модельдер универсалды бола алмайды. Сонымен физикалық модельдеуді қолданудың аймағы шектелген және де күрделі жүйелерді зерттеудің негізгі әдісі математикалық модельдеу болып табылады.

Аналогты модельдеу бастапқы объектіні басқа физикалық табиғаты бар, бірақ жүріс-тұрысы бастапқы объектпен бірдей болатын объектімен алмастыруға негізделген. Мысалы, тербелістер мен резонансты зерттегенде механикалық жүйелер заңдылықтарын, сонымен бірге электр тізбектерін қолдануға болады. Аналогты модельдеуде орынбасу объектіде керекті ерекшеліктерін көріп, оларды дұрыс түсіну өте маңызды. Аналогияның ең жоғарғы дәрежесі болып тек қарапайым объектілерге ғана орны бар толық аналогия табылады. Объектінің күрделігіне қарай келесі дәрежелі аналогияларды пайдаланады, бұл кезде аналогты модель объектінің жұмысының бірнеше немесе тек бір жағын көрсетеді. Әдетте аналогиялық жүріс-тұрысы бар объектілерге бір модельді пайдалана беруге болады. Кезінде аналогты есептеу машиналары кең қолданылған. Олардың көмегімен модельдеу өткізу электр құбылыстарының басқа физикалық табиғаты бар құбылыстармен ұқсас болуында негізделген. Мысалы, электр тізбектегі тербелістер ракетаның бұрыш тербелістеріне ұқсас, ал электр тізбекпен тәжірибелерді өткізу арзан және қауіпсіз (ұшып бара жатқан ракетаға қарағанда). Аналогты машиналарда жаңадан өңделетін электр тербелістерді арнайы аспаптармен – осцилографтармен бақылап, модельдің жүріс-тұрысын «көруге» болады.

Физикалық және аналогты модельдеу зерттеудің негізгі әдісі ретінде модельмен тәжірибе жасауды талап етеді, бірақ бұл тәжірибе бастапқы объектідегі тәжірибеден тартымды болады.

Модель ретінде белгілерді немесе символдарды: сұлбалар, графиктер, сызбалар, әртүрлі тілдердегі мәтіндер, сонымен бірге формалды, математикалық формулалар және теорияларды қолданатын модельдеу *таңбалы (идеалды)* модельдеу деп аталады. Таңбалы модельдеуге міндетті түрде қатынасатын интерпретаторы болуы керек (әдетте адам болады). Сызбалар, мәтіндер, формулалардың өз бетінше ешқандай мағынасы жоқ, оларды түсінетін және күнделікті қызметінде қолданатын біреу болуы керек.

Таңбалы модельдеудің маңызды түрі *математикалық* модельдеу болып табылады. Объектілердің физикалық табиғатынан дерексіздендіріп, математика идеалды объектілерді оқиды. Математикалық модельдеу табиғат заңдарының саны шектеулігінде және ұқсастық принциптерінде негізделген. Яғни басқа сөзбен айтқанда әртүрлі физикалық табиғаты бар құбылыстар бірдей математикалық тәуелділіктермен бейнеленулері мүмкін. Мысалы, дифференциалдық теория көмегімен аталып кеткен электр немесе механикалық тербелістерді жалпы түрде оқуға, сонан соң алынған білімдерді белгілі физикалық табиғаты бар объектіні зерттеуге қолдануға болады.

Математикалық өрнектермен немесе алгоритмдермен формалданған жүйе бейнеленуі *математикалық модельдеу* деп аталады. Кез келген

физикалық шамалардан тұратын математикалық өрнекті процестің математикалық моделі ретінде қарастыруға болады. Физикалық модельдеуге қарағанда математикалық модельдеу оригиналдың тек қана математикалық бейнелеуі бар және математикалық өрнектермен байланысқан параметрлерін зерттеуге мүмкіндік береді. Сонымен бірге зерттелетін процестің физикасы сақталмайды, математикалық модельдер табиғаты жағынан әртүрлі құбылыстарды бірдей теңдеулермен бейнелеп, объектінің жүріс-тұрысын толық бейнелемей, оның бөлек функционалды байланыстарын табуға мүмкіндік береді.

Математикалық модельдердің ерекшеліктері:

а) оптималды технологиялық режимді іздеу немесе уақыт пен материалды ресурстардың минималды шығындарында максималды ақиқат болжауды табу мақсатымен бірсыпыра тәжірибелерді математикалық модельде тез өткізуге болады;

б) оптималды режимдерін тексеру үшін нақтылықта орнатуға мүмкін емес қолдану шарттарын модельде орнату мүмкіндіктері;

в) құрастырылған әдістемелер бойынша технологиялық процесті өткізудің оптималды шарттарын математикалық модель арқылы тез табуға болады.

Сонымен, зерттелетін объектінің кірудегі және шығудағы айнымалылары арасындағы статикалық және динамикалық байланыстарын сипаттайтын, және теңдеулер түрінде көрсетілген оның негізгі заңдылықтары объектінің математикалық моделі болып табылады. Белгілі мағынада модель объектінің қасиеттерін көрсетеді (іске асырады, имитациялайды, бейнелейді), осыдан модельдеудің мүмкіндіктері, яғни модельді құрастыру мен зерттеу барысында алынған нәтижелерді оригиналға көшіру мүмкіндіктері негізделген.

Математикалық модельдеудің маңызды түрі – компьютерлік модельдеу. Әртүрлі қызмет бағдарламалары қосылып (мысалы, уақыт бойынша сурет немесе графиктерді салатын), математикалық модельдің бағдарламалық іске асырылуы *компьютерлік модель* деп аталады. Компьютерлік модельдің екі – бағдарламалық және аппаратттық құрамы болады. Бағдарламалық құрамы сонымен қатар абстрактылы таңбалық модель болып табылады. Бұл тек математиктер мен программисттермен ғана емес, сонымен қатар техникалық құрылғы – процессормен де интерпретацияланатын, абстрактылы модельдің басқа формасы. Физикалық құрылғымен - компьютермен қабылданып, онымен интерпретацияланса, компьютерлік модель физикалық модельдің қасиеттерін білдіреді.

Компьютерлік модель физикалық құрылғы ретінде сынақ стендтер, тренажерлар, виртуалды зертханалар құрамына кіруі мүмкін. Бұл модельдің арнайы түрі, өзінде абстрактты және физикалық қасиеттерін қабылдайтын, көп деген пайдалы мүмкіндіктері бар. Солардың ішіндегі бастысы – модельді жасау және өзгерту өте қарапайым процесс болып табылады. Сонымен бірге алынатын нәтижелерінің дәлдіктері өте жоғары және модельдердің

функционалды күрделі болатынын атап кету керек. Сондықтан, қазірде модельдеу деп әдетте компьютерлік модельдеуді атайды.

1.2 Математикалық модельдерді классификациялау

Қолданудың әртүрлі аспектілерін қанағаттандыратын жалпы универсалды модельді жасау мүмкін емес. Уақыт және кеңістіктік белгілері бойынша басқару объектілерінің барлық түрлерін келесі кластарға бөлуге болады:

- *детерминді және стохастикалық* (ықтималдық) *объектілер*; егерде объектінің кірістегі және шығыстағы айнымалылары арасында бірмағыналы сәйкестік болса, ол детерминді объект болып табылады. Басқа сөзбен айтқанда, бірдей бақыланатын шарттарда детерминді объект кірісіне бірнеше рет бірдей әсер берілсе, оның шығысында әрқашанда шығудағы айнымалының бірдей өзгеруі орнатылады. Кірісіне тұрақты сигнал берілген кезде детерминді жүйенің шығысында пайда болатын сигналды алдын ала болжауға болады. Ықтималдық объектіде бірдей бақыланатын шарттарда кірісіне бірнеше рет бірдей әсер берілсе, оның шығысында шығудағы айнымалының әртүрлі өзгерулері (әртүрлі іске асырулары) орнатылуы мүмкін. Осындай объектілерде шығудағы айнымалының әр іске асыруы ықтималдық заңдылықтарға тәуелді. Стохастикалық объектілердің осындай анықталмаған жүріс-тұрысының физикалық себебі келесіде: нақты жағдайда объектіде бақыланатын кіріс айнымалылармен бірге оларға объект реакциясын бұрмалап көрсететін бақыланбайтын әсерлер мен бөгеттер әсер етеді. Тәжірибелердің бірдей шарттарында кездейсоқ процесс бақыланса шығудағы шаманың алдын ала болжанбайтын кездейсоқ сигналдарын аламыз. Кездейсоқ процесс үшін уақыттың әр моменттерінде тек қана шығудағы айнымалының мәндер ықтималдығының таралу заңдары анықталынады;

- *стационарлы және стационарлы емес объектілер*; егерде кірістегі әсерлерді түрлендіру заңдылығы уақытқа тәуелді болмаса, объект стационарлы болып табылады, кері жағдайда объект – стационарлы емес.

Стационарлы жүйелердің қасиеттері жүйенің жүріс-тұрысын қарастыру уақытына тәуелді емес. Кірістегі әсерді оның формасын өзгертпей уақыт бойынша ығыстырса, шығудағы айнымалы да формасын өзгертпей уақыт бойынша сондай шамаға ығысатыны стационарлы жүйелердің сипатты белгісі болып табылады.

Стационарлы емес жүйелердің қасиеттері жүйе күйін қарастыру уақытына тәуелді. Стационарлы емес жүйеде кірістегі әсерді оның формасын өзгертпей уақыт бойынша ығыстырса, шығудағы айнымалы уақыт бойынша сондай шамаға ығысуымен бірге формасын да өзгертеді;

- *статикалық және динамикалық объектілер*; егер де кез келген уақыт моментінде объектінің шығу айнымалыларының мәндері тек қана сол уақыт моментіндегі кіру айнымалыларының мәндерімен анықталатын болса, онда объект статикалық болып табылады. Әрбір уақыт моментінде объектінің шығу

айнымалыларының мәндері ағынды уақыт моментіндегі кіру айнымалыларының мәндерімен бірге анықталатын болса, онда объект динамикалық деп аталады;

- сызықты және сызықты емес объектілер; *суперпозиция принципіне* бағынатын объект сызықты деп аталады. Осы принцип бойынша, егер де x_1 кіріс сигналына сәйкес шығудағы сигнал y_1 болса, ал x_2 кіріске сәйкес шығудағы сигнал y_2 болса, онда объектіге $\alpha x_1 + \beta x_2$ сигнал берілген кезде объект шыңғысында $\alpha y_1 + \beta y_2$ пайда болады. Суперпозиция принципі бастапқы шарттарға қатынасты (жалпы шешім) және кірістегі сигналдар бойынша да (жеке шешім) орындалады. Сызықты емес объектілер үшін суперпозиция принципі орындалмайды.

Сонымен бірге сызықты объектіде масштабтау факторыда орындалуы керек. Объектінің кірісі x айнымалысы, ал шығысы — y айнымалысы болсын. Онда, кірудегі айнымалыны β константасына көбейткенде, объект реакциясы (шығудағы айнымалы) осы санға есе өзгеруі, яғни βy болуы керек. Осы қасиет *гомогендік* қасиет деп аталады. Басқа сөзбен айтқанда формасын өзгертпей кірістегі әсерді күшейтсе, шығудағы айнымалы да өзінің формасын өзгертпей сондай шамаға күшейеді.

Сызықты объектіде суперпозиция және гомогендік қасиеттер орындалуы керек;

- кеңістік координаталары бойынша айнымалылары өзгеретін және өзгермейтін объектілер. Кейбір күй координаталары (технологиялық параметрлері) геометриялық кеңістік бойынша өзгеретін объектілер болады. Егер де объектінің негізгі айнымалылары уақыт бойынша, сонымен бірге кеңістік бойынша да (немесе тек қана кеңістік бойынша) өзгеретін болса, онда объект *таратылған параметрлері* бар объект деп аталады. Егер де объектінің күй координаталар мәндерінің кеңістік бойынша біркелкі еместігін есепке алмауға болса, объект – *жинақталған параметрлері бар* объект болады. Олар үшін масса мен энергия бір нүктеде жинақталған сияқты. Осындай объектінің мысалы ретінде араластырғышпен араластырып тұрған, қыздырылатын сұйықтығы бар резервуарды алуға болады. Кейбір объектілерде табиғи араластырудың өзінде соңғы шарттың жуықтап орындалуына жетуге болады.

Математикалық модельдер сәйкес объектілердің сипаттамаларын көрсетеді, сондықтан оларды да айтылғандай кластарға бөлуге болады.

Детерминді, яғни кез келген кездейсоқ әсерлері жоқ деп есептелетін процестерді бейнелейтін модельдер *детерминді* модельдер деп аталады.

Стохастикалық (ықтималдық) модельдер ықтималдық процестер мен оқиғаларды бейнелейді, яғни модель айнымалылары уақыт бойынша өзгеретін кездейсоқ процестер болып табылады. Бұл процестер стационарлы немесе стационарлы емес болуы мүмкін. Соңғы жағдайда процестің ықтималдық сипаттамалары уақыт функциялары болады.

Стационарлы және стационарлы емес модельдер. Егер де модель операторының түрі және оның параметрлері уақыт бойынша өзгермесе,

модель стационарлы болып табылады. Егер де модель параметрлері уақыт бойынша өзгеретін болса, онда модельді параметрлік стационарлы емес деп атайды. Уақыттан модель операторының түрі де тәуелді болуы мүмкін. Бұл жағдай стационарлы еместіктің ең жалпы түрі болады. Стационарлы жүйелер, сонымен бірге стационарлы емес жүйелер де сызықты немесе сызықты емес болуы мүмкін.

Стационарлы объектілер тұрақты коэффициенттері бар дифференциалдық теңдеулермен бейнеленеді. Стационарлы емес модельдердің дифференциалдық теңдеулерінің коэффициенттері уақытқа тәуелді функциялар болады.

Статикалық және динамикалық модельдер. Модель түрлерін осылай бөлгеннің негізінде зерттелетін объектінің материалды жүйе ретінде қозғалысының ерекшеліктері жатады. Басқару есептер көзқарасы жағынан модельдер туралы әңгімелесек, мынаны ескерткен жөн: геометриялық түсінікте және механикалық жүйелерге қатысты кеңістік түсінігі технологиялық процестердің кең кластарына тарлық етеді. Сонымен қатар көптеген басқару объектілерінде элементтердің өзара орын ауыстыруы емес, олардың ішкі күйінің өзгерісі сипатталады. Сондықтан кеңістік деп геометриялық кеңістікті емес, объект мен оның моделінің күй кеңістігін түсінеміз. Бұл кезде объект күйін немесе осы күйді модель арқылы болжауын шығудағы айнымалылар болатын y күй координаталарымен бағалаймыз. y векторының элементтері ретінде әдетте бақыланатын технологиялық параметрлер (шығын, қысым, температура, ылғалдық, тұтқырлық, ж.б.) болады. Модельге қарағанда y векторының элементтерінің құрамы объектінің өзі үшін толығырақ болуы мүмкін, себебі модельдеу кезде нақты объектінің қасиеттерінің тек қана бір бөлігін қарастырамыз. Сондықтан y векторы жалпы айтқанда, оны модельге қатысты деп есептеп және сол бойынша объектінің жүрісінің болжамына баға береміз. Сөйтіп, күй кеңістігінде және уақыт бойынша басқару объектінің қозғалысы $y(t)$ векторлық процесс көмегімен бағаланады.

Егер де жүйе күйі өзгермесе, яғни жүйеде тепе-теңдік орындалса, жүйе моделі *статикалық* деп аталады, бірақ қозғалыс тепе-теңдіктегі объектінің статикалық күйімен байланысқан. Статикалық модельдердің математикалық бейнелеуіне айнымалы ретінде уақыт кірмейді, бұл бейнелеу алгебралық теңдеулерден немесе дифференциалдық теңдеулерден (объект таратылған параметрлері бар объект болса) тұрады. Статикалық модельдер әдетте сызықты емес болады. Олар объектінің бір режимінен басқа режимге көшу себебінен пайда болатын тепе-теңдік жағдайын тура бейнелейді.

Динамикалық модель объектінің күйінің уақыт бойынша өзгеруін бейнелейді. Осындай модельдердің математикалық бейнелеуіне міндетті түрде уақыт бойынша туынды кіреді. Динамикалық модельдер дифференциалды теңдеулерді қолданады. Бұл теңдеулердің дәл шешімдері

дифференциалдық теңдеулердің тек қана бірсыпыра кластарына белгілі. Көбінесе жуықты болатын сандық әдістерді қолдану керек болады.

Басқару мақсаттары көзқарасы жағынан көбінесе динамикалық модельді кірудегі және шығудағы айнымалыларын байланыстыратын беріліс функция ретінде көрсетеді.

Сызықты және сызықты емес модельдер. Модель сызықтығының келесі анықтамасын қолданамыз: егер де модель операторының өрнегінде сызықты емес операциялар болса, модель *сызықты емес* болады, кері жағдайда – *сызықты*.

Сызықты модельдер сызықты дифференциалды теңдеулермен бейнеленеді. Осындай теңдеулерге жалпы және де қарапайым әдістер өңделген. Сонымен бірге осындай модельдердің келесі екі қасиетінің маңыздылығы бар:

- әдетте нақты объектілердің кірудегі әсерлерін сәйкесінше таңдалынған бір түрдегі элементарлы типтік әсерлерінің қосындысы ретінде көрсетуге болады. Сондықтан сызықты объектінің кез келген кірудегі әсерге реакциясын есептеу үшін тек қана аталған типтік әсерге объект реакциясын білу жеткілікті. Басқа сөзбен айтқанда еркін кірудегі әсері бар сызықты объектінің жүріс-тұрысын дифференциалдық теңдеумен бірге, оның типтік әсерге реакциясымен де (*динамикалық сипаттама* деп аталатын) бейнелеуге болады. Объектілерді динамикалық сипаттамалар аппаратымен математикалық бейнелеудің артықшылықтары бар: күрделі объектілердің математикалық модельдерін құрастырғанда дифференциалдық теңдеулерді шығару өте қиын есеп; ал жұмыс істеп тұрған объектіде қарапайым тәжірибелерді орындап динамикалық сипаттамаларын алуға болады;

- кездейсоқ бақыланбайтын әсерлері бар сызықты ықтималдық объектіде шығудағы айнымалыға осы әсерлердің ықпалын шығудағы айнымалының детерминді бөлігіне қосылатын аддитивті кездейсоқ бөгет ретінде есепке алуға болады. Сонда объект жүріс-тұрысының бейнелеуін сызықты дифференциалдық теңдеулер аппаратын (немесе оған сәйкес динамикалық сипаттамалар аппаратын) қолданып алуға болады. Әрине, бұл жағдайда кездейсоқ бөгеттің ықтималдық сипаттамалары туралы қосымша ақпарат болу керек.

Егер де бөгетті бақылаудың мүмкіндігі болса, оның өзгеруінің осцилограммасын алу үшін нөлдік кіру әсерде объект шығысын тіркеу қажет.

Кері жағдайда кездейсоқ бөгет нормалды ықтималдық заңдылығымен таралған деп есептеледі. Нормалды таралудың теориялық негіздемесі ықтималдық теориясындағы *орта шекті теорема* болып табылады. Осы теоремаға сәйкес зерттелетін кездейсоқ шаманы тәуелсіз кездейсоқ әсерлердің көп санының қосындысы ретінде қарастырудың мүмкіндігі бар, ал әр әсердің ықпалы өте кіші шама болсын. Онда құрамдасушылардың таралу заңдылықтары еркін болған кезде де, зерттелетін кездейсоқ шама нормалды заңдылықпен таралуын күтіге болады. Тек қана жалпы қосындыда

құрамдасушылардың барлығының үлесі кіші болуға тиісті. Әрине, таралу заңы белгісіз кез келген кездейсоқ шама қалыпты заңдылықпен таралады деген емес. Қалыпты заң таралу заңдардың бір түрі, табиғатта кездесетін көп деген оқиғаларды жақсы сипаттайды, сондықтан практикада кең қолданылады. Тағы бір ерекшелігі ыңғайлы математикалық қасиеттерінің бар болғаны. Сондықтан, көп жағдайларда зерттелетін шама қалыпты заңдылыққа бағынады деп есептеледі, бірақ практикада бұл ұсынысты арнайы тексеру керек.

Көбінесе объект жүріс-тұрысын сызықты теңдеумен бейнелеу мүмкін болмайды. Осындай жағдайда аргументтердің берілген диапазонында сызықты емес байланыстарды сызықты өрнектермен аппроксимациялауы орындалады. Шығудағы айнымалының кірудегі айнымалыдан нақты функционалдық тәуелділігін жуықтаған сызықты тәуелдікпен орын басы *сызықтандыру* деп аталады. Сызықтандыру әдетте сызықты емес теңдеулерді бастапқы стационарлы режим аймағында Тейлор қатарына жіктеу жолымен орындалады. Жіктеудің тек қана сызықты мүшелерін қалдырып, соңынан теңдеулерден статика теңдеулерін алып тастаймыз. Осы процедура көмегімен алынған модель теңдеулері айнымалылар арқылы емес, олардың ауытқулары арқылы жазылған теңдеулер болып табылады. Объектінің алынған моделі бастапқы стационарлы режимнен кіші ауытқуларда орындалады.

Жинақталған және таратылған параметрлері бар модельдер. Егер де объектінің негізгі айнымалыларының кеңістік бойынша өзгеруін есепке алмауға болса, онда өзгеретін болса, онда модель – *жинақталған параметрлері бар* модель болып табылады. Егер де объектінің негізгі айнымалылары уақыт бойынша, сонымен бірге кеңістік бойынша да (немесе тек қана кеңістік бойынша) өзгеретін болса, онда осындай объектілерді бейнелейтін модельдер *таратылған параметрлері* бар модельдер деп аталады. Олардың математикалық бейнелеуі әдетте дербес туындылары бар дифференциалдық теңдеулерден немесе жалғыз кеңістік координатасы бар стационарлық процестер үшін қарапайым дифференциалдық теңдеулерден тұрады.

Келесіні ескерту жөн, модель атауында «параметрлер» сөздің орнына «күй координатасы» түсініктемесін қолдану дұрыс болар еді. Бірақ бұл технологиялық процестерді модельдеу тақырыбы бойынша жұмыстардың бәрінде кездесетін қалыптасқан атау.

Кеңістіктің өлшемі міндетті түрде үшке тең болмауы мүмкін. Мысалы, жылытылатын жұмыс ортасы бар және жұқа бүйірлі сырты бар құбырдың моделінде әдетте объектінің тек қана құбыр ұзындығы есептелінеді (бір өлшемді модель). Сонымен бірге, қалың бүйір арқылы жұмыс ортаның шектелген көлемге жылы тасымалдау процесі де тек қана бүйір жуандығын есепке алатын бір өлшемді модельмен бейнелене алады, т.б. Белгілі объектілер үшін сәйкес теңдеулердің түрі негізделуі керек.

Уақыт бойынша үздіксіз және дискретті модельдер. Уақыт үздіксіз аргумент ретінде қарастырылатын объект күйін бейнелейтін модельдер уақыт бойынша *үздіксіз* модель болып табылады. Кез келген уақыт моментінде өзгерудің берілген диапазонында үздіксіз моделдің айнымалылары еркін мәндерді қабылдай алады.

Дискретті болатын процестер *дискретті* модельдермен бейнеленеді. Осындай модельдерде айнымалылар деңгей немесе уақыт бойынша квантталады. Уақыттың еркін моменттерінде айнымалылардың дискретті денгейлерін белгілеу денгей бойынша кванттау болады; модель айнымалыларының денгейлері еркін мәндерді қабылдайтын уақыттың дискретті мәндерін белгілеу уақыт бойынша кванттау болып табылады. Динамикалық басқару объектілері үшін уақыт бойынша кванта жиі қолданылады.

Егер де үздіксіз процестермен бірге объектіде дискретті процестер бар екендігін көрсету керек болса, *дискретті-үздіксіз* модельдер қолданылады. Модельдің толық атауы аталған белгілердің жиынын қолдануы мүмкін. Мысалы, классикалық автоматты реттеу теориясы негізінде жинақталған параметрлері бар сызықты стационарлы динамикалық модельдермен айналысады.

1.3 Басқару объектілердің модельдерін құрудың екі амалы

Жалпы кезде модельдеу процесі келесі қадамдардан тұрады:

1) Модельденетін объектіні бейнелеу. Бұл қадамда модельденетін жүйе мен оның компоненттері анықталады.

2) Модельді таңдау. Бұл қадамда математикалық модельдің теңдеулері құрастырылады және қажетті шарттар орнатылады.

3) Модельді зерттеу. Модель теңдеулері керекті шығудағы айнымалылары арқылы шешіледі. Шешу нәтижелері талданылады.

4) Нәтижелерді талдау. Математикалық модельде алынған мәндерді нақты зерттелу объектіне көшіру сұрақтары осы қадамда қарастырылады. Осындай көшірудің мүмкіншілігі модельдеу процесінде орнатылған модельмен оригиналдың элементтерімен қатынастарының сәйкес болғанына негізделген.

Қажетті болса жүйені талқылау және синтездеу процестері қайталанады. Математикалық модельдеуде компьютерлерді қолдану кез келген жағдайларда, параметрлер және сыртқы факторлардың мәндерінің өзгеруінде, сонымен бірге нақты тәжірибелерде жасалынбайтын шарттарда зерттеулерді өткізуге мүмкіндік береді.

Басқару жүйенің өмірлік циклы келесі негізгі периодтардан тұрады: жобалау, пайдалану және модернизациялау. Технологиялық агрегатты жобалауы бір уақытта оны өңдеу мен жасау процестерімен бірдей өтеді, бұл жағдай басқару жүйелерді *жобалау* процесінің *ерекше өзгешелігі* болып табылады. Сонда әлі жасалынбаған техникалық құрылғының қасиеттері

туралы ақпаратты алудың жалғыз жолы бар осындай жүйелердің элементтерін сипаттайтын процестерді аналитикалық бейнелеу. Зерттелетін объектінің белгілі ерекшеліктеріне физиканың (кей кезде химияның да) теориялық заңдылықтар жиындарын қолдану аналитикалық әдістердің негізі болып табылады. Сондықтан аналитикалық модельдерде априорлық қасиеттері бар деп есептеуге болады.

Басқару жүйелерді *қолдану* процесі объектінің математикалық модельдеріне өзінің шарттарын қояды. Олар өзінің міндетіне қарай келесідей ағынды (оперативті) ақпаратты алуға негізделген:

- өлшеу аспаптарымен бақыланбайтын технологиялық процестің координаталары туралы;
- әртүрлі режимді факторлар себебінен уақыт бойынша өзгеретін технологиялық процестің кейбір бөлімдерінің қасиеттері туралы.

Модельдердің бөлінген кластарының екеуі де агрегаттарды қолдануға қажетті дәлдігімен жүйе реакциясын болжауын қамтамасыздандыруы керек. Бірінші жағдайда модельдерге өлшегіш құралдарға қойылатын метрологиялық талаптарды қоюға болады. Қолдану процесінде екінші кластың моделін алуға ақпарат көзі болып технологиялық процестің өзі және агрегаттарда орнатылған күй координаттарының датчиктері жатады.

Сонымен, математикалық модельдерді құрудың екі принципиалды амалы бар.

Бірінші амал зерттелетін процестің жүріс-тұрысын анықтайтын физика-химия заңдылықтарын модельді таңдағанда есепке алуға негізделген. Осындай модельдер *аналитикалық* модельдер деп аталады. Басқа сөзбен айтқанда модель теңдеулерін алу үшін зат пен энергияны сақтау фундаменталды заңдылықтарда қолданылады, объектіде өтетін физикалық және химиялық процестерді теориялық анализдеп теңдеулер шығарылады. Объектіде өтетін физика-химия процестері жақсы оқылса, сипаттамалары бойынша зерттелетін объектімен сәйкес келетін математикалық модельді құрастырудың аналитикалық амалын қолдануға болады. Осындай объектілердің мысалы ретінде статика мен динамикада Ньютон заңдарына бағынатын механикалық жүйелерді, кейбір қарапайым химиялық реакциялар өтетін химиялық реакторларды, т.б атауға болады.

Басқару объект теңдеулерін құрудың жалпы әдістемесі келесіде. Объектінің кейбір тепе-теңдік орнықталған күйінің материалды және энергиялық баланс теңдеулері құрастырылады. Содан кейін орнықталмаған күй теңдеулерін құрастыру қажет, бұл теңдеулер кірістегі шаманың өзгеруі (жылу немесе материалды орта ағынының, жылдамдылықтың өзгерулері, т.с.) мен шығудағы шаманың (реттелетін параметрдің) арасындағы байланысты орнатады. Кірудегі шаманың өзгеруі әдетте реттеу әсер немесе сыртқы қобалжытқыш әсер себебінен пайда болады және объектінің материалдық, энергиялық балансын бұзады. Соңғы теңдеулерден орнықталған күйдің теңдеулерін алып тастап, объект динамикасының теңдеулерін аламыз. Бір

объект үшін аналитикалық жолмен құрастырылған теңдеулер осындай бір типті объектілердің қасиеттерін бейнелеуге қолдануға болатыны осы амалдың артықшылығы болып табылады. Теңдеулерді шешу және талқылаудың қиындықтары, математикалық бейнелеудің сандық мәндерін алу жұмыстың көп көлемін талап ететіндігі аналитикалық амалдың кемшілігі болып табылады.

Екінші амал «қара жәшік» концепциясына негізделген, яғни объектінің ішкі құрамы белгісіз, одан да зор, зерттеушіге керек те емес деп есептелінеді. Барлық ақпарат объектіні бақылаудан пассивті және активті тәжірибелер жолымен алынады. Зерттелетін объектіге шығудағы шаманы өзгертетін арнайы сыртқы әсерлер берілсе, тәжірибелер активті болып табылады. Осы өзгерулер тіркеліп, алынған мәліметтер математикалық өрнектермен жуықталады. Арнайы сыртқы әсерлерсіз объектінің кәдімгідей жұмыс барысында алынған ақпарат қолданылса, тәжірибелер пассивті деп аталады. Осындай ақпарат статистикалық әдістермен өңделеді. Осындай жолмен алынған модельдер *эмпирикалық* (тәжірибелік) деп аталады. Математикалық бейнелеудің қарапайымдылығы және координаттар өзгеру диапазонының кіші аралығында объект қасиеттері дәл бейнеленуі тәжірибелік модельдердің артықшылығы болып табылады. Теңдеуге кіретін сандық параметрлері мен объектінің конструктивтік сипаттамалары арасындағы, зерттелетін процестің режимді көрсеткіштері мен физика-химиялық заңдылықтары арасындағы функционалдық байланысты анықтауға болмайтыны эмпирикалық модельдердің негізгі кемшіліктері. Сонымен бірге, осындай модельдерді басқа біртектес объектілерге қолдануға болмайды.

Аналитикалық әдістер эмпирикалық әдістерге қарағанда жалпы және олардың көмегімен алынған нәтижелер фундаменталды болып табылады. Олар эмпирикалық әдістерге қарағанда күрделі және қиындықтар аналитикалық модельді құрастыру кезінен басталады. Егер де объектіні тәжірибелік әдістер көмегімен бейнелеу үшін статистика мен автоматты басқару теориясының білімдері жеткілікті болса, аналитикалық модельдерді құру үшін түрлі-түрлі математикалық аппарат және физика, химия, гидродинамика, т.б. пәндердің әртүрлі салаларынан білімдер қажет. Сонымен бірге бұл қиындықтар аналитикалық модельдердің үлкен ақпараттық сыйымдылығымен орнын толтырады.

Әртүрлі өндірістердің процестерін модельдеуге компьютерде статистикалық имитациялау әдістерін қолдану перспективті болып табылады. Арнайы програмалық ортасында немесе программа-жабдықтық кешендерінде іске асырылған алгоритм имитациялық модель деп аталады. Осы алгоритм зерттелетін жүйедегі байланыстар құрылымын, логикасы мен уақыт бойынша жұмыс жасау тізбегін қарапайымдалған түрде көрсетеді. Модельден ақпаратты алу оны аналиткалық жолмен есептеу немесе сандық әдістермен шешу жолымен орындалмайды, модельмен статистикалық тәжірибелерді компьютерде қайталау жолымен алынады. Имитациялық модель жүйе

жұмысының алгоритмін қамтиды, сонымен бірге осы модельде бөлек тәжірибелерді жасаудың мүмкіндіктері бар. Жүйені имитациялауға әртүрлі математикалық аппарат қолданылуы мүмкін.

Егер де зерттелетін жүйені математикалық модельдермен бейнелеу мүмкін болмаса немесе осындай бейнелеу толық емес, оны талқылау мүмкін емес және зерттеушіге қолданылатын математикалық ақпарат өте күрделі болып көрінсе имитациялық модельдеуді қолданған жөн. Кейбір тәжірибелерді олардың қымбаттылығынан, ұзақтығынан, қауіптілігінен объектіде орындаудың физикалық мүмкіндігі жоқ болған кезде, оларды имитациялық модельдерде өткізудің мүмкіндіктері бар.

Тәжірибелер нәтижелері арқылы жалпы тәуелділіктерді орнату үшін тәжірибелер санын көп рет қайталап, статистикалық бағаларын анықтау қажеттілігі имитациялық модельдеудің кемшілігі болып табылады.

1.4 Динамикалық жүйелерді модельдеудің математикалық негіздері

1.4.1 Лаплас түрлендіруі.

Табиғат оқиғаларын зерттегенде, физика мен техника, химия мен биология, басқа ғылымдар есептерін шешкенде кейбір кезде зертелетін эволюциялық процесті бейнелейтін шамалар арасындағы тіке байланысты орнату мүмкін болмайды. Бірақ көп жағдайда шамалар (функциялар) мен олардың басқа (тәуелсіз) айнымалы шамалар арқылы өзгеру жылдамдықтары арасындағы байланысты орнатуға, яғни белгісіз функцияларының туындылары бар теңдеулерді табуға болады. Осындай теңдеулер *дифференциалдық* теңдеулер болып табылады. Белгісіздер туынды не дифференциал белгісінің астында болып келген теңдеу дифференциалдық теңдеу деп аталады. Ғылым мен техниканың көптеген есептері дифференциалдық теңдеу ұғымына келтіреді. Басқару есептерінде *қарапайым* дифференциалдық теңдеулер теориясы қолданылады (ізделінетін функция тек қана жалғыз айнымалыдан тәуелді, бұл айнымалы – уақыт болып табылады).

Физикалық жүйенің динамикасын бейнелейтін дифференциалдық теңдеулер фундаменталды физикалық заңдылықтар негізінде шығарылады. Динамикалық процесті бейнелейтін дифференциалдық теңдеудің шешімі классикалық әдісімен – анықталмаған коэффициентер әдісін қолдану жолымен табылады.

Автоматты реттеу жүйелердің есептеу және жобалау әдістерін қарапайымдылау үшін объектілердің динамика теңдеулерін функциялардың бастапқы түрлері – *түпнұсқа* арқылы емес, олардың тура Лаплас түрлендіруін қолдану жолымен алынған *бейнелер* түрінде жазады. Лаплас түрлендіруі *операторлық есептеулер* деп аталатын математикалық анализдегі сызықты дифференциалдық, айырымдық және интегралдық теңдеулерін шешу әдістер жиынының негізі болып табылады. Операторлық есептеулер автоматты реттеу

теориясында кең қолданылады, оның көмегімен автоматты жүйелердегі өтпелі және тұрақтанған процестер анализденеді.

Нақты t айнымалылы кейбір $f(t)$ функция берілген болсын. Егер де оң жақтағы интеграл түйісетін болса, келесі өрнекпен анықталатын:

$$L[f(t)] = F(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} dt, \qquad (1.1)$$

$p = x + j \cdot y$ комплексті айнамылылы функциясы *Лаплас түрлендіруі* (*L*-түрлендіруі) деп аталады.

$f(t)$ функциясы *түпнұсқа*, ал $F(p)$ функциясы *бейне* деп аталады. (1) түрлендіруін қысқаша жазу үшін ÷ белгісі қолданылады:

$f(t) \div F(p)$ — $f(t)$ функциясының бейнесі $F(p)$ функциясы болады немесе

$F(p) \div f(t)$ —$F(p)$ функциясының түпнұсқасы $f(t)$ функциясы болады.

(1.1) меншіксіз интегралдың жинақталуы үшін, яғни $f(t)$ функциясы түпнұсқа болуы үшін, ол келесідей шарттарды қанағаттандыруы керек:

- барлық t осінде $f(t)$ функциясы өзінің жеткілікті жоғарғы дәрежелі туындыларымен бірге үзіксіз. Үзіктілік тек қана бірінші типті үзілу нүктелер болатын бөлек нүктелерде орындалмауы мүмкін (шектелген ұзындығы бар t интервалында үзілу нүктелер саны шектелген болуы керек);

- барлық $t < 0$ мәндері үшін функция $f(t) = 0$;

- $f(t)$ функциясының өсу реті шектелген (экспонентаның өсуінен тез емес), яғни барлық t мәндері үшін келесідей шарт орындалатындай:

$$\left| f(t) \le Me^{C_0 t} \right|, \quad t > 0 \qquad (1.2)$$

$M > 0$ және $C_o \ge 0$ тұрақтылары бар.

C_o саны функцияның өсу көрсеткіші деп аталады.

Нақты техникалық жүйелерде қоршаған ортамен өзара байланысты көрсететін $f(t)$ уақытқа тәуелді функциялар түпнұсқа-функциялар болып табылады. Мысалы, келесі функциялар: $E(t)$; $A \cdot \sin(\omega t) \cdot 1(t)$; $A \cdot \cos(\omega t) \cdot E(t)$; $e^{\alpha t} \cdot E(t)$; $e^{-\alpha t} \cdot E(t)$, $(\alpha > 0)$ түпнұсқа-функциялар болады. Бұл жерде бірлік сатылы функциясы $E(t)$ көбейткіші екінші шарттың орындалуын, яғни динамикалық жүйе немесе объектінің физикалық жасалынатынын қамтамасыздандырады (объектіні бақылауға болады және ол нақты $t \ge 0$ уақытта жұмыс жасайды).

e^{t^2}, $\frac{1}{t}$, $tg\omega t$ функциялар түпнұсқа бола алмайды (біріншісіне 3 шарт орындалмайды: t шексіздікке ұмтылғанда функция $e^{C_0 t}$ функциясынан тез өседі, қалғандары бірінші шартты қанағаттандырмайды).

1 мысал. $f(t) = e^{c_0 t}$, $c_0 = 2$ функциясының бейнесін табу керек:

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty e^{2t} \cdot e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty e^{-(p-2)t}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{p-2}\cdot e^{-(p-2)t}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{p-2}\cdot\frac{1}{e^{(p-2)t}}\Big|_0^\infty = \left[-\frac{1}{(p-2)}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{e^{(p-2)\infty}} - \frac{1}{e^{(p-2)0}}\right] = \left[-\frac{1}{p-2}\right]\cdot(-1) = \frac{1}{p-2}.$$

Түпнұсқа бойынша бейнені, ал бейне бойынша түпнұсқаны табу үшін Лаплас түрлендіруінің кестелері қолданылады, оларды сонымен бірге осы түрлендірудің қасиеттерін әдебиеттен табуға болады.

Қасиеттерінің ішіндегі біздің тақырыбымызға (дифференциалдық теңдеулерді шешуге Лаплас түрлендіруін қолдану) қатысты қасиеттерін атап кетейік.

1. *Сызықтық қасиет*: кез келген комплексті α және β үшін: егер де $f(t) \div F(p)$, $q(t) \div G(p)$ болса, онда $\alpha\cdot f(t) + \beta\cdot q(t) \div \alpha\cdot F(p) + \beta\cdot G(p)$ болады,

мұндағы α және β — кез келген сандар (масштабты көбейткіштер).

2. *Ұқсастық теоремасы*: кез келген тұрақты α>0 үшін егер де $f(t) \div F(p)$ болса, онда $f(\alpha\cdot t) \div (1/\alpha)\cdot F(p/\alpha)$,

мұнда α — кез келген сандар.

3. *Түпнұсқаны дифференциалдау*: егер де f(t) және оның $f^k(t)$. $k=1,2,..,n$ туындылары түпнұсқа болса, онда:

$$f(t) \div F(p),\ f'(t) \div pF(p) - f(0),\ f''(t) \div p^2 F(p) - pf(0) - f'(0);$$
$$f'''(t) \div p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0);$$
$$f^k(t) \div p^k F(p) - p^{k-1} F(p) - p^{k-2} F(p) - \ldots - f^{k-1}(0).$$

Бастапқы шарттар нөлдік болса, бұл формулалар келесі түрде жазылады:

$$f'(t) \div pF(p),\ f''(t) \div p^2 F(p),\ f'''(t) \div p^3 F(p), \ldots,\ f^n(t) \div p^n F(p).$$

Қарапайым дифференциалдық теңдеулерді операторлық әдісімен шешудің жалпы сұлбасы келесідей: берілген дифференциалдық теңдеуге бастапқы шарттарын есепке ала отырып, Лаплас түрлендіруін қолданамыз, нәтижесінде бейне арқылы алгебралық теңдеуді аламыз; осы теңдеуді шешеміз; содан кейін бейнеден түпнұсқаға көшеміз.

1 мысал. Келесі теңдеуді операторлық әдісімен шешіңіз:

$$x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0,\ t = 0, x(0) = 0, x'(0) = 1.$$

Теңдеуге Лаплас түрлендіруін қолданамыз, түпнұсқаның қасиетін есепке ала отырып (түпнұсқаны дифференциалдау теоремасын) келесіні жазамыз:

$$p^2 X(p) - px(0) - x'(0) + 3pX(p) - 3x(0) + 2X(p) = 0;$$

$$p^2 X(p) - 1 + 3pX(p) + 2X(p) = 0.$$

Нәтижесінде $X(p)=\dfrac{1}{p^2+3p+2}$.

Алынған функцияны қарапайым бөлшектерге жіктеп келесіні аламыз:

$$X(p)=\frac{1}{p^2+3p+2}=\frac{A}{p+1}+\frac{B}{p+2}=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+2}.$$

Лаплас түрлендіруінің кестесі бойынша $e^{\alpha\cdot t}\div\dfrac{1}{s-\alpha}$ болғандықтан, ізделінген шешім келесі түрде жазылады $x(t)=e^{-t}-e^{-2t}$.

Егер де сызықты динамикалық жүйе дифференциалды теңдеуімен сипатталса, онда нөлдік бастапқы шарттардағы шығыстық пен кірістік шамалардың арасындағы Лаплас бойынша өрнектелген бейнелерінің қатынасын осы жүйенің *беріліс функциясы* деп атайды. Сызықты және сызықтандырылған жүйелері үшін математикалық моделін көрсететін түрінің бірі беріліс функция болып табылады.

2 мысал. Бастапқы нольдік шарттарда келесі дифференциалды теңдеу бойынша беріліс функцияны анықтау қажет:

$$2\cdot\frac{dy}{dt}+y=3\cdot x(t).$$

Біріншіден осы теңдеудің екі жағында Лаплас түрлендіруі бойынша түрлендіру керек. Ол үшін теңдеудің екі жағында e^{-pt}-ға көбейтіп, 0 мен ∞ дейін интегралдау керек. Бірақ автоматика есептерінде келесідей белгіні $p\to\dfrac{d}{dt}$ қолдана отырып, беріліс функцияны аламыз:

$$W(p)=\frac{3}{2p+1}.$$

3 мысал. Бастапқы нольдік шарттарда келесі теңдеулер жүйесі бойынша беріліс функцияларын табыңыз:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dt^2}=a_1\dfrac{dy}{dt}+a_2\dfrac{dz}{dt}+a_3z+a_4x(t);\\[2ex] \dfrac{dz}{dt}=\dfrac{dy}{dt}+b_1z+b_2x(t).\end{cases}$$

Лаплас түрлендіруімен екі теңдеуді де түрлендіріп және жоғарыда келтірілген дифференциалдау қасиетін қолдана отырып, әр канал бойынша келесідей беріліс функцияларды алуға болады:

$$x(t) \to y(t) \text{ êàíàëû áîéûíøà } : W_1 = \frac{k_1(Tp + k_2)}{p(k_3 p^2 + 2k_4 p + 1)};$$

$$x(t) \to z(t) \text{ êàíàëû áîéûíøà } : W_2 = \frac{k_1(Tp + 1)}{k_2 p^2 + 2k_3 p + 1}.$$

Мұндағы k_1, k_2, k_3 және T – түрлендіру барысында пайда болған коэффициенттердің белгілері.

4 мысал. Реттеу процесін анықтау. Келесі беріліс функция берілген болсын:

$$W = \frac{10}{0.1s^2 + s + 10}.$$

Жүйені сипаттайтын теңдеуде кіріс және шығыс сигналдары *g(t)* мен *x(t)* болсын. Осы сигналдардың бейнелерін сәйкесінше *G(p)* және *X(p)* деп белгілеп, теңдеуге Лаплас түрлендіруін қолданып, келесіні жаза аламаыз:

$$X(p) = W(p) \cdot G(p).$$

Басқару әсер *g(t)=E(t)* болсын.

Онда

$$X(p) = \frac{10}{p \cdot (0.1p^2 + p + 10)} = \frac{100}{p \cdot (p^2 + 10p + 100)}.$$

Түрлендіреміз

$$X(p) = \frac{A}{p} + \frac{Bs + C}{p^2 + 10p + 100} = \frac{1}{p} - \frac{s}{p^2 + 10p + 100} - \frac{10}{p^2 + 10p + 100}.$$

Көпмүшені келесідей түрлендіреміз:

$$p^2 + 10p + 100 = (p + 5)^2 + 75.$$

Лаплас түрлендіруінің кестесінен аламыз:

$$\sin(\omega \cdot t) \div \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \ \cos(\omega \cdot t) \div \frac{p}{p^2 + \omega^2};$$

$$e^{-\alpha t} \sin(\omega \cdot t) \div \frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}, \ e^{-\alpha t} \cos(\omega \cdot t) \div \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}.$$

$\frac{1}{p} \div E(t)$ болғандықтан, келесіні жаза аламыз:

$$\frac{p}{(p+5)^2 + 75} = \frac{p+5}{(p+5)^2 + 75} - \frac{5}{(p+5)^2 + 75} \div e^{-5t} \cos(\sqrt{75}t) - \frac{5}{\sqrt{75}} e^{-5t} \sin(\sqrt{75}t);$$

$$\frac{10}{(p+5)^2 + 75} = \frac{10}{\sqrt{75}} e^{-5t} \sin(\sqrt{75}t).$$

Нәтижесінде

$$x(t) = 1 - e^{-5t}[\frac{5}{\sqrt{75}} e^{-5t} \sin(\sqrt{75}t + e^{-5t} \cos(\sqrt{75}t)].$$

1.4.2 Дифференциалдық теңдеулерді шешудің сандық әдістері.

Әдетте динамикалық жүйенің моделі қалыпты түрдегі дифференциалдық теңдеулер жүйесі түрінде беріледі:

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = f(t, \bar{y}, \bar{u}), \tag{1.3}$$

мұндағы $\bar{y} = \{y_i(t)\}, i - 1,2,..., m -$ шығу айнымалылары (күй айнымалылары);

$\bar{u} = \{u_j(t)\}, j - 1,2,..., n -$ кіру айнымалылары;

$f(t, \bar{y}, \bar{u}) -$ теңдеудің оң жағының вектор-функциясы.

Дифференциалды теңдеулер жүйесінің жалғыз шешімін табу үшін бастапқы шарттар орнатылады, әдетте олар келесі түрде беріледі:

$$\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0. \tag{1.4}$$

(1.4) бастапқы шарттары бар (1.3) теңдеулер жүйенің жұрыс-тұрысын барлық $t > 0$ үшін анықтауға мүмкіндік береді. Осындай теңдеулердің шешімдерін барлық жағдайларда дифференциалдық теңдеулерді шешудің классикалық әдістерімен табу мүмкін болмайды. Күрделі жүйелер динамикасын модельдегенде осындай жағдай жиі пайда болады. Практикалық есептердің көбісінде дифференциалдық теңдеулердің коэффициенттері мен функцияларының құрамында маңызды бейсызықтардар болуы мүмкін немесе олар тәжірибелік мәліметтер кестелері түрінде беріледі (соңғы жағдайда, әрине, классикалық әдістерді қолдана алмаймыз). Сонымен, сызықты емес қарапайым дифференциалдық теңдеулерді шешу сандық әдістермен орындалады.

Дифференциалдық теңдеулер жүйелерін сандық шешу әдістерін дифференциалдық теңдеуді шешу мысалында қарастырамыз. Оларды бірінші ретті жүйеге қолдану теңдеуге қолдануға ұқсайды. Ал, жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулерді бірінші ретті теңдеулер жүйесіне түрлендіру өте жеңіл. Басқа сөзбен айтқанда қарастырып отырған әдістер кең тараған есептерде қолданылады. Сонымен бірге, кірудігі айнымалылар *u* (басқару немесе қобалжыту әсерлер) уақыт функциялары түрінде берілген деп есептейміз. Сонымен, алдағы формулаларда *u(t)* функциясын ашық түрде көрсетпейміз. Онда бастапқы шарттары бар дифференциалды теңдеу келесі түрде жазылады:

$$y'(t) = f(t, y);$$

$$y(t_0) = y_0.$$

Теңдеудің шешімі қисықтар жиыны болып табылады, солардың ішінде жалғызын таңдауға бастапқы шама мүмкіндік береді. Егер де шешім *y=y(t)* функциясы түрінде табылған болса, функцияның сандық мәндерін анықтау

үшін сәйкес t мәндерін функцияға қойып, $y(t)$-ны есептейміз. Дифференциалды теңдеуді сандық әдісімен шешу осыған негізделген.

Дифференциалды теңдеу кез келген нүктеде қисықтың иілуін t мен x функциясы ретінде анықтайды. Бастапқы уақытта қисықтың тек қана бір нүктесі белгілі. Осы нүктеден бастап, $t = t_0, x = x_0$ болғанда жанаманың иілуін есептейміз, содан кейін алынған жанама бойынша кіші қадамға ілгері жылжыймыз. t бойынша қадамды h деп белгілеп, $t = t_0 + h$ нүктеде $x = x_1$ жаңа мәнін аламыз. Осы әрекеттерді қайталай беріп, түзудің кіші кесінділерін аламыз, оларды ізделінетін функцияның жақсы жуықтауы деп есептейміз. Кейбір формулаларды шығарайық.

Ізделінетін қисықта (t_m, y_m) нүктесі белгілі болсын. Осы нүкте арқылы иілу бұрышының тангенсі $y_m' = f(t_m, y_m)$ болатын түзуді (жанаманы) тұрғызамыз. Енді $t = t_{m+1} = t_m + h$ нүктесінен орнатылған ординатасымен осы түзудің қиылысатын нүктесін шешімнің келесі мәні деп есептейміз.

Жанама теңдеуі: $y = y_m + y_m'(t - t_m)$.

Сонымен бірге (берілген теңдеуден) $y_m' = f(t_m, y_m)$, $t_{m+1} = t_m + h$.

Осыдан

$$y_{m+1} = y_m + h \cdot f(t_m, y_m). \qquad (1.5)$$

Бұл әдіс *Эйлер әдісі* деп аталады, дифференциалды теңдеулерді сандық шешудің дәстүрлі және кең тараған әдісі.

Практикада дифференциалды теңдеулерді шешу үшін Рунге-Кутт әдістері кең қолданылады. Осы топтың әртүрлі әдістерінің әртүрлі дәлдіктері бар, сонымен бірге есептеу көлемдері де әртүрлі. Осы әдістердің келесідей қасиеттері бар:

1) Бұл әдістер бірқадамды әдістерге жатады: кезекті нүктедегі шешімді табу үшін тек қана алдыңғы нүктедегі шешім туралы ақпарат жеткілікті.

2) Олардың дәлдік реті h^p, ол әдіс дәлдігі деп аталады.

3) Осы әдістерде функциялардың туындыларын есептеу қажет емес, сондықтан практикалық есептеулерге ыңғайлы.

Эйлер әдісінде қисық түзудің кесінділерімен жуықталады, сондықтан әрине, үлкен қателіктер пайда болады. Түзу кесінділерінің тізбегі қисықтан біраз ауытқуы мүмкін. Бұл әдіс Рунге-Кутт әдістерінің *бірінші* ретті әдісі, жиі жағдайларда орнықсыз болады – x өскен сайын кіші қателік өседі (әдістің *орнықтылық* мәселесі). Бұл әдіс практикада сирек қолданылады

Осы әдісті әртүрлі амалдармен жетілдіруге болады. Мысалы, түзетілген Эйлер әдісінде жанаманың иілу бұрышының орта тангенсі келесі екі t_m, y_m и $t_m + h, y_m + h \cdot y_m'$ нүктелер үшін табылады. Екінші нүкте Эйлер әдісімен табылған: біріншіден Эйлер әдісімен жанамада нүктені тауып алдық. Содан кейін осы нүктеде қайтадан жанаманың иілу бұрышының тангенсін табамыз.

Осы екі тангенстердің орта мәнін тауып, осы коэффициентпен үшінші түзуді құрамыз. Соңынан бастапқы t_m, y_m нүктеден үшінші түзуге параллел түзуді құрамыз. $t_{m+1} = t_m + h$ нүктеден тұрғызылған ординатасымен соңғы түзудің қиылысқан нүктесі ізделінген t_{m+1}, y_{m+1} нүктесі болып табылады.

Осы түзудің иілу бұрышының тангенсі

$$F_1(t_m, y_m, h) = \frac{1}{2}[f(x_m, y_m) + f(x_m + h, y_m + h \cdot y_m^{'}),\ a \quad y_m^{'} = f(x_m, y_m),$$

ал теңдеуі

$$y = y_m + h \cdot F_1(t_m, y_m, h).$$

Сонымен

$$y_{m+1} = y_m + h \cdot F_1(t_m, y_m, h). \qquad (1.6)$$

(1.6) - Эйлердің түзетілген әдісінің формуласы. Бұл әдіс Рунге-Кутт әдістерінің екінші ретті әдістеріне жатады.

Дифференциалды теңдеулерді интегралдаудың көп тараған әдістері – төртінші ретті дәлдігі бар Рунге-Кутт әдісі. Ол келесі өрнектер жиынымен сипатталады:

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \qquad (1.7)$$

мұндағы

$$k_1 = f(x_m, y_m),$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h \cdot k_1}{2}),$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h \cdot k_2}{2}),$$

$$k_4 = f(x_m + h, y_m + h \cdot k_3).$$

Екінші ретті және одан жоғары дәлдігі бар Рунге-Кутт әдістерінің кемшілігі - функцияның мәндерін бірнеше аралық нүктелерде есептеу қажет. Бұл туындыларды есептемеудің бағасы. Дифференциалды теңдеулерді шешудің басқа да әдістері бар, бірақ инженерлік есептеулерге Рунге-Кутт әдістері жеткілікті.

1.4.3 Функцияларды аппроксимациялау.

Функцияларды аппроксимациялау есебі оларды берілген фунциялар жиыны бойынша жуықтау болып табылады. Қарастырылып отырған *f(t)* функциясы *[0,T]* аралығында абсолютты интегралданатын болсын. Практикада бұл талап әдетте орындалады. Қарастырып отырған функция кейбір осы интервалда абсолютты интегралданатын *{φ(t)}* аппроксимациялау функциялар жүйесі бойынша жіктеледі:

$$f(t)=\sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(t). \qquad (1.8)$$

Аппроксимациялау функциялар түрі жуықталу функция туралы априорлы ақпарат негізінде таңдалады. Жуықтау коэффициенттері кейбір алдын-ала таңдалған жуықтау критерийді минимумдау шартынан табылады.

Жуықтаудың келесі түрлері бар: бірқалыпты, интерполяциялық, квадратты. Жуықтаудың бірінші екі түрінің көмегімен есептің дәл шешімін алу үшін көбінесе идентификациялау алгоритмдері қолданылатын *[0, ∞)* аралығында жуықтаудың коэффициенттерін есептеуге шектелген алгоритмдер жоқ. Сондықтан және алгоритмдік іске асырудың қарапайымдылығы себебінен квадраттық жуықтаулар кең қолданылады және де аппроксимациялау қатарының коэффициенттері келесі есепті шешу жолымен табылады:

$$S=\int_0^T [f(t)-\sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(t)]^2 dt \to \min$$

немесе

$$S=\sum_{j=1}^{K} [f_j-(a_0\varphi_{0j}+a_1\varphi_{1j}+...+a_N\varphi_{Nj})]^2 \to \min.$$

Жіктеудің коэффициенттерін келесі алгебралық теңдеулер жүйесінен табылады:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0}=-2\sum_{j=1}^{K}[y_j-(a_0\varphi_{j0}+a_1\varphi_{j1}+...+a_N\varphi_{jN})]\cdot f_{j0}=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_N}=-2\sum_{j=1}^{K}[y_j-(a_0\varphi_{j0}+a_1\varphi_{j1}+...+a_N\varphi_{jN})]\cdot f_{jN}=0 \end{cases}$$

Немесе түрлендіргеннен кейін

$$\begin{cases} a_0\sum_{j=1}^{K}\varphi_{j0}^2+a_1\sum_{j=1}^{K}\varphi_{j0}\varphi_{j1}+...+a_N\sum_{j=1}^{K}\varphi_{j0}\varphi_{jN}=\sum_{k=1}^{K} f_{j0}\varphi_{g0}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0\sum_{j=1}^{K}\varphi_{j0}\varphi_{jN}+a_1\sum_{j=1}^{K}\varphi_{j1}\varphi_{jN}+...+a_N\sum_{j=1}^{K}\varphi_{jN}^2=\sum_{g=1}^{N} f_{jN}\varphi_{jN}. \end{cases} \qquad (1.9)$$

(1.9) жүйенің жалғыз шешімін табу үшін оның анықтаушысы нольге тең болмауы керек. Егер де аппроксимациялау функциялар сызықты тәуелсіз болса, бұл шарт орындалады.

Аппроксимициялау функциялар жүйесіне басқа талап қойылмаса, (1.9) жүйесі бірлесе шешіледі.

Аппроксимациялаудың a_n коэффициенттерін тәуелсіз табу үшін және (1.9) жүйені қарапайымдау үшін *{φ(t)}* функциялар жүйесінің *ортогоналдық* қасиеттері болғаны жөн.

[a,b] аралығында анықталған екі *φ(t)* және *ψ(t)* функциялар берілген болсын. Егер де

$$\int_a^b \varphi(t)\cdot\psi(t)dt = 0$$

болса, осы функциялар берілген аралықта *ортогоналды* деп аталады.

[a,b] аралығында анықталған және осы аралықта квадраттарымен бірге интегралданатын $\{\varphi_n(t)\}$ функциялар жүйесінің функциялары жұптап осы интервалда ортогоналды болса, функциялар жүйесі *ортогоналды жүйе* болып табылады яғни:

$$\int_a^b \varphi_n(t)\varphi_m(t)dt = \begin{cases} c_n & m = n \text{ болса,} \\ 0 & m \neq n \text{ болса,} \end{cases}$$

мұндағы c_n - кейбір тұрақтылар.

Тұрақтылар $c_n=1$ болса, *{φ(t)}* функциялар жүйесі *ортонормалды* болады, есептеу формулалары белгілі Фурье формулаларына қарапайымдалады, ал коэффициенттері бұл жағдайда Фурье коэффициенттері деп аталады (Фурье қатарына сәйкес, оның мүшелері *[0,T]* ортонормалды болатын функциялар). Бұл шарт орындалмаса, функциялар жүйесін нормалды болатын $\{\frac{\varphi_n(t)}{\sqrt{c_n}}\}$ жүйесіне түрлендіруге болады.

Кейбір жағдайда белгілі *w(t)* салмағымен ортогоналды болатын функциялар таңдалынады:

$$\int_a^b \varphi_n(t)\cdot\varphi_m(t)\cdot w(t)dt = \begin{cases} c_n & m = n \text{ болса,} \\ 0 & m \neq n \text{ болса.} \end{cases}$$

Салмақ функциясы тәуелсіз айнымалының қарастырылған интервалында қатені белгілейтіндей таңдалынады.

Ортогоналды функциялар аппроксимациялау есептерін шешкенде кең қолданылады. *{φ(t)}* функциялар ортогоналды болса, (1.5) жүйенің детерминанты диагоналдыға түрленеді, ал коэффициенттерді есептеу формулалары келесі түрге қарапайымдалады:

$$a_n = \frac{1}{c_n}\int_a^b f(t)\cdot\varphi_n(t)dt.$$

Басқа сөзбен айтқанда, (1.9) жүйенің бірлескен шешімдерін іздеу қажет емес.

Ортогоналды жүйенің маңызды мысалы ұзындығы 2π болатын аралықта берілген келесі тригонометриялық жүйе болып табылады:

$$\{1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t),\ldots,\cos(nt), \sin(nt),\ldots\},$$

Келесі жүйе

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2t)}{\sqrt{\pi}}, ...\}$$

нормалды жүйе болып табылады. Бұл жүйе [0, π] аралығында ортогоналды болмайды.

Тригонометриялық жүйенің ортогоналдық қасиеті сигналдарды гармоникалық талдағанда кең қолданылады. Периоды *T* болатын көптеген периодтық функцияларды синустық шамалардың шексіз қосындысы ретінде көрсетуге болатыны белгілі. Бұның геометриялық мағынасы келесіні білдіреді: периодты функцияның графигі синустардың графиктерінің қосындысы ретінде табылады. Периодты функцияны бөлек гармоникалық тербелістерге (гармоникаларға) жіктеу *гармоникалық талдау* деп аталады. Осындай жіктеу Фурье қатары деп аталады, оның түрі келесі:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt).$$

Қатардың коэффициенттері келесі аппроксимациялау критерийді минимумдау шартынан табылады:

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} \{ f(t) - [\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)]\}^2 \to \min.$$

Тригонометриялық функциялар жүйесі 2π ұзындығы бар аралықта ортогоналды болғандықтан, функционалды минимумдау есебін шешпей, қатардың коэффициенттері есептелетін өрнектерді бірден жазуға болады:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \; k = 1,2,3,... ;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt, k = 1,2,3,...$$

Егер де *f(t)* функциясының тақтық немесе жұптық қасиеттері болса, келтірілген формулалар қарапайымдалады:

а) *f(t)* жұп болса $b_k=0$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \; k = 1,2,3,... ;$$

б) *f(t)* тақ болса $a_k=a_0=0$,

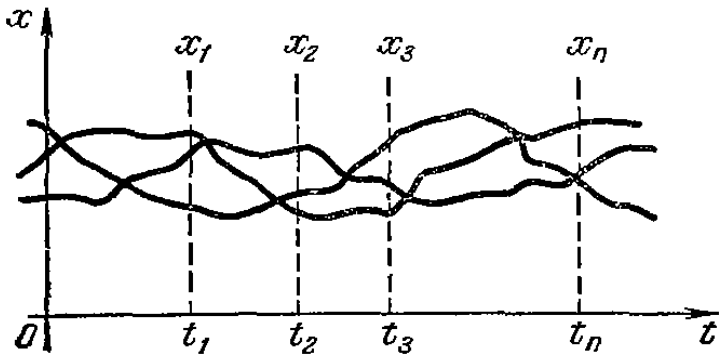
$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \sin kt dt, \; k = 1,2,3,...$$

1.4.4 Кездейсоқ процестердің негізгі түсініктемелері.

Уақыт бойынша өзгеретін кездейсоқ *x* шамасы *кездейсоқ* немесе *стохастикалық* процесс деп аталады. Кездейсоқ шаманың анықталған мәні жоқ, бұл шама мүмкін болатын шамалар жиыны болғандықтан, кездейсоқ процесс белгілі *x(t)* функциясы емес, мүмкін болатын *x(t)* қисықтардың жиыны болып табылады. Келесідей анықтаманы да қолдануға болады: әр уақыт моментінде мәні кездейсоқ шама болатын уақытқа тәуелді функцияны кездейсоқ процесс деп атауға болады.

Сонымен, кездейсоқ процесте анықталған *x(t)* тәуелділік жоқ. Жиынның әр қисығы тек қана кездейсоқ процестің бөлек іске асырылуы болып табылады (1.2 сурет). Процесс қандай қисық бойынша орындалатынын ешқашанда алдын ала болжау мүмкін емес. Бірақ та кездейсоқ процесті кейбір ықтималдық сипаттамаларымен бағалауға болады.

Уақыттың әр бөлек моменттерінде t_1, t_2, t_3, . . әр қайсысының өзінің таралу заңдары бар $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$ кездейсоқ шамалары бақыланады. Олар үздіксіз кездейсоқ шамалар болғандықтан ықтималдықтың тығыздылығы түсініктемесін қолдану керек.



1.2 сурет - Кездейсоқ процестің іске асырылуы

Осы бөлек кездейсоқ шамалардың барлығының таралу заңдарын *ω(x,t)* деп белгілейміз. Жалпы кезде олар уақытқа тәуелді. Әр берілген *t* уақыты үшін (t_1, t_2, t_3, . . .) өзінің $\omega(x_1, t_1)$, $\omega(x_2, t_2)$, $\omega(x_3, t_3)$, ..., таралу заңы болады; сонымен бірге олардың әрқайсысына орындалады:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x,t)dx = 1.$$

Әрбір берілген уақыт моменті үшін кездейсоқ шамалардың сипаттамаларын табуға болады. Нәтижесінде жиын бойынша орта шаманы (математикалық күтімін):

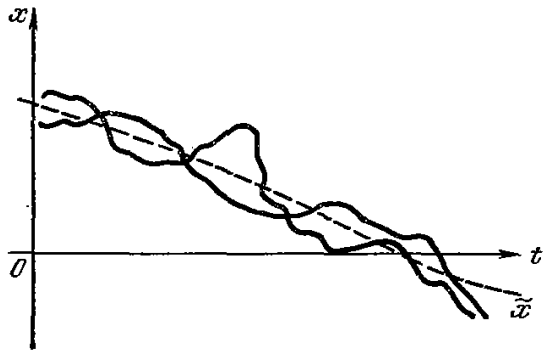
$$\tilde{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \omega(x,t)dx$$

және дисперсияны

$$D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \tilde{x})^2 \cdot \omega(x,t)dx = \overline{x^2(t)} - [\tilde{x}(t)]^2$$

табуға болады.

Кездейсоқ процестің орта мәні кейбір орта қисық болып табылады - (1.3) суретте $\tilde{x}$ қисығы; процестің барлық мүмкін болатын іске асырылуы осы қисықтың аймағында топтасады, ал *D(t)* дисперсия немесе $\sigma(t)$ орта квадратты ауытқуы бөлек мүмкін болатын іске асырылуының осы орта қисықтың қасында шашырауын сипаттайды.



1.3 сурет – Кездейсоқ процестің орта мәні

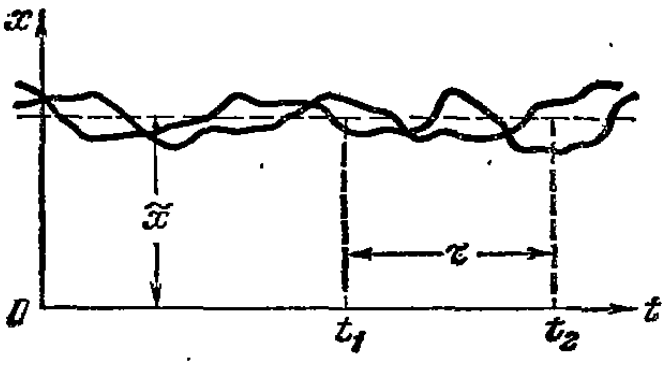
Ықтималдық сипаттамалары уақытқа тәуелді болмаса кездейсоқ процесс *стационарлы кездейсоқ процесс* болып табылады. Қарастырылып отырған процесс бойынша кесінділер қалай ығыссада барлық ықтималдық тығыздылықтар $\omega_{1,}\omega_2, \omega_3, ..., \omega_n$ өзгермейді. Стационарлы кездейсоқ процесс автоматты жүйелердегі стационарлы немесе орнықталған процестерге ұқсас деуге болады. Мысалы, кәдімгі орнықталған периодты тербелістерді қарастырғанда, есептеу басын басқа шамаға ығыстырсақ, ештеңе өзгермейді. Сонымен бірге, жиілік, амплитуда, ортаквадратты мән, т.с. сипаттамалардың да мәндері өзгермейді.

Стационарлы кездейсоқ процесте әр уақыт моментінде таралу заңы бірдей болады, яғни ықтималдық тығыздылығы уақыттан тәуелсіз: *w (x, t) =ω (x).* Немесе барлық кездейсоқ процесс үшін $\tilde{x} = const$ және $\sigma = const$. Сондықтан, жалпы жағдайға қарағанда стационарлы кездейсоқ процесте $\tilde{x}$ = *const* сызығы түзу болады (1.4 сурет) - әдеттегі периодты тербелістердің орта сызығының тұрақты ығысуы сияқты. Стационарлы кездейсоқ процесте *x* айнымалының σ= const деп анықталатын мәндерінің шашырауы бірдей болады, әдеттегі периодты тербелістердің ортаквадратының ауытқуының тұрақтылығы сияқты.

Осы сияқты екі өлшемді ықтималдық тығыздылығыда әртүрлі t_1 және t_2 уақыттар арсындағы бірдей $\tau = t_2 - t_1$ аралықтарда бірдей болады:

$$\omega_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = \omega_2(x_1, x_2, \tau)$$

n - өлшемді ықтималдық тығыздылық үшін қасиет сақталады.



1.4 сурет – Стационарлы кездейсоқ процестің орта мәні

Осы барлық функциялар берілген болса, кездейсоқ процесс анықталған болады. Бірақ, кездейсоқ процестің кейбір орталықталған сипаттамаларын қолданған жөн.

Стационарлы кездейсоқ процестің *эргодикалық* қасиет деген қасиеті бар. Эргодикалық гипотеза: стационарлы кездейсоқ процесте жиын бойынша орта мән сәйкесті уақыт бойынша орта мәнге тең, мысалы $\tilde{x} = \bar{x}$, $\tilde{x}^2 = \overline{x^2}$,т. с.

Стационарлы кездейсоқ процесте уақыт бойынша ықтималдық сипаттамалар өзгермейтін болғандықтан (мысалы, $\tilde{x}$=const), бір объектіде кездейсоқ процесті ұзақ уақыт бақыласақ, осы бақылаудың орта мәні (уақыт бойынша орта мән) бір уақыт моментінде бірдей объектілердің бақылаудың көп санымен алынған (жиын бойынша орта мән) орта мәнге тең болады.

Сонымен стационарлы процес үшін орта мән (математикалық күтім) тең болады:

$$\tilde{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \omega(x,t)dx = \bar{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt.$$

Сол сияқты жоғарғы дәрежедегі моменттерді – дисперсияны, орта квадратты ауытқуды, т.б. жазуға болады.

Эргодикалық гипотеза барлық есептеулер мен тәжірибелерді қарапайымдайды. $\tilde{x}$, D, σ, т.б. анықтағанда көп біртекті жүйелерді бір уақытта параллел сынау орнына жалғыз жүйені ұзақ уақыт аралығында *x(t)* бақылау нәтижесін қолдануға болады.

Сонымен, стационарлы кездейсоқ процестің маңызды қасиеті келесіде: оның ұзақ уақыт аралығында жалғыз іске асыруы толығымен кездейсоқ процесті анықтайды. Бұл қасиет басқа түрдегі кездейсоқ процестерде жоқ.

1.4.5 Корреляциялық функциялар.

Кездейсоқ процестің универсалды сипаттамасы корреляциялық функция болып табылады.

Кездейсоқ функцияның екі t және t_1 уақыт моменттерінде алынған $x(t_1)$ және $x(t_1)$ мәндерінің бастапқы корреляциялық моменті *корреляциялық*

(автокорреляциялық) функция деп аталады. Оны келесі өрнектен табуға болады:

$$R(t,t_1) = M[x(t)x(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t_1)\omega_2(x,t;x_1,t)dxdx_1, \qquad (1.10)$$

мұндағы $\omega_2(x, t; x_1, t_1)$ – екі өлшемді ықтималдық тығыздылығы.

Кей кезде корреляциялық функция деп $x(t)$ және $x_1(t)$ орталық корреляциялық моментін атайды:

$$R^0(t,t_1) = M[\{x(t)-\tilde{x}(t)\}\{x(t_1)-\tilde{x}(t_1)\}] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x(t)-\tilde{x}(t)][x(t_1)-\tilde{x}(t_1)]\omega_2(x,t;x_1,t)dxdx_1. \qquad (1.11)$$

Онда (1.10) корреляциялық функциясын келесі түрде көрсетуге болады

$$R(t,t_1) = \tilde{x}(t)\tilde{x}(t_1) - R^0(t,t_1).$$

Бұл функция кездейсоқ шаманың келесі уақыттағы $x(t_1)$ мәнінің алдыңғы t уақыттағы $x(t)$ мәнінен тәуелділігін анықтайды. Бұл осы мәндер арасындағы байланыс мөлшері.

Корреляциялық функциялардың негізгі қасиеттері:

1) Корреляциялық функциялардың (1.10) және (1.11) анықтамаларынан симметриялық қасиетін орнатуға болады:

$$R(t, t_1) = R(t_1, t) \text{ және } R^0(t, t_1) = R^0(t_1, t).$$

2) $t_1=t$ болғанда $R(t, t_1)$ корреляциялық функция кездейсоқ шаманың орта квадратын береді, ал $R^0(t, t_1)$ – дисперсиясын:

$$R(t,t) = M[x^2(t)] = \tilde{x}^2(t);$$

$$R^0(t,t) = M[\{x(t)-\tilde{x}(t)\}^2] = D(t).$$

3) Кездейсоқ шамаларға еркін кездейсоқтығы жоқ шамаларды қосқанда олардың корреляциялық моменттері мен дисперсияларының өзгермейтінін дәлелдеуге болады. Сондықтан $R^\circ(t, t_1)$ кездейсоқ шамаларға еркін кездейсоқ емес шамаларды қосатын болсақ, корреляциялық функция өзгермейді. Осы қасиет $R(t, t_1)$ функциясында жоқ, себебі кездейсоқ емес шамаларды кездейсоқ шамаларға қосатын болсақ, бастапқы моменттер өзгереді. Осындай жағдайда корреляциялық функция кездейсоқ және кездейсоқ емес шамалардың корреляциялық функцияларының қосындысы болады.

Кейбір жағдайда *нормаланған* корреляциялық функция қарастырылады:

$$\rho(t,t_1) = \frac{R^0(t,t_1)}{\sqrt{D(t)D(t_1)}}.$$

x(t) және *y(t)* екі кездейсоқ шамалардың *өзара корреляциялық функциясы* келесі формулалармен анықталады:

$$R_{xy}(t,t_1) = M[x(t)y(t)];$$

$$R^0_{xy}(t,t_1) = M[\{x(t) - \tilde{x}(t)\}\{y(t_1) - \tilde{y}(t_1)\}].$$

Өзара корреляциялық функция барлық t мәндері үшін нольге тең болса, *x(t)* және *y(t)* кездейсоқ функциялар корреляциаланбаған деп аталады.

Өзара корреляциялық функция нольге тең болмаса *x(t)* және *y(t)* кездейсоқ функциялар корреляциаланған деп аталады.

Процесс стационарлы болса $R(t, t_1)$ және $R^0(t, t_1)$ корреляциялық функциялар t ағынды уақыт моментінен тәуелсіз, тек қана $\tau = t_1 - t$ уақыт ығысумен анықталады.

Стационарлы процестің эргодикалық қасиетін есепке ала отырып, *x(t)* пен $x(t+\tau)$ немесе $x(t) - \bar{x}$ пен $x(t+\tau) - \bar{x}$ көбейтінділерінің уақыт бойынша орта мәнін корреляциялық функция деп есептеуге болады:

$$R(\tau) = x(t)x(t+\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt;$$

$$R^0(\tau) = \overline{[x(t)-\bar{x}][x(t+\tau)-\bar{x}]} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[x(t)-x][x(t+\tau)-\bar{x}]dt.$$

Стационарлы процесс үшін корреляциялық функция x кездейсоқ шаманың уақыттың келесі $t + \tau$ моментіндегі мәнінің алдыңғы t уақытындағы мәнінен тәуелділігін анықтайды.

Стационарлы процестің $R(\tau)$ корреляциялық функциясының негізгі қасиеттері:

1) Корреляциялық функция жұп функция болады, яғни $R(-\tau) = R(\tau)$. Бұл қасиет корреляциялық функцияның анықтамасынан шығады.

2) $\tau = 0$ болғанда корреляциялық функцияның мәні кездейсоқ шаманың орта квадраты болады:

$$R(0) = \overline{x(t)x(t)} = \bar{x}^2.$$

3) $\tau \to \infty$ болса, корреляциялық функция функцияның мәні кездейсоқ шаманың орта квадраты болады. Эргодикалық гипотезадан:

$$R(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \omega_2(x_1, x_2, \tau)dx_1 dx_2.$$

$\tau \to \infty$ болғанда x_1 және x_2 шамаларды тәуелсіз деп есептеуге болады. Осыдан

$$R(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \omega(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \omega(x_2) dx_2 = (\widetilde{x})^2 = (\overline{x})^2.$$

4) $\tau = 0$ болғанда корреляциялық функцияның мәні оның ең үлкен мәні болып табылады, яғни $R(0) \geq R(\tau)$. Дәлелдеуі:

$$[x(t) - x(t+\tau)]^2 \geq 0$$

сондықтан

$$x^2(t) + x^2(t+\tau) \geq 2x(t)x(t+\tau).$$

Оң және сол жақтағы өрнектердің уақыт бойынша орта мәнін есептейміз. Нәтижесінде:

$$\overline{x^2(t) + x^2(t+\tau)} = \overline{2x^2(t)} = 2R(0);$$

$$\overline{2x(t)x(t+\tau)} = 2R(\tau).$$

Осыдан келесі теңсіздік шығады: $R(0) \geq R(\tau)$.

5) Неғұрлым τ уақыт аралығы өскен сайын корреляциялық функцияның мәні азаяды, себебі бір бірінен алыс қашықтықта орналасқан x шаманың мәндері арасында байланыс әлсіз болады.

6) Бақыланатын объектінің инерциясы аз шама болса, τ өскен сайын $R(\tau)$ мәндері тез азаяды.

Корреляциялық функцияны кездейсоқ процесті ұзақ уақыт бақылап тәжірибеден жазып алған қисықпен анықтауға болады. Алынған осциллограмманы келесі жолмен өңдейді. Барлық бақылау T интервалы N тең бөліктерге бөлінеді, олардың ұзындығы:

$$\Delta t = \frac{T}{N}.$$

Әртүрлі $\tau = m \cdot \Delta t$ мәндері үшін ординаталар көбейтінділерінің орта мәндері есептеледі

$$R(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=1}^{N-m} x_n x_{n+m}.$$

Осы мәндер бойынша корреляциялық функцияның m интервал мен $\tau = m \cdot \Delta t$ уақытқа тәуелді графигі құрылады.

Өлшеулердің көлемі шектелген болғандықтан корреляциялық функциялардың өрнектері орнына олардың бағалары қолданылады:

$$R_{xx} \approx \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot x(t+\tau)dt;$$

$$R_{yx} \approx \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\cdot x(t+\tau)dt.$$

Мұндағы $0 \le \tau \le T_R$, T_R – келесі шарттан анықталатын уақыт: $\tau > T_R$ болғанда

$$|R(\tau)| \le 0.05R_{\max},$$

яғни корреляциялық функция берілген (әдетте 5%) диапазоннан шықпайды (5% кіші корреляция есепке алынбайды).

1.5 Басқару объектілерін математикалық бейнелеу

1.5.1 Басқару объектілері модельдерінің негізгі операторлары.

Басқару объект сыртқы әсерлерді қабылдап, оларға өзінің реакциясын шығудағы шамаларының мәндерін өзгерту жолымен білдіреді. Кіріс шамаларының себептерінен пайда болатын объект реакциясын осы себептер мен уақыт функциясы ретінде көрсету автоматты басқару теориясында объектіні бейнелеу болып табылады. Осы байланыс аналитикалық түрде немесе аналогты виртуалды модель түрінде көрсетілуі мүмкін.

Сонымен, объектінің математикалық моделі кірістегі $x(t)$ шаманың өзгеруімен оған сәйкес шығудағы $y(t)$ шаманың өзгеруін байланыстыратын тәуелдікті сипаттайды. Берілген кірудегі $x(t)$ функциясы бойынша сәйкес шығудағы шаманың $y(t)$ функциясын орындауға қажетті әрекеттер жиынын жүйе *операторы*[1] деп атайды. Кірудегі шаманың $x(t)$ функциясымен оған сәйкес шығудағы шаманың $y(t)$ функциясы арасындағы сәйкестік символдық түрде келесідей жазылады:

$$y(t) = A\{x(t)\},$$

мұндағы A – объект операторы.

Объект операторын орнатудың әртүрлі амалдары бар.

Математикалық модель (бейне) нақты объектінің (оригиналдың) абстрактты кескіні болып табылады. Объект типіне және модельді құру мен қолдану мақсаттарына қарай формалдық бейнелеу әртүрлі болуы мүмкін. Объектілерді моделдеу үшін құрылымдық сұлбалар, операторлық теңдеулер, алгебралық теңдеулер, дифференциалдық, интегралдық, интегро-дифференциалдық теңдеулер, марков тізбектері, беріліс функциялар, жиілік сипаттамалар, салмақты функциялар, графтар, т.б. қолданылуы мүмкін. Осы

[1] Математикада оператор функция түсініктемесінің жалпылауы. Функция сандар арасындағы сәйкестікті орнатса, оператор функциялар арасындағы сәйкестікті орнатады.

модельдердің барлығы объектінің кіріс және шығыс сигналдарын функционалды байланыстырады.

Объектінің кіріс және шығыстарының саны бойынша оларға сәйкес модельдер бірөлшемді және көпөлшемді деп бөлінеді. Жалғыз кірісі мен шығысы бар объект бірөлшемді, ал бірнеше кірістері мен шығыстары бар объект – көпөлшемді деп аталады. Көпөлшемді объектіде кіріс сандары шығыс сандарына тең болмауы мүмкін.

Сызықты жүйелерді бейнелеу үшін әртүрлі әдістер қолданулы мүмкін: дифференциалды теңдеулер, күй кеңістігіндегі модельдер, айырымдық теңдеулер, беріліс функциялары, жиілік сипаттамалары. Бірінші үш әдіс *уақыттық* деп аталады, себебі олар жүйенің жүріс-тұрысын уақыт аймағында бейнелеп, сигналдар арасындағы ішкі байланыстарды көрсетеді. Беріліс функциялар мен мен «нольдер-полюстер» түріндегі модельдер бейнелеудің *жиілік әдістері болып табылады,* себебі олар жүйенің жиілік сипаттамаларымен тығыз байланысып, тек қана кіріс-шығыс қасиеттерін көрсетеді (яғни динамиканы толығымен сипаттамайды). Жиілік әдістер жүйені анализдеу мен синтездеуге алгебралық әдістерді қолдануға мүмкіндік береді, олар есептеулерді жеңілдетеді. Басқа жағынан, автоматты есептеулерге күй кеңістігіндегі модельдерде негізделген әдістер көбірек жарамды, себебі олар сызықты алгебраның есептеу жағынан орнықталған алгоритмдерін қолданады

Физика заңдар негізінде құрылатын объект динамикасының бастапқы модельдері бейсызықты дифференциалды теңдеулер түрінде болады. Жуықтап анализдеу және синтездеу үшін әдетте орнықталған күй аймағында теңдеулерді сызықтандырып, сызықты дифференциалды теңдеулерді алады.

Сонымен, басқару объектісінің моделінің операторлары келесідей көрсетілуі мүмкін.

Дифференциалдық теңдеулер түріндегі операторлар. Бұл модель операторын көрсетудің ең кең тараған түрі - қарастырылып отырған объектінің жүріс-тұрысын бейнелейтін дифференциалдық теңдеулер жүйесін анықтау болып табылады. Қарапайым дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын жинақталған параметрлері бар объектілерді қарастырамыз. Моделді сипаттайтын дифференциалдық теңдеулер жүйесінің реті кірістер мен шығыстар санымен анықталмайды, ол кіріс сигналдарды шығыс сигналдарына түрлендіретін операторына тәуелді.

Дифференциалдық теңдеулерде негізделген көп тараған универсалды модель келесі теңдеумен бейнеленеді:

$$\sum_{i=0}^{p} a_i \cdot y^{(i)} = \sum_{j=0}^{l} b_j \cdot x^{(j)} , \qquad (1.12)$$

мұндағы p – модель реті ($p > l$); $a_p=1;$

a_i және b_j – тұрақты коэффициенттер (модель параметрлері);

$y^{(i)} = \frac{d^i y}{dt^i}$, $x^{(i)} = \frac{d^j x}{dt^j}$ - сәйкесінше шығыс және кіріс сигналдарының туындылары;

$\frac{d^i y(0)}{dt}$, $i = 0,1,\ldots, n-1$ бастапқы шарттары.

Сызықты жағдайда a_i және b_j коэффициенттері x пен y-тен және олардың туындыларынан тәуелсіз. Сонымен бірге, олар уақыттан тәуелсіз болса, онда теңдеу *тұрақты коэффициенттері* бар теңдеу болады. Егер де осы коэффициенттер уақыттан тәуелді болса, онда теңдеу *айнымалы коэффициенттері бар сызықты теңдеу* деп аталады.

Модель $(p+l+1)$ параметрлерімен $c= (a_0,\ldots,a_{p-1},b_0,\ldots,b_l)$ анықталады.

Кірістегі және шығыстағы сигналдары дискретті түрде берілген болса, яғни объект жұмысы $t_k=kT$ (мұндағы T – дискреттеу интервалы) дискретті уақыт моменттерінде көрсетілген, объект динамикасын сипаттау үшін дифференциалды теңдеулер орнына *айырымдық теңдеулер* қолданылады. Кірістегі және шығыстағы сигналдары дискретті мәндерін сәйкесінше:

$$x_{k-j} = x(k-j),$$

$$y_{k-j} = y(k-j),$$

деп белгілеп, айырымдық теңдеуді (дифференциалды теңдеудің аналогын) келесі түрде жазамыз?

$$y_к + a_1 \cdot y_{k-1} + \ldots + a_p \cdot y_{k-p} = \\ = b_1 \cdot x_k + b_2 \cdot x_{k-1} + b_3 \cdot x_{k-2} + \ldots + b_l \cdot x_{k-l+1}. \quad (1.13)$$

Практикада көптеген жағдайда үздіксіз сигналдардың өлшеуі дискретті уақыт моменттерінде өткізіледі, бұл әрі қарай мәліметтерді компьютерде өңдеуге ыңғайлы болады. Үздіксіз модельдерді жуықтап дискретті модельдермен көрсетуге болады. Сонда үздіксіз модельдерден дискретті модельдерге көшу үшін Z-түрлендіруі немесе үздіксіз объектіні сипаттайтын дифференциалдық теңдеудегі туындыларды шектелген айырымдық өрнектермен орын басу қолданылады (соңғы амал тек қана дискреттеу интервалының кіші шамасында және теңдеу реті үлкен болмаса жеткілікті дәлдікті қамтамсыздандырады).

Ғылым мен техниканың әртүрлі салаларында кездесетін стохастикалық жүйелерді қарастырғанда талдауға қажетті бастапқы ақпарат осы жүйемен жасалатын кездейсоқ процестердің іске асырулары болып табылады.

Графиктер немесе осцилограммалар түрінде алынған кездейсоқ процестің іске асырулары өңделіп, уақыттық қатар түрінде көрсетіледі. Уақыттық қатар дискретті және бірдей қадамымен орнатылған уақыт моменттерінде тіркелген кездейсоқ процестердің іске асыру ординаталары болып табылады. Жүйе генерациялайтын осы сигналдардың (уақыттық қатарлардың) цифрлік өңдеуінің нәтижесі бойынша бастапқы үздіксіз жүйе

қасиеттері туралы қорытынды жасалады. Осыған себепті цифрлік параметрлік стохастикалық *авторегрессия* және *жылжымалы орта мән модельдері* кең тарады.

Заманауи модельдеу пакеттерінде ағылшын тілдегі атаулар қолданылады: AR (AutoRegressive) және ARX (AutoRegressive with eXternal input) авторегрессия моделі, ARMAX (AutoRegressive-MovingAverage with eXternal input) - жылжымалы орта мән авторегрессия моделі. Бұл модельдер қарапайым болып табылады және бақылау барысында бағаланатын параметрлер саны көп емес. АРСС-модельдерді уақыттық қатарларды зерттеуге және осы қатарлардың статистикалық сипаттамаларын анықтауға қолдануға болады.

Төменде уақыт аймағындағы бақылау бөгеттерінің әсерлерін есепке алатын бірсыпыра кең тараған дискретті модельдер келтірілген (дискретті уақыт моменттері үздіксіз уақыттың t символымен белгіленген, мұнда t = 0, 1, 2…).

Айтылған теңдеулеріне Z – түрлендіруді қолданып жазамыз:

$$(1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \ldots + a_{na}z^{-na})Y(z) = (b_1 + b_2z^{-1} + b_3z^{-2} + \ldots + b_{nb}z^{-nb+1})U(z),$$

мұнда $z^{-1} = e^{-pT}$ операторы кешігу операторы болып табылады яғни

$$z^{-1}u_k = u_{k-1},\ z^{-2}u_k = u_{k-2}\ ,\ т.с.$$

Ең қарапайым авторегрессия AR моделі болып табылады:

$$A(z)\,y(t) = e(t),$$

мұнда

$$A(z) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \ldots + a_{na}z^{-na}.$$

Бұл жерде және төменде $e(t)$ деп белгілу – дискретті «ақ шудың» белгісі ($e(k)$ қателік шамасы шығудағы сигналды өлшеу қателіктерінің бар болуын және модель параметрлер бағаларының қателіктерін көрсетеді).

Күрделілеу – ARX-модель (AutoRegressive with eXternal input)

$$A(z)\,y(t) = B(z)\,u(t) + e(t)$$

ашып жазуы

$$y(t) + a_1y(t-1) + \ldots + a_{na}y(t-n) = b_1u(t) + b_2u(t-1) + \ldots + b_{nb}u(t-m) + e(t),$$

мұнда

$$B(z) = b_1 + b_2z^{-1} + \ldots + b_{nb}z^{-nb+1}.$$

ARMAX-моделдің түрі:

$$A(z)\,y(t) = B(z)\,u(t - nk) + C(z)\,e(t),$$

мұнда nk – кешігу шамасы,

$$C(z) = 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \ldots + b_{nc}z^{-nc}.$$

Тағы да келесі модельдерді айтуға болады:

- «кіріс-шығыс» моделі (ағылшын әдебиеттерде осындай модельдер «Output-Error» яғни «шығыс-қате», қысқаша OE деп аталады):

$$y(t) = \frac{B(z)}{F(z)} u(t - nk) + e(t),$$

мұнда $F(z) = 1 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + ... + f_{nf} z^{-nf}$;

- Бокс-Дженкис (BJ) моделі:

$$y(t) = \frac{B(z)}{F(z)} u(t - nk) + \frac{C(z)}{D(z)} e(t),$$

мұнда $D(z) = 1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + ... + d_{nd} z^{-nd}$.

Осы барлық қарастырып отырған теңдеулер басқару объектінің сызықты айырымдық теңдеулері болып табылады. Оларды келесідей:

$$A(z) y(t) = \frac{B(z)}{F(z)} u(t - nk) + \frac{C(z)}{D(z)} e(t),$$

сызықты құрамы бар жалпы параметрлік модельдің жеке түрлері деп есептеуге болады. Сонымен бірге олардың барлығын көпөлшемді (бірнеше кірістері мен бірнеше шығыстары бар) объектілерге де қолдануға болады.

Басқару объектін сипаттаудың ең толық амалы – оны *күй кеңістігінде көрсету* болып табылады. Объектінің күй кеңістігі деп ағынды уақыттығы объектінің орнын толығымен анықтайтын x_i, шамалар жиыны болып табылады. Күй айнымалылары (фазалық координаттары) күй векторын құрастырады, басқару және әсер ету айнымалылары басқару мен әсерлер векторларын құрастырады. Осы векторлардың жиыны күй (фазалық кеңістік), басқару және әсерлер кеңістіктерін құрастырады. Келесіні ескерту керек: кіріс, шығыс және күй векторлары арасында принципиалды айырмашылық бар. Кіріс және шығыс векторларының құрамдастырушылары белгілі физикалық шамалар болып табылады, ал күй векторларының элементтері кей кезде физикалық табиғаты анықталмаған абстрактты айнымалылар болуы мүмкін. Объектінің күй айнымалылары ретінде әдетте n координаттар ($y(t)$ шығу сигналы мен оның $n-1$ туындылары) таңдалынады.

Физикалық процестері уақыт бойынша үздіксіз өтетін динамикалық жүйелер үшін, объект күйінің айнымалысының өзгеру жылдамдығын келесі вектормен беруге болады:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, ..., \frac{dx_n}{dt}\right)^T, \qquad (1.14)$$

мұндағы $\frac{dx_i}{dt}$, $i=1,..,n$ – көпөлшемді күй айнымалысының компоненттерінің өзгеру жылдамдығы.

Басқа жағынан, осы жылдамдықтар объектіге әсер ететін $\bar{x}$ күйдің, $\bar{u}$ басқарудың, $\bar{f}$ сыртқы әсерлердің ағынды мәндеріне тәуелді:

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i(\bar{x}, \bar{u}, \bar{f}, t), \;\; x_i(t_0) = x_{i0}, i = 1, \ldots, n, \qquad (1.15)$$

мұнда $g_i(\bar{x}, \bar{u}, \bar{f}, t)^T$ - вектор функция;

$x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$ - бастапқы шарттар.

Егер де $\bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{f}, t)$ – сызықты емес функция болса, (1.15) теңдеуді шешу қиын болады (сызықты емес дифференциалды теңдеу). Дифференциалды теңдеулерді интегралдау әдістері тек қана сызықты жүйелер үшін жақсы өңделген, сондықтан $\bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{f}, t)$ функциясын объектінің орнықталған режиміне сәйкес жұмыс нүкте аймағында сызықтандыру керек.

Қоршаған ортаның әсерін есепке ала отырып, сызықтандырылған $\bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{f}, t)$ функциясы үшін (1.15) түрдегі дифференциалдық теңдеуін келесі векторлық түрде жазуға болады:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t) + E(t)\bar{e}(t), \qquad (1.16)$$

мұндағы *A(t), B(t), E(t)* – түрлендіру матрицалар, олардың элементтері жалпы кезде уақытқа тәуелді функциялар.

Бастапқы нөлдік шарттары бар сызықты дифференциалдық теңдеулерге Лаплас түрлендіруін қолданып объектінің *беріліс функциясын* алуға болады. Беріліс функцияның анықтамасын еске салып кетейік: нөлдік бастапқы шарттардағы және басқа әсерлер нөлге тең болған кездегі шығыстық (реттелетін) сигналдың Лаплас бойынша өрнектелген бейнесінің кірістік (тапсырыстық) сигналдың Лаплас бойынша өрнектелген бейнесіне қатынасын сызықты стационарлы объектінің беріліс функциясы деп атайды. Сызықты және сызықтандырылған жүйелердің математикалық моделін көрсетудің бір түрі беріліс функция болып табылады.

Басқару объектісінің динамикалық сипаттамаларын жиілікке тәуелді құрылған *жиілік сипаттамалар* (амплитудалық және фазалық) арқылы анықтауға болады. Дифференциалдық теңдеулерді есептеуге негізделген әдістерден өзгеше жиілікті әдіс тек қана есептеуге емес, сонымен бірге тәжірибелік болып табылады. Объект кірісіне тұрақты амплитудасы бар синустық сигналдарын беріп отырып шығыстағы сигналдың амплитудасы мен фазалық ығысуын анықтайды. Кірістегі сигналдың жиілігін өзгерте отырып, амплитудалардың (амплитудалық жиілік сипаттамасын) және фазалық ығысуларын (фазалық жиілік сипаттамасын) бірнеше мәндерін анықтайды.

Кірістегі синустық сигналдың амплитудасы мен жиілігінің өзгеру диапазонын объектінің динамикалық ерекшеліктеріне тәуелді таңдайды. Объектінің сызықты болатын диапазонын анықтау үшін жиіліктік

сипаттамаларын кіріс сигналдың әртүрлі амплитудаларында тіркеу керек. Амплитудалық және фазалық жиілік сипаттамалардың кіріс сигналдың амплитудасынан тәуелсіздігі қарастырылып отырған объектінің сызықтығын көрсетеді.

Объектінің *өтпелі* функциясы (сатылы әсерге реакциясы) және *импульсты өтпелі* функциялары да (дельта-функцияға реакциясы) динамикалық сипаттамалары болып табылады. Осыларды біле отырып, объектінің беріліс функциясын анықтауға болады.

Аталған моделдер эквивалентті болып табылады, яғни кез келген біреуін білсек, басқаларын анықтауға болады.

Мысалы, дифференциалды теңдеуден беріліс функцияны табу есептері осы оқулықтың 1.4.1 тарауында келтірілген (2, 3 мысалдар).

Керісінше берілген:

$$W(p) = \frac{0{,}5p + 1}{2p}$$

беріліс функция бойынша дифференциалдық теңдеуді жазу керек болсын.

Кірудегі сигнал *x(t)* және шығудағы сигнал *y(t)* болсын, ал олардың Лаплас түрлендірулерін сәйкесінше *X(p), Y(p)* деп белгілеп, беріліс функцияның анықтамасынан келесіні жазамыз:

$$W(p) = \frac{0{,}5p + 1}{2p} = \frac{Y(p)}{X(p)},$$

осыдан

$$2p \cdot Y(p) = 0{,}5 \cdot p \cdot X(p) + X(p)$$

және уақыт кеңістігіндегі дифференциалды теңдеу:

$$2 \cdot \frac{dY(t)}{dt} = 0{,}5\frac{dX(t)}{dt} + X(t).$$

Осы теңдеу бойынша айырымдық теңдеуді алуға болады. Ол үшін дифференциалды келесідей $\frac{dY}{dt} = \frac{Y(i) - Y(i-1)}{\Delta t}$ айырымдық өрнектермен орын басып, түрлендіргеннен кейін келесі теңдеуді жазуға болады:

$$Y(i) = C_1 Y(i-1) + C_2 X(i) - C_3 X(i-1),$$

мұндағы коэффициенттер

$$C_1 = 1;\ C_2 = \frac{0{,}5 + \Delta t}{2};\ C_3 = 0{,}25.$$

Динамикалық сипаттамалар бойынша объектінің модель операторын құрастыру әдістері төменде идентификациялау бөлімінде қарастырылған.

1.5.2 Теңдеулерді сызықтандыру.

Көптеген механикалық және электр элементтерін олардың айнымалыларының өзгеру жеткілікті кең диапазонында сызықты деп есептеуге болады. Ал, жылулық және гидравликалық элементтер жиі жағдайларда өздерінің әрекет принциптері бойынша сызықты емес болып табылады.

Динамикалық сипаттамаларды анықтау үшін басқару жүйелерде қолдану процестердің динамикасын зерттеудің мақсаты болып табылады. Сондықтан динамиканы бейнелейтін теңдеулердің шешімін міндетті түрде табу қажет болады. Осыған байланысты басқару объектісінің математикалық моделі болып табылатын дифференциалдық және айырымдық теңдеулер әртүрлі қарапайымдау болжамдар негізінде құрастырылады.

Сызықты дифференциалдық теңдеулер жеңіл шешіледі. Бірақ әрқашан объектінің жүріс-тұрысын сызықты теңдеумен бейнелеу мүмкін емес. Осы себепке байланысты аргументтердің берілген диапазонында сызықты емес байланыстар сызықты өрнектермен аппроксимацияланады. Басқа сөзбен айтқанда кіріс аргументердің берілген диапазонында сызықты емес теңдеулерді сызықты теңдеулермен ауыстырамыз - теңдеулерді *сызықтандырамыз*. Сызықты объектілерде кіріс және шығыс сигналдардың байланыстарын беріліс функциямен жеңіл сипаттауға болады. Осындай идеалдау моделді құру процесін қарапайымдайды. Мысалы, дифференциалдық және айырымдық теңдеулерді сызықтандыру нәтижесінде сызықты динамикалық моделдерді аламыз, олардың математикалық аппараты толығымен құрастырылған. Осындай теңдеулерді шешу нәтижесінде объектінің параметрлері мен уақытқа тәуелді өтпелі процестің сипаттамалары алынады.

Әдетте сызықты емес элементтерді сызықтандыру сигналдардың өздерінің стационарлы мәндерінен кіші шамаға ауытқулары бар деген шартта орындалады.

Кірістегі $x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t)$, шығыстағы *y(t)* шамалары және *f(t)* сыртқы әсері бар элемент берілген болсын. Элементтің еркін түрде жазылған сызықты емес динамикалық теңдеуі:

$$F(x_1, x_2, ..., x_m, x_1^{'}, x_2^{'} ..., x_m^{'}, ..., x_1^{(l)}, x_2^{(l)} ..., x_m^{(l)}, y, y^{'}, ..., y^{(n)}) = \varphi(f, f^{'}, ..., f^{(l)}). \quad (1.17)$$

Орнықталған процесс кейбір тұрақты $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, ..., x_n = x_n^0, y = y_0, f = f_0$ мәндерінде орындалады. Сонда орнықталған күйдің теңдеуі (1.17) сәйкес келесідей болады:

$$F(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, 0, 0 ..., 0, y, 0, ..., 0) = \varphi(f^0, 0^{'}, ..., 0). \quad (1.18)$$

Сызықты емес теңдеулерді сызықтандырудың негізінде келесідей болжам орнатылған: зерттелетін динамикалық процесте $x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t), y(t)$

айнымалылар өзгергенде олардың орнықты $(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, y_0)$ мәндерінен ауытқулары әрқашан жеткілікті кіші шама болады.

Аталған ауытқуларды $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_m, \Delta x_1^{'}, ..., \Delta x_m^{'}, \Delta y, \Delta y^{'}, ...$ деп белгілейік. Сонда динамикалық процесте:

$$x_1(t) = x_1^0 + \Delta x_1(t), x_1^{'} = \Delta x_1^{'}, x_2(t) = x_2^0 + \Delta x_2(t), x_2^{'} = \Delta x_2^{'}, ...,$$
$$y(t) = y^0 + \Delta y(t), y^{'}(t) = \Delta y^{'}, ...).$$

Динамикалық айнымалылардың кейбір орнықты мәндерінен ауытқулары кіші шамалар болу шарты әдетте автоматты реттеу жүйесі үшін орындалады. Бекітілген автоматты жүйенің жұмысының өзі осы шартты талап етеді.

f(t) сыртқы әсер автоматты жүйенің жұмысына тәуелді емес, оның өзгеруі еркін бола алады, сондықтан (1.17) теңдеудің оң жағын сызықтандырылмайды (кейбір жағдайларда оныда сызықтандыруға болады). Сызықтандыру әдетте сызықты емес тәуелділіктерді Тейлор қатарына жіктеу жолымен орындалады; жіктеуді бастапқы стационар режим аймағында орындаймыз және жіктеудің тек қана сызықты мүшелерін қалдырып, соңынан алынған теңдеуден статика теңдеуін алып тастаймыз. Осы процедура көмегімен модель теңдеулері айнымалылары арқылы емес, олардың бастапқы стационар режимінен ауытқулары арқылы жазылады. Алынған теңдеуге Лаплас түрлендіруін қолданып объект моделін беріліс функциясы түрінде жеңіл жазуға мүмкіндік береді.

Барлық туындыларын бөлек айнымалылар деп есептеп, аталған кіші ауытқулар дәрежелері бойынша *F* функциясын Тейлор қатарына жіктеп, (1.17) теңдеуді келесі түрде жазамыз:

$$\begin{aligned}
&F(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, 0, ..., 0, y, 0, ..., 0) + (\frac{\partial F}{\partial x_1})^0 \Delta x_1 + (\frac{\partial F}{\partial x_2})^0 \Delta x_2 + \\
&... + +(\frac{\partial F}{\partial x_m})^0 \Delta x_m + (\frac{\partial F}{\partial x_1^{'}})^0 \Delta x_1^{'} + ... + (\frac{\partial F}{\partial x_m^{'}})^0 \Delta x_m^{'} + \\
&(\frac{\partial F}{\partial y})^0 \Delta y + +(\frac{\partial F}{\partial y^{'}})^0 \Delta y^{'} + (\frac{\partial F}{\partial y_n^{'}})^0 \Delta y_n^{'} + ... + \\
&= \varphi(f, f^{'}, ..., f^{(l)}).
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Бұл теңдеуде көпнүкте орнында жоғарғы дәрежелі мүшелер. Олар $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta y, ...$ кіші шамалы ауытқулардың дәрежелері мен көбейтінділерінен тұрады; алдындағы коэффициенттері *F* функцияның барлық айнымалылары бойынша аралас дербес туындылары немесе екінші және одан жоғары ретті дербес туындылары болып табылады.

«0» белгілері бар дербес туындылар олардың орнықталған нүктедегі мәндерін белгілейді. Басқа сөзбен айтқанда барлық дербес туындылары кейбір тұрақты коэффициенттер болып табылады (егер де *F* функцияда *t* уақыты тура

түрде орнатылған болса немесе орнықталған процесс айнымалы мәндерімен анықталатын болса, туындылар уақыт бойынша айнымалы функциялар болады).

(1.19) теңдеуден орнықталған күйдің (1.18) теңдеуін алып, жоғарғы ретті мүшелерін алып тастап, ізделінген сызықтандырылған динамика теңдеуін келесі түрде аламыз:

$$
\begin{aligned}
&(\frac{\partial F}{\partial x_1})^0 \Delta x_1 + (\frac{\partial F}{\partial x_2})^0 \Delta x_2 + ... + (\frac{\partial F}{\partial x_m})^0 \Delta x_m + (\frac{\partial F}{\partial x_1^{'}})^0 \Delta x_1^{'} + ... \\
&+ (\frac{\partial F}{\partial x_m^{'}})^0 \Delta x_m^{'} + (\frac{\partial F}{\partial y})^0 \Delta y + +(\frac{\partial F}{\partial y^{'}})^0 \Delta y^{'} + (\frac{\partial F}{\partial y_n^{'}})^0 \Delta y_n^{'} + ... + \\
&= \varphi(f, f^{'},..., f^{(l)}) - \varphi(f^0, 0).
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

Бұл дифференциалдық теңдеу (1.17) теңдеу сияқты зерттеліп отырған динамикалық процесті сипаттайды.

Бұл теңдеудің бастапқы теңдеуден айырмашылығы келесіде:

- бұл теңдеуде белгісіз функциялар бұрынғы $x_1(t), x_2(t),..., x_m(t), y(t)$ шамалар болмайды, олардың кейбір орнықталған $(x_1^0, x_2^0,..., x_m^0, y_0)$ мәндерден $\Delta x_1, \Delta x_2,..., \Delta x_m, \Delta y$ ауытқулар мәндері болып табылады;

- алынған теңдеу айнымалылардың $\Delta x_1, \Delta x_2,..., \Delta x_m, \Delta x_1^{'},..., \Delta x_m^{'}, \Delta y, \Delta y^{'},...$ ауытқулары бойынша сызықты болып табылады;

- бұл теңдеу жуықталған болады, себебі оны алу кезеңінде жоғарғы ретті шамаларды алып тастадық.

(1.20) теңдеу ауытқулар арқылы жазылған теңдеу деп аталады.

Геометриялық түсініктемесі жағынан сызықтандыруды бастапқы қисықты өзінің жанамасымен орын басу деп түсінуге болады. Зерттелетін динамикалық процесте Δx ауытқулардың шамалары неғұрлым кіші болса (сызықтандыруды қолдануға негізгі шарт), соғұрлым орын басу дәлдігі жоғары болады. Қисық өзінің жанамасына неғұрлым жақын болса, сызықтандыруға рұқсат етілген Δx ауытқулардың шектері соғұрлым кең болады. Әр есепте «жеткілікті кіші шама» болатын ауытқулар шектері әдетте осы себеппен анықталады. Бірсыпыра есептерде сызықтықтан айырмашылық өте аз болу себебінен жүйені Δx ауытқуларының кең диапазонында сызықты деп есептеуге болады. Ал, сызықта еместік нақты белгілі болып тұрған жағдайда сызықтандыруды Δx ауытқуларының кіші диапазонында қолдануға болады. Секірістік тәуелдіктерге сызықтандыруды қолдануға болмайды. Осындай тәуелділіктер едәуір сызықты емес деп аталады.

Геометриялық түсініктемесінен сызықтандырудың келесі қарапайымдылынған әдісін алуға болады: біріншіден теңдеулерді құрастыруға қолданылатын барлық қисықты тәуелділіктерін түзу тәуелділіктілерімен орын

басады (қисықтың сәйкес нүктесіндегі жанамасы бойынша). Сонда теңдеу бірден сызықты болады.

Сызықтандыру процедурасы көмегімен алынған объектінің сызықты моделдері тек қана бастапқы стационар режимнен кіші ауытқуларда орындалатынын әрқашанда еске алып отыру керек.

2 Жинақталған параметрлері бар басқару объектілерінің модельдерін аналитикалық әдістермен құру

2.1 Жалпы принциптері

Объектінің математикалық моделін құру есебі жалпы кезде кірудегі әсер еркін түрде өзгергендегі шығу шамасының өзгеруін анықтайтын жүйе операторын табуға келтіріледі. Реттеу объектілерінің сипаттамаларын анықтайтын *аналитикалық әдістер* олардың дифференциалдық теңдеулерін құруға негізделген. Дифференциалдық теңдеуді құру зат пен энергияны, қозғалыс мөлшерін сақтау негізгі физикалық заңдылықтарға негізделген. Сонымен, модел операторының құрамында процестің жүріс-тұрысын, яғни объектіде бар болатын барлық байланыстарды ескеру аналитикалық моделдердің маңызды ерекшелігі болып табылады.

Жинақталған параметрлері бар объектілердің дифференциалдық теңдеулерін құрастырғанда әдетте материалды және жылулық баланс теңдеулерін қолданады.

Материалды баланс заңы бойынша бекітілген кеңістікте зат массасының уақыт бірлігінің өзгеруі кірудегі және шығудағы ағындардың алгебралық қосындысына тең:

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{i=1}^{k} D_i - \sum_{j=1}^{r} D_i,$$

мұнда D_i $(i=1,k)$ – i-ші кірудегі ағынның массалық шығыны;

D_j $(j=1,r)$ - j-ші шығудағы ағынның массалық шығыны;

G – қарастырылып отырған көлемдегі зат массасы;

t -уақыт.

Сол сияқты уақыт бірлігінде заттың энтальпиясының өзгеруі қарастырылып отырған затқа жылуды әкелетін (немесе алып кететін) жылулық ағындардың алгебралық қосындысына тең:

$$\frac{dI}{dt} = \sum_{i=1}^{k} Q_i - \sum_{j=1}^{r} Q_i,$$

мұндағы Q_i $(i=1,k)$ – i-ші кірудегі жылу ағыны;

Q_j $(j=1,r)$ - j-ші шығудағы жылу ағыны;

I – дене энтальпиясы.

Кез келген математикалық моделді құру процесі моделдеу объектіні физикалық сипаттаудан басталады. Сонымен бірге моделдеу объектіде өтетін

және моделде көрсетілетін «элементарлы» процестерді белгілеп, оларды бейнелеуге қолданатын негізгі шарттарын орнатады. Бұл жерде «элементарлы» деген сөз «қарапайым» дегенді емес, тек қана осы процестер басқа күрделі процестер құрамында болатынын көрсетеді. Әдетте «элементарлы» деп құбылыстардың белгілі класына жататын процестерді түсінеді, мысалы, масса алмасу, жылу тасымалдау, т.с. Көбінесе келесідей «элементарлы» процестерді есепке алады: фазалар ағындарының қозғалысы, фазалар арасындағы массамен алмасу, жылу тасымалдау, агрегатты күйдің өзгеруі, химиялық түрлендірулер.

Есепке алынатын «элементарлы» процестердің тізімі объектіні сипаттайтын және математикалық моделге кіретін құбылыстар жиынын анықтайды.

Кейбір «элементарлы» процестердің теңдеулерін келтірейік:

1) Сыйымдылықты сұйықтықпен толтыру (босату):

$$f\frac{dH}{dt} = Q,$$

мұндағы f – деңгей аймағы;

H - деңгей биіктігі;

Q – сұйықтықтың көлемдік шығыны.

2) Затты қыздыру (суықтату):

$$F \cdot C \cdot \frac{d\theta}{dt} = q\theta,$$

мұндағы F - абсолютты құрғақ заттың массасы;

c – меншікті жылу сыйым;

θ - температура;

q – жылу ағыны.

3) Затты кептіру (дымқылдау):

$$F\frac{d\eta}{dt} = G,$$

мұндағы η - аболютты құрғақ массасына заттың қатынасты ылғалдығы;

G – уақыт бірлігінде түсетін (әкетілетін) ылғалдың массасы.

4) Ерітіндіден (суспензиядан) тұндыру немесе еріту:

$$V\frac{dC}{dt} = G,$$

мұндағы V – ерітіндінің көлемі;

C – еріген заттың концентрациясы;

G - уақыт бірлігінде түсетін (әкетілетін) құрғақ заттың массасы.

5) Булау:

$$F\frac{dE}{dt} = -G = -aQ,$$

мұндағы ε - еріткіш пен ерітілген зат массаларының қатынасы, яғни массалық концентрацияға кері шама;

G - уақыт бірлігінде пайда болатын бу мөлшері;

a – пропорционалдық коэффициенті;

Q - уақыт бірлігінде өткізілетін жылулық мөлшері.

Қарастырылған процестерін келесі жалпы теңдеумен сипаттауға болады:

$$A\frac{dH}{dt} = y, \qquad (2.1)$$

мұндағы A - объектінің динамикалық қасиеттерін сипаттайды және уақыт бойынша H шамасының өзгеру тәртібін анықтайды;

H - процесс режимінің көрсеткіші;

y - объектіге материалдық немесе энергиялық әсер.

Жалпы кезде энергия немесе заттың y қорытынды ағыны объектіге түсетін $Q_к$ және одан әкетілетін $Q_ш$ (шығын) ағындарының айырымына тең:

$$y = Q_к - Q_ш.$$

Жалпы кезде әсерлер объект кірісінен $\Delta Q_{\hat{e}}$ және $\Delta Q_{ø}$ шығын жағынанда орнатылуы мүмкін. $\Delta Q_{\hat{e}}, \Delta Q_{ø}$ әсерлері процестің шығу координатасына тәуелді емес, сондықтан лездегі (бастапқы) мәндері келесіге тең:

$$Q_{к_н} = Q_{к_0} + \Delta Q_к;$$

$$Q_{ш_н} = Q_{ш_0} + \Delta Q_ш.$$

Жалпы кезде $Q_к$ және $Q_ш$ мәндері H-қа тәуелді: $Q_к = Q_к(H),\ Q_ш = Q_{рш}(H)$ және сызықты емес болады. Орнықталған режимде $Q_{к_0} = Q_0,\ H = H_0 + \Delta H$ болатынын есепке алып, сызықтандыру процедурасын қолданып (2.1) теңдеуден келесіні аламыз

$$A\frac{d(\Delta H)}{dt} = (\frac{dQ_к}{dH})_0 \cdot \Delta H - (\frac{dQ_ш}{dH})_0 \cdot \Delta H + (\Delta Q_к - \Delta Q_ш). \qquad (2.2)$$

Өлшемдері жоқ белгілерді енгіземіз:

$$\varphi = \frac{\Delta H}{H_0}, \quad \mu = \frac{y_к}{Q_0} = \frac{\Delta Q_к - \Delta Q_ш}{Q_0} \text{ и } Q_0 = Q_{к0} = Q_{ш0}.$$

Сонда

$$\frac{AH_0}{Q_0} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{H_0}{Q_0}[(\frac{dQ_ш}{dH})_0 - (\frac{dQ_к}{dH})_0] \cdot \varphi = \mu.$$

$T = \frac{AH_0}{Q_0}$ шамасы толық жүктеме бар болатын кездегі объектінің екпін уақыты деп аталады. *T*-ға кері яғни s = 1/T шамасын екпін жылдамдылығы деп атайды.

Объектінің статизм немесе өздігінен тегістелу коэффициенті келесі шамаға тең болады:

$$\delta = \frac{H_0}{Q_0}[(\frac{dQ_ш}{dH})_0 - (\frac{dQ_к}{dH})_0],$$

сонда объект динамикасын сипаттайтын теңдеуі келесі түрде жазылады

$$T\frac{d\varphi}{dt} + \delta\varphi = \mu.$$

Жиі жағдайда осы теңдеуді $|\delta|$ ($\delta \neq 0$ болғанда) шамасына бөлу жолымын алынған процесс теңдеуінің келесі түрін қолданады:

$$\frac{T}{|\delta|}\frac{d\varphi}{dt} \pm \varphi = \frac{1}{|\delta|}\mu, \qquad (2.3)$$

мұндағы «+» таңбасы $\delta > 0$ және «-» таңбасы δ<0 көрсетеді;

$T_0 = \frac{T}{|\delta|}$ шамасын объектінің уақыт тұрақтысы деп атайды,

оның өрнегі:

$$T_0 = \frac{AH_0}{Q_0}[\frac{Q_0}{[(\frac{dQ_ш}{dH})_0 - (\frac{dQ_к}{dH})_0]H_0}] = \frac{A}{\frac{dQ_ш}{dH})_0 - (\frac{dQ_к}{dH})_0};$$

$k_0 = \frac{1}{|\delta|}$ – беру коэффициенті немесе объект күшеюі болып табылады.

Сонда (2.3) теңдеуі келесі түрде жазылады:

$$T_0\frac{d\varphi}{dt} \pm \varphi = k_0\mu.$$

Нөлдік бастапқы шарттары болған кездегі осы теңдеудің жалпы шешімі:

$$\varphi = \frac{\mu_0}{\delta}(1 - e^{-\frac{\delta}{T}\cdot t}). \qquad (2.4)$$

(2.4) теңдеуі бірінші ретті объектінің екпін қисығы болып табылады.

$\delta > 0$ және $t \to \infty$ болғанда φ ауытқуы $k\mu_0$ шамаға ұмтылады. Осындай объектінің өздігінен тегістелуі бар, ол статикалық деп аталады. $\delta < 0$ болғанда (2.4) теңдеудің дәреже көрсеткіші оң таңбалы болады да, ауытқу үздіксіз өседі. Осындай объектілер тұрақсыз деп аталады. $\delta = 0$ болғанда теңдеу келесі түрге түрленеді:

$$T \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \mu .$$

Осынан $\varphi = \frac{\mu_0 \cdot t}{T}$. Осындай өздігінен тегістелуі жоқ объект астатикалық немесе нейтралды деп аталады.

Өздігінен тегістелуі жоқ коэффициенті объектінің маңызды сипаттамасы болып табылады. Ол объектінің диамикалық және статикалық қасиеттерін анықтайды. Жалпы кезде δ коэффициенті екі – тұтынушы және түсу жақтарындағы өздігінен тегістелу коэффициенттерімен құрастырылады:

$$\delta = \delta_ш + \delta_к; \quad \delta_ш = \frac{H_0}{Q_0} \cdot (\frac{dQ_ш}{dH})_0; \quad \delta_к = \frac{H_0}{Q_0} \cdot (\frac{dQ_к}{dH})_0 .$$

Кейбір кезде процесс сұлбасының өзгеруі δ мәніне әсер етеді. Мысалы, сыйымдылыққа сұйықтық денгейден төменінен түсетін болса, онда $\frac{dQ_к}{dH}$ - әр кезде теріс шама болады, ал егерде сұйықтық еркін түсетін болса, яғни $Q_к$ шамасы H шамасына тәуелді емес, онда $\delta_к = 0. \delta \geq 0$ болатын объектілер көп тараған.

Теріс өздігінен тегістелу коэффициенттері бар объектілер мысалы ретінде таңбалы автокатализ кезінде жылдамдайтын каталитикалық реакцияларды атауға болады; кейбір процестердің өздігінен тегістелу режимдерінің аймақтарының әртүрлі шамаларымен бірге қарма-қарсы таңбалары да болады.

Бірінші ретті өздігінен тегістелуі және кешігуі бар объектілердің беріліс функциясы

$$W_0(p) = \frac{k_0}{T_0 p + 1} \cdot e^{-p\tau}, \tag{2.5}$$

өздігінен тегістелуі жоқ объектілердің беріліс функциясы

$$W_0(p) = \frac{1}{Tp} e^{-p\tau}. \tag{2.6}$$

Екінші ретті динамикалық объектілер келесі теңдеумен сипатталады:

$$T_1 T_2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + (T_1 + T_2)\frac{d\varphi}{dt} + \varphi = k_0 \cdot \mu. \tag{2.7}$$

Олардың екпін қисығының кері иілу нүктесі болады және ол $\frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}} \geq 1$ шартында (2.7) теңдеуді шешу жолымен анықталады (апериодикалық процесс):

$$\varphi = k_0 \mu \cdot \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right).$$

Өтпелі процестің басында реттелетін шаманың өзгеруінің кіші жылдамдығы осы қисықтың бірінші ретті объектінің қисығынан маңызды айырмашылығы болып табылады.

Кешігуі бар екінші ретті объектінің беріліс функциясы келесідей жазылады

$$W(p) = \frac{k_0}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p + 1} e^{-p\tau}. \qquad (2.8)$$

(2.6) және (2.8) өрнектерге таза немесе транспортты деп аталатын τ кешігуі кіреді. Ол сыртқы немесе реттеу әсердің пайда болған моментінен реттелетін φ шаманың өлшеу нүктеде өзгере басталу моментіне дейінгі уақытпен анықталады. Зат немесе энергияның ағыны әсер пайда болған жерден реттелетін шаманың өлшенетін жеріне дейінгі аралықты өтуге осы уақыт қажет.

Автоматты реттеу жүйелерді жобалағанда датчиктерді орнату орындарын рационалды таңдау және өтетін зат немесе энергияның пайда болу жерінен өлшеу жеріне дейін таралу жылдамдығын өсіруге қажетті шараларды қолданып объектінің таза кешігу уақытын азайтуға тырысу керек. Осындай мақсатымен объектінің көлемі бойынша затты әртүрлі нүктелерде енгізеді, ерітінділерге араластыруды немесе циркуляцияны қолданады, затты бір нүктеде емес объект көлемі бойынша бірнеше жерден енгізеді, т.с.

Екінші және одан жоғары дәрежелі дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын объектілер әдетте сәйкес физикалық табиғаты бар кедергілермен бөлінетін сыйымдылықтардың (гидравликалық, жылулық, электр,т.б.) тіркестері болып табылады, сондықтан көп сыйымдылықты деп аталады. Осындай объектілерде реттеу немесе қобалжыту әсер пайда болған кезден кейін реттелетін шаманың ауытқу жылдамдылығы біртіндеп өсе бастайды және өзінің максималды шамасына бір уақыттан кейін жетеді. Бұл жағдай келесі себептерден пайда болады: зат немесе энергия ағыны объектінің кедергілері мен сыйымдылықтарынан өткенде масса мен энергиямен алмасу жылдамдылығы шектелген болады. Реттелетін шаманың ауытқу жылдамдылығының біртіндеп өсуі осындай объектілерде кешігудің пайда болуына ықпал етеді. Екпін қисығына өзгеру жылдамдылығының максималды мәніне жеткен нүктесінде жанаманы орнатып, оның уақыт өсімен қиылысу шамасы көмегімен кешігудің τ шамасын анықтауға болады.

Өндірістік объектілерді зерттеулер олардың көбісінің динамикалық сипаттары бірінші немесе екінші ретті дифференциалдық теңдеулерімен бейнелеуге болатынын дәлелдеді. Сондықтан көптеген реттелетін объектілерді келесі төрт типтік топқа бөлуге болады (1 кесте).

1 к е с т е - Реттелетін объектілердің классификациясы

Реттелетін объект	Дифференциалдық теңдеуі	Беріліс функциясы
Өздігінен түзетілуі және кешігуі бар		
бірінші ретті	$T_0 \frac{d\Delta\sigma}{dt} + \Delta\sigma = k_0 \mu(t-\tau)$	$\frac{k_o}{T_o p + 1} \cdot e^{-p\tau}$
екінші ретті	$T_0^2 \frac{d^2\Delta\sigma}{dt^2} + 2\xi T_0 \frac{d\Delta\sigma}{dt} + \Delta\sigma = = k_0 \mu(t-\tau)$	$\frac{k_o}{T_0^2 p^2 + 2\xi T_o p + 1} \cdot e^{-p\tau}$ e-pτ
Өздігінен түзетілуі жоқ және кешігуі бар		
бірінші ретті	$T_0 \frac{d\Delta\sigma}{dt} = \mu(t-\tau)$	$\frac{1}{T_0 p} \cdot e^{-p\tau}$
екінші ретті	$T_0 T_1 \frac{d^2\Delta\sigma}{dt^2} + T_0 \frac{d\Delta\sigma}{dt} = = \mu(t-\tau)$	$\frac{1}{T_0 p \cdot (T_1 p + 1)} \cdot e^{-p\tau}$

2.2 Деңгейді реттеу объектілері

Кейбір басқару объектілердің қарапайым мысалдарын қарастырайық. Бұл мысалдар маңызды емес факторларды есепке алмаған қарапайым жағдайларда қарастырылады. Қарапайым кезде объектілердің тұрақтылығы туралы пікірлер оның дифференциалды теңдеулерін қарастырудан шығады.

Өндірістік объектілерде жиі жағдайда сыйымдылықтар қарастырылады, олардың құрылымына, кіру және шығу ағындарының ерекшеліктеріне байланысты әртүрлі динамикалық қасиеттері болады.

Егер де сыйымдылықтан шығатын $Q_ш$ ағын оған түсетін $Q_к$ ағынға тең болса, онда сыйымдылықтағы сұйықтық шамасы кез келген болуы мүмкін, нөлден сыйымдылық құрылымымен анықталатын кейбір максималды шамаға дейін, ал h деңгейі тұрақты болады, яғни егер де

$$Q_к = Q_ш = Q_0,$$

онда

$$V = Sh = \text{const},\ h = \text{const},$$

мұндағы F - сыйымдылықтың көлденең кесіндісінің аумағы;

V – сыйымдылықтағы сұйықтық көлемі.

Аталған қасиет орнықталған режимде кез келген сыйымдылықтарға орындалады.

Кейбір Δt уақыт аралығында сұйықтықтың кіріс және шығыс ағындары арасында тепе-теңдік бұзылған болсын:

$$Q_к \neq Q_ш; V = F(h + \Delta h) = \text{var}.$$

Онда сыйымдылықтағы сұйықтық деңгейі өзгереді және аталған уақыт аралығында материалды баланс теңдеуі келесі түрде жазылады:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{Q_к - Q_ш}{F} = \frac{\Delta Q}{F}.$$

$\Delta t \to 0$ жағдайда кіріс пен шығыстағы ағындардың үздіксіз өзгеру кезінде материалды баланс теңдеуін аламыз:

$$\frac{d\Delta h}{dt} = \frac{dh}{dt} = \frac{Q_к - Q_ш}{F} = \frac{\Delta Q}{F}. \qquad (2.9)$$

Тек қана шығыс ағыны өзгергенде ΔQ келесіге тең:

$$\Delta Q = Q_0 - Q_ш .$$

Тек қана кіріс ағыны өзгергенде ΔQ келесіге тең:

$$\Delta Q = Q_к - Q_0 .$$

Кіріс және шығыс ағындары бірдей өзгерген кезде:

$$\Delta Q = Q_к - Q_ш. .$$

Сұйықтығы атмосфераға құйылатын сыйымдылықты (резервуарды) қарастырайық (2.1а сурет). Бұл жағдайда кіріс ағынның шамасы деңгейден тәуелсіз, ал шығыс ағынның шамасы оған тәуелді. Шығу ағын шамасы ысырманың кедергісі мен және оның үстіндегі деңгей шамасымен анықталады. Резервуарға түсетін сұйықтықтың $Q_к$ шығыны - басқару әсер, резервуардағы су деңгейі - басқарылатын шама, ал резервуардан шығатын су шығыны $Q_ш$ – сыртқы әсер болып табылады. Сыйымдылық айнымалылары арасындағы келесідей тәуелділікті жазуға болады:

$$S\frac{dH}{dt} = Q_к - Q_ш , \qquad (2.10)$$

мұндағы S – резервуар көлденең кесіндісінің аумағы.

(2.10) теңдеуі объектінің математикалық сипаттамасы болып табылады. Қарастырылып отырған объект нейтралды болады, себебі $Q_к=0$, $Q_c=0$ және $H=H_o$ болған кезде Q шығынды нольге дейін азайтып, содан кейін қысқа уақытқа өсірсек, деңгейі көтеріледі де жаңа $H_o' > H_o$ күйге көшеді. $Q_к$ өсу себебінен dH/dt шамасы өседі, сондықтан объект сипаттамасы монотонды болып табылады.

Екі қатынас сыйымдылықтар үшін (2.1б сурет) объект келесі теңдеулер жүйесімен сипатталады:

$$S_1 \frac{dH}{dt} = Q_{к1} - Q_{ш1} - Q_{12};$$
$$S_2 \frac{dH}{dt} = Q_{к2} - Q_{ш2} + Q_{12}, \qquad (2.11)$$

мұндағы $Q_{12}=Q_{12}(H_1-H_2)$ – кейбір, жалпы кезде сызықты емес, монотонды функция;

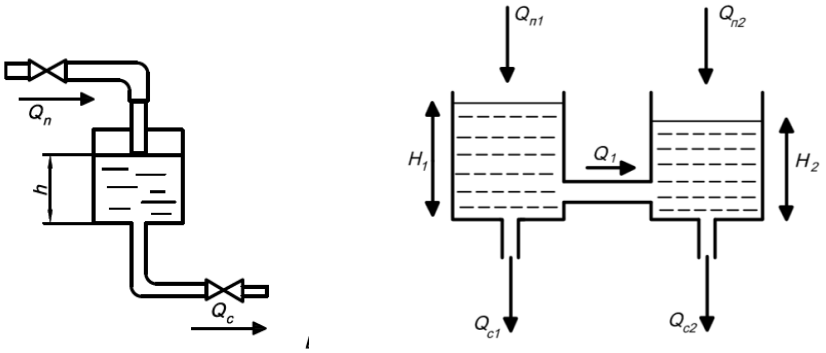
S_1, S_2 – резервуарлар көлденең кесінділерінің аумақтары.

(2.11) теңдеулері объектінің математикалық сипаттамасы болып табылады, онда басқарылатын шамалардың $\bar{y}$ және $\bar{u}$ әсерлердің әр векторының екі координатасы болады

$$\bar{u} = \{ Q_{к1}, Q_{к2} \}, \quad \bar{y} = \{ H_1, H_2 \}.$$

$Q_{к1}$ және $Q_{к2}$ шығындарын бақылайтын құрылғылардың бар болуына байланысты $\{Q_{ш1}, Q_{ш2},\}$ әсерлер векторы бақыланатын g немесе f бақыланбайтын әсер болып есептелінеді.

Басқарылатын H_1, H_2 координаттарын объектінің $\bar{x} = \{x_1, x_2\} = \bar{y}$ күй векторы ретінде алуға болады. $\bar{y}$ вектордың өзара байланысқан және $\bar{u}$ векторының координаттарының екеуінде тәуелді екі координатасы болғандықтан, объектіні көпбайланысты деп есептеуге болады.



а) б)

а) жалғыз сыйымдылық; б) сыйымдылықтар каскады

2.1 сурет –Деңгейді реттеу объектілер

Алдынғы жалғыз резервуары бар мысалдағы өтпелі процестің теңдеуін айнымалылардың ауытқулары арқылы жазайық:

$$S \cdot \frac{d(\Delta H)}{dt} = \Delta Q = \Delta Q_к - \Delta Q_ш. \qquad (2.12)$$

$Q_к$ шығыны жалпы жағдайда кірістегі клапанның ашылуына тәуелді, яғни объектідегі $\eta_ш$ шығын коэффициентінен, H деңгейінен және p қысымнан:

$$Q_к = \phi(H, \eta_ш, p). \qquad (2.13)$$

Сұйықтық шығыны

$$Q_ш = \varphi(H, \eta_ш, p). \qquad (2.14)$$

(2.13) және (2.14) сызықты емес тәуелділіктерді қатарға жіктеп, сызықтандырамыз:

$$\Delta Q_к = (\frac{\partial Q_к}{\partial \eta_к})_0 \Delta\eta_п + (\frac{\partial Q_к}{\partial p})_0 \Delta p + (\frac{\partial Q_к}{\partial H})_0 \Delta H;$$

$$\Delta Q_ш = (\frac{\partial Q_ш}{\partial \eta_ш})_0 \Delta\eta_ш + (\frac{\partial Q_ш}{\partial p})_0 \Delta p + (\frac{\partial Q_ш}{\partial H})_0 \Delta H.$$

Өрнектерді (2.10) теңдеуіне қойып, келесіні табамыз:

$$S \cdot \frac{d(\Delta H)}{dt} + \left[\left(\frac{\partial Q_ш}{\partial H}\right)_0 - \left(\frac{\partial Q_к}{\partial H}\right)_0\right] \cdot \Delta H = \left(\frac{\partial Q_к}{\partial \eta_п}\right)_0 \cdot \Delta\eta_к - \left(\frac{\partial Q_ш}{\partial \eta_ш}\right)_0 \cdot \Delta\eta_ш + \left[\left(\frac{\partial Q_к}{\partial p}\right)_0 - \left(\frac{\partial Q_щ}{\partial p}\right)\right] \cdot \Delta P. \qquad (2.15)$$

(2.15) теңдеуінде ΔH қасындағы коэффициент объектінің өздігінен түзетілуін сипаттайды, ал оның оң жағындағы өрнек $\Delta Q_к$-$\Delta Q_ш$ болады (2.2 теңдеудің белгілерін қараңыз). $\Delta\eta_к, \Delta\eta_ш$ немесе Δp параметрлерінің біреуінің $t = 0$ моментінде секіріс өзгеру кезіндегі (2.15) теңдеудің шешімі екпін қисығы болып табылады ($\Delta\eta_i$ реттеу әсері, ал $\Delta\eta_ð$ мен Δp – қобалжыту әсерлер).

(2.15) теңдеуін түрлендірейік:

$$T\frac{d(\Delta H)}{dt} + \Delta H = k_1 \Delta\eta_к - k_2 \Delta\eta_ш + k_3 \Delta p, \qquad (2.16)$$

мұндағы $T = \frac{S}{k}$, $k = \left(\frac{\partial Q_ш}{\partial H}\right)_0 - \left(\frac{\partial Q_к}{\partial H}\right)_0$, $k_1 = \left(\frac{\partial Q_к}{\partial \eta_п}\right)_0 \cdot \frac{1}{k}$,

$$k_2 = \left(\frac{\partial Q_ш}{\partial \eta_ш}\right)_0 \cdot \frac{1}{k}, \quad k_3 = \left[\left(\frac{\partial Q_к}{\partial p}\right)_0 - \left(\frac{\partial Q_ш}{\partial p}\right)_0\right] \cdot \frac{1}{k}.$$

Егер де аппараттағы p қысымның өзгеруі деңгей шамасын аз өзгертетін болса, тұрақты қысымда (2.16) теңдеу келесідей жазылады:

$$T\frac{d(\Delta H)}{dt} = \Delta H = k_1 \Delta\eta_к - k_2 \Delta\eta_ш.$$

k, k_1 және k_2 коэффициенттерінің мәндерін көлемнің шығын теңдеулерінен аналитикалық түрде анықтауға болады. Сонымен бірге, мысалы, белгілі $\eta_{к_0}$ және $\eta_{ш_0}$ мәндері үшін k коэффициентін объектінің статикалық сипаттамаларынан анықтауға болады.

$Q_ш$ мен $Q_к$ қисықтарына H_o нүктесінде орнатылған жанамалар иілуі $\left(\frac{\partial Q_к}{\partial \eta_к}\right)_0$ және $\left(\frac{\partial Q_к}{\partial H}\right)_0$ мәндеріне сәйкес.

Қарастырылып отырған объектіде сұйықтықтың ағуы еркін немесе алдыңғы және соңғы аппараттардағы қысым айырмашылығы себебінен пайда болады. Кейбір жағдайларда сұйықтық тұрақты жылдамдылығы бар сорғымен айдалады. Онда $Q_ш$ шамасы *H, p* және $\Delta\eta_ш$ шамаларына тәуелді емес, яғни $\Delta Q_ш = 0$. Осындай аппараттарда $\Delta Q_к$ шамасы *H* шамасынан тәуелсіз. Бұл жағдайда (2.15) теңдеуі келесі түрде жазылады

$$T\frac{d(\Delta H)}{dt} = \left(\frac{\partial Q_к}{\partial \eta_n}\right)_0 \cdot \Delta\eta_к$$

немесе

$$T\ \frac{d(\Delta H)}{dt} = \Delta\eta_к,$$

яғни объект астатикалық болып табылады.

2.3 Ерітінді деңгейін реттеу объектісі

Тоқыма өнеркәсібінде соңғы өнімді алу үшін шикізат көптеген өндірістерде әртүрлі өңдеулерден өтеді. Әртүрлі бояғыш затпен бояу кезеңінен тұратын матаны өңдеу процесі технологиялық процестердің бірі болып табылады. Соңынан технологиялық процесті жеңілдету үшін мата бір үздіксіз лентаға құрастырылады. Роликті бояу машиналарда периодты боялған кезде мата роликтар бойынша жылжып, бірнеше рет баяу ерітіндіден өтеді.

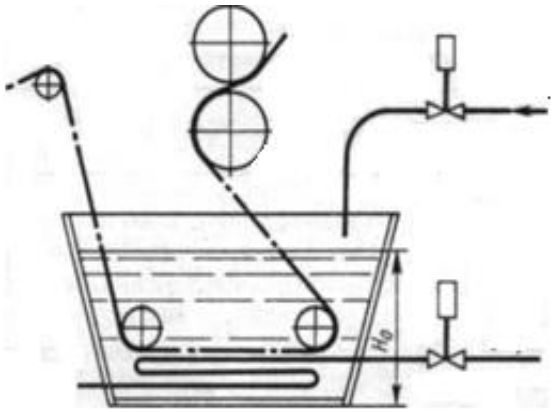
Өңдеу өндірісінде басқару факторлар ретінде келесілерді қарастыруға болады; бояу машиналар ванналары мен кептіру агрегаттардың температураларын реттеу, ерітінділердің деңгейі мен концентрациясын, ылғалдығын, керілісін, матаның ені мен отыруын, жылдамдылық режимдерін реттеу.

Қарастырылып отырған технологиялық процесімен бірге материалды өңдеудің алдыңғы кезеңдерін сипаттайтын параметрлердің айтарлықтай көп санын қобалжыту факторлар ретінде қарастыруға болады. Олардың негізгісі келесілер болады: материалдың физика-механикалық қасиеттері (ылғалдық, алдындағы химиялық өңдеудің сапасы, талшық және қоспа түрі, т.с.), еріндiлір мен бояғыш заттардың сапасы мен тұрақтысы, материалдың керілісі, жылулық режимдер, т.б.

Көпөлшемді басқару объектінің шығу координаттары ретінде өңдеу өндірістің технологиялық процестерінің нәтижелілік көрсеткіштері болып табылады. Олар өндірістің тиімділігі, өнім сапасы, материал мен энергия шығындарымен анықталады.

Бояу машинаның ваннасы тоқыма өнеркәсібінің аппараттарының бірі болып табылады. Осы объектті денгейді реттеу объектілердің тағы бір мысалы ретінде қарастырайық.

Кесіндісі S_0 сұйықтық деңгейі H_0 болатын ваннаға v жылдамдылығымен G (кг) құрғақ матасы түседі. Матаның бастапқы ылғалдығы m_1. Мата ваннадан шыққан кезде m_2 ылғалдыққа дейін сығылады. Ванна толып кетпес үшін әдетте $m_2>m_1$. Ваннаға реттеу клапан арқылы бояғыш заттың $Q_к$ ерітіндісі түседі.



2.3 сурет - Бояу машинаның ваннасы деңгейді реттеу объект ретінде

Сұйықтық шығыны матаның G массасы мен оның шығудағы және кірістегі m_2 және m_1 ылғалдықтарына тәуелді функция:

$$Q_ш = f(G, m_1, m_2).$$

Бұл жерде келесі өрнекті қолданамыз

$$Q_ш = \frac{G(m_2 - m_1)}{\rho},$$

бұл жерде ρ – матамен алып кетілетін ерітіндінің тығыздылығы.

Орнықталған күйде ерітіндінің $Q_к$ кірудегі шығыны сұйықтықтың ваннадан алып кетілетін $Q_ш$ шығынына тең:

$$Q_{ко} - Q_{ш0} = 0$$

мұнда

$$Q_{ш0} = \frac{G_0(m_{20} - m_{10})}{\rho}. \qquad (2.17)$$

Орнықталған күйді сипаттайтын шамалар «0» индексімен белгіленген.

Орнықсыз күйде:

- кіру айнымалы $Q_{к1} = Q_{к0} + \Delta Q_к$ шамаға;

- немесе шығын $Q_{ш1} = Q_{ш0} + \Delta Q_ш$ шамаға өзгерсе ваннадағы сұйықтық шамасы өзгереді, сонымен бірге dt уақытысында сұйықтық көлемі келесі шамаға өзгереді:

$$dV = S_0 \cdot dH,$$

мұндағы S_0 - берілген H_0 сұйықтық деңгейіне сәйкес ванна кесіндісінің ауданы (ваннадағы мата көлемін есепке алмаймыз).

dt уақытында

$$(Q_{к1} - Q_{ш1})dt = S_0 \cdot dH.$$

Соңғы теңдеуді dt шамасына бөліп, алынған теңдеуден (2.17) теңдеуін аламыз, нәтижесінде келесіні жазамыз:

$$S_0 \cdot \frac{dH}{dt} = \Delta Q_к - \Delta Q_ш . \qquad (2.18)$$

Мөлшерсіз шамаларға көшу үшін келесі белгілерді орнатамыз:

$\varphi = \frac{\Delta H}{H_0}$ - реттелетін шаманың (бұл жерде деңгейдің) арақатынасының өзгеруі;

H_0 - реттелетін шаманың номиналды (немесе берілген) мәні;

$\mu = \frac{\Delta Q_к}{Q_{к\max}}$ - кіріс ағынның (реттеу әсердің) арақатынасының өзгеруі;

$f = \frac{\Delta Q_ш}{Q_{ш\max}}$ - сұйықтық шығынының (қобалжыту әсер) арақатынасты өзгеруі.

Осы белгілерді қолданып (2.18) келесі түрде жазамыз:

$$\frac{S_0 H_0}{Q_{к\max}} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \mu - f$$

немесе

$$T_a \frac{d\varphi}{dt} = \mu - f,$$

мұндағы $T_a = \frac{S_0 H_0}{Q_{к\max}}$ - объектінің уақыт тұрақтысы.

Сонымен, ерітіндінің денгейін реттеу объект ретінде ваннада интегралдау (астатикалық) буынның қасиеттері бар, оның кірісіне μ реттеу әсерден басқа келесідей қобалжыту әсері беріледі:

$$f = \frac{\Delta Q_ш}{Q_{к\max}} = \frac{1}{Q_{к\max}}[(\frac{\partial Q_p}{\partial G})_0 \Delta G + (\frac{\partial Q_ш}{\partial m_1})_0 \Delta m_1 + (\frac{\partial Q_ш}{\partial m_2})_0 m_2] =$$
$$= \frac{1}{Q_{к\max}}(\frac{m_{20} - m_{10}}{\rho}\Delta G - \frac{\Delta m_1}{\rho} G_0 + \frac{\Delta m_2}{\rho} G_0). \qquad (2.19)$$

Максималды кіріс ағыны

$$Q_{\hat{e}\max} = \frac{G_{\max}(m_{2\max} - m_{1\max})}{\rho}.$$

$Q_{\kappa\max}$ шамасын (2.19) теңдеуіне қойып, түрлендіріп келесіні аламыз

$$f = k_1 f_1 - k_2 f_2 + k_3 f_3,$$

мұнда

$$f_1 = \frac{\Delta G}{G_{\max}};\ f_2 = \frac{\Delta m_1}{m_{2\max} - m_{1\max}};\ f_3 = \frac{\Delta m_2}{m_{2\max} - m_{1\max}}$$ - әсерлердің түрлері;

$$k_1 = \frac{m_{20} - m_{10}}{m_{2\max} - m_{1\min}}; \qquad k_2 = k_3 = \frac{G_0}{G_{\max}}$$ - оларға сәйкес коэффициенттері.

Сонымен әсерлер матаның жылдамдығының немесе массасының өзгеруінен, сонымен бірге ваннаға түсетін және одан алып кетілетін мата ылғалдығының мәндерінің өзгеруімен пайда болады.

Осы әсерлерді есепке алғанда объект теңдеуі келесідей жазылады:

$$T_a \frac{d\varphi}{dt} = \mu - k_1 f, + k_2 f_2 - k_3 f_3.$$

Реттеу әсерге қатысты беріліс функциясы:

$$W(p) = \frac{1}{T_0 p}.$$

Ал әр қобалжыту әсерлерге қатысты беріліс функциялар:

$$W(p) = -\frac{k_1}{T_0 p}, \quad W(p) = \frac{k_2}{T_0 p}, \quad W(p) = -\frac{k_3}{T_0 p}.$$

2.4 Аналитикалық модельдеуге жылулық баланс теңдеуін қолдану

2.4.1 Жылуалмасу процестерін модельдеу.

Жинақталған параметрлері бар объектілердің дифференциалдық теңдеулерін құрастырғанда әдетте материалды және жылулық баланс теңдеулерін қолданады. Алдында материалды баланс теңдеуін қолданудың мысалдары қарастырылды. Жылу баланс теңдеуін қолдануды мысалдарда қарастырайық.

Көптеген практикалық жағдайларда нақты ағынның қозғалу заңдылықтары тәжірибелік мәліметтер негізінде табылады. Осы заңдылықтарды қолдану жолымен ағынның үшөлшемдігін есепке алмай, бірсыпыра теңдеулерді қарапайымдап, басқаларын жоюға мүмкіндік береді. Осындай қарапайымдауға рұқсат бар, себебі эмпирикалық тәуелділіктер

белгілі дәрежеде ағынның нақты үшөлшемдігін көрсетеді. Нәтижесінде динамикалық сипаттамаларды есептеу үшін бірөлшемді модельді, ал кейбір жағдайларда – жинақталған параметрлері бар модельдерді қолдануға болады.

Жылуды бір жылу тасығыштан екіншіге қабырғасы арқылы табыстау процесін зерттеу үшін бірнеше элементарлы кезеңдерді бөлуге болады: жылудан ыстық жылу тасығыштан суықтау болатын қабырғаға көшуі, қабырға материалымен жылуды сіңіру және қызу, жылудың қабырға көлемі бойынша таралуы, жылудың қабырғадан суық жылу тасығышқа көшу.

Егер де жылумен алмасу процесі стационарлы режимде өтсе, онда материалдың (жылутасығыштар мен қабырғаның) әр нүктесіндегі температура уақыт бойынша өзгермейді. Жинақталған параметрлері бар модельді (математикалық бейнелеуге кеңістік координаталары кірмейді) қолдану жолымен жүйенің температуралары арасындағы алгебралық қатынастарын аламыз. Егер де температуралар уақыт бойынша өзгеретін болса, математикалық бейнелеу қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі түрінде алынады (аргумент ретінде уақыт болады).

Температуралардың кеңістік координаталардан тәуелділігін есепке алсақ статиканың математикалық бейнелеуі қарапайым дифференциалдық теңдеулер (кеңістік координата жалғыз болса) немесе дербес туындылары бар дифференциалдық теңдеулер түрінде жазылады. Бұл жағдайда тәуелсіз айнымалы ретінде кеңістік координаталар қабылданады. Кеңістік бойынша таратылған эффектер болатын болса, динамикалық модель дербес туындылары бар дифференциалдық теңдеулермен бейнеленеді және тәуелсіз айнымалылардың бірі уақыт болады.

Жылудың бір жылу тасығыштан (мысалы, сұйықтық немесе газдың ыстық ағыны) басқаға (қабырғаларға) көшу интенсивтілігі олар арасындағы температураларының айырымына және де жылулық кедергілеріне тәуелді. Бірақ есептеу теңдеулеріне әдетте кедергіні емес, оған кері шаманы енгізеді α – жылу беру коэффициенті, q – жылулық ағын. Толық q жылулық ағыны α жылу беру коэффициенті, F беттің аймағы мен ΔT температуралық тегеуріннің көбейтіндісі ретінде анықталады:

$$q = \alpha \cdot F \cdot \Delta T.$$

Бұл теңдеуді қабырғаның ыстық сұйықтықтан қызуымен бірге керісінше суық сұйықтықтың ыстық қабырғамен жылытуына қолдануға болады; тек қана ΔT таңбасы өзгереді.

Егер де қабырғадағы жылудың таралуын есепке алмасақ, сұйықтықтың ыстық ағынынан қабырғаның қарсы жағындағы суық ағынға жылу беруді келесідей түсінуге болады: бұл процесте жылу ағын екі тізбектелген жылу бері кедергілерді жеңеді – ыстық ағыннан қабырғаға және қызған қабырғадан суық ағынға.

Кедергілер орнына жылу беру коэффициенттерін (α_1 және α_2) қолданып, жылу беру коэффициентін (K) анықтайтын өрнекті аламыз:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}.$$

Практикалық есептеулерде жиі жағдайда жылу беру коэффициентін ағындар арасындағы жылуалмасудың интенсивтілігі ретінде қолданады:

$$q = K \cdot F \cdot \Delta T.$$

Жылу беру коэффициенттері бөлек есепке алынатын болса, ағындарды айыратын қабырғаның орта температурасын қабылдайды. Басқа сөзбен айтқанда қабырға материалының жылу өткізгіші соншама үлкен болғандықтан температураның құлауы жоқ деп есептеледі.

Жылу беру коэффициенттері көп деген параметрлерге тәуелді, әсіресе – ағын жылдамдығына, сұйықтықтың қабырғаға соғу тәртібіне, сұйықтықтың тығыздылығы мен жылу өткізу қабілетіне. Дәл есептеулерді орындағанда жылу беру коэффициентінің ағын параметрлеріне тәуелді екенін есепке алу керек. Бірақ көп деген жылуалмасу жабдықтарының инженерлік есептеулеріне қарапайымдылап қарастыру жеткілікті.

Қабырға арқылы жылу алмасу процестің математикалық бейнелеуін шығару үшін жылу қоры бар бір ортаның жылулық балансын қарастыру керек. Бұл баланс көлемдегі жылудың жиналуын анықтайтын жылудың келуі мен әкетілуінен құрастырылады.

Жылудың жиналуы температураның өзгеруімен байланысты:

$$\rho \cdot c_\rho \cdot V \cdot \Delta T$$

немесе элементарлы көлем үшін

$$\rho \cdot c_\rho \cdot S \cdot dT \cdot dl,$$

мұндағы ρ – тығыздылық;

c_p – меншікті жылусыйымдылық;

V – көлем;

S – ағын кесіндісі;

dl – ағынның элементарлы бөлігі.

Жылудың келуі мен шығыны жылу беру (жылу тасымалдау) қасиетімен, ал таратылған параметрлері бар ағынды жүйеде – конвективті ағынмен келетін және алып кетілетін жылумен анықталуы мүмкін.

Конвективті ағынмен аппаратқа түсетін жылу $G \cdot \rho \cdot c_\rho \cdot T \cdot \tau$ деп анықталады, немесе элементарлы $d\tau$ уақытында элементарлы көлем үшін $G \cdot \rho \cdot c_\rho \cdot T \cdot d\tau$, мұндағы G – ағынның көлемдік шығыны.

Қарастырылып отырған көлемнен конвективті ағынмен алып кетілетін жылу мөлшері келесі өрнекпен анықталады:

$$G \cdot \rho \cdot c_\rho \cdot (T + \Delta T) \cdot \tau$$

немесе элементарлы көлем үшін

$$G \cdot \rho \cdot c_\rho \cdot (T + \Delta T) \cdot d\tau.$$

Жылу берумен анықталатын жылудың түсуі:

$$K \frac{F}{V} (T_c - T) \cdot V \cdot \tau$$

немесе элементарлы көлем үшін элементарлы уақытта

$$K \frac{F}{V} (T_c - T) \cdot V \cdot d\tau,$$

мұндағы T_c - сыртқы жылу тасымалдағыштың температурасы.

Алынған өрнектерді есепке ала отырып, жүйедегі жылудың жиналуы келесідей болады:

$$\rho \cdot c_\rho \cdot V \cdot \Delta T = G \cdot \rho \cdot c_\rho \cdot T \cdot \tau - G \cdot \rho \cdot c_\rho \cdot (T + \Delta T) \cdot \tau + K \cdot F \cdot (T_c - T) \cdot \tau$$

немесе элементарлы көлем үшін элементарлы уақытта

$$\rho \cdot c_\rho \cdot S \cdot dT \cdot dl = G \cdot \rho \cdot c_\rho \cdot T \cdot d\tau - G \cdot \rho \cdot c_\rho \cdot (T + dT) \cdot d\tau + K \cdot \frac{FS}{V} \cdot (T_c - T) \cdot dl \cdot d\tau.$$

Қарапайым түрлендірулерді орындап, толық көлемінде толық (идеалды) ағын бөліктерінің толық араласуы орындалатын жылуалмастырғыштардың динамикасын бейнелейтін жылу баланс теңдеуін аламыз:

$$\rho \cdot c_\rho \cdot S \cdot \frac{dT}{d\tau} = G \cdot \rho \cdot c_\rho \cdot (T_0 \cdot -T) + K \cdot F \cdot (T_c - T),$$

мұндағы T_0, T– кірістегі және идеалды араласу аймағындағы ағынның температурасы.

Ығыстырып шығару принципімен жұмыс істейтін құбырлы жылуалмастырғыштар үшін сәйкесінше динамика теңдеуі келесідей жазылады:

$$\rho \cdot c_\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\frac{G \cdot \rho \cdot c_\rho}{S} \frac{\partial T}{\partial l} + \frac{K \cdot F \cdot (T_c - T)}{V}.$$

Статикалық режимде жүйедегі жылу жиналуы нөлге тең болғандықтан жылуалмастырғыштардың статика моделі келесідей болады:

$$G \cdot \rho \cdot c_\rho \cdot (T_0 \cdot -T) + K \cdot F \cdot (T_c - T) = 0,$$

құбырлы жылуалмастырғыштардың статикасы келесі теңдеумен бейнеленеді:

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \frac{K \cdot F \cdot (T_c - T)}{u \cdot \rho \cdot c_\rho \cdot V},$$

мұндағы u - ағынның қозғалу жылдамдығы.

Осы теңдеулер негізінде жылуалмасу аппаратарының әртүрлі нұсқалары үшін математикалық бейнелеуін құрастыруға болады.

1 мысал. Жылуалмастырғыш ретінде жұқа қабырғалы иректүтік қарастырылады. Ол бойынша идеалды ығыстыру режимінде суытылатын сұйықтық ағыны қозғалады. Иректүтік сыйымдылық арқылы үздіксіз ағатын суға салынған, сондықтан суытатын судың температурасы T_c тұрақты деп есептеледі.

Ағын иректүтік бойынша u жылдамдығымен қозғалады; кірісіндегі ағын температурасы T_0, иректүтіктің ұзындығы l, оның кесіндісі S, K жылу беру коэффициенті, суытылатын сұйықтықтың жылу сыйымдылығы c_p мен тығыздылығы ρ белгілі. Параметрлер температурадан тәуелді емес деп есептеледі, көлемнің өзгеруін есепке алмаймыз. Жұмыс режимі стационарлы деп аламыз. Ағын шығысындағы температураны анықтау керек.

Суытылатын сұйықтықтың Т температурасы келесі дифференциалды теңдеумен сипатталады:

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \beta \cdot (T_c - T), \tag{2.20}$$

мұндағы

$$\beta = \frac{2K}{u \cdot \rho \cdot c_\rho} \cdot \sqrt{\frac{r}{S}}.$$

Тәуелсіз айнымалы 0-ден L-ге дейін өзгергенде (2.20) теңдеуді шешу керек. Шешімді аналитикалық жолмен немесе Рунге-Кутт әдістерінің біреуімен сандық алуға болады.

2 мысал. «Құбыр құбырда» деген тәртіппен құрастырылған жылуалмастырғышта сұйықтық суытылады. Суытылатын сұйықтық пен суық агент параллельді қозғалады. Берілген: суытылатын сұйықтық пен суық агенттің бастапқы температуралары T_{0c}, T_{oa} мен тығыздықтары ρ_{0c}, ρ_{0a}, жылуалмастырғыштың құбырларының диаметрлері: ішкі D_1 және сыртқы D_2 (суық агент үшін), жылуалмастырғыштың ұзындығы L, сұйықтық пен суық агенттің жылу сыйымдылықтары c_p, суытылатын сұйықтық пен суық агенттің көлемдік шығындары G_1 және G_2, жылу беру K коэффициенті. Жылуалмастырғыш шығысындағы ағындардың температурасын анықтау керек. Процесс моделі келесі дифференциалдық теңдеулер жүйесімен көрсетіледі:

$$\frac{\partial T_1}{\partial l} = \frac{K \cdot \pi \cdot D_1 (T_2 - T_1)}{G_1 \cdot \rho_1 \cdot c_{\rho 1}};$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial l} = \frac{K \cdot \pi \cdot D_2 (T_1 - T_2)}{G_2 \cdot \rho_2 \cdot c_{\rho 2}},$$

мұндағы T_1 және T_2 – суытылатын сұйықтық пен суық агенттің температуралары.

3 мысал. Интенсивті араластыруы бар жылу айырбастағышқа белгілі температурамен сұйықтық ағыны түседі.

Жалпы кезде процесс келесідей шарттарда өтеді: қоршаған ортамен жылу алмасу бар және қабырғалардың жылу сыйымдылығын есепке алу керек. Қарастырып отырған мысал үшін келесідей қарапайымдау шарттарды орнатуға болады:

- сыртқы ортамен жылуалмасуды есепке алмау. Бұл жағдайда жинақталған параметрлері бар объект үшін жылу баланс теңдеуі қолданылады, модель түрі келесідей:

$$T \cdot \frac{d\theta_2}{dt} + \theta_2 = k_б \cdot H_1,$$

мұндағы θ_2 – шығу ағынның температурасы;

$H_»$ - уақыт бірлігінде жылуайырбастағышқа келтірілетін жылу мөлшері;

$T = \dfrac{V}{Q_{орта}}$ - уақыт тұрақтысы;

$k_б = \dfrac{1}{(\rho \cdot c \cdot Q)}$ - беру коэффициенті;

ρ - материал тығыздылығы;

c – материалдың жылу сыйымдылығы;

Q - кірудегі ағын.

Теңдеуді шығару жолы толығымен [1, 3.4 т.] қарастырылған;

- қоршаған ортамен жылуалмасу бар; тағы бір жылу баланс теңдеуін жазу керек (ағыннан қоршаған ортаға жылудың жойылуы). Модельді қарапайымдау үшін қоршаған ортамен жылуалмасуды сипаттайтын теңдеуді физикадан белгілі тәжірибелік тәуелділікпен орын басуға болады:

$$H_3 = h \cdot S \cdot (\theta - \theta_c),$$

мұндағы h – жылу беру коэффициенті;

S - жылуалмастырғыштың беті;

θ_c - қоршаған ортаның температурасы.

Бұл кезде де процесс моделі бірінші ретті дифференциалдық теңдеумен көрсетіледі [1,3.4 т.];

- жылу айырбастағыш қабырғаларының жылу сыйымдылығын есепке алу үшін сол сияқты тәжірибелік тәуелділіктерді қолданамыз. Бұл кезде екінші ретті (себебі объектте екі жинақталған сыйымдылықтар болады: жылуалмастырғыш аймағы мен қабырғалар аймағы) қарапайым дифференциалдық теңдеу түріндегі модельді аламыз [1, 3.4 т.].

Материалды және жылу баланс теңдеулерін қолдана отырып, кейбір қарапайым жылу энергетикалық объектілердің модельдерін шығарудың мысалдары [1, 3.5 т.] келтірілген.

2.4.2 Ерітінді температурасын реттеу объектісі.

Бояу машинаның ваннасы реттеу клапан арқылы шығыны g (кг/сек), меншікті энтальпиясы i_0 (кДж/кг) болатын ирек түтікпен жылытылады. Ваннаға түсетін бояу ерітіндінің денгейі берілген H_0 шамасында деңгей реттеуішімен ұсталынады. Түсетін ерітіндінің шамасы G_n кг/сек, тығыздығы ρ_n, температурасы θ_n және меншікті жылу сыйымдылығы c_n. Ваннадағы жұмыс ерітіндінің температурасы θ_p, тығыздылығы ρ_p, меншікті жылу сыйымдылығы c_p, және осы деңгейге сәйкес жұмыс ерітіндінің көлемі V. Ерітіндінің концентрациясы реттеуішпен немесе мөлшерлеуіш құрылғымен реттеледі. Ваннаға алдыңғы машинада сығылған ылғал мата u_m (кг/с) массалық жылдамдылығымен түседі.

Орнықталған күйдің теңдеуі (ваннаның жылу баланс теңдеуі) келесі түрде жазылады:

$$Q_{10} + Q_{20} + Q_{30} + Q_{40} - Q_{50} - Q_{60} = 0, \qquad (2.21)$$

мұндағы

$Q_1 = \alpha \cdot S \cdot (\theta_{ст} - \theta_p)$ - бумен бірге түсетін жылу;

$Q_2 = G_n \cdot c_n \cdot \theta_n$ - ерітіндімен бірге түсетін жылу;

$Q_3 = G_в \cdot c_в \cdot \theta_в$ - сумен бірге түсетін жылу;

$Q_4 = u_m \cdot (c_r + c_{p1} m_1) \cdot \theta_r$ - матамен бірге түсетін жылу;

$Q_5 = u_m (c_r + c_p m_2) \cdot \theta_p$ - алып кетілетін матамен жоғалатын жылу;

$Q_6 = Q_6' + Q_6''$ - қоршаған ортаға Q_6' (жылуберілім) және сұйықтық бетінен булану Q_6'' себептерінен ваннаның жылуды жоғалтуы, мұнда $Q_6' = A_1 \cdot (\theta_p - \theta_{ос})$, A_1 – ванна бетінің ауданы (қарапайымдылау үшін температуралар айырымына тең деп алынады, әдетте $\theta_p < 80^0$ мәндері үшін практикада орындалады);

Q_6' жоғалту шамасы температурадан сызықты емес тәуелді болады, бірақ температуралардың белгілі интервалдарында сызықты $Q_6'' \approx A \cdot \theta$, жуықтауды қолдануға болады, A – ваннаның эквивалентті жылуберілім коэффициенті;

$\theta_{ст}, \theta_в, \theta_г, \theta_{ос}$ - сәйкесінше ирек түтік, қосылатын су, кіретін мата және қоршаған ортаның температуралары;

$c_r, c_в, c_{p1}$ - сәйкесінше құрғақ мата, су, ерітіндінің меншікті жылу сыйымдылықтары (қарапайымдау үшін әрі қарай $c_{p1} \approx c_p \approx c_в = 4{,}19$ кДж/(кг^{0}С) деп аламыз);

α – ирек түтіктен сұйықтыққа қарай жылу беру коэффициенті, кВт/(м^{2}С^0).

S – құбырдың сыртқы беті, м^2.

Орнықпаған күйде жылудың кіріс ағыны мен шығудағы ағыны өзгереді, сондықтан ваннадағы жылу өседі немесе кемиді. Бумен әкелетін жылу ΔQ шамасына, ал ерітіндінің температурасы $\Delta\theta_1$ шамасына өзгергенде ваннаға түсетін жылу ағындардың көбейу сұлбасын қарастырайық.

Реттелетін шама ретінде ерітіндінің температурасын - $\theta_ð$ аламыз, реттелетін әсер – будың шығыны g. Қобалжыту әсер ретінде матаның массалық жылдамдығының u_m өзгеруін аламыз.

Бумен әкелетін жылу ағыны $Q = g(i_o - i_k)$, мұндағы $i_к$ – ирек түтіктен жойылатын конденсаттың энтальпиясы. Қыздырылатын бу шығыны ΔQ өзгерсе, ирек түтіктің қабырғаларының $\theta_{ñò}$ температурасы, ΔQ_1 жылу ағын және $\theta_ð$ температура өзгереді. Бу-су қоспасымен толтырылған ирек түтіктің C_1 жылу сыйымдылығы бар. Қабырғалар $\theta_{ñò}$ температурасының өзгеру процесін келесі теңдеумен сипаттауға болады (ваннадағы сұйықтықтың материалды баланс теңдеуінен):

$$C_1 \frac{d(\Delta\theta_{cm})}{\mathrm{dt}} = \Delta Q - \Delta Q_1 = \Delta Q - \frac{\Delta Q_{cm} - \Delta Q_p}{R_1}, \qquad (2.22)$$

мұндағы $R_1 = \dfrac{1}{\alpha \cdot S}$ - ирек түтіктің термиялық кедергісі.

ΔQ_1 жылу ағынның және кіретін матаның Δu_m массалық жылдамдығының өзгеруі $\theta_ð$ температураның және кіретін маталармен түсетін ΔQ_4 немесе шығатын маталармен алып кетілетін ΔQ_3 жылу ағындардың өзгеруіне, сонымен бірге қоршаған ортаға жылудың жойылуының өзгеруіне себеп болады. Сонда:

$$C_2 \frac{d(\Delta Q_p)}{dt} = \Delta Q_1 + \Delta Q_4 - \Delta Q_5 - \Delta Q_6, \qquad (2.23)$$

мұндағы

$c_2 = V\rho_p c_p$ - ваннаның жылу сыйымдылығы;

$$\Delta Q_1 = \frac{1}{R_1}(\Delta Q_{cm} - \Delta Q_p); \;\; \Delta Q_4 = (c_p + c_{p1} m_1)\theta_{r_0} \Delta U_m;$$

$$\Delta Q_5 = U_{m_0}(c_r + c_p m_2)\Delta\theta_p + (c_r + c_p m_2)\Delta U_m;$$

$$\Delta Q_6 = (A_1 + A_2)\Delta\theta.$$

$Q_4 - Q_5 - Q_6$ өрнегін $\Delta\theta_p$ және Δu_m шамалардан тәуелді өрнек түрінде көрсетіп, келесіні аламыз:

$$C_2 \frac{d(\Delta\theta_p)}{dt} = \frac{\Delta\theta_{cm} - \Delta\theta_p}{R_1} - \frac{\Delta\theta_p}{R_2} + F\Delta U_m, \qquad (2.24)$$

мұндағы

$R_2 = \dfrac{1}{U_{m_0}(c_r + c_p m_2) + (A_1 + A_2)}$ шамасы термиялық кедергінің бірліктерінде көрсетіледі ^{0}С/кВт);

$F = (c_r + c_{p1} m_1)\theta_{r_0} - (c_r + c_p m_2)\theta_{p_0}$.

(2.23) және (2.24) теңдеулерді нольдік бастапқы шарттарда операторлық түрде жазамыз ($p = \dfrac{d}{dt}$ операторын қолданып):

$$\begin{cases} C_1 p\Delta\theta_{cm} = \Delta Q - \dfrac{\Delta\theta_{cm} - \Delta\theta_p}{R_1}; \\ C_2 p\Delta\theta_p = \dfrac{\Delta\theta_{cm} - \Delta\theta_p}{R_1} - \dfrac{\Delta\theta_p}{R_2} + F\Delta U_m. \end{cases} \qquad (2.25)$$

Алынған жүйе кәдімгі алгебралық теңдеулер жүйесі. Осы жүйеден аламыз:

$$R_1 C_1 R_2 C_2 p^2 \Delta\theta_p + (R_1 C_1 + C_2 R_2 + C_1 R_2) \cdot p \cdot \Delta\theta_p + \Delta\theta_p =$$
$$+ R_2 \Delta Q + R_2 (R_1 C_1 p + 1) \cdot F \cdot \Delta U_m.$$

Белгілейміз $T_1 = C_1 R_1$ $T_2 = C_2 R_2$, $T_3 = C_1 R_2$.

Сонда

$$T_1 T_2 \frac{d^2 \Delta\theta_p}{dt^2} + (T_1 + T_2 + T_3)\frac{d\Delta\theta_p}{dt} + \Delta\theta_p = R_2 \Delta Q + R_2 (T_1 p) F \Delta U_m. \qquad (2.26)$$

Өлшемсіз шамаларды орнатамыз:

$$\varphi = \frac{\Delta\theta_p}{\theta_{p_0}}, \quad \mu = \frac{\Delta Q}{Q_{\max}}, \quad f = \frac{\Delta U_m}{U_{m_0}},$$

мұндағы Q_{max} – клапан толық ашық болғанда жылудың максималды ағыны.

$\Delta\theta_p$, ΔQ және Δu_m өрнектерін (2.26) теңдеуіне қойып, оны түрлендіріп, келесіні аламыз

$$T_1 T_2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + (T_1 + T_2 + T_3)\frac{d\varphi}{dt} + \varphi = k_0 \mu + k_1 (T_1 p + 1) f, \qquad (2.27)$$

мұндағы T_1, T_2, T_3 – уақыт тұрақтылары:

$$T_1 = C_1 R_1 = \frac{C_1}{\alpha S},\ T_2 = C_2 R_2 = \frac{C_2}{U_{m_0}(C_r + C_p m_2) + (A_1 + A_2)},$$

$$T_3 = C_1 R_2 = \frac{C_1}{U_{m_0}(C_r + C_p m_2) + (A_1 + A_2)},$$

беру коэффициенттері

$k_0 = \frac{Q_{\max} R_2}{\theta_{p_0}} = \frac{Q_{\max}}{[U_{m_0}(C_r + C_p m_2) + (A_1 + A_2)] \cdot \theta_{p_0}}$ - басқару әсер бойынша беру коэффициенті;

$k_1 = \frac{U_{m_0}[(C_r + C_{p_1} m_1) - (C_r + C_p m_1)] \cdot \frac{\theta_{r_0}}{\theta_{p_0}}}{U_{m_0}(C_r + C_p m_0) + (A_1 + A_2)}$ - қобалжыту әсер бойынша беру коэффициенті.

Сонымен, қыздырылатын ваннаның динамикалық қасиеттері екінші ретті үзбенің динамикалық қасиеттеріне сәйкес; үзбе[2] кірісінде $(T_1 p + 1) f$ қобалжыту әсер бар. Бұл үзбе үш уақыт тұрақтыларымен және k_0 беру коэффициентімен сипатталады. Ылғалдылықтар m_1 және m_2, кірудегі матаның θ_p температурасы, және басқада әсерлерді есепке алғанда (2.27) теңдеудің оң жағына қосымша мүшелер орнатылады.

Объектінің теңдеуін құрастырғанда оған тек қана жалғыз сыртқы әсер – ерітіндінің температурасының өзгеруі әсер етеді деп есептелді. Нақтылықта басқада әсерлер бар (матаның сығылуының, матаның жылдамдығының өзгеруі, т.б.). Оларды есепке алғанда (2.26) теңдеудің оң жағына қосымша мүшелер орнатылуы керек.

Реттеу әсер бойынша беріліс функция:

$$W_0(p) = \frac{k_0}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2 + T_3) \cdot p + 1},$$

қобалжыту әсер бойынша

$$W_1(p) = \frac{k_1 (T_1 p + 1)}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2 + T_3) \cdot p + 1}.$$

(2.27) теңдеудің коэффициенттерін қарастыра отырып, келесі қорытындыларды орнатуға болады (басқада реттеу объектілерге ақиқат болатын).

T_1, T_2 және T_3 уақыт тұрақтыларының шамалары C_1 және C_2 жылу сыйымдылықтар шамаларына және R_1, R_2 жылу кедергілеріне тәуелді. C_1 және C_2 шамаларын тұрақты деп есептеуге болады (ең кемінде ерітіндінің H_0 белгілі деңгей мәнінде). Ал жылу кедергілер R_1 және R_2 пайдалану процесінде өзгереді.

[2] [8] «буын» термині ұсынылған.

Ирек түтіктің жылу беру коэффициентінің өзгеруі, мысалы, бояулар мен тұздар оның бетін ластау себебінен R_1 жылу кедергінің өсуіне себеп болады.

Матаның сығылуы, оның тығыздылығы, қозғалу жылдамдығы өзгерсе, R_2 жылу беру коэффициентіде өзгереді. Ерітіндінің $\theta_ð$ температурасы өзгергенде де бұл кедергі өзгереді.

Осы факторлар k_0 беру коэффициентінің өзгеруіне себеп болады.

Айтылған жағдайларды объект параметрлерін тәжірибелік жолмен анықтағанда (объект жұмысының әртүрлі режимдерінде осы параметрлер әртүрлі болуы мүмкін), осындай объектілерге реттегіштерді таңдағанда (жұмыс жағдайда объект параметрлері өзгергенде реттегіштің параметрлерін өзгертуге мүмкіндік болуы керек) есепке алу керек.

Ерітінді температурасын реттеу процесінің математикалық моделінің құрылымдық сұлбасын қарастырайық. (2.25) операторлық теңдеулерді келесі түрде көрсетуге болады:

$$\begin{cases} \Delta\theta_p = W_1(p)\cdot\Delta\theta_{cm} + W_2(p)\cdot\Delta u_m; \\ \Delta\theta_{cm} = W_3(p)\cdot\Delta Q + W_4(p)\cdot\Delta\theta_p, \end{cases} \tag{2.28}$$

$$\Delta\theta_{cm} = W_3(p)\cdot\Delta Q + W_4(p)\cdot\Delta\theta_p, \tag{2.29}$$

мұндағы

$$W_1(p) = \frac{1}{R_1[C_2 p + (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})]}, \; W_2(p) = \frac{F}{C_2 p + (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})},$$

$$W_3(p) = \frac{R_1}{R_1 C_1 p + 1}, \; W_4(p) = \frac{1}{R_1 C_1 p + 1}.$$

(2.28) және (2.29) теңдеулер жүйесіне келесі құрылымдық сұлба сәйкес (2.4 сурет); онда $\Delta\theta_p$ параметрі бойынша оң таңбалы кері байланысты контур бар.

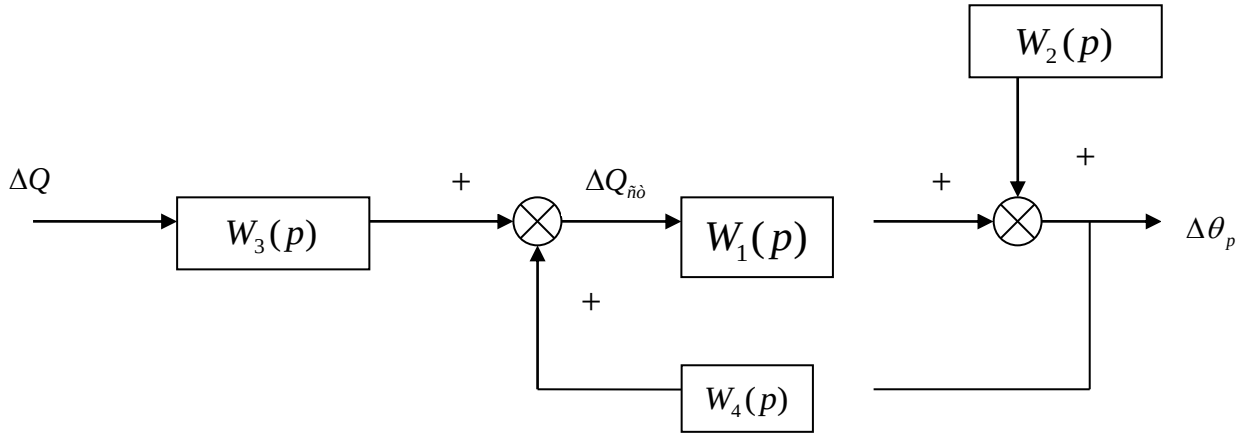
ΔQ басқару әсер бойынша беріліс функция:

$$W_0(p) = \frac{\Delta\theta_p}{\Delta\theta_1} = \frac{W_1(p)\cdot W_3(p)}{1 - W_1(p)\cdot W_4(p)}.$$

$W_1(p)$, $W_3(p)$ және $W_4(p)$ орындарына қойып, $W_0(p)$ таба аламыз.

Қобалжыту әсер бойынша беріліс функция:

$$W_1(p) = \frac{\Delta\theta_p}{\Delta U_m} = \frac{W_2(p)}{1 - W_1(p)\cdot W_4(p)}.$$



2.4 сурет - Ерітінді температурасын реттеу процесінің математикалық моделінің құрылымдық сұлбасы

3 Басқару объектілерін идентификациялау әдістері

3.1 Идентификация мәселесі туралы жалпы мәліметтер

Объектінің математикалық моделі аналитикалық немесе тәжірибелік әдістерімен құрастырылады. Алдында қарастырылған аналитикалық әдістер объектінің математикалық бейнелеуін физика, химия, механика, т.б. заңдылықтары негізінде құрастырады. Объект немесе құбылыс механизмін, яғни объектіде бар барлық себеп-салдар байланыстарды модель операторының құрылымында көрсету осындай модельдердің ерекшелігі болып табылады. Егер де объект жақсы танылған және оның құрылымы қарапайым болса, айтылған амал жеткілікті болады. Сонымен бірге әртүрлі сыртқы және ішкі қобалжыту әсерлер себебінен пайдаланудағы жүйелердің сипаттамалары өзгереді. Сондықтан тек қана онда өтетін физикалық процестерді теориялық зерттеу жолымен күрделі жүйенің дәлдігі жеткілікті жоғары математикалық моделін практикалық құрастыру мүмкін емес. Осы себепке байланысты, егер де объект жеткіліксіз танылған болса немесе оның күрделілігі жоғары болғандықтан математикалық моделін аналитикалық жолмен бейнелеу мүмкін емес болса, тәжірибелік әдістерді қолданады. Осындай әдістерде технологиялық ақпарат статикалық өңделеді.

Басқару есептерін шешу үшін басқару объектінің сипаттамаларын білу керек, яғни дұрыс құрастырылған басқару сигналы объектін белгілі бастапқы күйден қажетті күйге көшіру үшін басқару объектісінің сипаттамаларын білу қажет. Кірудегі және шығудағы сигналдарды өлшеу нәтижелерінің негізінде объектінің сипаттамаларын анықтау *идентификация* деп аталатын автоматты басқару теориясының бағыты айналысады. Біліп тану модельдерге қажетті осындай модельдер құбылыстың ішкі механизмдерін бейнелемеуі мүмкін. Олар объект кірістері мен шығыстары арасындағы тек қана кейбір формалды байланыстарды орнатады. Осы байланыстың сипаттары мен ерекшеліктері

басқару объектісін идентификациялау процесінде алынған модельдің негізі болып табылады.

Сонымен, пайдаланудағы жүйелердің математикалық модельдерін априорлы және тәжірибелік ақпарат негізінде құрастыру әдістерін идентификация қарастырады және де әртүрлі физикалық табиғаты бар күрделі объектілерді басқарудың теориясы мен практикасының негізгі әдісі болып табылады.

Жалпы түрде объектінің кірістегі әсерлерін шығыстағы сигналдарға түрлендіретін операторын табу процесі идентификация есебі болып табылады. Математикалық кіріс және шығыс функциялары арасындағы сәйкестікті келесі өрнек түрінде жазуға болады:

$$y(t) = A(f)u(t),$$

мұндағы $A(f)$ – қобалжыту әсерлерге тәуелді, алдына ала белгісіз математикалық оператор, оны анықтау керек;

$y(t)$ – объектінің шығу координаталарының векторы;

$u(t)$ – басқару (кіріс) векторы;

u және y – сәйкесінше идентификацияланатын жүйенің кірісіндегі және шығысындағы векторлық айнымалылары, олар детерминді немесе кездейсоқ болуы мүмкін.

u және y шамалары объектіде кездейсоқ бөгеттер бар болған кезде өлшенетінін есепке алып отыру керек.

Идентификациялау есебінде белгісіз А операторын бағалау керек. Осы есепті шешу барысында жүйе туралы қажетті ақпаратты жинау үшін сәйкес пассивті немесе активті тәжірибелерді (жүйенің кейбір айнымалыларын бақылау) жасау болжанады; содан кейін осы ақпаратты және сәйкес әдістерді қолдана отырып, жүйенің математикалық моделі туралы ашық түрде ақпаратты алу.

Ең кең мағынада идентификация тізбектеліп шешілетін есеп ретінде қарастырылуы мүмкін, осы тізбек қатарында: тәжірибелерді жоспарлау, белгісіз A операторының класын анықтау, белгісіз параметрлерді бағалау (детерминді немесе кездейсоқ шамалар мен функциялар). Идентифиуациялау мәселесіне осындай амал қиын шешілетін есепке әкеледі. Бірақ есептің осылай қойылуы келесіні есепке алуды талап етеді: тәжірибелерді жоспарлау, белгісіз операторының класын бағалау, белгілі кластағы оператордың параметрлерін бағалау мәселелерін бірге шешу қажет.

Идентификация мәселесінің басқа да қойылуы бар, мұнда тек қана тәжірибелерді жоспарлау мен белгілі кластағы оператордың векторлық немесе скалалярлық параметрлерін бағалау есептері қарастырылады. Сонымен, кейбір c векторлы немесе скалярлы параметрлерінің дәлдігімен A операторының класы белгілі деп есептеледі (идентификацияға жататын жүйе туралы априорлы ақпарат негізінде оператордың класы анықталған деп есептеледі). Онда операторлық теңдеу келесі түрде жазылады:

$$y(t) = A(c)u(t),$$

мұндағы $A(c)$ – u сигналға әсер ететін және кейбір белгілі тәртібімен белгісіз векторлық c параметріне әсер ететін оператор.

Бұл жағдайда белгісіз c параметрдің белгілі мағынады оптималды бағасын алуға мүмкіндік беретіндей u мен y бақылаудың жоспарын құру және бағаларын есептеу әдісін таңдау керек. Жиі жағдайда параметрлерді бағалау әдісі ретінде ең кіші квадраттар әдісі, яғни ортаквадратты критерий қолданылады. Осы жерде келесіні ескерткен жөн. Параметрлерді бағалау критерийді таңдау бөгеттер сипаттамаларына, яғни олардың статистикалық қасиеттеріне тәуелді. Бөгеттер қалыпты заңмен таралған болса, ең үлкен дәлдікті ортаквадраттар критерийі береді. Әртүрлі кездейсоқ шамаларды бейнелеу үшін ең жиі қолданатын қалыпты таралу заңы. Қалыпты заңның теориялық негіздеуі ықтималдық теориясындағы теорема болып табылады. Осы теоремаға сәйкес, егер де кездейсоқ шаманы саны көп тәуелсіз кездейсоқ әсерлер қосындысы ретінде қарастыруға болса (әрқайсысының әсері өте аз шама), онда зерттелетін кездейсоқ шама қалыпты таралу заңына бағынады (құрастырушы шамалардың таралу заңдары еркін болса да). Саны көп тәуелсіз қобалжыту әсерлер себебінен көптеген оқиғалар кездейсоқ тәртіппен орындалады. Осындай оқиғалардың таралу заңы қалыпты заңға жақын. Қалыпты заң саны көп әрқайсысының таралу заңдары еркін n тәуелсіз кездейсоқ шамалар қосындысы үшін шекті заң болып табылады. Тек қана жалпы қосындыдағы барлық құрастырушылардың үлесі өте кіші шама болуы керек. Әрине, кез келген кездейсоқ шама осы заңға бағынады деген емес. Қалыпты заң таралу заңдардың бір түрі, табиғатта кездесетін көптеген құбылыстарды жақсы сипаттайды, практикада жиі қолданылады. Сонымен бірге, осы заңның жақсы математикалық қасиеттері бар. Сондықтан, көбінесе статистикалық әдістерде зерттелетін шама қалыпты заңға бағынады деп есептеледі (әрине, практикада бұл болжауды тексеру керек).

3.2 Негізгі анықтамалар

Объект операторы оның математикалық сипаттамасы, яғни математикалық моделі болып табылады. Математикалық модель дегеніміз теңдеулер жиыны мен шектеу шарттар, олар сандық түрде объект айнымалылары арасындағы байланыстарды бейнелейді. Динамикалық жүйелердің жүріс-тұрысы кеңістік және уақыт аймағында дифференциалды, интегралды, айырымдық теңдеулермен сипатталады. Жиілік аймақта сызықты жүйенің математикалық моделі жиілік сипаттама болып табылады, бейне кеңістігінде – беріліс функция. Жүйенің жүріс-тұрысы жалпыланған координаттар арқылы фазалық кеңістікте бейнеленсе, сәйкес математикалық модельдер күй кеңістігіндегі модельдер болып табылады. Модельдің бір типінен басқа типіне бірмағыналы көшуді орнатуға болады.

Математика көзқарасы жағынан операторлар сәйкес кеңістіктерде, яғни оларға түрлендірулер қолданылатын элементтер жиындарында анықталады. Осындай кеңістіктер мысалдары: үздіксіз функциялар, n-ші ретіне ($n > 0$)

дейін үздіксіз туындылары бар үздіксіз функциялар, квадратымен қосындыланатын функциялар, т.б.

Оператор өзінің құрылымы мен параметрлерімен сипатталады. Мысалы, дифференциалды оператордың құрылымы оның *n* ретімен анықталады, ал теңдеу коэффициенттері параметрлер болып табылады. Күрделі жүйені толығымен математикалық бейнелеу орындалмайтын есеп, себебі оның жұмыс барысындағы барлық қобалжыту әсерлерін есепке алу мүмкін емес. Математикалық модель тек қана анықталған есепке, жобалауға, бақылау немесе басқаруға қажетті нақты жүйенің заңдылықтарын көрсетеді.

Идентификация процедурасын бастау үшін қажетті объект туралы барлық ақпараттар екі түрге бөлінеді: априорлы және апостериорлы ақпарат.

Объекттің кірістері мен шығыстарын бақылау алдында бегілі *априорлы ақпарат* идентификацияланатын объектінің құрылымын анықтайды. Мысалы, келесі төрт белгіні (бірақ, құрылым тек олармен анықталмайды) атауға болады: динамикалық, стохастикалық, сызықсыз, дискреттілік қасиеттер. Әрине, объект туралы пікірлер апостериорлы ақпаратты талқылағаннан кейін, яғни объектінің кірістері мен шығыстарының жүріс-тұрысын бақылағаннан кейін өзгеруі мүмкін.

Апостериорлы ақпарат сандық түрде көрсетіледі, яғни бұл объектінің кірісі мен шығысын бақылау нәтижелері (протокол). Үздіксіз объектілер үшін үздіксіз мәліметтердің тіркелулерін аламыз: бір бақылау периодындағы ($0<=t<=T$) объект кірісінің барлық өлшеулері $x(t)$ және оның шығыстарының өлшеу нәтижелері $y(t)$. Протокол келесі түрде жазылады: $(<x(t), y(t)>, 0<=t<=T)$. Мұның мағынасы келесідей: объект жүріс-тұрысы $n+m$ әртүрлі қисықтар $x_1(t),\ldots, x_n(t); y_1(t),\ldots, y_m(t)$ түрінде осы интервалда тіркелген.

Дискретті жағдайда $x = (x_1,\ldots, x_N)$, $y = (y_1, \ldots, y_N)$ және де протокол келесі ($<x_i\ y_j>$, $i=1,\ldots, N; j = 1,\ldots,N$), түрде жазылады, мұнда $x = (x_{1i},\ldots,x_{ni})$, $y_i = (y_{1i},\ldots, y_{mi})$. Осы протокол $n+m$ тік жолдары және N жәй жолдары бар кесте болып табылады.

Жүйе туралы априорлық ақпарат көлеміне қарай идентификациялау *кең мағынадағы* және *тар мағынадағы* деп бөлінеді. Модель операторының құрылымын анықтау процесі *кең мағынадағы* (немесе *құрылымдық*) идентификациялау деп аталады. «Құрылым» деген түсініктеменің анық анықтамасы жоқ және әртүрлі авторлар бұл түсініктемені әртүрлі талқылайды. Берілген коэффициентеріне дейінгі дәлдікпен алынған оператор түрін модель құрылымы деп атаймыз. Құрылымдық идентификациялау кезінде объект операторының құрылымы мен түрін, басқа сөзбен айтқанда объектінің математикалық моделінің түрін анықтайды. Сонымен, нақты басқару объектіні математикалық модель түрінде көрсету құрылымдық идентификациялау есебі болып табылады.

Модельдің құрылымын анықтау идентификация теориясының негізгі мәселесі болып табылады. Әдетте, математикалық модельдерді синтездеу жұмыстарда модель құрылымы кейбір коэффициентері жиынтығы дейінгі дәлдікпен алдыны ала орнатылады. Соңынан, осы жиын зерттеудің негізгі объектісі болады. Құрылымды таңдағанда көбінесе қолданылатын амал статистикалық амал болып табылады, берілген модель-үміткерлер класында шешім қабылданады. Бірақ бақылауға қол жетімді формалданған амалдар объектінің ақпараттық жиыны негізінде модель құрылымын таңдауға ешқандай формалданған амалдар мен әдістер жоқ. Бұл жағдайдың себебі келесіде: модельдің құрылымының кейбір элементтерін адекватты математикалық түсіндіруге мүмкін емес.

Сондықтан құрылымдық жиынтықты бар математикалық тілде, яғни берілген жиынтықтың функциялары класында бейнелеуге мүмкін болатын математикалық категориялар мен объектілерге дейін тарылтады.

Математикалық модельдің түрі объект типіне қарай анықталады. Техникалық жүйелердің математикалық модельдері ретінде қарапайым және дербес туындылары бар дифференциалды теңдеулер қолданылады. Басқару есептерін шешуге күй кеңістігіндегі модельдері және қарапайым дифференциалды теңдеулерлері бар құрылымдалған модельдер жиі қолданылады.

Кірудегі және шығудағы сигналдарды өлшеу нәтижелері негізінде математикалық модельдің құрылымы анық болған кезде оның параметрлерін бағалау *тар мағынадағы* идентификация болады. Кең мағынадағы идентификация кезінде жүйе туралы априорлы ақпарат өте аз немесе жоқ болады. Тар мағынадағы идентификация кезінде керісінше жүйе туралы априорлы ақпарат жеткілікті болады.

Егер де модель операторы оның параметрлеріне дейінгі дәлдікпен берілсе, *параметрлік* идентификациялау есебін аламыз. Бұл есептің қойылуы келесідей: тәжірибелік мәліметтер негізінде модель анықталған мағынада ең тиімді (немесе жеткілікті дәлдікпен) объект операторын аппроксимациялайтындай параметрлер векторының мәндерін анықтау. Объектінің математикалық моделі анықталғаннан кейін (оператор құрылымы анықталды), математикалық модельдің сандық параметрлерін анықтау мақсатымен параметрлік идентификацияны орындайды. Параметрлік идентификация әдістерін қолданғанда бірден объектінің беріліс функциясының коэффициенттері немесе объект теңдеулері анықталады.

Егер де модель операторында белгісіз функциялары бар болса, осындай операторлар терминдерінде идентификация *параметрлі емес* деп аталады. Бұл топтың әдістері объектінің уақыттық немесе жиілік сипаттамаларын және де объект тудыратын кездейсоқ процестерінің сипаттамаларын анықтауда қолданылады. Алынған сипаттамалар көмегімен соңынан объектінің беріліс функциясы немесе теңдеуі табылады. Қазіргі таңда параметрлік идентификация әдістері кең тараған.

Нақты басқару объект өзара байланысқан бөлек элементтер мен блоктардың жиыны болып табылады. Сондықтан практикада бүкіл жүйенің математикалық моделін объектінің бөлек элементтері мен блоктарының қарапайым математикалық модельдерінің жиынтығы ретінде көрсетеді, яғни объекттің *құрылымданған* моделін қарастырады. Математикалық бейнелеудің осындай түрі басқару жүйені құрастырудың физикалық және техникалық принциптерін қамтып көрсетеді және тұтас жүйе бірге оның бөлек элементтерінде өтіп жатқан процестерді зерттеуге мүмкіндік береді. Басқару жүйелердің техникалық ұйымдастыруын есепке алатын құрылымданған модельдер келесі шарттарда құрастырылады:

1) Жүйенің барлық элементтері қарапайым үзбелер болып табылады, яғни оларда жалғыз кіріс пен жалғыз шығыс болады. Егер де үзбе бірнеше жалпыланған координаттармен сипатталса, шығу шама ретінде үзбенің шығу немесе реттелетін шамасы болатын координатасы таңдалынады.

2) Жүйені құрастыратын барлық үзбелердің шығу шамалары тек қана кірудегі шамаға тәуелді. Егер де үзбенің шығудағы шамасы кірудегі шамаға әсер ететін болса, үзбені кері байланысы бар үзбелер жиыны ретінде қарастыруға болады.

Сонымен, басқару жүйенің құрылымдаған моделі бөлек үзбелердің өзара байланысқан бірсыпыра математикалық модельдеріне бөлінеді. Сонда тізбектеп, ішкі үзбелердің кіру және шығу сигналдары болатын барлық ішкі айнымалыларды қарастырудан жойып, жүйенің кіріс және шығыс айнымалыларының байланысын бейнелейтін дифференциалды теңдеуді табуға болады.

3.3 Идентификациялаудың тура әдістері

3.3.1 Тәжірибелік идентификация әдістері.

Объектінің динамикалық сипаттамаларын анықтаудың тәжірибелік әдістерін әртүрлі жолмен классификациялауға болады. [1] әдістерді келесі үш негізгі топқа бөлу ұсынылған:

- *тура әдістер* нүктелердің шектелген санында арнайы түрлі сыналатын сигналдарды қолданып байланыс операторының дискретті мәндерінің тізбегін анықтауға мүмкіндік береді. Бұл топтың әдістерімен келесідей сипаттамалар анықталады: жиілік аймағында – амплитудалық $|W(j\omega)|$ және $\varphi(\omega)$ фазалық сипаттамалары, $W(j\omega)$ годографтары, т.б; уақыт аймағында – импульсті өтпелі $g(t)$ және $h(t)$ өтпелі функциялары. Мысалы, жүйе кірісінде сатылы сигналды орнатып, жүйе шығысында өтпелі процесті алады. Өтпелі процестің графигі бойынша басқару объектінің маңызды динамикалық сипаттамаларын бағалайды: таза транспорттық кешігу, өздігінен тегістеу, инерциялық. Беріліс функцияның және сәйкес дифференциалдық теңдеудің коэффициенттері анықталады;

- *параметрлік идентификация* немесе белгілі құрылымы бар *модель параметрлерін қалпына келтіру әдістері.* Жалпы жағдайда берілген құрылымы бар модельдің параметрлерін бағалау таңдалынған сапа критерийін минимумдау жолымен шешіледі; ол критерий жоғалту функция (көбінесе объект пен оның болжанатын моделінің шығыстарының сәйкеспеуінің орта квадраты) болып табылады. Осы топтың әдістерін қолдану нәтижесінде бірөлшемді объектінің дифференциалдық теңдеуінің коэффициенттерін, демек беріліс функцияның коэффициентерін анықтауға болады;

- *параметрлі емес идентификация* немесе объектінің белгісіз динамикалық сипаттамаларын анықтап, оларды аналитикалық өрнектермен аппроксимациялауда негізделген әдістер; аналитикалық өрнектер зерттеушіде бар объект туралы априорлы ақпарат негізінде таңдалады. Бұл жерде статистика әдістері қолданылады, олар ақпарат көзі ретінде идентификацияланатын объектінің табиғи кездейсоқ сигналдарын пайдаланады.

Басқару жүйелерді бірінші іске асырылған идентификация әдістері жиілік сатылы және импульсті әсерлерді қолдануда негізделген болғандықтан, әдістердің бірінші тобын қарастырамыз. Әдістің мәні келесі де. Әрекеттегі объектіде кіріс каналы бойынша үш типтік қобалжыту әсерлердің біреуі орнатылады: бірлік сатылы сигнал, бірлік импульс, әртүрлі жиіліктегі синустық тербелістер.

3.3.2 Объект моделін типтік динамикалық үзбелермен аппроксимациялау.

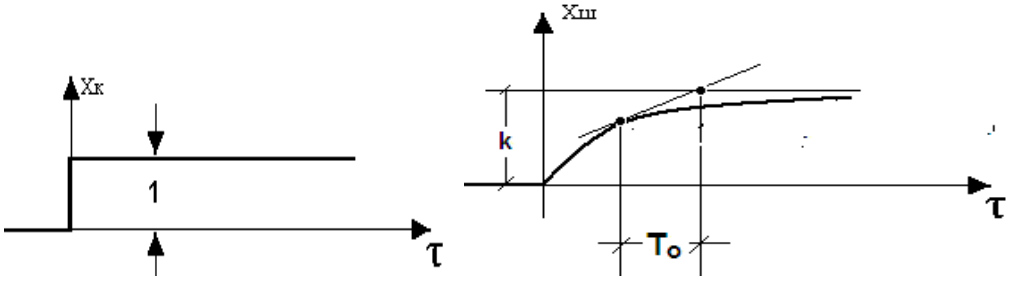
Басқару объектілерді тәжірибелік әдістерімен модельдеудің классификациясы бойынша әдістердің бірінші тобы – *тура* әдістер. Әдістің мәні келесіде. Әрекеттегі

объектіде кіріс каналы бойынша үш типтік қобалжыту әсерлердің біреуі орнатылады: бірлік сатылы сигнал, бірлік импульс, әртүрлі жиіліктегі синустық тербелістер.

Жиі жағдайда бірлік сатылы түріндегі қобалжыту әсер қолданылады. Объектінің осындай әсерге реакциясы – объектінің шығудағы сигналының уақыт бойынша өзгеруінің графигі *тәжірибелік екпін қисығы* деп аталады. Содан кейін арнайы, бірегей (тек қана автоматты басқару теориясында) математикалық аппарат қолданылады – алты типтік динамикалық үзбелердің жиыны. Егер де объектіні «қара жәшік» ретінде қарастырсақ, яғни біздер объектіде өтіп жатқан физика-химия процестері туралы ештеңе білмейміз деп есептесек, келесіні түсінуге болады: технологиялық процесс табиғаты, көлемі мен конфигурациясы бойынша әртүрлі басқару объектілерінің жұмысының динамикалық режимінде математика жағынан объектінің шығу сигналын кірудегі сигналымен байланыстыратын бірдей типтік теңдеуімен бейнеленеді. Автоматты басқару теориясында объектінің шығыс сигналымен кірістегі сигналын өзара байланыстыратын теңдеулердің 6 түрі іректелген, олар *типтік динамикалық үзбелер* деп аталған. Объектінің динамикалық режимдегі жұмысында, яғни объектідегі зат пен энергияның кіру ағындарымен шығу ағындары арасындағы тепе-теңдік бұзылған кезде, кірудегі және шығудағы сигналдар уақыт бойынша өзгереді, сондықтан типтік теңдеулердің көбісі дифференциалдық теңдеулер болып табылады.

Автоматты басқару теориясының математикалық аппаратын - типтік динамикалық үзбелердің жиынын - қолданудың әдістемесі келесі де: әр типтік динамикалық үзбеде (кірудегі және шығудағы сигналдардың байланысуының типтік теңдеуінен басқа) өзінің *типтік екпін қисығы* және де тағы бірсыпыра сипаттамалары бар. Пайдаланудағы объектіде алынған тәжірибелік екпін қисығын типтік динамикалық үзбелердің алты типтік екпін қисықтарымен салыстырады, содан кейін тәжірибелік және әлдеқандай типтік екпін қисықтарының уақыт бойынша өзгеру тәртіптерінің сәйкес келуіне қарай зерттелетін объектіні осы типтік динамикалық үзбемен орын басады (аппроксимациялайды). Сонда осы типтік динамикалық үзбенің өзара байланысу теңдеуі объектінің шығудағы және кірудегі сигналдарының өзара байланысу теңдеуі немесе объектінің математикалық моделі болады. Типтік динамикалық үзбенің осы типтік теңдеуіне кіретін коэффициенттер шамалары объектінің тәжірибелік екпін қисығы бойынша табылады. Мысалдарды қарастырайық.

1 мысал. Объект кірісіне бірлік секіріс сигнал берілгеннен кейін тәжірибелік екпін қисығы алынған (3.1 сурет); ол өзгеру сипаты бойынша апериодты (инерциялық, статикалық) типтік динамикалық үзбенің типтік екпін қисығына сәйкес келеді.



3.1 сурет – Статикалық объектінің тәжірибелік екпін қисығы

Сондықтан осы объектті апериодты типтік динамикалық үзбемен орын басуға (аппроксимациялауға) болады. Оның типтік дифференциалдық теңдеуі мен беріліс функциясы келесі түрде жазылады:

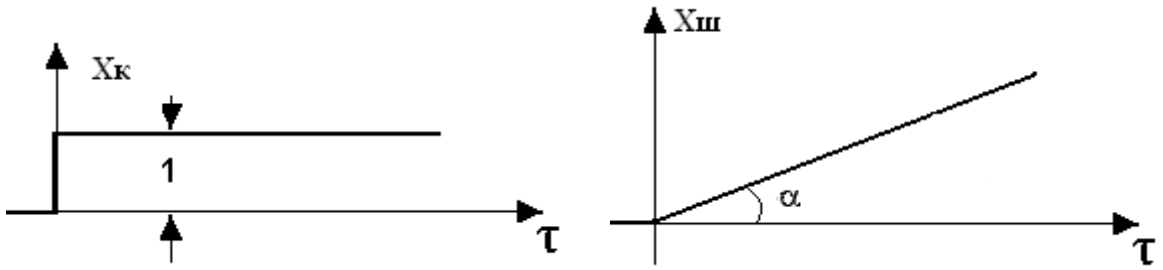
$$T_0 \frac{dx_ш}{d\tau} + x_к = k \cdot x_к,\ W(p) = \frac{x_ш(p)}{x_к(p)} = \frac{k}{T_0 p + 1}.$$

Теңдеудің k және T_0 коэффициенттері тәжірибелік екпін қисығының графигінен табылады [1, 6.2 т.].

2 мысал. Егер де объектіде алынған тәжірибелік екпін қисығы келесі түрде болса (3.2 сурет) - астатикалық (интегралдау) типтік динамикалық үзбенің типтік екпін қисығына ұқсас, дифференциалдық теңдеуі мен беріліс функциясы келесі түрде жазылады:

$$T \frac{dx_ш}{d\tau} = x_к,\ W(p) = \frac{x_ш(p)}{x_к(p)} = \frac{1}{T \cdot p}.$$

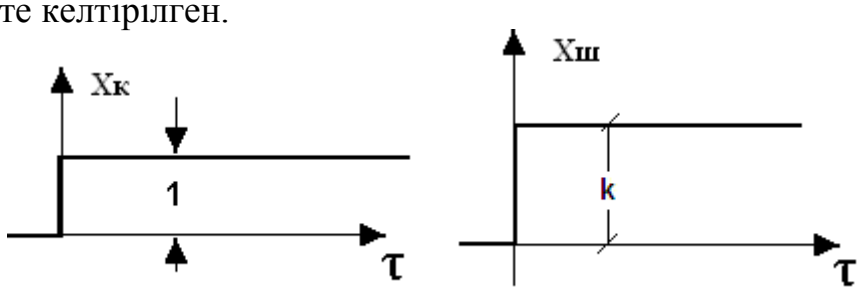
T коэффициенті тәжірибелік екпін қисығының екпін бұрышы α бойынша анықталады: $tg\alpha = \frac{1}{T}$.



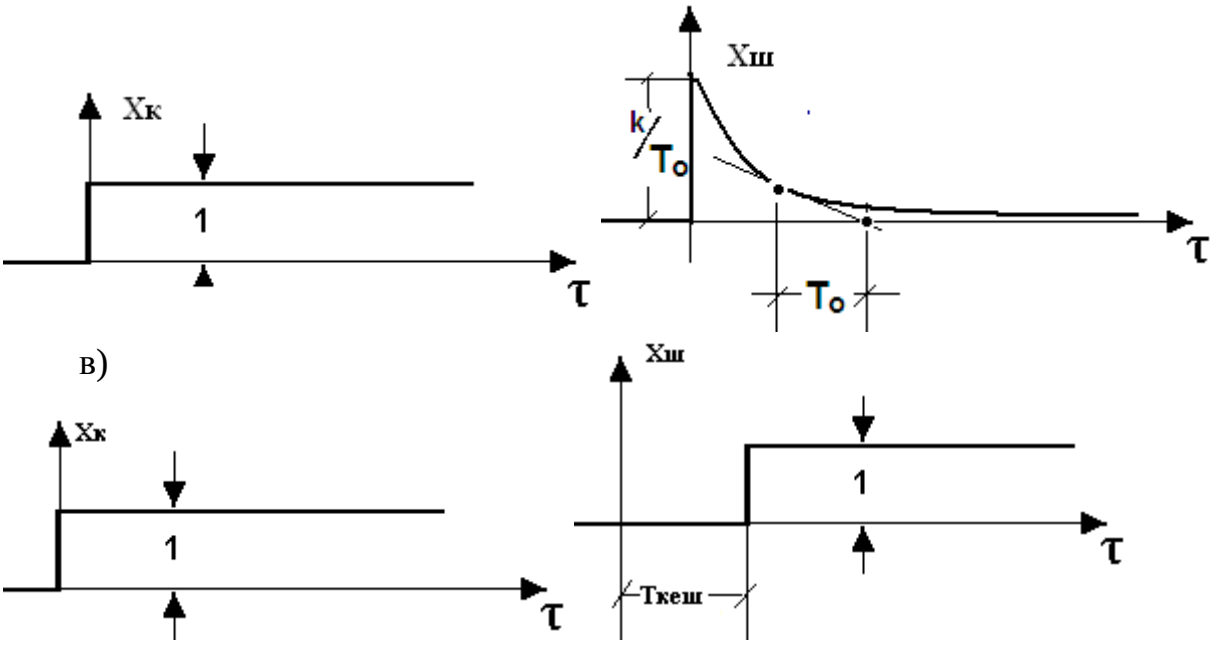
3.2 сурет - Астатикалық объектінің тәжірибелік екпін қисығы

Сол сияқты тәжірибелік және типтік екпін қисықтарының сәйкес келуі бойынша динамикалық объектінің идентификациясын объектіні күшейту, нақты дифференциалды және кешігу типтік динамикалық үзбелермен аппроксимациялауға болады. Осы үзбелердің типтік екпін қисықтары 3.3 суретте келтірілген.

а)



б)



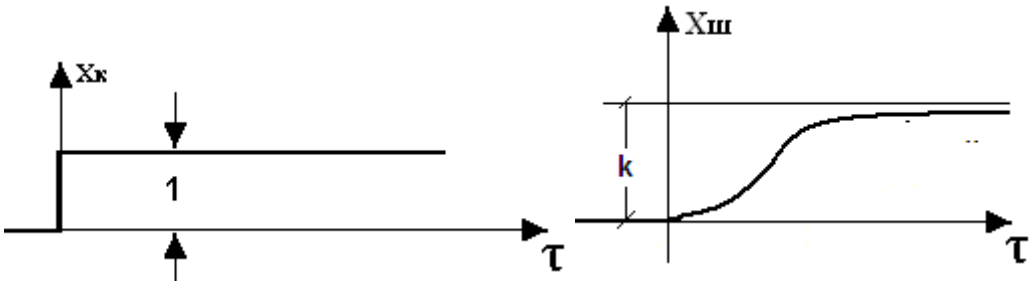
3.3 сурет – Күшейу (а), нақты дифференциалды (б) және кешігу(в) типтік динамикалық үзбелерінің екпін қисықтары

Осы үзбелердің беріліс функцияларының өрнектері келесідей:

$$W(p)_{куш} = \frac{x_ш(p)}{x_к(p)} = k;\ \ W(p)_{дифф.} = \frac{k \cdot p}{T_0 \cdot p + 1};\ \ W(p)_{кеш} = \frac{x_ш(p)}{x_к(p)} = e^{-p\tau_{кеш}}.$$

Келтірілген типтік беріліс функциялардың коэффициенттері тәжірибелік екпін қисықтарынан жеңіл табылады.

Егер де тәжірибелік екпін қисығы келесі түрде болса (3.4 сурет) идентификацияланатын объектінің математикалық моделін табу күрделілеу болады.



3.4 сурет – Екінші ретті апероидты үзбенің типтік екпін қисығы

Осындай тәжірибелік екпін қисығы 2-ші ретті апероидты үзбенің типтік екпін қисығына ұқсас болса, оның беріліс функциясы:

$$\frac{x_ш(p)}{x_к(p)} = W(p) = \frac{k}{T_1 p^2 + T_2 p + 1}.$$

Осы беріліс функцияның T_1 және T_2 коэффициенттерін дәл анықтау өте қиын. Бір амал [1, 6.3 т.] келтірілген. Дәлірек идентификациялау үшін Симою әдісі қолданылады.

Технологиялық жағдайларға байланысты кейбір кезде объект кірісінде сатылы бірлік сигналды ұзақ уақыт ұстап тұруға рұқсат етілмейді. Осындай жағдайда шығу сигнал көрінеу өзгеретіндей ұзақтығы бар бірлік импульс түріндегі әсер беріледі. Практикада бірлік импульс екі тізбектелген бірлік сатылы сигнал ретінді қарастырылады: біріншінің шамасы (+1), ал екіншінікі – (-1). Объектте алынған тәжірибелік импульсты сипаттама – объекттің шығу сигналының уақыт бойынша өзгеруі қарапайым графикалық түрлендіру жолымен тәжірибелік екпін қисығына құрылыстырылады, содан кейін математикалық модельді – $W(p)$ табу жоғарыда айтылған әдісімен орындалады.

Тәжірибелік АЖС-ті алу өте ұзақ процесс. Бір тәжірибе АЖС графигіндегі бір нүктені береді, бірақ екпін қисығының графигіне қарағанда аппроксимациялау дәлдігі жоғары. Тәжірибелік АЖС үзбелердің типтік АЖС-терімен салыстырып, жалғаз типтік үзбе немесе олардың жиыны бойынша объектінің аппроксимациясын орындайды. Бұл жерде логарифмдік амплитуда –жиілік (ЛАЖС) және фаза-жиілік (ЛФЖС) сипаттамаларды қолдануға болады.

Сызықты динамикалық үзбелердің дифференциалды теңдеулері элементтердің динамикасының идеалды бейнелеуі болып табылатынын айтып кеткен жөн. Олар тек қана осы үзбелердің нақты жүріс-тұрысын аппроксимациялауы болып табылады.

Келтірілген классификация шартталған болып табылады. Себебі әр әдісті практикалық қолданғанда түбінде модельдің кейбір параметрлерін анықтау керек (дифференциалды теңдеудің коэффициенттерін, беріліс функцияның параметрлерін, аппроксимациялайтын полиномдардың коэффициенттерін, т.б.). Басқа сөзбен айтқанда осы барлық әдістерді параметрлік деп атауға болатын еді. Басқару объектісінің динамикалық сипаттамаларының моделі ретінде қолданылатын операторлардың әртүрлілігі осы әдістердің айырмашылығы болады. Классификациялау үшін қолданылатын математикалық аппаратпен байланысқан терминологияны қолданамыз.

3.3.3 Импульсті өтпелі функциясы көмегімен графикалық идентификациялау.

Кейбір кезде технологиялық жағдайларға байланысты объект кірісінде бірлік сигналды көп уақыт ұстап тұруға рұқсат етілмейді. Онда бірлік импульс типті әсер қолданылады, шығыс сигналдың көріну өзгеруіне оның ұзақтығы жеткілікті болады. Практикада бірлік импульс екі тізбектелген бірлік сигнал ретінде қарастырылады: біріншісінің амплитудасы (+1), ал екіншінікі – (-1). Объект шығысында тәжірибелік импульсты сипаттаманы аламыз – объектінің шығыс сигналының уақыт бойынша өзгеруінің графигі.

Автоматты басқару теориясынан:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)},$$

мұндағы *Y(p)* және *X(p)* – шығыстағы және кірістегі сигналдардың бейнелері.

Егер де кірудегі сигнал бірлік импульс болса, оның Лаплас бойынша түрлендіруі *1* тең: *X(p) = 1*. Онда шығыс үшін Лаплас түрлендіруі *Y(p) = W(p)* және де сызықты жүйе үшін импульсті өтпелі функция *g(t)* оның беріліс функциясының кері Лаплас кері түрлендіруінен табылады:

$$y(t) = L^{-1}\{Y(p)\} = L^{-1}\{W(p)\} = g(t).$$

Бірінші ретті жүйелерді келесідей беріліс функциялармен бейнелеуге болады:

$$W(p) = \frac{k}{T \cdot p + 1}.$$

Онда импульсті өтпелі функция келесі түрде жазылады:

$$g(t) = L^{-1}[W(s)] = \frac{k}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}. \qquad (3.1)$$

Объектінің шығысында импульсті өтпелі функцияның графигі бар. (3.1) функциясы $t \to 0$ болғанда өсіп отырып асимптоталық *y* өсіне жақындайды, ал $t \to \infty$ болғанда оң таңбасын сақтап нөлге жақындайды. Осыны есепке алып отырып, (3.1) теңдеуден бастапқы нүктеде келесіні жазамыз:

$$y_0 = \frac{k}{T} \cdot e^{-\frac{0}{T}} = \frac{k}{T},$$

ал $t=T$ болғанда:

$$y = \frac{k}{T} \cdot e^{-\frac{T}{T}} = \frac{k}{T} \cdot e^{-1} = 0.37 \cdot \frac{k}{T},$$

яғни *T* уақыты барысында *g(t)* өзінің орнықталған мәнінің 0,37% пайызына жетеді. Осы өрнектерден беріліс функцияның ізделінген параметрлерін анықтаймыз.

Келесі әдісті де қолдануға болады. Геометриялық түсініктемесі бойынша кейбір нүктедегі функцияның туындысы – осы нүктедегі жанаманың иілу бұрышының тангенсі. Төмендегі функция үшін:

$$g(t) = L^{-1}[W(s)] = \frac{k}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

келесіні жаза аламыз

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{k}{T^2} \cdot e^{-\frac{t}{T}}. \qquad (3.2)$$

(3.2) бұрыштық коэффициенті бар бастапқы *t=0* нүктеден өтетін түзудің теңдеуі жанаманың теңдеуі болып табылады. Бұл *l(t)* жанаманың теңдеуі келесідей жазылады (берілген нүктеден өтетін белгілі бұрыштық коэффициенті бар түзудің теңдеуі):

$$l(t) = \frac{k}{T} - \frac{k}{T^2} \cdot t$$

және $t = T$, $l(t) = \frac{k}{T} - \frac{k}{T^2} \cdot t = 0,$ яғни T тұрақтысы – $g(t)$ графигінің бастапқы нүктесінде жанаманың уақыт өсімен қиылысу нүктесі.

3.3.4 Жиілік сипаттама көмегімен идентификациялау.

Жиілік сипаттама көмегімен идентификациялау синустік немесе жиіліктері қарастырылып отырған интервалда өзгеретін синустық сигналдарды жуықтайтын сигналдарды қолдануға негізделген.

Егер де объект кірісіне әртүрлі жиіліктерде синустік $A_0 \cdot \sin(\omega t)$ әсерлер берілсе, онда орнықталған шығудағы сигналдың өлшенген мәні келесідей болады:

$$y(t) = A_1 \cdot \sin[\omega t + \varphi(\omega)] + n(t),$$

мұнда $n(t)$ - өлшеу қателігі.

$W(j\omega)$ жиілік сипаттаманы анықтау үшін әртүрлі ω жиіліктерде $A_0 sin(\omega t)$ синустік кіріс сигналдар беріліп, оларға сәйкес шығудағы $A_1 sin[\omega t + \varphi]$. сигналдар жазылады. Тек қана бірінші гармониканы есепке аламыз. Қажетті жиілік сипаттаманы алу үшін $\frac{A_1}{A_0}$ және φ шамалары қарастырып отырған ω-лардың әр мәні үшін анықталады. Басқа сөзбен айтқанда кірудегі және шығудағы сигналдардың жазулары бойынша ω_i жиіліктегі амплитудалардың қатынастары қарастырылып, $|W(j\omega_i)|$ анықталады. Фазалық $\varphi(\omega_i)$ ығысуды $x(t)$ және $y(t)$ қисықтардың максимумдарын салыстырып табады.

Тәжірибелерді өткізіп, кірудегі және шығудағы сигналдарды өлшеп, содан кейін жоғарыда айтылғандай объектінің амплитудалық $A(\omega)$ және фазалық $\varphi(\omega)$ сипаттамаларын анықтап, жиіліктің қарастырып отырған әр мәні үшін келесіні жаза аламыз:

$$P(\omega_i) = A(\omega_i) \cdot \cos\varphi(\omega;),$$
$$Q(\omega_i) = A(\omega_i) \cdot \sin(\omega_i),$$

мұндағы $P(\omega_i)$, $Q(\omega_i)$ – комплексті беріліс функцияның нақты және жорамал бөліктерінің коэффициенттері.

Модельдің құрылымдық параметрлері (бұл арада теңдеу реті) құрылымдық идентификациялау қадамында анықталатынын еске салайық. Теңдеудің белгілі ретін (болжанатын) алайық. Анық болуы үшін объект үшінші ретті деп есептейік.

Онда

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_1 \cdot p^2 + b_2 \cdot p + b_3}{p^3 + a_1 \cdot p^2 + a_2 \cdot p + a_3}.$$

Беріліс функцияның a_i, b_j коэффициенттерін анықтау керек. p–ны $j\omega$-*га* алмастырып, беріліс функцияны оның нақты және жорамал бөліктерінің қосындысы ретінде жазамыз:

$$W(j \cdot \omega) = \frac{-b_1 \cdot \omega^2 + j \cdot b_2 \cdot \omega + b_3}{-j \cdot \omega^3 - a_1 \cdot \omega^2 + j \cdot a_2 \cdot \omega + a_3} = P(\omega) + j \cdot Q(\omega).$$

Осыдан

$$-b_1 \cdot \omega^2 + j \cdot b_2 \cdot \omega + b_3 = (-j \cdot \omega^3 - a_1 \cdot \omega^2 + j \cdot a_2 \cdot \omega + a_3) \cdot [P(\omega) + j \cdot Q(\omega)].$$

Осы комплексті өрнектердің нақты және жорамал бөліктерінің коэффициенттерін теңестіріп жиіліктердің әртүрлі мәндері үшін ақиқат болатын теңдеулер жүйесін аламыз. Осы теңдеулерге жиіліктердің ω_i әртүрлі мәндерін және оларға сәйкес $P(\omega_i)$, $Q(\omega_i)$ мәндерін қойып, беріліс функциясының белгісіз коэффициенттерін анықтауға алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз. Коэффициенттер мәндерін нақтылау үшін есептеулер басқа жиіліктерімен қайталанады және екі есептеудің орта мәні алынады.

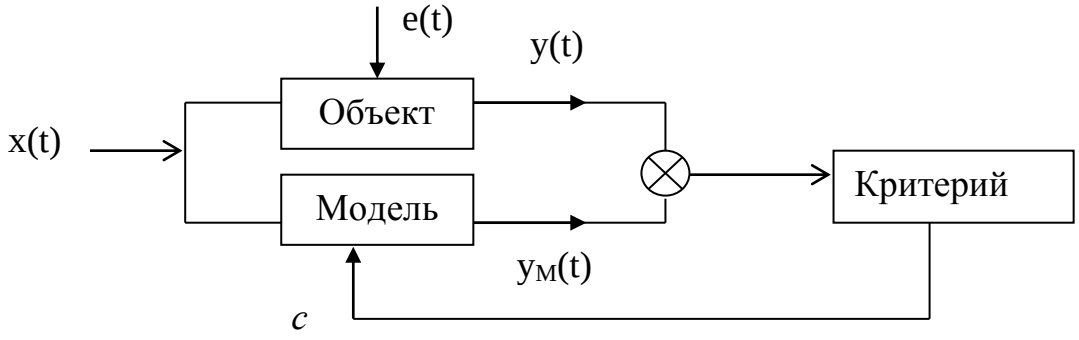
Егер де объект реті болжанатын реттен жоғары болса, қате есептеулердегі коэффициенттер мәні бірінші мәндерден көп өзгеше болады. Басқа сөзбен айтқанда, коэффициенттерде өте үлкен айырмашылық болса, объект реті төмен алынған (бұл айырмашылық тәжірибе қателігі емес).

3.5 Параметрлік идентификация

3.5.1 Есептің қойылуы.

Объектілердің модельдерін параметрлік идентификациялау барысында модель коэффициенттері объектінің басқаратын *u* және басқарылатын *y* сигналдарының өлшенген мәндері негізінде табылады. Сонымен бірге объект моделінің құрылымы мен реті белгілі деп есептелінеді.

Идентификациялау барысында модель операторының өзі емес, оның жуықталған мәні, *бағасы* анықталады. Басқа сөзбен айтқанда белгілі мағынада объект операторына жақын болатын модель операторы құрастырылады. Модель мен объект арасында сәйкестік бар деп айту үшін модель операторының бағасы оның нақты мәніне жақын болуы керек. Объект пен модель операторларының жақындығын бағалау өте қиын, ол түгел мүмкін емес, себебі объект операторы біздерге белгісіз. Осыған байланысты операторлардың жақындығын олардың бірдей кірудегі *x(t)* әсеріне реакциялары бойынша, яғни кейбір қабылданған критерий бойынша объектінің *y(t)* шығысы мен модельдің $y_м(t)$ шығысы арқылы бағалауға болады. Параметрлік идентификации сұлбасы 3.3 суретте келтірілген.



3.3 сурет - Идентификациялау процедурасының сұлбасы

Осы жағдайда кейбір мағынада модельдің белгісіз параметрлерінің оптималды болатын бағасын – *c* векторын табу үшін *u* мен *y* сигналдарды бақылаудың жоспарын құрастырып, бағаларды есептеудің әдісін таңдау керек.

Жалпы кезде $\rho(y,y_м)$ функциясы орнатылады, ол y, $y_м$ тәуелді, бірақ A-дан тәуелсіз болады және *жоғалту функциясы* немесе *невязка (сәйкессіздік) функциясы* деп аталады. Барлық бақылау интервалында жақындықтың өлшемін көрсететін келесі функционалды қолданылады:

$$Q = \int_0^T \rho(y, y_м) dt .$$

Q функционал *невязка* деп аталады, ол A операторына тәуелді. Сонымен модель мен объект операторларының невязка дәрежесін (сәйкессіздік дәрежесін) A модель операторынан нақты түрде тәуелді функционалмен көрсетуге болады. Әрине, идентификациялау процесін невязканы минимумдау жолымен өткіземіз, яғни Q функционалын A операторлар бойынша минимумдау есебін шешеміз:

$$Q(A) \to \min_{A \in \Omega} .$$

Бұл функционалды минимумдағанда, A операторын еркін таңдамаймыз, оларды белгілі операторлар класынан Ω таңдаймыз.

Жиі жағдайда параметрлерді бағалау әдісі ретінде ортаквадратты критерий қолданылады. Параметрлерді бағалау критерийін таңдағанда бөгеттер сипаттамаларын есепке аламыз, яғни олардың статистикалық қасиеттерін. Бөгеттердің қалыпты таралуы кезінде ортаквадратты критерийді қолданып, үлкен дәлдікті алуға болады. Қалыпты таралу заң әртүрлі кездейсоқ шамалардың қасиеттерін бейнелеуде өте жиі қолданылады. Қалыпты таралу заңның теориялық негіздемесі – ықтималдық теориясындағы орталық шекті теорема. Осы теоремаға сәйкес кездейсоқ шаманы әртүрлі тәуелсіз кездейсоқ әсерлердің көп санының қосындысы ретінде қарастыруға болса (сонымен бірге әр шаманың таралу заңдары әртүрлі, ал олардың қосындыдағы үлестері өте кішкене), онда зерттелетін кездейсоқ шаманы қалыпты заңдылықпен таралған деп есептеуге болады. Әрине, кез келген кездейсоқ шама осы заңдылыққа бағынады деп есептеуге болмайды. Қалыпты заңдылықты қолданудың артықшылығы оның ыңғайлы математикалық қасиеттерінің болуында. Сондықтан статистикалық әдістердің көбісі зерттелетін шама қалыпты таралу заңына бағынады деп болжайды; практикада бұл болжамды арнайы тексеру керек.

3.5.2 Динамикалық детерминді модельді идентификациялау.

Бір өлшемді жағдайда кірістегі $x = x(t)$ және шығыстағы $y = y(t)$ арасындағы байланыс қарапайым дифференциалды теңдеумен көрсетіледі:

$$\sum_{i=0}^{p} a_i \cdot y^{(i)} = \sum_{j=0}^{l} b_j \cdot x^{(j)}, \qquad (3.3)$$

мұндағы $y^{(i)} = \frac{d^i y}{dt^i}$, $x^{(i)} = \frac{d^j x}{dt^j}$, $a_p = 1$, $l \le p$, бастапқы шарттары берілген $\frac{d^i y}{dt^i}$, $i = 0,1,...,n-1$.

Модель *(p+l+1)* параметрлерімен $c = (a_0, \ldots, a_{p-1}, b_0, \ldots, b_l)$ анықталады.

Кірістегі және шығыстағы сигналдары дискретті түрде берілген болса, объект динамикасын сипаттау үшін дифференциалды теңдеулер орнына айырымдық теңдеулер қолданылады. Кірістегі және шығыстағы сигналдары дискретті мәндерін $x_{k-j} = x[(k-j)]$ и $y_{k-j} = y[(k-j)]$ деп белгілеп, айырымдық теңдеуді (дифференциалды теңдеудің аналогын) келесі түрде жазамыз:

$$y_к + a_1 y_{k-1} + ... + a_p y_{k-p} = b_1 x_k + b_2 x_{k-1} + b_3 x_{k-2} + ... + b_l x_{kl+1}. \qquad (3.4)$$

Сонымен бірге бастапқы шарттарды да орнату қажет.

Модельдің *құрылымдық* параметрлері *p* және *l* болып табылады, олар құрылымдық идентификациялау процесінде таңдалынады.

Сонымен, идентификациялау процедурасын құру үшін бастапқы ақпарат болып идентификацияланатын модельдің түрі және *[0,T]* аралығындағы $\{x_t, y_t\}$ бақылаулар болып табылады. Теңдеулердің a_i, b_j коэффициенттерін анықтау керек.

Жалпы кезде (3.3) (немесе (3.4)) модель теңдеуіне бақылауларды қойғанда бұл теңдеуде тепе-теңдік орындалмайды. Сонымен, (3.3) (немесе (3.4)) теңдеуінде оң жақ және сол жақтағы бөліктерінің айырмашылығы неғұрлым кіші болатындай a_i, b_j мәндерін іздейміз.

Сәйкессіздік функцияны келесідей құрастырамыз: (3.3) теңдеуге объектінің бақылаулары - x_t, y_t қойғанда, теңдеудің оң және сол жақ бөліктерінің айырмашылығының ортаквадраты ретінде:

$$Q(c) = \int_o^T [\sum_{i=0}^{p} a_i \cdot y_t^{(i)} - \sum_{j=0}^{l} b_j \cdot x_t^j]^2 dt. \qquad (3.5)$$

Осы функционалды a_i мен b_j бойынша минимумдаймыз:

$$Q(c) \to \min.$$

Минимумдау нәтижесі – c^* векторы идентификацияланатын параметрлер мәні болып табылады.

(3.5) функциясының барлық белгісіз параметрлері бойынша туындыларын нөлге теңестіріп сызықты теңдеулер жүйесін аламыз, осы жүйенің шешімі минимумдау есебінің шешімі болады.

Алынған алгебралық теңдеулер жүйесінің коэффициенттерін есептеу үшін объектінің кірудегі x_t және шығудағы y_t сигналдарының туындыларын білу керек. Осы мәселені шешудің кейбір амалдары [1, 7.3 т.] қарастырылған.

3.6 Сызықты динамикалық объектілерді параметрлі емес идентификациялау

3.6.1 Параметрлі емес модельді анықтаудың жалпы амалдары.

Объект кірісіне арнайы түрдегі (импульсті, сатылы, гармоникалық) жасанды әсерлерді беріп, жүйе реакциясын өлшеп, осы бақылаулар нәтижесін жиі жағдайларда қолдану келесі себептерден мүмкін болмайды:

- объектідегі процестердің қалыпты тәртібінің бұзылу себебінен объект кірісіне арнайы түрдегі әсерлерді беру мүмкін емес немесе қолайлы емес;

- көп жағдайда осы әсерлерге бақыланбайтын бөгеттер қосылады, сондақтан объектінің динамикалық сипаттамаларын типтік кіріс сигналдары бойынша анықтау мүмкін болмайды.

Сондықтан статистикалық көрсетулерде негізделген амалы қолданылады – параметрлі емес идентификация. Статистикалық әдіс ақпарат көзі ретінде идентификацияланатын объектінің өзінің табиғи кездейсоқ сигналдарын қолданады.

Егер де модель операторы құрамында идентификациялау процедурасы барысында анықталатын белгісіз функциялар идентификация *параметрлі емес* деп аталады. Параметрлі емес модельді импульсты өтпелі (салмақ) фунциясымен сипаттаймыз. Себебі сызықты динамикалық объектінің спецификасы оның бірлік импульсті әсерге реакциясымен бірмағыналы анықталады.

Біздер қарастырып отырған стационарлы жағдайда импульсті өтпелі фунциясы тек қана бір айнымалыдан – уақыттан тәуелді:

$$g = g(t), \quad 0 <= t<\infty.$$

Жалғыз шығысы мен жалғыз кірісі бар сызықты объект үшін кірістегі $x(t)$ әсері мен $y(t)$ реакция келесі интегралмен байланысқан:

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\theta) \cdot x(t-\theta) d\theta. \tag{3.6}$$

Орнықты жүйелердің салмақты функциясының келесідей ақиқат қасиеті бар:

$t \to \infty$ болғанда, $\lim g(t) = 0.$

Физикалық бұл шарт тұрақты жүйенің импульсті әсерден кейін өзінің бастапқы қалпына қайта оралатынын көрсетеді. Сондықтан (13.1) өрнегінде жоғарғы интегралдау шегін шексіздік демей, T деп алуға болады; оның мәні келесі шарттан анықталады:

$t>T_g$ болғанда $|g(t)| \le \alpha \cdot g_{\max}$,

яғни T_g уақыт моментінен бастап, салмақты функция 100α-пайызды диапазоннан шықпайды (әдетте $\alpha = 0.05$).

Енді (3.6) интегралын келесі түрде жаза аламыз:

$$y(t) = \int_0^{T} g(\theta) \cdot x(t-\theta) d\theta. \tag{3.7}$$

(3.7) теңдеуді болжанатын модель ретінде қарастырамыз; модель объектінің ізделінетін динамикалық сипаттамасын – импульсті өтпелі функцияны анықтауға мүмкіндік береді.

3.6.2 Винер-Хопф теңдеуі.

Бөгеттер мен және өлшеу қателіктерімен байланысты тіркелетін сигналдардың дәлдіктерінің төмен болғанынан (3.7) теңдеуінен табылған ізделінетін импульсті өтпелі функцияның едәуір қателіктері болады. Импульсті өтпелі функцияны қалпына келтіру сапасын жоғарлату үшін сигналдарды алдын ала өңдеу керек. Бөгеттердің әсерін минимудау үшін сигналдардың корреляциялық функциялары қолданылады.

Объектінің кірісі мен шығысындағы сигналдар орталықтанған болсын. Сонда (3.7) теңдеудің екі жағында $x(t-\theta)$ көбейтіп, орта мәнін алып келесіні жазамыз:

$$M[x(t-\theta)y(t)] = M[\int_0^\infty g(\theta)x(t-\theta)x(t-\tau)d\theta] + M[x(t-\tau)n(t)],$$

мұндағы M —математикалық күтім операторы;

n(t) — кірістегі сигналмен корреляциясы жоқ шығудағы бөгет.

Математикалық күтімді анықтау әрекеттің коммутативтік қасиетін есепке ала отырып, интегралдаудан кейін келесіні аламыз:

$$M[x(t-\tau)y(t)] = \int_0^\infty g(\tau)M[x(t-\theta)x(t-\theta)]d\theta$$

немесе

$$R_{yx}(\tau) = \int_0^\infty g(\theta)\cdot R_{xx}(\tau-\theta)d\theta. \qquad (3.8)$$

(3.8) теңдеуі *Винер—Хопф теңдеуі* болып табылады, ол ізделінетін импульсті өтпелі функцияны идентификациялантын объектінің кірісіндегі сигналының $R_{xx}(\tau)$ корреляциялық функциясымен және шығысы мен кірісіндегі сигналдарының өзара корреляциялық $R_{xy}(\tau)$ функциясымен байланыстырады. Бұл теңдеу (3.7) теңдеуіне ұқсас, егер де $R_{xx}(\tau)$ функциясын кірістегі әсер ретінде, ал, а $R_{xy}(\tau)$ функциясын – сол әсерге объектінің реакциясы ретінде қарастырсақ.

Винер-Хопф теңдеуін шешу жолымен табылған импульсті өтпелі функция ортаквадратты қателікті минимумдау критерийі бойынша оптималды.

Кездейсоқ сигналдарды іске асырғанда кірістегі сигналдың $R_{xx}(\tau)$ автокорреляциялық функциясы және шығыс пен кірістегі сигналдарының өзара корреляциялық $R_{xy}(\Theta)$ функциясы бақылаудың шекті интервалында тіркеледі, ал шексіз жадысы бар сызықтық жүйе шекті жадысы бар жүйемен

жуықталады. Сондықтан, физикалық түсініктемелерге сүйене отырып (3.8) теңдеудегі жоғарғы шексіз мәнін барлық $\tau > T_g$ үшін $g(\tau) \approx 0$ шарт орындалатын шекті T_g мәнімен алмастырады. Бұл қорытынды келесі шартты қанағаттандыратын:

$$\left| \int_{T_\omega}^{\infty} g(\tau) R_{xx}(\tau - \theta) d\tau \right| \langle \varepsilon, \ \tau > T_g$$

физикалық іске асырылатын жүйелер үшін орындалады. Осыларды есепке алып статистикалық идентификациялаудың негізгі теңдеуін келесі түрде жазамыз:

$$R_{xy}(\theta) = \int_0^{T_g} g(\tau) R_{xx}(\tau - \theta) d\tau. \qquad (3.9)$$

Әдетте T_g параметрі идентификацияға дейін анықталады. Мысалы, $|R(\tau)| <= 0.05R_{max}$ шарты орындалатын T_R уақытын белгілеуге болады. T_R мәндері $R_{xx}(t)$ пен $R_{yx}(t)$ үшін әртүрлі болады. Біздерге объектінің динамикалық қасиеттері керек, олар $R_{yx}(t)$ функциясында көрінеді, сондықтан T_R мәнін $R_{yx}(t)$ бойынша анықтайды. Автокорреляциялық және өзара корреляциялық функциялардың анықтамалары, оларды есептеу формулалары және (3.9) теңдеуді шығару жолдары [1, 8.3 б.] келтірілген.

Сонымен, динамикалық сипаттамаларды анықтау есебі келесі қадамдарға бөлінеді:

1) Объект кірісіндегі және шығысындағы кездейсоқ процестерді жазып алу.

2) Кіріс сигналының автокорреляциялық және кіріс пен шығыс сигналдарының өзара корреляциялық функцияларын есептеу.

3) T_R параметрді анықтау.

4) (3.9) интегралдық теңдеуді шешу.

Сонымен, импульсті өтпелі функцияны анықтау – параметрлі емес идентификациялау есебін шешу Винер-Хопф теңдеуін шешуге келтірілді.

3.6.3 Сызықты динамикалық объектілерді параметрлі емес идентификациялауға аппроксимация процедурасын қолдану.

Объектінің динамикалық сипаттамасын - импульсті өтпелі функцияны $g(t)$ анықтауға болжанатын модель ретінде келесі интегралдық теңдеуін қарастырамыз:

$$y(t) = \int_0^{T} g(\theta) \cdot x(t - \theta) d\theta, \qquad (3.10)$$

мұндағы $x(t)$ мен $y(t)$ – объект кірісі және шығысындағы сигналдар.

Параметрлі емес есебін шешуге аппроксимациялау полиномдарын қолданудың бірсыпыра әдістерін қарастырамыз.

1. Сызықты объектінің моделін құрудың жалпы амалын қолданамыз – ортаквадратты критерийді минимумдау амалын. Идентификациялау критерийін келесі түрде жазуға болады:

$$Q = \int_0^T [y(t) - y^*(t)]^2 dt \to \min,$$

мұндағы *y(t)* – объектінің шығудағы сигналы, $y^*(t)$ – модельдің шығудағы сигналы; соңғысы келесідей теңдеуінен анықталады:

$$y^*(t) = \int_0^T g^*(\theta) \cdot x(t-\theta) d\theta . \qquad (3.11)$$

Функцияларды аппроксимациялау процедурасын қолданамыз. Аппроксимациялау функциялары әдетте ортогоналды функциялар класынан таңдалынады.

Импульсті өтпелі функцияны келесі полиноммен аппроксимациялаймыз:

$$g(\tau) = \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot \varphi_k(\tau) \qquad (3.12)$$

мұндағы $\{\varphi_k(\tau)\}$- ортогоналды аппроксимациялау функциялар жүйесі;

N - полином реті.

(3.12) жіктеудің a_k коэффициенттері әзірше белгісіз.

(3.11) теңдеуіне импульсті өтпелі функцияның (3.12) өрнегін қойып, келесіні аламыз:

$$y^*(t) = \int_0^T g^*(\theta) \cdot x(t-\theta) d\theta = \int_0^T \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot \varphi_k(\theta) \cdot x(t-\theta) d\theta = \sum_{k=0}^{N} a_k \int_0^T \varphi_k(\theta) \cdot x(t-\theta) d\theta.$$

Сонда идентификациялау критерийдің түрі келесідей болады:

$$Q = \int_0^T [y(t) - y^*(t)]^2 dt = \int_0^T [y(t) - \sum_{k=0}^{N} a_k \int_0^T \varphi_k(\theta) x(t-\theta) d\theta]^2 \to \min .$$

Минимумдау есебін шеші үшін барлық белгісіз параметрлер бойынша $\frac{\partial Q}{\partial a_i}$ туындыларын анықтау керек. Ең жақсы таңдау $\frac{\partial Q}{\partial a_i} = 0$ шартында орындалады. Қорытындысында (3.12) жіктеудің белгісіз коэффициентерін анықтау үшін сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз. Практикада әдетте *N* мәндері өте үлкен болмайды, яғни алынған жүйенің реті жоғары емес және $\{\varphi_k(\tau)\}$ тегісті функциялар жүйесі болғандықтан теңдеулер жүйесі жақсы шартталған.

Аппроксимациялау полиномның *N* дәрежесін таңдау сұрағы пайда болады. Бұл мәселені шешудің әртүрлі амалдарын ұсынуға болады [1, 8.4 б.]. Бірақ бұл сұрақ өте күрделі және қазірде толығымен шешілмеген.

2. Бастапқы модель ретінде Винер-Хопф теңдеуі болады:

$$R_{yx}(\tau) = \int_0^T g(t) \cdot R_{xx}(\tau - \theta) d\theta. \qquad (3.13)$$

Импульсті өтпелі функция (3.12) өрнегімен аппроксимацияланады, оның коэффициенттері келесідей анықталады:

$$a_k = \sum_{\tau=0}^{m} g(\tau) \cdot \varphi_k(\tau), \qquad (3.14)$$

мұндағы m - модельдеу интервалындағы нүктелер саны.

Объект кірісіндегі және шығысындағы сигналдардың корреляциялық функцияларын алдында таңдалынған аппроксимациялау полиномдармен жіктейміз:

$$R_{yx}(\tau) = \sum_{j=0}^{N} b_j \cdot \varphi_j(\tau),$$

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{j=0}^{N} c_j \cdot \varphi_j(\tau),$$

және бұл өрнектерде

$$b_j = \sum_{t=0}^{m} R_{yx}(t) \cdot \varphi_j(t),$$

$$c_j = \sum_{t=0}^{m} R_{xx}(t) \cdot \varphi_j(t)$$

коэффициенттерін берілген деп санауға болады, себебі корреляциялық функциялардың мәндері нүктелерде берілген, ал $\{\varphi(\tau)\}$ функциялары белгілі.

Винер-Хопф теңдеуіне аппроксимациялау полиномдарды қоямыз. $\{\varphi_j(\tau)\}$ ортогонормалданған болғандықтан, белгісіз a_k коэффициенттері бойынша сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз. Оныңда реті жоғары емес және жоғарыда айтылған себептерден жақсы шартталған жүйе болып табылады; сондықтан импульсті өтпелі функциялардың бағаларын жоғары дәлдікпен қарапайым есептеулер көмегімен алуға болады.

Есепті шешу барысында алдында айтылған аппроксимациялау функциялардың санын таңдау мәселесі пайда болады.

3. Бастапқы модель ретінде (3.13) Винер-Хопф теңдеуі болады.

Бұл теңдеуді шешудің әдістерінің біреуі – алгебралық әдіс. Дискретті уақытқа көшіп, (3.13) интегралын қосынды ретінде жазып, теңдеуді сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі ретінде көрсетеміз. Бұл теңдеудің шешімі $g(t)$ импульсті өтпелі функцияның $0, 1, \ldots, m$ нүктелердегі $g_1, \ldots, g_m$ дискретті мәндерін анықтауға мүмкіндік береді [1, 8.3.2 т.].

Винер-Хопф теңдеуінің бұл шешімінің үлкен қателіктері болады. Осы жолмен алынған импульсті өтпелі функциялардың ортаквадраттар қателігінің

шамасы өте аз, минимумға жақын болғанымен, олардың құндылығы немесе бағалылығы төмен, себебі бұл функциялар объектідегі процестердің физикалық мағынасына сәйкес болмайды. Физикалық мағына тек қана тегістелген шешімдерде ғана бар. Тегістеудің ең қарапайым және бірінші пайда болған түрінің бірі Винер-Хопф теңдеуіне эквивалентті алгебралық жүйенің алынған шешімдерін аппроксимациялау болып табылады.

Дискретті шамалардың алынған тізбегін кейбір аппроксимациялау полином көмегімен көрсетеміз:

$$g(\tau) = \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot \varphi_k(\tau),$$

мұнадғы $\{\varphi_k(\tau)\}$ - кейбір ортогоналды аппроксимациялау функциялар жүйесі.

Аппроксимациялау функциялары ортогоналды болса, аппроксимациялау коэффициенттері (3.14) формуламен анықталады. Алдыңғы екі амалға қарағанда осыда алынған сызықты алгебралық теңдеулер жүйесінің реті жоғарылау болады, себебі практикада $m \gg N$. Аппроксимациялау полиномның N дәрежесін таңдау мәселесі қалады.

4. Объектінің кірістегі және шығыстағы сигналдары келесідей дәрежелі қатарлармен көрсетіледі:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot \frac{t^i}{i!}, \quad y(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{t^i}{i!},$$

мұнда x_i y_i – белгілі коэффициенттер (себебі біздерге кірістегі және шығыстағы сигналдардың өлшеулері анық).

Импульсті өтпелі функцияныда дәрежелі қатарлар түрінде іздейміз:

$$g(t) = \sum_{i=0}^{n} g_i \cdot \frac{t^i}{i!},$$

мұнда қатар коэффициенттерін g_i анықтау қажет.

Осы өрнектерді модель интегралына қойып, айнымалылардың бірдей дәрежелеріндегі коэффициенттерін теңестіріп ізденетін g_i коэффициенттерін анықтауға арналған алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз.

4 Сызықты емес объектілерді идентификациялау

Сызықты емес динамикалық объектілерді идентификациялау өте күрделі есеп болып табылады, себебі объектіні сипаттайтын сызықты емес операторлар түрлерінің саны шексіз. Сонымен бірге сызықты емес объектінің өтпелі процесі кіріс сигналдың тек қана түріне емес, амплитудасына да тәуелді. Сондықтан активті идентификациялауды қолданғанда сынау сигналды таңдауға күрделі және қайшылық келетін талаптар қойылады.

Сызықты жағдайдағыдай идентификация есебі объектінің жүріс-тұрысын аппроксимациялайтын, сәйкессіздік функционалды минимумдайтын

$$Q(\bar{c}) = \int^{T} [F(x(t), \bar{c}) - y]^2 dt \to \min$$

F(x) операторын құрастыру. Әдетте *F(x)* келесі $F(x,\bar{c})$ түрінде көрсетіледі, яғни белгісіз $\bar{c}$ параметрлері бар белгілі оператор түрінде; параметрлер идентификация процесінің барысында анықталады. Сонымен, үздіксіз жағдайда келесі есеп шешіледі:

ал дискретті жағдайда келесідей есеп:

$$Q(\bar{c}) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i, \bar{c}) - y_i]^2 \to \min.$$

Белгісіз $\bar{c}$ параметрлер векторының мәндері шешімі болып табылады.

$F(x,\bar{c})$ көрсетудің әртүрлі әдістері бар: сызықты функция, бөлек кесінділер бойынша сызықты болатын функциялар, бойынша берілген функциялар жүйесі бойынша жіктеу түрінде, т.б.

Қарапайым бірөлшемді жағдайда модель сызықты емес дифференциалдық теңдеу түрінде көрсетіледі:

$$y^{(p)} = f(y^{(p-1)}, ..., y, x^{(l)}, ..., x),$$

мұнда *f* - *p+l+1* аргументы бар сызықты емес скалярлы функция, оны келесі $< x_t, y_t >, 0 \le t \le T$ бақылаулар негізінде идентификациялау керек.

Векторлы түрде бұл теңдеу келесідей жазылады:

$$\dot{y} = F(y, x'),$$

мұнда $y = (y_1, ..., y_p)$, $x' = (x, x^{(l)}, ..., x^{(l)})$ - векторлық аргументтері бар векторлық функция.

Бастапқы функцияларды дифференциалдап (қажет болса, тегістеу аппаратын қолданып) $< x_t, y_t >$ бақылауларды келесі түрге келтіреміз:

$$x_t^{'} = (x_{t,} x_t^{'}, ..., x_t^{(l)}), y_t = (y_t, y_t^{'}, ..., y_t^{(P-1)}).$$

Практикалық қолдануға келесі әдістер ұсынылады.

1. *Функционалдық модельдері*. *F* белгісіз параметрлері бар белгілі функция болсын. Бұл кезде

$$\dot{y} = F(y, x', \bar{c})$$

теңдеулер жүйесі берілген бастапқы шарттарда және идентификацияланатын параметрлердің белгілі $\bar{c}(c_1, ..., c_k)$ мәндерінде сандық әдістерімен интегралданады (мысалы, Рунге-Кутт әдістерімен).

Алынған $y = y(t, \bar{c})$ шешім y_t бақылаулармен салыстырылады және сәйкессіздік функциясы құрастырылады:

$$Q(c) = \int_0^T [y(t, \bar{c}) - y_t]^2 \, dt,$$

осы минимумдау нәтижесінде идентификациялау есебін шешеді.

Егер де модель құрылымы дифференциалданатын функциялар класынан таңдалынған болса, бұл есепті трансценденттік теңдеулер жүйесі шешеді (мұндай жүйелерді де шешу оңай емес):

$$\frac{\partial Q}{\partial C_j} = 2 \cdot [F - Y_t, \frac{\partial F}{\partial C_j}] = 0, \; j = 1,..., k,$$

мұнда [,] белгісі – скалярлы көбейтінді.

Кері жағдайда минимумдаудың ізденіс әдістерін қолдануға болады. Ол үшін (*i-1*)-ші жуықтаудан *i*-ге көшудің тәртібін орнататын рекурренттік процедура құрылады:

$$c_i = c_{i-1} + \Delta c_i,$$

мұнда Δc_i қадамы c_{i-1} және іздеу алгоритміне тәуелді.

Ең жиі қолданылатын алгоритм – тез түсу әдісі:

$$c_i = c_{i-1} - \alpha \cdot grad(q_i^2(c_{i-1})),$$

мұнда q_i – параметрлері (*i-1*)-ші қадамда анықталған *i*-ші қадамдағы сәйкессіздік.

Δc_i қадамы уақыт бойынша азаятын α коэффициенті бар жергілікті сәйкессіздіктің антиградиенттік бағытында орындалады. Кейбір кезде α ағынды сәйкессіздікті минимумдау шартынан алынады:

$$q_i^2(c_i) \xrightarrow[\alpha_i]{} \min \Rightarrow \alpha_i^*.$$

Ізденісті іске асыру үшін біздерге әртүрлі c_j үшін F функциясының тек қана мәндері керек, сондықтан модельді аналитикалық бейнелеу класынан басқа кластарда да құруға болады (сондықтан осы амал функционалды деп аталады).

2. *Бағаланатын параметрлері бойынша сызықты болып табылатын модельдер.* Олар функционалдық модельдердің жеке түрі және ізделінетін функцияны берілген функциялар жүйесі бойынша жіктеу нәтижесінде құрастырылады:

$$F(x, \bar{c}) = \sum_{j=1}^{k} c_j \varphi_j(x), \tag{4.1}$$

мұнда $\{\varphi_j(x) = \varphi_1(x),..., \varphi_k(x)\}$ - берілген функциялар жүйесі, құрылымдық идентификация қадамында анықталады. Аппроксимацияны, мысалы полиномдар көмегімен өткізуге болады.

Жіктеудің коэффициенттерін іздеу есебі белгілі әдістермен шешіледі.

3. *Сызықтандыру әдістері*, яғни аргументтердің берілген диапазонында сызықты емес байланыстарды сызықты өрнектермен аппроксимациялау. Сызықты емес жүйелерді идентификациялау әдістерінің ішінде осы әдістер ең дамыған болып табылады. Біздер осындай есептерді қарастырған едік. Сызықты емес теңдеулерді сызықтандырудың негізінде келесі шарт қолданылады: зерттелетін динамикалық процесте айнымалылар өзгергенде олардың орнықталған күйден ауытқулары өте аз шама болып тұрады. Осы шарт әдетте автоматты реттеу жүйелерінде орындалады. Сызықтандыру әдетте сызықты емес тәуелділіктерді Тейлор қатарына жіктеу жолымен орындалады; жіктеуді бастапқы стационар режим аймағында орындаймыз және жіктеудің тек қана сызықты мүшелерін қалдырып, соңынан алынған теңдеуден статика теңдеуін алып тастаймыз. Осы процедура көмегімен модель теңдеулері айнымалылары арқылы емес, олардың бастапқы стационар режимінен ауытқулары арқылы жазылады.

4. *Бөлек кесінділер бойынша сызықты модельдер*. Бұл жағдайда функцияның мәндерін табу үшін $(x_i, y_i), j = 1, \dots, d$ *тірек* тізбегі анықталады. Содан кейін (4.1) есебі шешіледі, мұнда F – өзінің тірек тізбегімен берілетін бөлек кесінділер бойынша сызықты функция. Бұл есеп ізденіс әдістердің біреуімен шешіледі.

5. *Априорлы белгілі түрлері бар сызықты емес функцияларын идентификациялау*. Егер де сызықты емес түрі туралы априорлы ақпарат болса, сызықты емес функциялардың параметрлерін идентификациялауға бастапқы аналитикалық өрнекте айнымалыларды алмастыру немесе бастапқы өрнектерді қарапайым өрнектерге түрлендіру жолдарымен орындауға болады [1, 9.3 б.].

Барлық жағдайларда сызықты емес идентификацияны параметрлері анықталатын аппроксимациялау функцияның спецификалық типі бар деген болжауда орындауға болады.

4 MatLab ортасында динамикалық жүйелерді модельдеу және зерттеу

Компьютерлік технологиялардың даму барысында көп қолданбалы программалар жасалған. Олар күрделі автоматтандырылған жүйелердегі өтпелі және орнықталған процестерді зерттеуді қамтамасыздандырады. Соның ішінде MatLab, Mathcad, Vissim, LabView, т.б. атауға болады.

MatLab жүйесі The MathWorks, Inc. (АҚШ) фирмасымен өңделген және ғылым мен техниканың әртүрлі салаларында инженерлік және ғылыми есептеулерді орындауға негізделген жүйе болып табылады. Соның ішінде: математика мен есептеулер; алгоритмдерді құрастыру; есептеу тәжірибелері; имитациялық модельдеу; мәліметтерді талдау, нәтижелерді зерттеу және визуализациялау; автоматты басқару саласындағы зерттеулер; сигналдар мен процестерді статистикалық өңдеу және т.б.

MatLab жүйесі дегеніміз:

- тікелей пернетақтадан бұйрықтарды енгізу жолымен есептеулерді орындауға мүмкіндік беретін интерактивті жүйе;

- кең тараған есептеу әдістерін іске асыратын дайын функциялар мен алгоритмдердің библиотекасы; олар арнайы бөлімдерге (Toolboxes) бөлінген;

- пайдаланушыға өзінің функцияларын және программалық қолданбалыларды жасауға мүмкіндік беретін программалау тілі.

[1,10 б.] әдебиетте MatLab ортасының бірсыпыра мүмкіндіктерін қолдану сұрақтары қарастырылған: жүйенің бұйрық терезесін қолдану, жүйе ортасында бағдарламалау, Simulink пакетінде жүйелерді модельдеу, оқиғалы модельдеудің негіздері (басқарудың Statflow құралы), жүйелерді анализдеу және идентификациялау пакеті (System Identification Toolbox), статистикалық мәліметтерді регрессиялық анализдеу (Curve Fitting Toolbox), сызықты стационарлы жүйелерді зерттеу пакеті (Control System Toolbox), сигналдарды цифрлік өңдеу (Signal Processing Toolbox).

Төменде келтірілген тапсырмалар Matlab-тың *ControlToolbox* құралы мен *Simulink* динамикалық жүйелерді модельдеу ортасын қолдануға негізделген. Осы жүйенің көмегімен студенттер тапсырмаларды орындап, басқару жүйелерін талдау, синтездеу және модельдеу сұрақтарын шешуді үйренді. Соңында студенттер бақылау сұрақтарына жауап беріп, теориялық ақпаратты түсіну дағдыларын бекітеді.

4.1Ажыратылған сызықты жүйені зерттеу

MatLab жүйесінде сызықты стационарлы жүйелерді зерттеу үшін *Control System Toolbox* пакеті қолданылады. Бұл пакет беріліс функциялары мен күй кеңістігіндегі модельдерін қолдануда негізделген динамикалық жүйелерді зерттеудің әдістерін іске асырады. Модельді пакет ортасына енгізуді үш түрде орындауға болады – күй кеңістігіндегі матрицалары түрінде, беріліс функцияның алымы мен бөлімінің коэффициенттері түрінде және жүйенің нольдері, полюстары мен беру коэффициенттерін орнату түрінде. Бұл жерде тұрақты параметрлері бар сызықты, уақыт бойынша инвариантты (орыс ЛСС - линейные стационарные системы) *LTI-объекттер* (Linear Time Invariant) деп аталады.

Тапсырма MatLab ортаның бұйрық терезесінде және *Control System Toolbox* (яғни LTIViewer) қолдану жолымен орындалады.

4.1.1 Жұмысты орындау мысалы мен тәртібі:

- MatLab-тың жұмыс кеңістігін (жадысын) тазартыңыз - *clear all*; MatLab терезесін тазартыңыз – *clc;*

- *tf* бұйрықтың қысқаша анықтамаларын қарап шығыңыз - *help tf;*

- осы бұйрықты орындайтын файлдың адресін анықтаңыз *which('tf'):*

- $F(p) = \dfrac{n_2 p^2 + n_1 p + n_0}{p^3 + d_2 p^2 + d_1 p + d_0}$ беріліс функцияны *tf* объекті ретінде енгізіңіз[3]:

```
>> n = [n2 n1 n0];
>> d = [1 d2 d1 d0];
>> f = tf (n, d);
```

Ескерту: MatLab негізгі терезесінде бұйрықтардың орындалуының жауаптарын көру үшін, бұйрықтан кейін үтірлі нүкте «;» қойылмайды.

Мысалы (осы жерде және әріқарай курсивпен жүйенің жауаптары көрсетілген):

```
>> n=[1.0 1.1 0.1]

n =
  1.0000    1.1000    0.1000

>> d=[1 3.0 3.16 1.2]

d =
  1.0000    3.0000    3.1600    1.2000

>> f = tf(n,d)

Transfer function:
s^2 + 1.1 s + 0.1
-------------------------
s^3 + 3 s^2 + 3.16 s + 1.2
```

- беріліс функцияның алымы мен бөлімін осы объектіден алуды тексеріңіз:

```
>> [n1,d1] = tfdata ( f, 'v' );
```

- беріліс функцияның нольдері мен полюстерін табыңыз:

```
>> z = zero (f)

-1.0000
-0.1000

>> p = pole (f)

-1.2000
-0.9000 + 0.4359i
-0.9000 - 0.4359i
```

- үзбенің орнықтанған күйдегі күшею коэффициентін табыңыз:

```
>> k = dcgain (f)

k = 0.0833
```

[3] Коэффициенттерді өзіңіз орнатуыңызға болады.

- жүйенің өткізу жолағын анықтаңыз (АЖС 3 дБ-ден кіші болатын ең кіші жиілік мәнін):

```
>> b = bandwidth ( f )
```

b = 16.9009рад/сек

- жүйенің күй кеңістігіндегі моделін құрыңыз:

```
>> f_ss = ss(f)
```

```
a =
        x1     x2     x3
x1     -3  -1.58   -0.6
x2      2      0      0
x3      0      1      0


b =
      u1
x1   1
x2   0
x3   0
c =
          x1    x2    x3
  y1       1  0.55  0.05
d =
      u1
  y1   0
```

- жүйенің тура беру коэффициенті 1 тең болатындай орнатыңыз:

```
>> f_ss.d = 1
```

```
a =
        x1     x2     x3
x1     -3  -1.58   -0.6
x2      2      0      0
x3      0      1      0
b =
      u1
x1   1
x2   0
x3   0
c =
          x1    x2    x3
  y1       1  0.55  0.05
d =
      u1
```

y1 1

- орнықталған режимдегі үзбенің жаңа күшею коэффициентін табыңыз:

>> k1 = dcgain (f_ss)

k1 = 1.0833

- бастапқы жүйенің моделін «нольдер-полюстер» түрінде құрастырыңыз:

>> f_zp = zpk (f)

(s+1) (s+0.1)

(s+1.2) (s^2 + 1.8s + 1)

- графикте жүйенің нольдері мен полюстерінің орнатылуын құрыңыз:

>> pzmap (f);

- барлық элементарлы үзбелер үшін (бірінші және екінші ретті) демпфирлеу коэффициенттері мен меншікті жиіліктерін анықтаңыз:

>> [wc,ksi,p] = damp (f);

- *LTIViewer* модулін іске қосыңыз:

>> ltiview;

- *f* моделін жүктеңіз: *File – Import;*

- осы жүйенің импульсті сипаттамасын (салмақты функциясын) құрыңыз: *контексті меню – Plot Types – Impulse;*

- *f_ss* моделін жүктеңіз: *File – Import;*

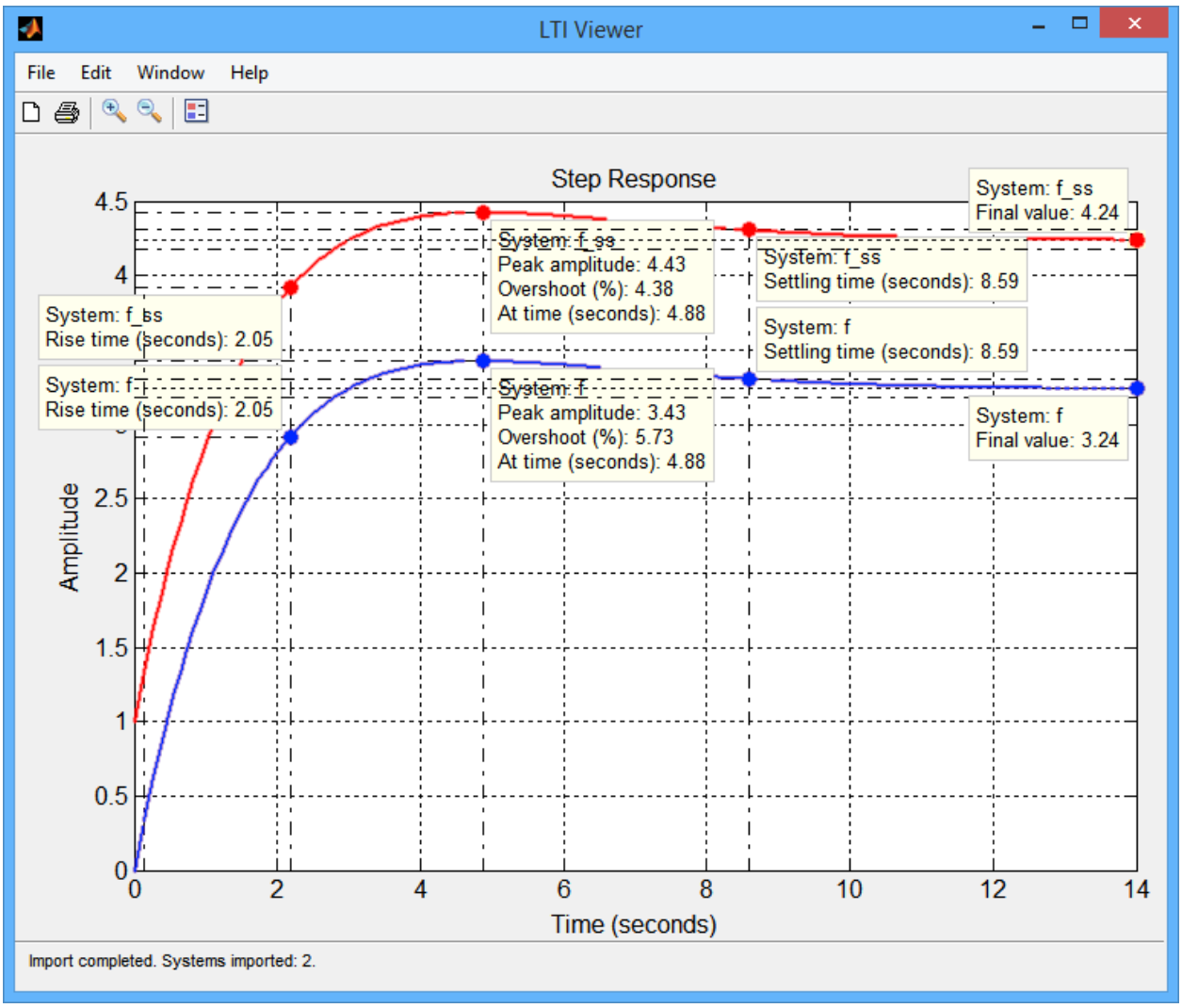
- екінші жүйенің импульсті сипаттамасының құрылғанын тексеріңіз: *контексті меню – Systems;*

- *f* жүйені өшіріңіз: *контексті меню – Systems;*

- орнықтылықтың сапалық сипаттамаларын анықтаңыз (реттелу уақыты, асыра реттеу, өсу уақыты, т.б.);

- екі жүйені де қосыңыз: *контексті меню – Systems*;

- жүйелердің өтпелі процестерін құрыңыз (4.1 сурет);



4.1 сурет – *f* және *f_ss* модельдердің өтпелі процестері

- әр функцияның графигінде келесілерді белгілеңіз: максимум, өтпелі процесс уақыты[4], өсу уақыты (орнықталған мәннің 10%-дан 90%-ға дейін), орнықталған мән: *контексті меню – Characteristics*:

1) *Peak Response.*

2) *Settling Time.*

3) *Rise Time.*

4) *Steady State;*

- шеңберлі белгілерге шертіп, экранға параметрлердің мәндерін шығарыңыз, олардың барлығы көрінетіндей орнатыңыз;

- жиілік сипаттаманы құру үшін жиіліктер массивін құрыңыз[5] ((10^{-1}-ден 10^{2}-ге дейінші интервалда біртекті таралу тәртібімен логарифмдік шкалада 100 нүкте):

```
>>w = logspace(-1, 2, 100);
```

[4] Келісім бойынша MatLab ортасында өтпелі процесінің уақыты орнықталған мәннен 2%-ға ығысуында анықталады.

[5] Бұйрықтың соңындағы үтірлі нүкте орындау нәтижесін көрсетпеуге мүмкіндік береді. Үлкен массивтермен жұмыс істегенде қолдануға ыңғайлы.

- бастапқы жүйенің жиілік сипаттамасын есептеңіз[6] және абсциссалар осінде логарифмдік масштабымен оны құрыңыз:

```
>> r = freqresp ( f, w );
>> r = r(:);
>> semilogx ( w, abs(r));
```

- амплитудасы 1, периоды 4 секунд болатын төртбұрышты импульсты сигналдарды құрыңыз (барлығы 5 импульс):

```
>> [u,t] = gensig('square',4);
```

- модельдеуді орындап, *f* жүйенің берілген кірісте шығу сигналын графикте құрыңыз:

```
>>lsim (f, u, t).
```

4.1.2 Бақылау сұрақтары.

1 Келесі түсініктемелерге анықтама беріңіз: беріліс функция; беріліс функцияның нольдері мен полюстары; импульсті сипаттама (салмақты функция); өтпелі функция; жиілік сипаттама; күй кеңістігіндегі модель; «ноль-полюстер» түріндегі модель; статикалық режимдегі күшею коэффициенті; жүйенің өткізу жолағы; өтпелі процестің уақыты; жүйенің қима жиілігі; тербеліс үзбенің меншікті жиілігі; тербеліс үзбенің демпфирлеу коэффициенті.

2 Келесілер қай өлшеу бірліктерінде өлшенеді: статикалық режимдегі күшею коэффициенті; жүйенің өткізу жолағы; өтпелі процестің уақыты; жүйенің қима жиілігі; тербеліс үзбенің меншікті жиілігі; тербеліс үзбенің демпфирлеу коэффициенті?

3 Меншікті жиілігі тербеліс үзбенің уақыт тұрақтысымен қалай байланысады?

4 MatLab жүйенің бұйрықтры туралы анықтаманы қалай алуға болады?

5 MatLab-тың келесі бұйрықтарының айырмашылығы: who және whos; clear all және clc?

6 MatLab бұйрық терезесіне беріліс функцияны қалай орнатуға болады?

7 Тура беру коэффициентінің өзгеруі (күй кеңістігіндегі модельде *D* матрица) статикалық күшею коэффициентіне қандай әсері бар?

8 LTIViewer модульдің мүмкіншіліктері?

9 Келесілерді қалай табуға болады: АЖС бойынша орнықталған режимдегі күшею коэффициенті; АЖС бойынша жүйенің өткізу жолағы.

10 MatLab терезесінен графикті басқа программаға қалай көшіруге болады?

11 Логарифмдік шкалада бертекті таралу тәртібімен (10^{-3},$10^{3)}$) интервалында 200 мәні бар массивті қалай құруға болады?

---

[6] Жиілік сипаттама үш өлшемді массив түрінде құрастырылады; әр элементтің 3 индексі болады: жатық жол, баған (көпөлшемді модельдер үшін) және жиілік сипаттаманың нүкте номері. Жалғыз кірісі мен шығысы бар жүйе үшін r = r(:); бұйрығы осы мәліметтерді қарапайым бірөлшемді массивке түрлендіреді.

12 АЖС графигінің осьтерінде қандай шамалар орнатылады?

4.2 Сызықты жүйенің реттегішін жобалау

4.2.1 Реттегіштердің қарапайым түрлері.

П-реттегіш. Қарапайым пропорционалды реттегіш (П-реттегіш) әдеттегі күшейткіш болып табылады, оның беріліс функциясы:

$$C(s) = K_c .$$

ПД-реттегіш. Реттудің сапасын жақсарту және жылдамдығын көтеру үшін қате басқару заңына қате сигналының туындысын орнатады, сонымен алынған пропорционалды-дифференциалды реттегіштің (ПД- реттегіштің) беріліс функциясы келесідей болады:

$$C(s) = K_c(1 + T_D s),$$

мұндағы T_D – дифференциалды үзбенің уақыт тұрақтысы. Үлкен жиіліктерде үзбенің жиілік сипаттамасы шексіз өсетін себебінен практикада идеалды дифференциалдауды іске асыру мүмкін емес. Сондықтан қосымша фильтрі бар дифференциалды үзбені қолданады:

$$C(s) = K_c\left(1 + \frac{T_D s}{T_v s + 1}\right).$$

Мұндағы фильтрдің T_v уақыт тұрақтысы әдетте T_D-дан 3-10 есе кіші. T_D шексіз өсіру жүйенің орнықсыздығына әкеледі, ал бұл шаманы азайту өтпелі процес уақытын өсіреді.

ПИД-реттегіш. Бұл реттегіштің интеграторы бар және берілу әсер бойынша да, қобалжыту әсер бойынша да жүйе астатикалық болып табылады (яғни тұрақты әсер толығымен омпенсацияланады). Беріліс функция:

$$C(s) = K_c\left(1 + \frac{T_D s}{T_v s + 1} + \frac{1}{T_I s}\right),$$

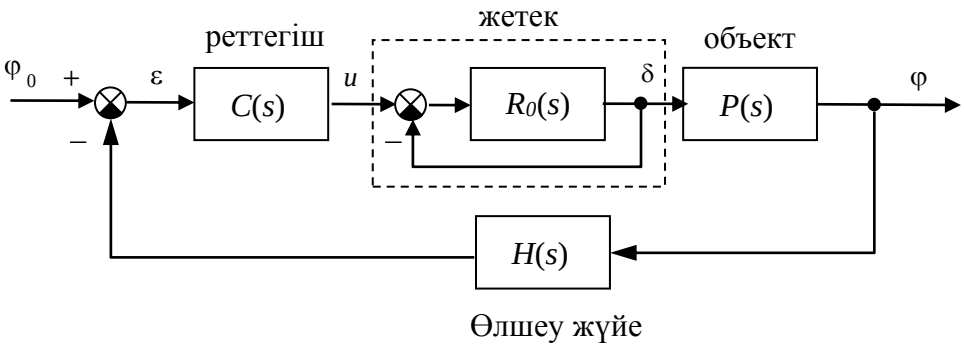
мұндағы T_I – интегралдану үзбенің уақыт тұрақтысы.

T_I өскен сайын өтпелі процестің уақытысы өседі, кішірейсе – орнықтылық қоры азаяды, өтпелі процесте тербеліс сипаттама пайда болады, T_I әрі қарай азайса орнықтылық жойылады.

ПИД-реттегішті дұрыс күйге келтіру жолымен жүйеге қойылған барлық талаптарды орындауға болады. Олар қарапайым болғандықтан кең тараған болып табылады. Статистика бойынша өндіріс реттегіштердің 90% ПИД-реттегіштер болады.

4.2.2 Жүйені бейнелеу.

Жұмыста бағыт бойынша кемені тұрақтандыру жүйесі қарастырылады. Құрылымдық сұлба 4.2 суретте келтірілген.



4.2 сурет - Кемені бағыт бойынша басқару жүйесінің құрылымдық сұлбасы

Кеменің жортуын сипаттайтын сызықты математикалық модель:

$$\dot{\varphi} = \omega_y;$$

$$\dot{\omega}_y = -\frac{1}{T_s}\omega_y + \frac{K}{T_s}\delta,$$

мұндағы φ – жорту бұрышы (берілген бағыттан ауытқу бұрышы);

ω_y – вертикалды ось бойынша айналудың бұрыштық жылдамдығы

δ – вертикалды рульдің тепе-теңдік күй бойынша бұрылу бұрышы;

T_s – уақыт тұрықтысы;

K – *рад/сек* өлшемі бар тұрақты коэффициент.

Рульдің бұрылу бұрышынан жорту бұрышына қарай беріліс функция:

$$P(s) = \frac{K}{s(T_s s + 1)}.$$

Жетек (рульдік машина) жуықтап бірлік кері байланысы бар интегралдау үзбе ретінде модельденеді:

$$R_0(s) = \frac{1}{T_R\, s}.$$

Жорту бұрышты өлшеу үшін гирокомпас қолданылады, оның математикалық моделі келесі бірінші ретті апериодты үзбенің беріліс функциясы:

$$H(s) = \frac{1}{T_{oc}s + 1},$$

4.2.3 Жұмысты орындау тәртібі.

а) ажыратылған жүйені зерттеу;

- кеменің $P(s) = \dfrac{K}{s(T_s s + 1)}$ беріліс функциясын *tf* объект ретінде енгізіңіз:

>>P = tf(0.07,[19 1 0]);

- интегралдау үзбенің $R_0(s) = \frac{1}{T_R s}$ беріліс функциясын енгізіңіз:

>>R0 = tf(1,[2 0]);

- интеграторды бірлік кері байланыспен бекітіп рульдік құрылғының беріліс функциясын құрыңыз:

>> R = feedback(R0, 1);

- объект пен жетектің тізбектеліп байланысуының беріліс функциясын құрыңыз:

$>> \mathrm{G} = \mathrm{P} \cdot \mathrm{R}$

$$G(s) = \frac{0{,}06}{38s^3 + 21s^2 + s};$$

- алынған модельдің өтпелі сипаттамасын құрыңыз:

>> step (G).

Құрамында дифференциалдық үзбе болғандықтан функция шексіз өсіп түзуге ұмтылады (4.3 сурет). Осы түзудің иілу коэффициентін анықтаңыз;

- өлшеу құрылғының беріліс функциясын $H(s) = \frac{1}{T_{ос} s + 1}$ құрыңыз:

>>H = tf(1,[4 1]);

- ажыратылған контурдың беріліс функциясын құрастырыңыз:

$>> \mathrm{L} = \mathrm{G} \cdot \mathrm{H}$

$$L(s) = \frac{0{,}06}{152s^4 + 122s^3 + 25s^2 + s};$$

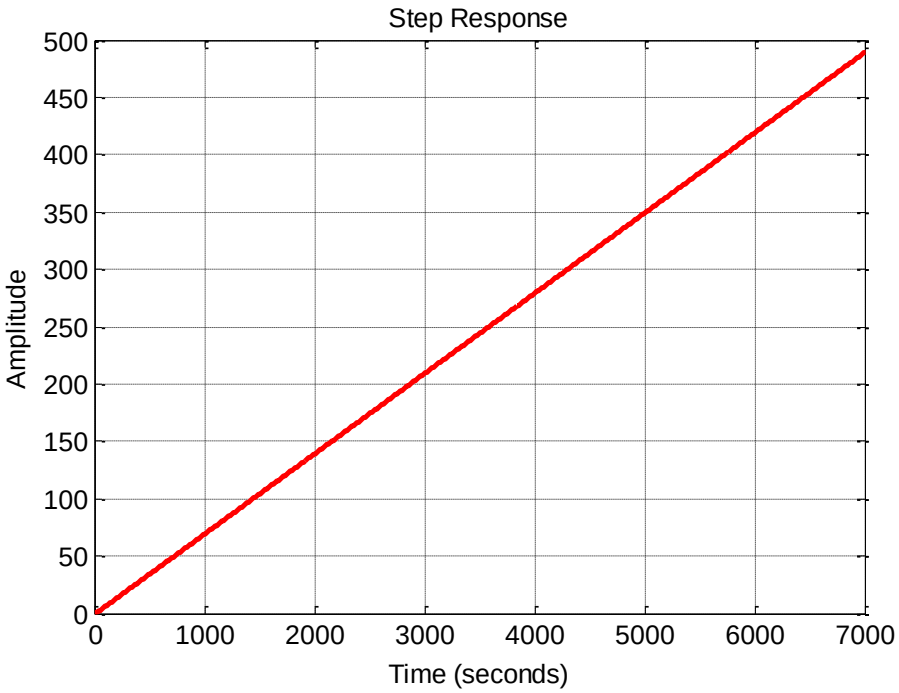
- ажыратылған контурдың ЛАФЖС құрыңыз[7] (4.4 сурет):

>>bode(L);

- ЛАЖС-ның 0 дБ және -180^0 түзулерімен қиылысу нүктелерін график терезесінде белгілеңіз: *график терезесінде – контексті меню– Characteristics – Stability (MinimumCrossing);*

- жүйе орнықты, орнықтылық қоры: амплитуда бойынша – 8,89 дБ, фаза бойынша – 29,7^0 (4.4 сурет);

[7] ЛАФЖС шетел әдебиеттерінде Боде диаграммасы деп аталады.



4.3 сурет – *G* модельдің өтпелі функциясы

- ажыратылған жүйенің максималды күшею коэффициентін табыңыз *график терезесінде – контексті меню – Characteristics - PeakResponse*. Нәтижені түсіндіріңіз;

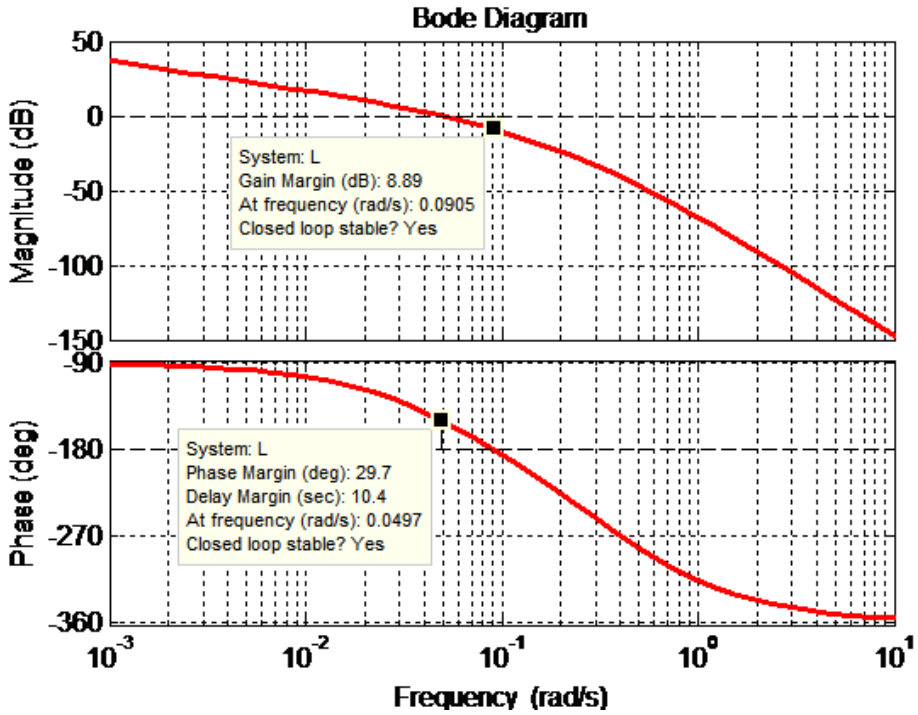
б) ЛАФЖС терезесін жауып, *SISOTool*[8] модулін жұмысқа қосыңыз:

```
>> SISOTool
```

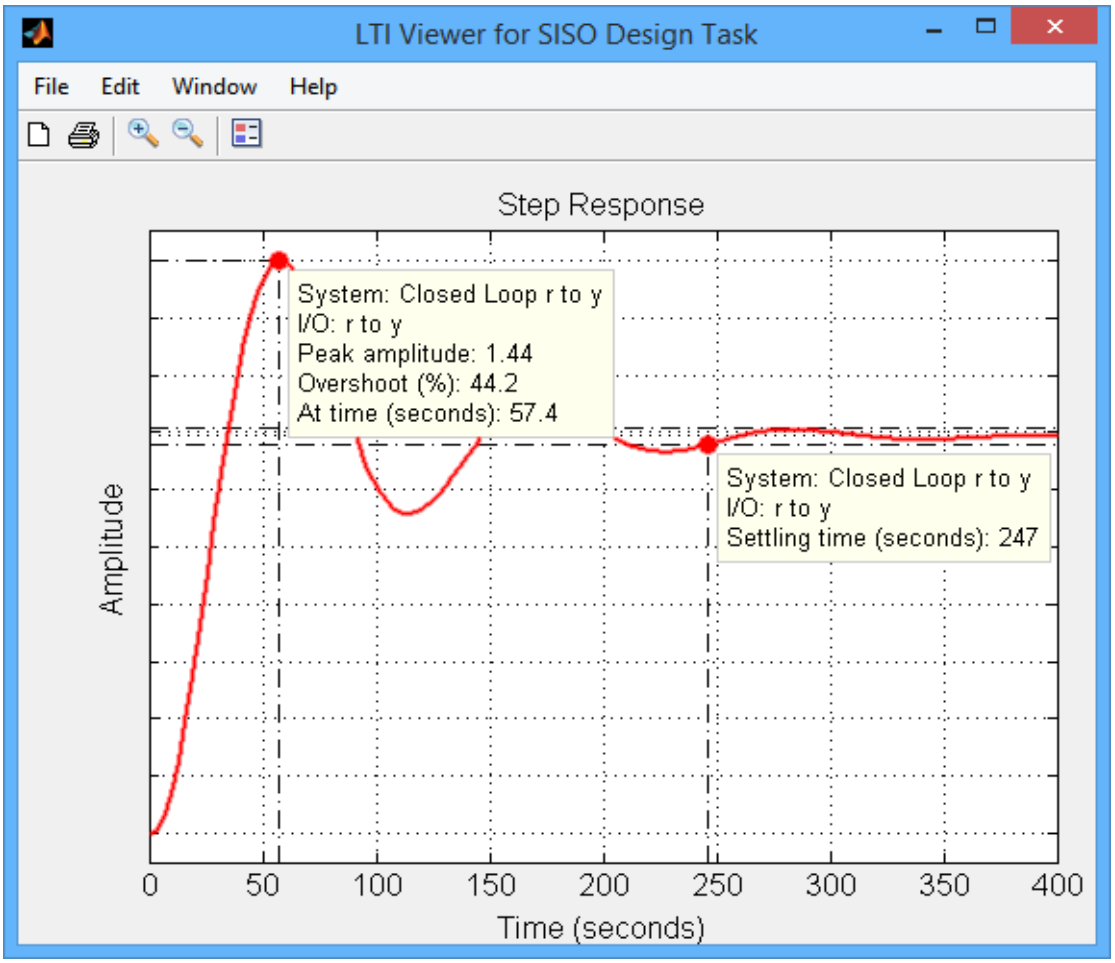
- өтпелі процестердің өзгеруін көру үшін *SISOTool* терезесінің жоғарғы менюінен *LTIViewer*[9] жұмысқа қосыңыз*: Analysis – ResponsetoStepCommand*. Екі терезені қатар орналастырыңыз;

- басқару сигналын көрсетілуін үзіңіз, тек қана шығудағы өтпелі процестің графигін қалдырыңыз: *LTIViewer- контексті меню – Systems – Closedlooprtou* (4.5 сурет);

[8]SISO = SingleInputSingleOutput, жалғыз кірісі мен жалғыз шығысы бар жүйе.
[9]LTI = LinearTime-Invariant, сызықты стационарлы жүйе

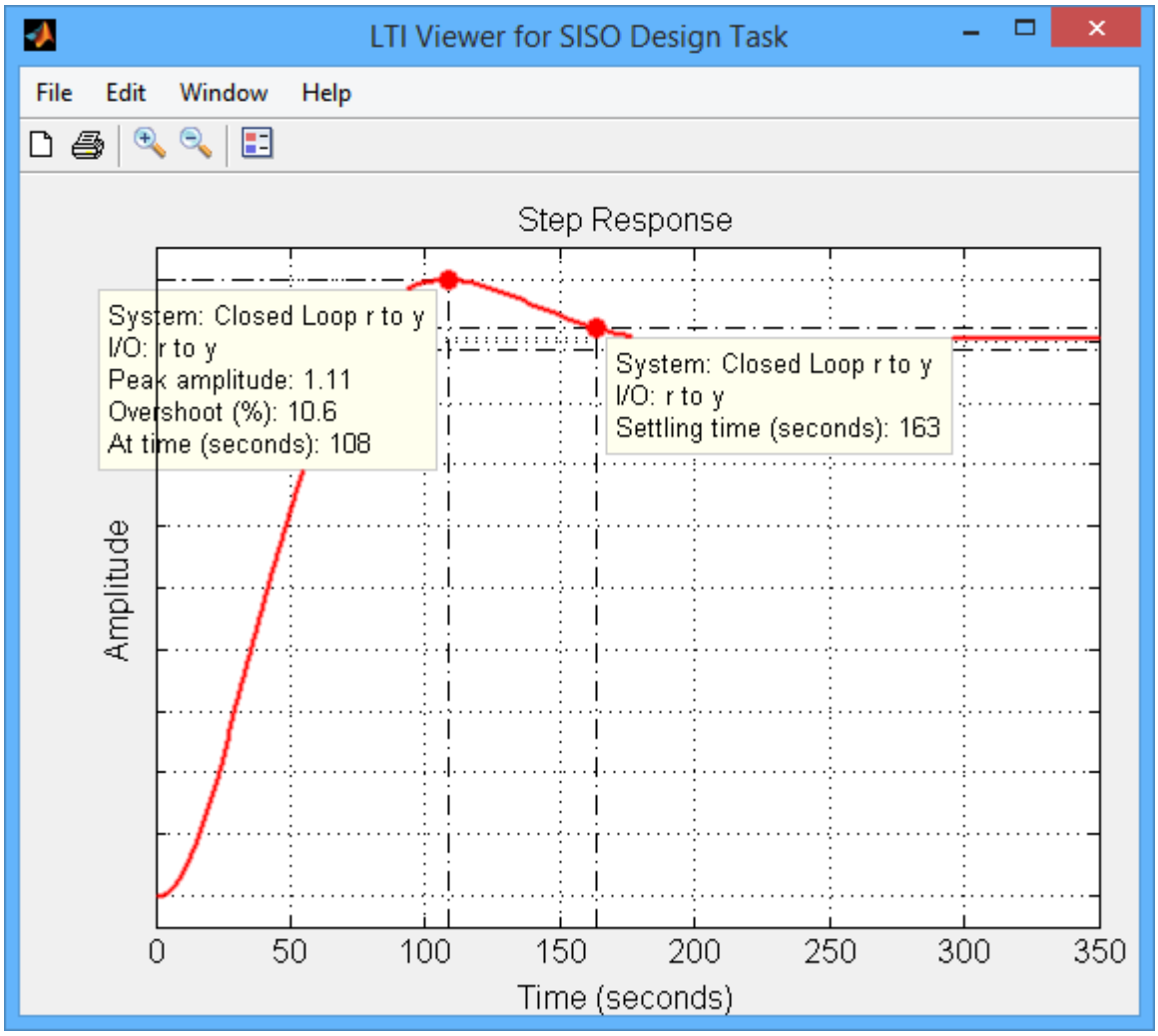


4.4 сурет - Ажыратылған контурдың ЛАФЖ сипаттамасы



4.5 сурет – Өтпелі процестің сапалық сипаттамалары

- *SISOTool* терезесіне көшіңіз. Асыра реттеу жуықтап 10% болатындай күшейудің қосымша коэффициентін анықтаңыз (4.6 сурет);



4.6 сурет – Асыра реттеу 10% болатынай жағдайдағы өтпелі процестің сапалық сипаттамалары

- MatLab ортасының терезесіне көшіп, пропорционалды-дифференциалды (ПД) реттегіштің $C_{pd}(s) = 1 + \frac{T_s s}{T_v s + 1}$ беріліс функциясын енгізіңіз:

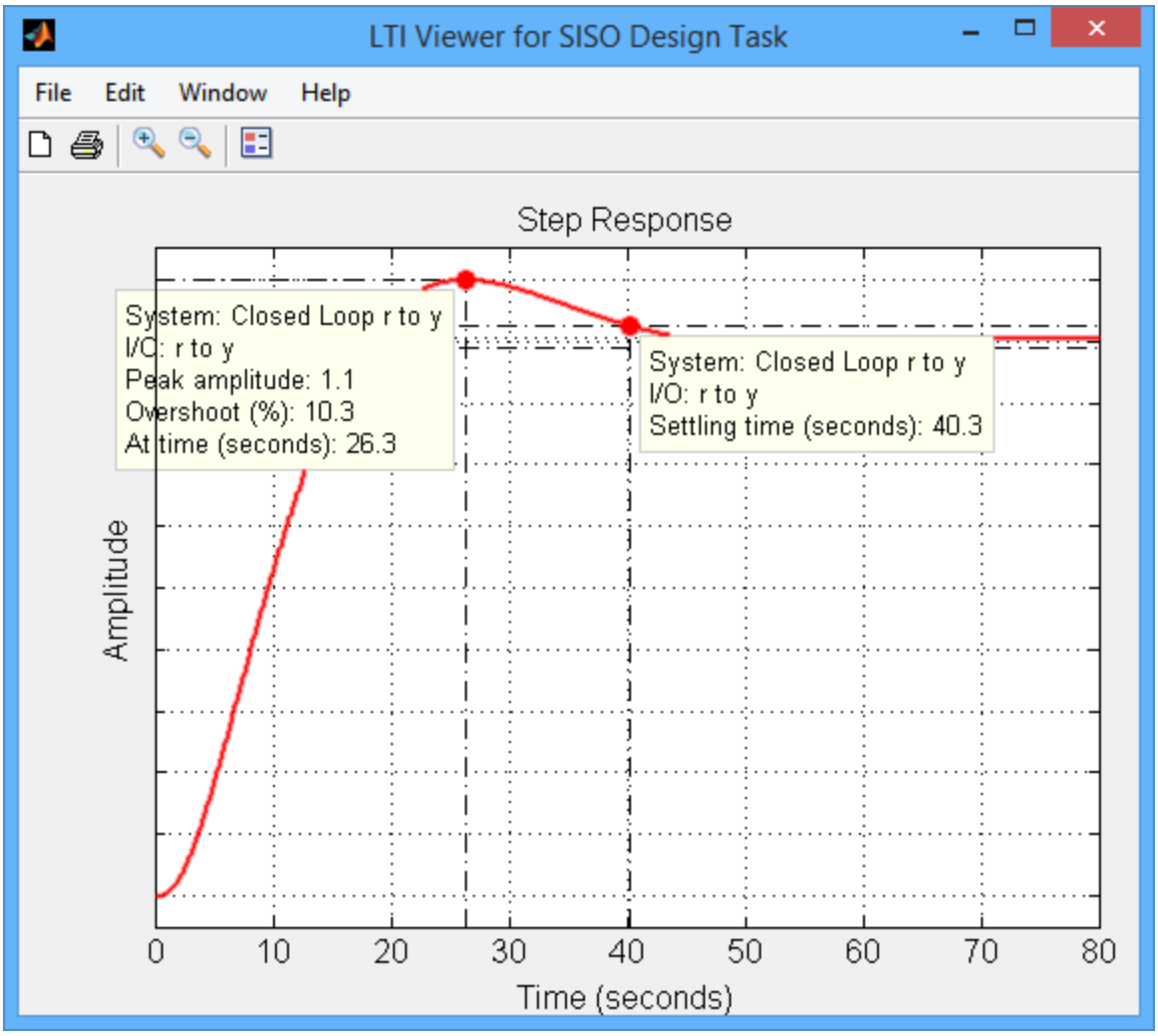
```
>> Cpd = 1 + tf( [19 0], [1 1] );
```

- асыра реттеу жуықтап 10% болатындай күшеюдің қосымша коэффициентін анықтаңыз; ПД-реттегішті қолданғанда өтпелі процесс тезірек және бірсарынды орындалады (4.7 сурет);

- өтпелі процестің уақыты минималды болатындай қосымша күшею коэффициентін анықтаңыз: ЛАЖС тасымалдап, *CurrentCompensator* өрісінде жөндеңіз (4.8 сурет);

- тұйықталған жүйенің беріліс функциясы:

>> W = C*G / (1 + C*G*H)



4.7 сурет – *Cpd* реттегішті қолданғанда өтпелі процестің сапалық сипаттамалары

W =

$$\frac{0.032606\, s\, (s+0.05)\, (s+0.05263)\, (s+0.25)\, (s+0.5)\, (s+1)}{s(s+1)(s+0.9757)(s+0.5979)(s+0.5)(s+0.0526)(s+0.04729)(s^2+0.1817s+0.0147)};$$

- *W* беріліс функцияның минималды іске асыруы:

>> W = minreal(W)

W =

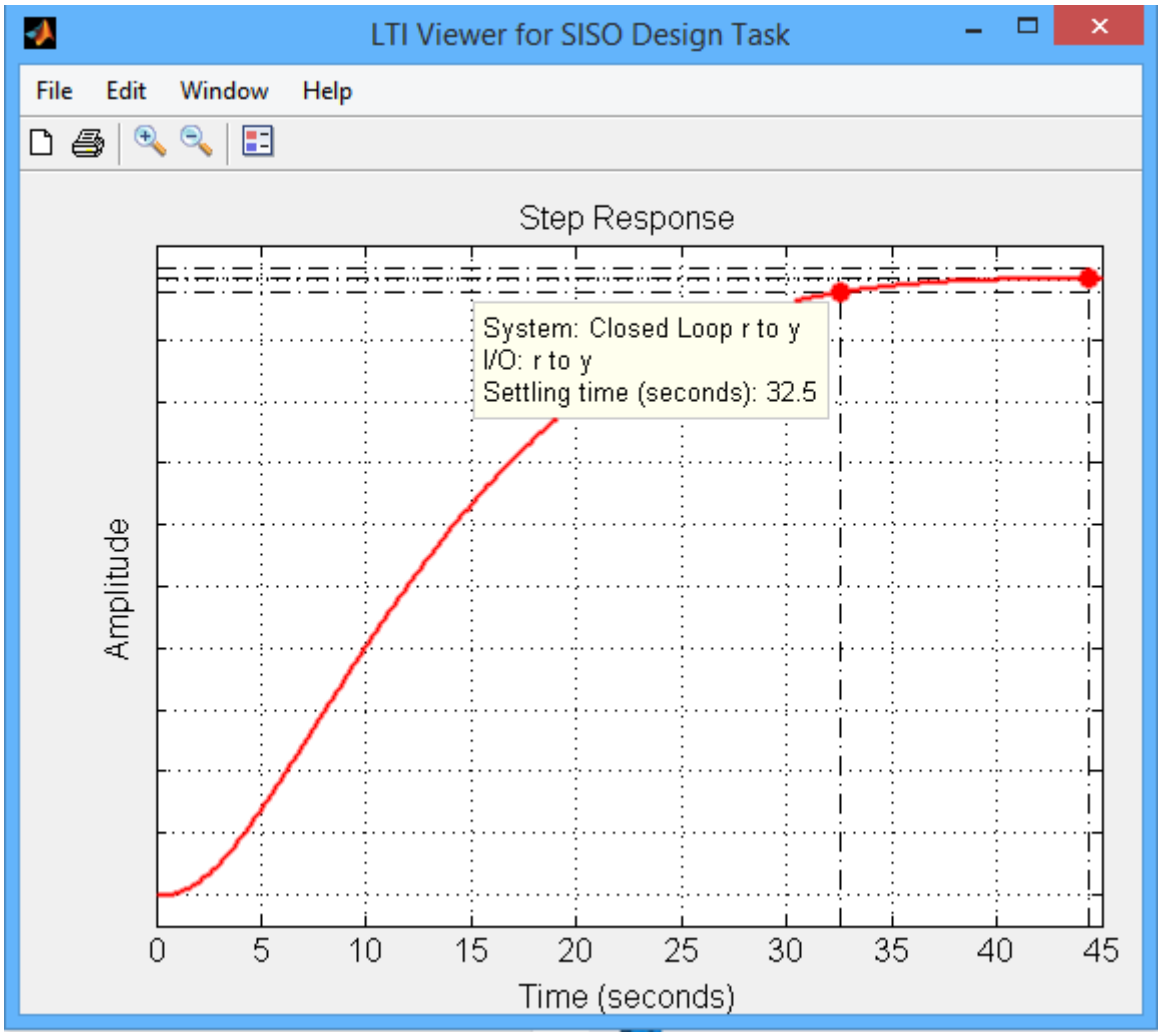
$$\frac{0.032606\, (s+0.05)\, (s+0.25)}{(s+0.9757)\, (s+0.5979)\, (s+0.04729)\, (s^2 + 0.1817s + 0.01477)};$$

- тұйықталған жүйенің беріліс функциясының полюстерін анықтау. Полюстердің жорамал осіне жақын болғаны жүйенің орнықтылық қорының аз екенін көрсетеді:

```
>> pole (W)
    ans =
      -0.9757
      -0.5979
      -0.0908 + 0.0807i
      -0.0908 - 0.0807i
      -0.0473
```

– жүйенің орнықталған режимдегі күшею коэффициентін анықтау:

```
>> dcgain(W)
    ans =
       1.0000
```



4.8 сурет –Уақыты минималды болатындай өтпелі процестің сапалық сипаттамалары

- өлшеу құрылғының моделінің тағы бір түрі $H(s) = \dfrac{2K_{oc}}{T_{oc}+1}$:

```
>> H=tf(2*0.07, [4 1])
```

H =

0.14

----

4 s + 1

- кірістен басқару сигналына қарай (реттегіш шығысына қарай) тұйықталған жүйенің беріліс функциясының минималды іске асыруы:

>> Wu = minreal(C/ (1 + C*G*H))

Wu =

17.701 s (s+0.05) (s+0.05263) (s+0.25) (s+0.5)

----------;

(s+0.9969) (s+0.5172) (s+0.2258) (s+0.05354) (s+0.009153)

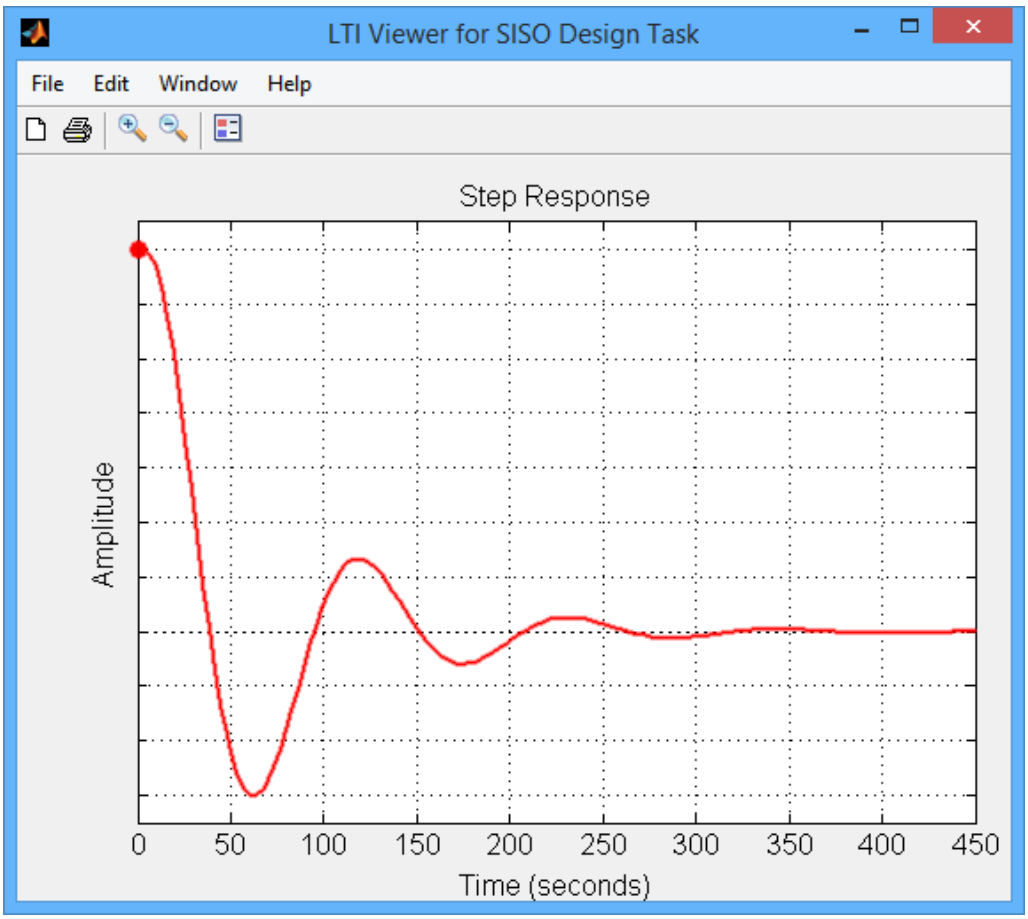
>>Wu = minreal(C/(1+C*G*H))

56.083 s (s+0.05882) (s+0.0625) (s+1)^2

----------;

(s+0.05773) (s^2 + 0.3757s + 0.1119)(s^2 + 2.629s + 1.914)

- кірістегі бірлік сатылы сигналда басқару сигналдың өзгеруінің графигі 4.9 суретте;



4.9 сурет - Бірлік сатылы сигналда басқару сигналдың өзгеруі

4.2.4 Бақылау сұрақтары.

1 SISO, LTI деген не?

2 Ажыратылған жүйенің ЛАФЖС қалай құрылады?

3 Амплитуда және фаза бойынша орнықтылық қорын қалай анықтауға болады? Бұл шамалардың түсініктемелері. Қандай өлшем бірліктерімен өлшенеді?

4 SISOTool модулінің мүмкіндіктері.

5 Келесі анықтамаларды беріңіз: түбір годографы, асыра реттеу, өтпелі процестің уақыты.

6 Контурдың күшею коэффициентінің өсуі ЛАФЖС қандай әсер етеді?

7 ПД-реттегіштің дифференциалдау бөлігінде апериодты үзбе ретіндегі уақыт тұрақтысы T_v болатын қосымша фильтр неге қолданылады?

8 ПД-реттегіштің П-реттегішпен салыстырғанда қандай артықшылықтары бар?

9 Асыра реттеу мен өтпелі процестің уақытысына контурдың күшею коэффициентінің өсуі қандай әсері бар ?

10 Тұйықталған жүйенің барлық блоктарының сипаттамалары белгілі болса, беріліс функциясының ретін қалай анықтауға болады?

11 Тұйықталған жүйенің беріліс функциясының полюстері жорамал осіне жақын болса, орнықтылық қоры қандай болады?

12 Тұйықталған жүйенің статикалық күшею коэффициенті өлшеу құрылғының сипаттамаларынан қалай тәуелді болады?.

13 Астатикалық жүйе деген не? Астатизм реті?

4.3 Simulink пакетінде басқару жүйелерді модельдеу

4.3.1 Жүйені сипаттау.

Жұмыста кемені бағыт бойынша тұрақтандыру жүйесі қарастырылады. Құрылымдық сұлба 3.1 суретте келтірілген.

Кеменің жортуын сипаттайтын сызықты математикалық моделі:

$$\dot{\varphi} = \omega_y;$$

$$\dot{\omega}_y = -\frac{1}{T_s}\omega_y + \frac{K}{T_s}\delta,$$

мұндағы φ – жорту бұрышы (берілген бағыттан ауытқу бұрышы);

ω_y – вертикалды ось бойынша айналудың бұрыштық жылдамдығы;

δ – вертикалды рульдің тепе-теңдік күй бойынша бұрылу бұрышы;

T_s – уақыт тұрықтысы;

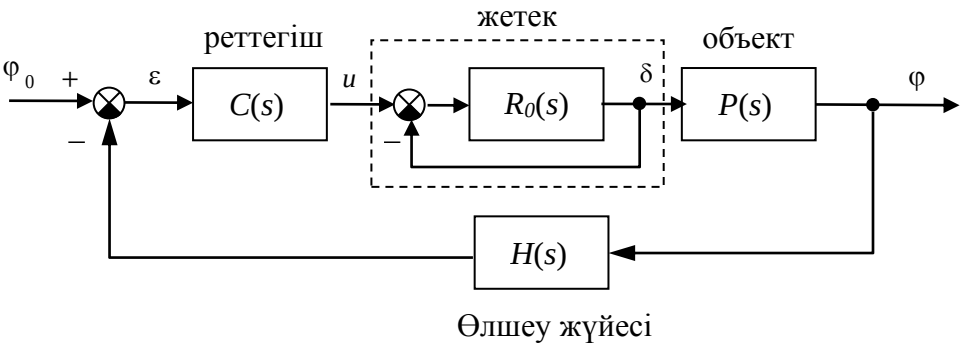
K – *рад/сек* өлшемі бар тұрақты коэффициент.

Рульдің бұрылу бұрышынан жорту бұрышына қарай беріліс функция:

$$P(s) = \frac{K}{s(T_s s + 1)}.$$

Жетек (рульдік машина) жуықтап бірлік кері байланысы бар интегралдау үзбе ретінде модельденеді:

$$R_0(s) = \frac{1}{T_R\, s}.$$



4.10 сурет - Кемені бағыт бойынша басқару жүйесінің құрылымдық сұлбасы

Жорту бұрышты өлшеу үшін гирокомпас қолданылады, оның математикалық моделі келесі бірінші ретті апериодты үзбенің беріліс функциясы:

$$H(s) = \frac{1}{T_{oc} s + 1};$$

ПД-реттегіш

$$C(s) = K_c\left(1 + \frac{T_s s}{T_v s + 1}\right),$$

және ПИД-реттегіш

$$C(s) = K_c\left(1 + \frac{T_s s}{T_v s + 1}\right) + \frac{1}{T_I s}$$

қолданылғанда жүйенің өтпелі процестері зерттеледі.

4.3.2 Жұмысты орындау тәртібі:

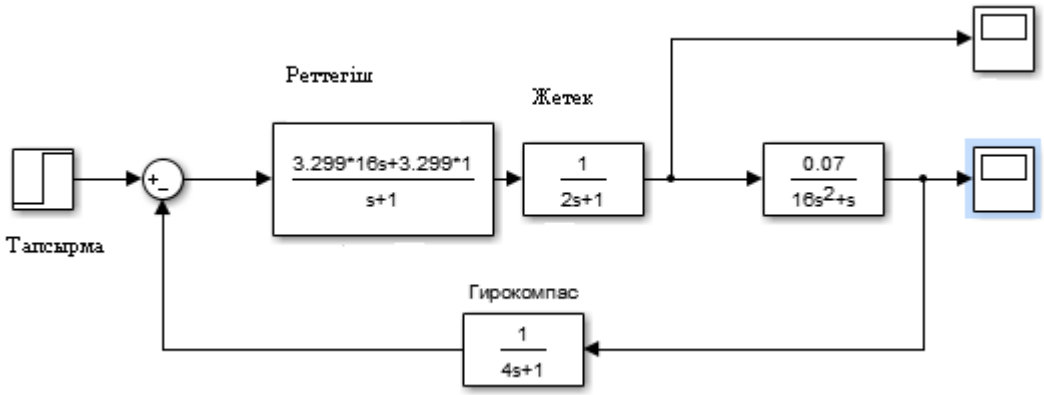
- ПД-регуляторы бар тұйықталған жүйені зерттеу үшін оның диаграммасын құрастырамыз (4.11 сурет).

Модельдің параметрлері суреттен түсінікті;

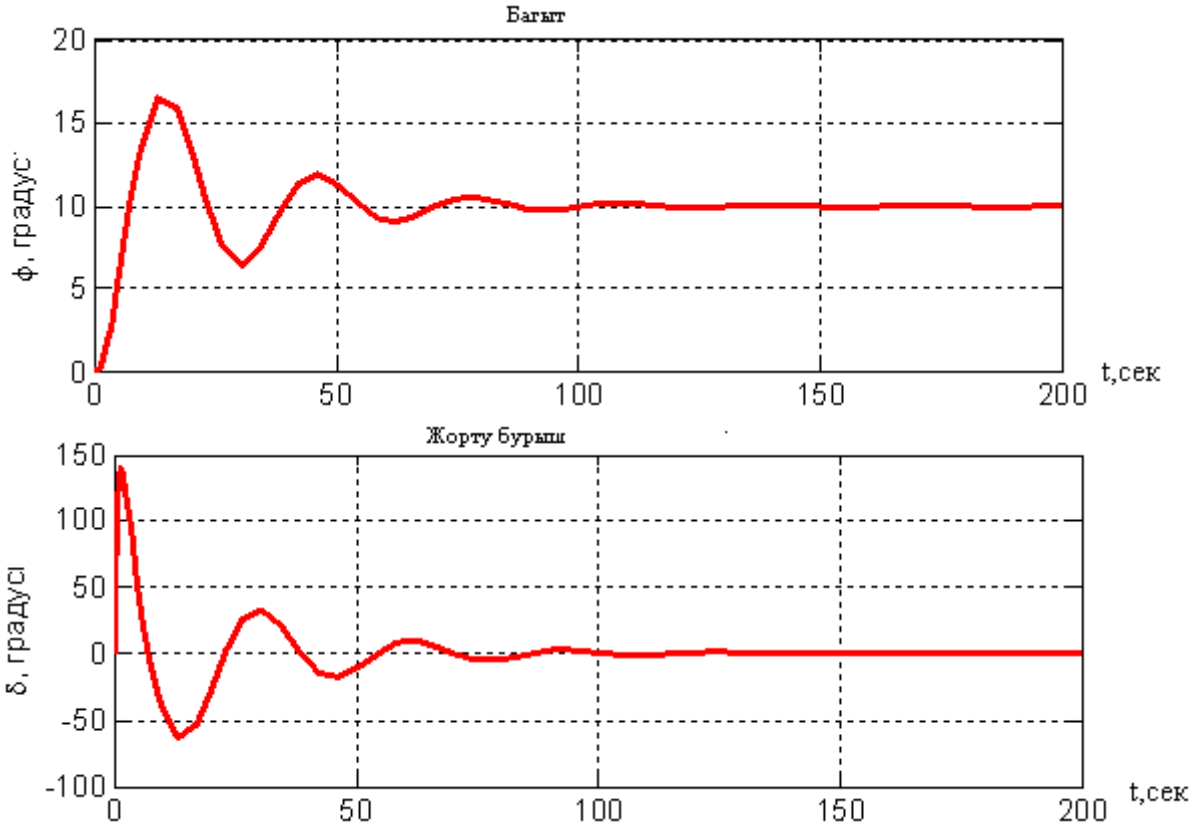
- мәліметтерді *Workspace* ортаға көшіріп, графиктерін шығарамыз (4.12 сурет):

```
>> figure(1)
>> subplot(2, 1, 1)
>> plot(phi(:,1),phi(:,2))
```

```
>> title('Курс')
>> xlabel('Время, сек');ylabel('\phi, градусы')
>> subplot(2, 1, 2);plot(delta(:,1),delta(:,2));title('Угол поворота руля');
xlabel('Время, сек'); ylabel('\delta, градусы');
```



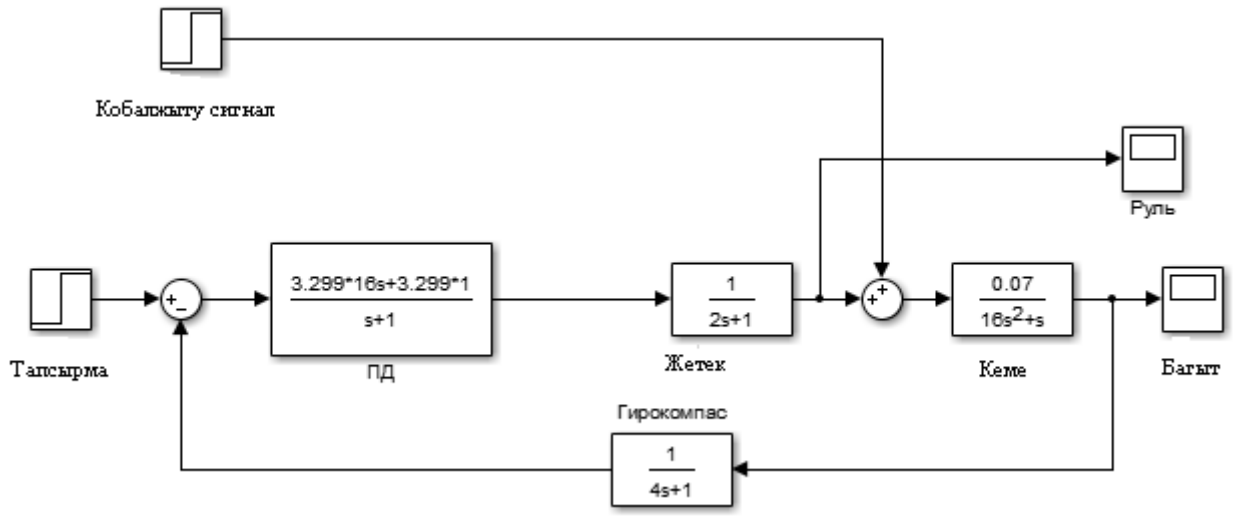
4.11 сурет – Модельдің блок-диаграммасы



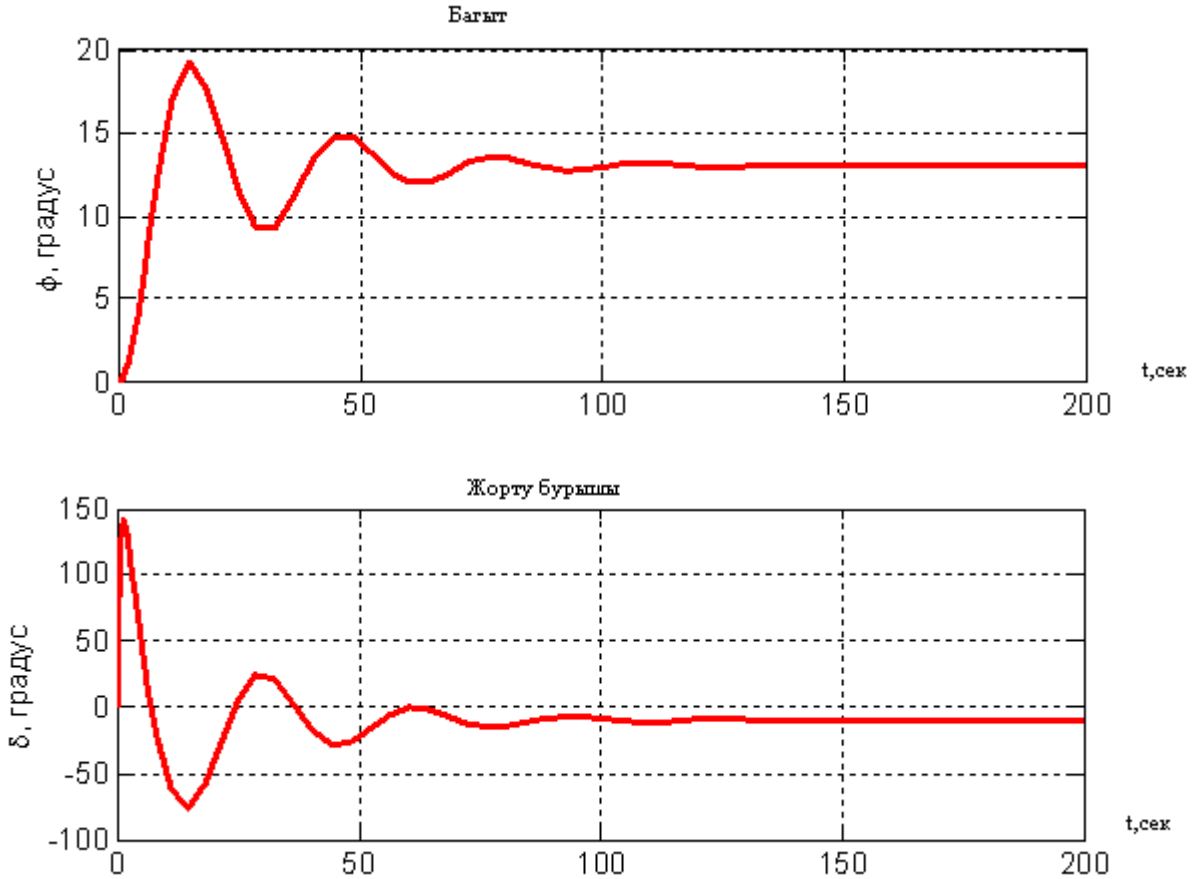
4.12 сурет - ПД-регуляторы бар реттеу жүйедегі өтпелі процесс

- объектің кірісінде орнатылған тұрақты сигналға жүйенің реакциясын зерттеңіз. Бұл сигнал кейбір қобалжыту әсерді модельдейді, мысалы жел әсерін (4.13 сурет);

- мәліметтерді *Workspace* ортаға көшіріп, графикке шығарамыз (4.14 сурет);

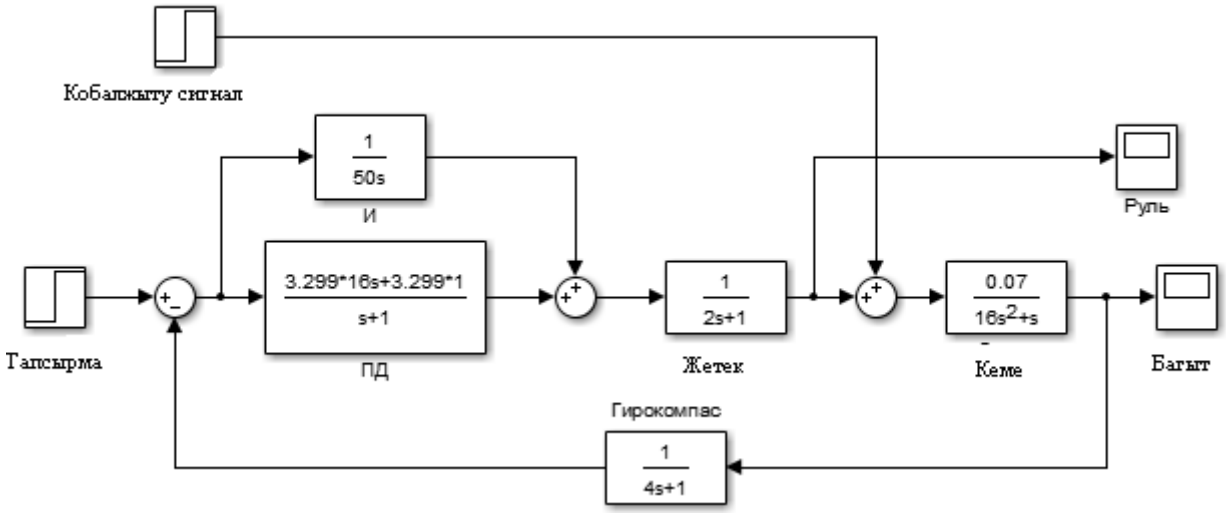


4.13 сурет – ПД заңдылығы және қобалжыту әсері бар тұйықталған жүйе



4.14 сурет - Қобалжыту әсердегі жүйенің өтпелі процестері

- сыртқы әсерлер болғандықтан, ПД-регуляторы бар кеме берілген бағытқа орнатылмады; қобалжыту әсердің тұрақты құрастырушысын компенсациялау үшін оған интегралды каналды қосу керек (4.15 сурет);



4.15 сурет –ПИД-заңдылығы және қобалжыту әсері бар тұйықталған жүйе

- келесі бұйрықтар көмегімен жүйенің ПД және ПИД реттеу заңдылықтарының сәйкестіру графиктері құрылды (4.16 сурет):

```
>> subplot(2, 1, 1)
>> plot(phi0(:,1), phi0(:,2), phi (:,1), phi(:,2));
>> title('Курс')
>> xlabel('Время, сек');ylabel('\phi, градусы')
>> subplot(2, 1, 2);
>> plot(delta0(:,1),delta0(:,2), delta(:,1),delta(:,2));
>> title('Угол поворота руля'); xlabel('Время, сек'); ylabel('\delta, градусы')
>> legend('ПД-регулятор','ПИД-регулятор')
```

- ПИД-регуляторды қолданғанда кеме берілген бағытқа орнатылады, себебі интегралдау қосымша статикалық қателікті азайтады;

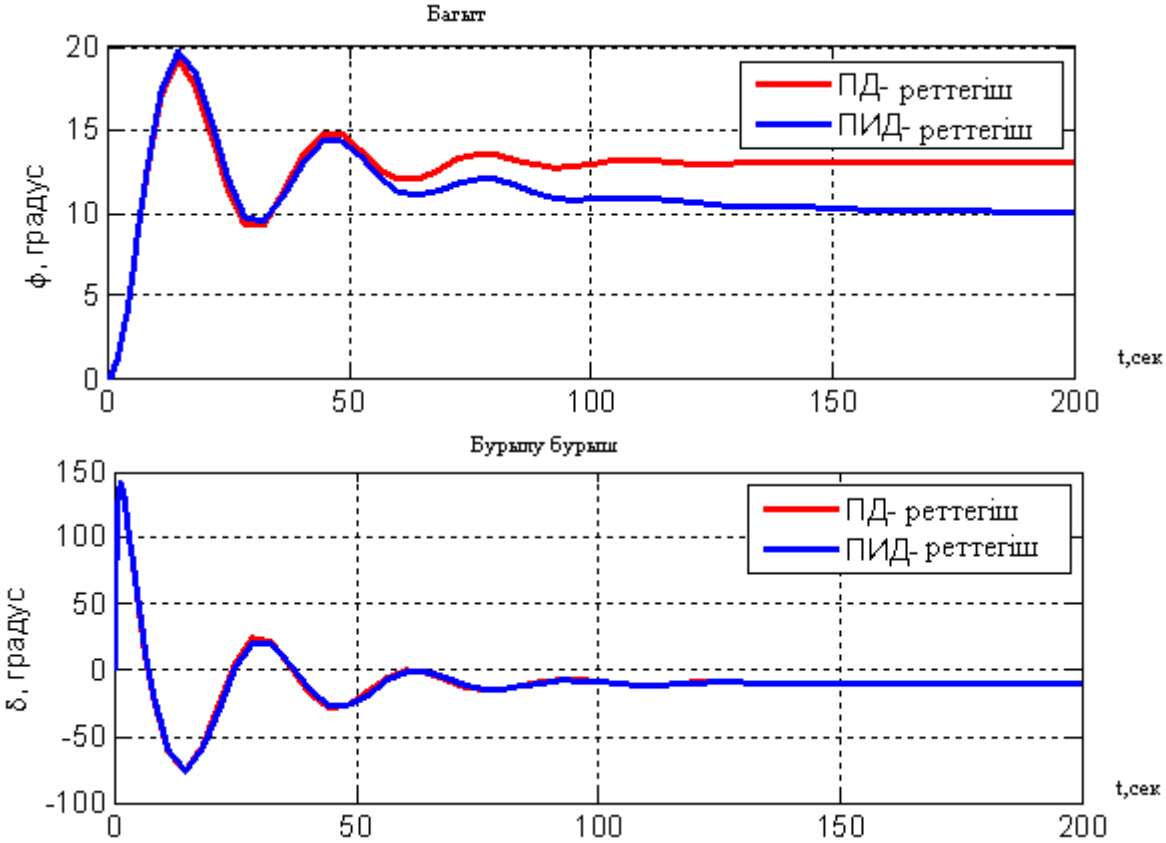
- MatLab бұйрық жолында беріліс функцияларын енгізіп, жалпы беріліс функция құрастырылды:

```
>> Wpid=tf(1,[50 0])+tf([3.299*16 3.299],[1 1]);
>> Wprivod=tf(1,[2 1]);
>> Wgiro=tf(1,[4 1]);
>> Wsudno=tf(0.07,[16 1 0]);
>> W=Wpid*Wprivod*Wsudno/(1+Wpid*Wprivod*Wsudno*Wgiro);
```

- содан кейін орнықтылық қорларын анықтаймыз:

```
>> [gm,phim]=margin(W)
    gm =
       5.6254
    phim =
      35.8490
>> gm = 20*log10(gm)
    gm =
      15.0031
```

Сонымен, ПИД реттеуіші бар жүйенің күшейу коэффициентінің қоры - 15,0031 дБ, фаза бойынша - 35,8490°.



4.16 сурет – ПД- және ПИД-регуляторлары бар жүйелердіңгі өтпелі процестер

4.3.3 Бақылау сұрақтары.

1 Кері байланысы бар интегратордың беріліс функциясы қалай анықталады?

2 *Library Browser* деген не?

3 Simulink модельдер файлдарының кеңейтілуі қандай?

4 Жаңа моделді қалай жасауға болады?

5 Бос шығысы мен бос кірісі бар екі блок қалай байланысады?

6 Бір сигналды бірнеше блокка қалай беруге болады?

7 Модельдеу нәтижесі Matlab жұмыс ортасына қалай жіберіледі? Олар қандай түрде беріледі?

8 Блокты немесе блоктар арасындағы байланыс қалай жойылады?

9 *Scope* терезесінде координат осьтерінің қажетті масштабтары қалай анықталады, оларды қалай сақтауға болады?

10 Модель терезесінде блоктың көшірмесін қалай жасауға болады?

11 Сумматорда арифметикалық әрекеттердің таңбаларын қалай өзгертуге болады?

12 Модельдеу уақытын қалай өзгертуге болады?

13 Блок атын қалай өзгертуге болады?

14 Блок атын басқа орынға қалай көшіруге болады?

15 Блоктың, блок жазуларының түсін қалай өзгертуге болады?

16 *TransferFcn* блогының параметрлері қалай енгізіледі?

17 Қобалжыту әсер бойынша беріліс функция қалай табылады?

18 ПД-реттегішті қолданғанда жүйе тұрақты әсерді неге компенсацияламайды?

19 Әсер бойынша статикалық күшею коэффициенті белгілі болса, берілген бағыттан орнықталған ауытқу қалай анықталады?

20 Тұрақты әсер толығымен компенсациялануы үшін әсер бойынша беріліс функцияның қандай қасиеттері болу керек?

21 Тұрақты әсер толығымен компенсациялануы үшін реттегіштің қандай қасиеті болу керек?

22 ПИД-реттегіште интегралды каналды қолданудың қандай артықшылығы бар?

23 Тұйықталған жүйенің әсер бойынша беріліс функцияның ПИД-реттегіші болғанда ПД-реттегіші бар жүйеден реті неге 1-ге артық.

24 *subplot* бұйрығының қандай параметрлері бар?

25 *phi(:,1)* жазбада қоснүкте нені білдіреді?

26 Графикке бас жол мен ось атауларын қалай шығаруға болады?

27 Бір терезеде екі графикті қалай орнатуға болады?

28 Бір графикте бірнеше қисықтарды қалай орнатуға болады?

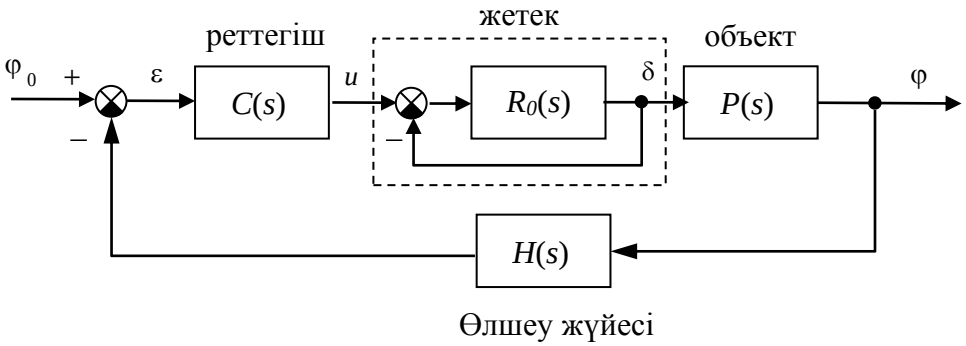
29 Легенда деген не? Графикке легенда қалай орнатылады?

30 Графикте грек алфавитінің әріптерін қалай орнатуға болады?

4.4 Бейсызықты басқару жүйелерін модельдеу

4.4.1 Жүйені сипаттау.

Жұмыста кемені бағыт бойынша басқару жүйесі қарастырылады. Құрылымдық сұлба 4.17 суретте келтірілген.



4.17 сурет - Кемені бағыт бойынша басқару жүйесінің құрылымдық сұлбасы

Кеменің жортуын сипаттайтын сызықты математикалық моделі:

$$\dot{\varphi} = \omega_y;$$

$$\dot{\omega}_y = -\frac{1}{T_s}\omega_y + \frac{K}{T_s}\delta,$$

мұндағы φ – жорту бұрышы (берілген бағыттан ауытқу бұрышы);

ω_y – вертикалды ось бойынша айналудың бұрыштық жылдамдығы;

δ – вертикалды рульдің тепе-теңдік күй бойынша бұрылу бұрышы;

T_s – уақыт тұрықтысы;

K – *рад/сек* өлшемі бар тұрақты коэффициент.

Рульдің бұрылу бұрышынан жорту бұрышына қарай беріліс функция:

$$P(s) = \frac{K}{s(T_s s + 1)}.$$

Жетек (рульдік машина) жуықтап бірлік кері байланысы бар интегралдау үзбе ретінде модельденеді:

$$R_0(s) = \frac{1}{T_R\, s}.$$

Руль бұрышын өзгертуге және жылдамдылығына бейсызықты шектеулер орнатылады:

$$\left|\dot{\delta}(t)\right| < 3\ ^\circ/\tilde{n}\mathring{a}\hat{e}, \qquad \left|\delta(t)\right| < 30^\circ.$$

Жорту бұрышын өлшеу үшін гирокомпас қолданылады, оның математиалық моделі бірінші ретті апериодты үзбенің беріліс функциясы ретінде жазылады:

$$H(s) = \frac{1}{T_{oc}s + 1}.$$

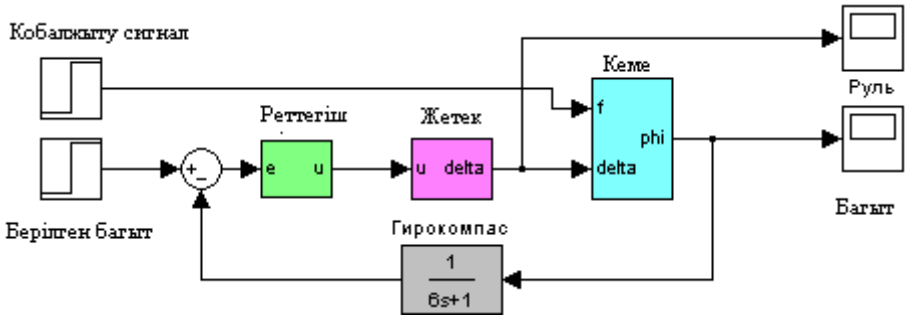
Басқару жүйе ретінде ПИД-реттегіш қолданылады, оның беріліс функциясы:

$$C(s) = K_c\left(1 + \frac{T_s s + 1}{T_v + 1}\right) + \frac{1}{T_I s}.$$

4.4.2 Жұмысты орындау тәртібі:

- 4.3.1 б.құрылған модельді ашыңыз;
- ретттегіш пен интеграторды бір ішкі жүйеге түрлендіріңіз: *Edit – CreateSubsystem*.
- ішкі жүйені *Регулятор* деп атаңыз, ат жолын жоғарғы жағына орнатып, түс түрін өзіңіздің қалауыңызбен таңдаңыз.
- осы блоктың кірісі мен шығысына сәйкесінше *e* мен *u* аттарын орнатыңыз.

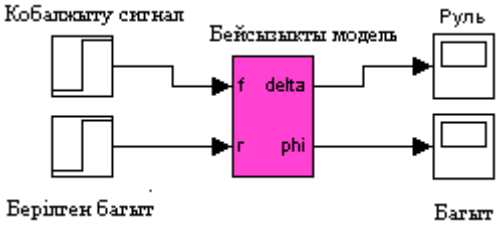
- алдындағыдай *u* кірісі және *delta* шығысы бар *Жетек* ішкі жүйесін, *f* кірісі және *phi* шығысы бар *Кеме* ішкі жүйесін құрастырыңыз (4.18 сурет);



4.18 сурет – Сызықты модельдің блок-диаграммасы

- сигнал көздері мен осциллографтардан басқа барлық блоктарды белгілеп, *Сызықты жүйе* ішкі жүйесін жасаңыз; кірістері *r* (берілген бағыт) және *f* (қобалжыту әсер), шығыстары *phi* мен *delta*.

- *Сызықты жүйе* блокты көшіріңіз, оның атын *Нелинейная система* деп өзгертіңіз. Жаңа блоктың кірістеріне алдындағы бірінші блоктың сигналдарын (берілген бағыт пен қобалжыту әсер) қосыңыз (4.19 сурет);



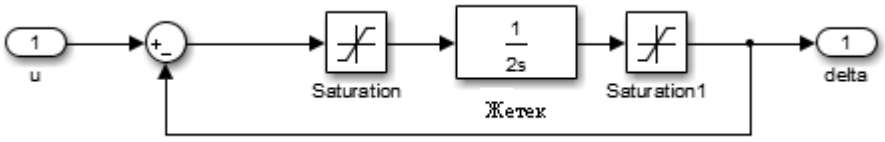
4.19 сурет – Бейсызықты модельдің жалпы түрі

- бейсызықты жүйедегі *Жетек* ішкі жүйесін ашыңыз. Рульдің бұрышын өзгертуге және оның өзгеру жылдамдығына қойылған шектеулерді есепке ала отырып, жетектің бейсызықты моделін құрастырыңыз:

а) қосу сызуларды жойыңыз;

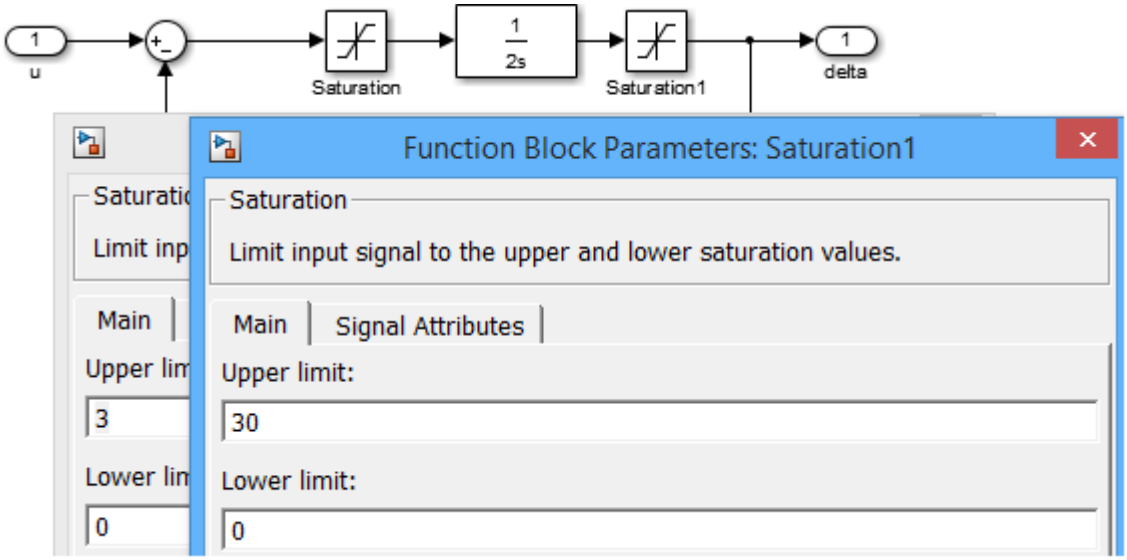
б) беріліс функцияны келесіге $R_0(s) = \dfrac{1}{T_R s}$ алмастырыңыз;

в) модель терезесіне *Discontinuities* тобынан екі блогын *Saturation* (қаныгу) орнатыңыз (4.20 сурет). Бір блокты интегратор алдына орнатыңыз (рульдің орналасуын өзгерту жылдамдығына шектеу), екіншіні – одан кейін (рульдің орналасу бұрышына шектеу);



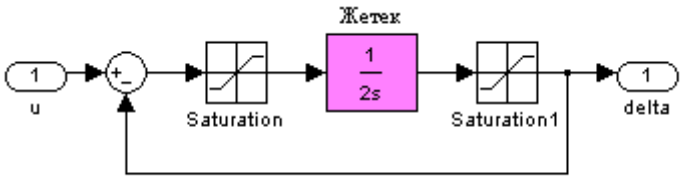
4.20 сурет – «Жетек» ішкі жүйесі

г) рульдің орналасуын өзгерту жылдамдығы секундына 3 градустан аспайтындай, ал рульдің орналасу бұрышы - 30 градустан аспайтындай рұқсат етілген мәндерінің қажетті шектерін орнатыңыз: блокты белгілеп - *Upperlimit* және *Lowerlimit* (4.21 сурет);



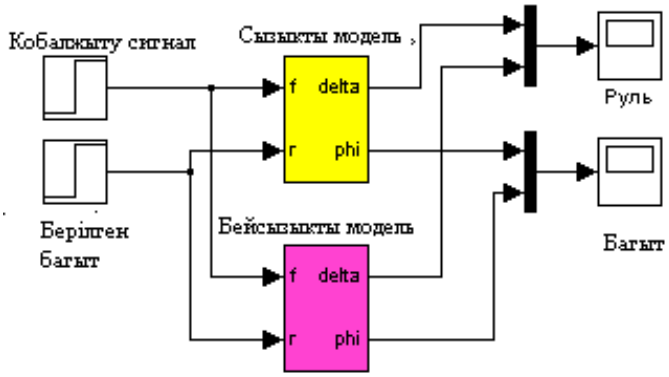
4.21 сурет – «Жетек» ішкі жүйенің элементтері

е) блоктарды дұрыс тәртібімен қосыңыз (4.22 сурет);



4.22 сурет – Бейсызықты модельдің жалпы түрі

- құрастырылған сұлбалардан 4.23 суреттегідей жалпы блок-диаграмманы құрыңыз;



4.23 сурет – Зерттелетін жүйенің жалпы блок-диаграммасы

- модель терезесіне *SignalRouting* тобынан екі *Mux* блогын орнатыңыз.

- бірінші блоктың кірістерін сызықты және бейсызықты жүйелердің басқару сигналдарымен (*delta*) қосыңыз, ал шығысын – *Руль* осциллографтың кірісімен.

- алдындағыдай екінші *Mux* блогының кірістерін бейсызықты жүйенің шығыстағы сигналдарымен (*phi*) байланыстырыңыз, ал шығысты *Бағыт* осциллографымен**;**

- бағытты 10 градус және қобалжыту әсерді 0 деп орнатыңыз. Модельдеуді орындаңыз, нәтижелерін қарап шығыңыз;

- сызықты және бейсызықты жүйелерінің нәтижелері арасындағы айырмашылықты түсіндіріңіз (қай бейсызықты үзбе нәтижеге маңызды әсер етеді?);

- жаңа *M*-файлды жасаңыз. Редактор терезесінде бағыт бойынша өтпелі процестердің графиктерін шығаратын бұйрықтарды орнатыңыз:

```
figure(1);
subplot(2,1,1);
plot(phi(:,1),phi(:,2),'b');
hold on;
plot(phi(:,1),phi(:,3),'g');
hold off;
legend('Линейнаясистема', ...
        'Нелинейнаясистема')
```

Енді *phi* массиві 3 тік жолдан тұрады: уақыт және екі осциллограф кірістерінің сигналдары (сызықты және бейсызықты жүйелер шығыстары). % белгісінің оң жағындағы мәтін комментарий болып табылады. *plot* бұйрығының үшінші параметрі түсті белгілейді: *‘b’* – көк, *‘g’* – жасыл көк, *‘r’* – қызыл, т.с.(осы бұйрық бойынша анықтаманы қараңыз). *hold on* бұйрығы бұрыңғы графикті жоймау, ал *hold off* – жою керек дегенді білдіреді;

- файлды (скриптті) орындауға қосыңыз (F5 батырмасы). Егерде график көрінбесе, қателер туралы хабарды Matlab бұйрық терезесінен көресіз;

- шрифт өлшемін үлкейтіңіз: *subplot* бұйрығынан кейін *set(gca,'FontSize',16)* орнатыңыз. Бұл жерде *gca* ағынды координаттар осін белгілейді (*getcurrentaxis*). Қайтадан скриптті орындаңыз;

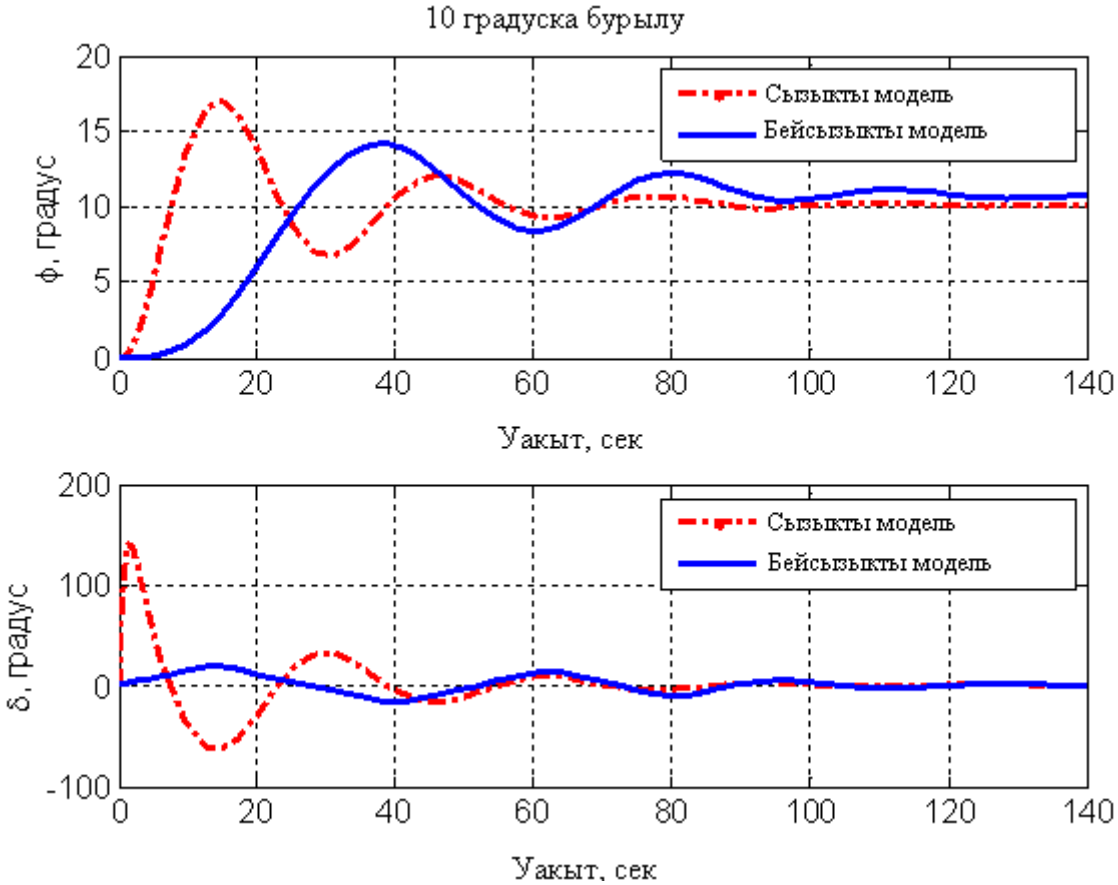
- скриптке график пен координаттар осьтерінің атауларын қосыңыз:

```
title('Поворот на 10 градусов')
xlabel('Время, сек');
ylabel('\phi, град');
```

- сызулардың қалыңдығын көбейтіңіз:

```
h = get(gca, 'Children')
set(h(1),'LineWidth',1.5)
set(h(2),'LineWidth',1.5)
```

get функциясы көмегімен біріншіден барлық түзу объектілерге көрсеткіштер (*handle*) массивін аламыз. Содан кейін *set* функциясы көмегімен әр түзу үшін *LineWidth* (түзу қалыңдығы) қасиетін 1,5 деп орнатамыз. Файлды сақтаңыз, орындаңыз (4.24 сурет);



4.24 сурет – Бұрылу бұрышы 10 градус болғандағы жүйе күйін модельдеу

- берілген бағыттың шамасын 90 градусқа өзгертіңіз, қайтадан модельді орындаңыз (4.25 сурет);

- редактор терезесіне көшіп, график атын «90 градуқа бұрылу» деп өзгертіңіз; скриптті жұмысқа қосыңыз;

- сызықты және бейсызықты модельдер арасында маңызды сәйкестікті түсіндіріңіз. Бейсызықтықтық нәтижеге кандай әсер береді?

4.4.3 Бақылау сұрақтары.

1 Модельдің бірнеше блоктарын ішкі жүйеге қалай түрлендіруге болады?

2 Ішкі жүйенің неше кірістері мен шығыстары болады?

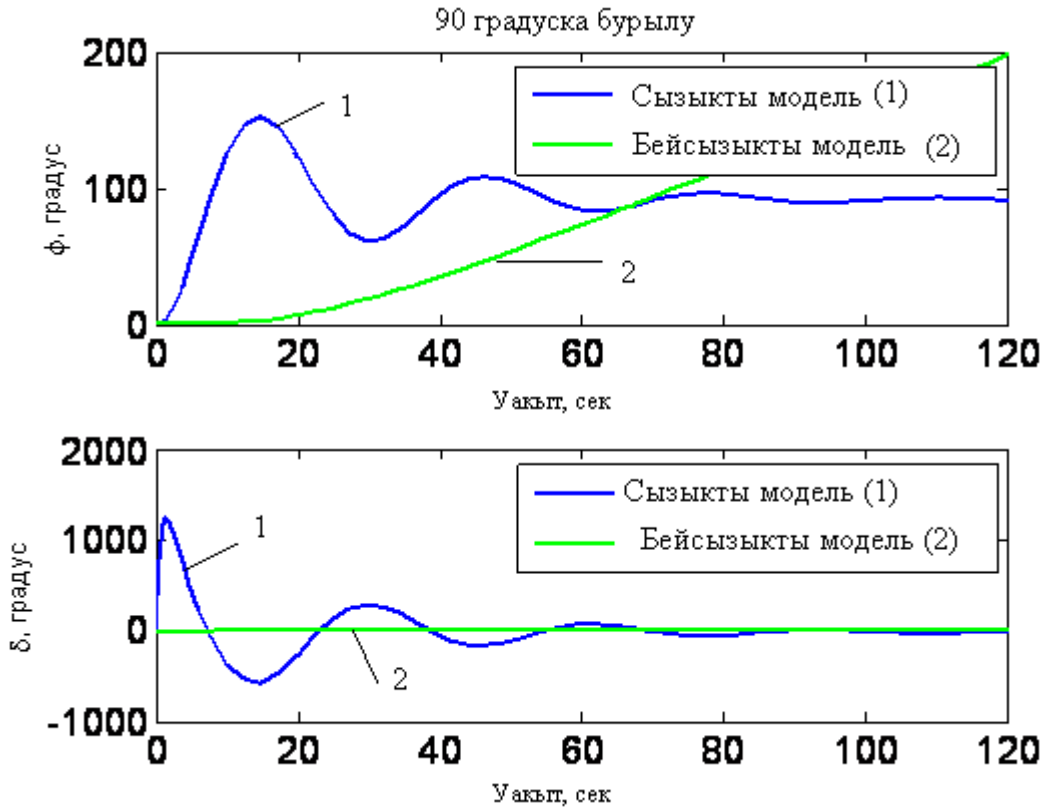
3 Ішкі жүйені қалай жөндеуге болады?

4 Ішкі жүйенің кірістері мен шығыстарының аттарын қалай өзгертуге болады?

5 Блоктың немесе ішкі жүйенің көшірмесін қалай жасауға болады?

6 Блокты немесе қосу сызықты қалай жоюға болады?

7 Жетектің бейсызықты моделінің құрылымын түсіндіріңіз.



4.25 сурет – Бұрылу бұрышы 90 градус болғандағы жүйе күйін модельдеу

8 Бейсызықты модельде неге жетектің сызықты моделінің жалпы беріліс функциясын $R(s)=\dfrac{1}{T_R s+1}$ қолдануға болмайды?

9 Интегратор кірісінде орналасқан блоктың қанығу шектері қалай таңдалынады?

10 Блоктың басқа блоктармен байланысын қалай өшіруге болады?

11 *Mux* блогының міндетін түсіндіріңіз.

12 Мультиплексор арқылы осциллографтың қай кірісіне қандай сигнал түсетінін қалай білуге болады?

13 Matlab ортасындағы скрипт деген не?

14 Скрпит мәтініндегі % белгісі нені көрсетеді?

15 Бір жолда бірнеше бұйрықтарды қалай енгізуге болады?

16 Ұзын бұрықтың мәтінін келесі жолға қалай көшіруге болады?

17 *plot* функциясының үшінші параметрін түсіндіріңіз.

18 *hold on* және *hold off* бұйрықтарды түсіндіріңіз.

19 Скриптті қалай орындауға болады?

20 Скрипттің тек қана кейбір бұйрықтарын қалай орындауға болады?

21 *gca* бұйрығын түсіндіріңіз.

22 *set* және *get* бұйрықтарының міндеті.

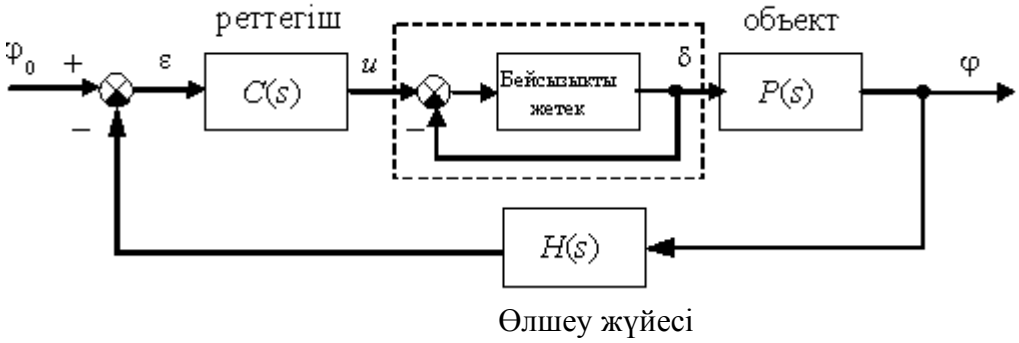
23 График шрифтінің өлшемін қалай өзгертуге болады?

24 Графикалық объектінің *handle* параметрі неге керек?
25 Графикте сызулардың қалыңдығын қалай өзгертуге болады?
26 Скрипттегі қателер туралы хабарлар қай жерде орналасады?

4. 5 Matlab ортасында программалау

4.5.1 Жүйені бейнелеу.

Жұмыста кемені бағыт бойынша басқару жүйесі қарастырылады. Құрылымдық сұлба 4.26 суретте келтірілген.



4.26 сурет - Кемені бағыт бойынша басқару жүйесінің құрылымдық сұлбасы

Кеменің жортуын сипаттайтын сызықты математикалық моделі:

$$\dot{\varphi} = \omega_y;$$

$$\dot{\omega}_y = -\frac{1}{T_s}\omega_y + \frac{K}{T_s}\delta,$$

мұндағы φ – жорту бұрышы (берілген бағыттан ауытқу бұрышы);

ω_y – вертикалды ось бойынша айналудың бұрыштық жылдамдығы;

δ – вертикалды рульдің тепе-теңдік күй бойынша бұрылу бұрышы;

T_s – уақыт тұрықтысы;

K – *рад/сек* өлшемі бар тұрақты коэффициент.

Рульдің бұрылу бұрышынан жорту бұрышына қарай беріліс функция

$$P(s) = \frac{K}{s(T_s s + 1)}.$$

Жетек (рульдік машина) жуықтап бірлік кері байланысы бар интегралдау үзбе ретінде модельденеді:

$$R_0(s) = \frac{1}{T_R\, s}.$$

Руль бұрышын өзгертуге және жылдамдығына бейсызықты шектеулер орнатылады:

$$\left|\dot{\delta}(t)\right| < 3\ ^{\circ}/сек, \qquad \left|\delta(t)\right| < 30^{\circ}.$$

Жорту бұрышын өлшеу үшін гирокомпас қолданылады, оның математиалық моделі бірінші ретті апериодты үзбенің беріліс функциясы

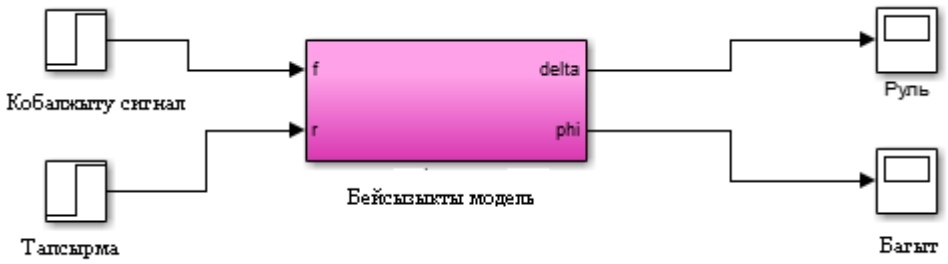
$$H(s) = \frac{1}{T_{oc}s + 1}.$$

Басқару жүйе ретінде ПИД-реттегіш қолданылады, оның беріліс функциясы:

$$C(s) = K_c\left(1 + \frac{T_s s + 1}{T_v + 1}\right) + \frac{1}{T_I s}.$$

4.5.2 Жұмысты орындау тәртібі:

- 4.4 б. құрастырылған модель қолданылады; сұлбадан сызықты бөлігін алып тастап, 4.27 суретте көрсетілгендей сұлбаны өзгертіңіз;



4.27 сурет – Өзгертілген сұлба

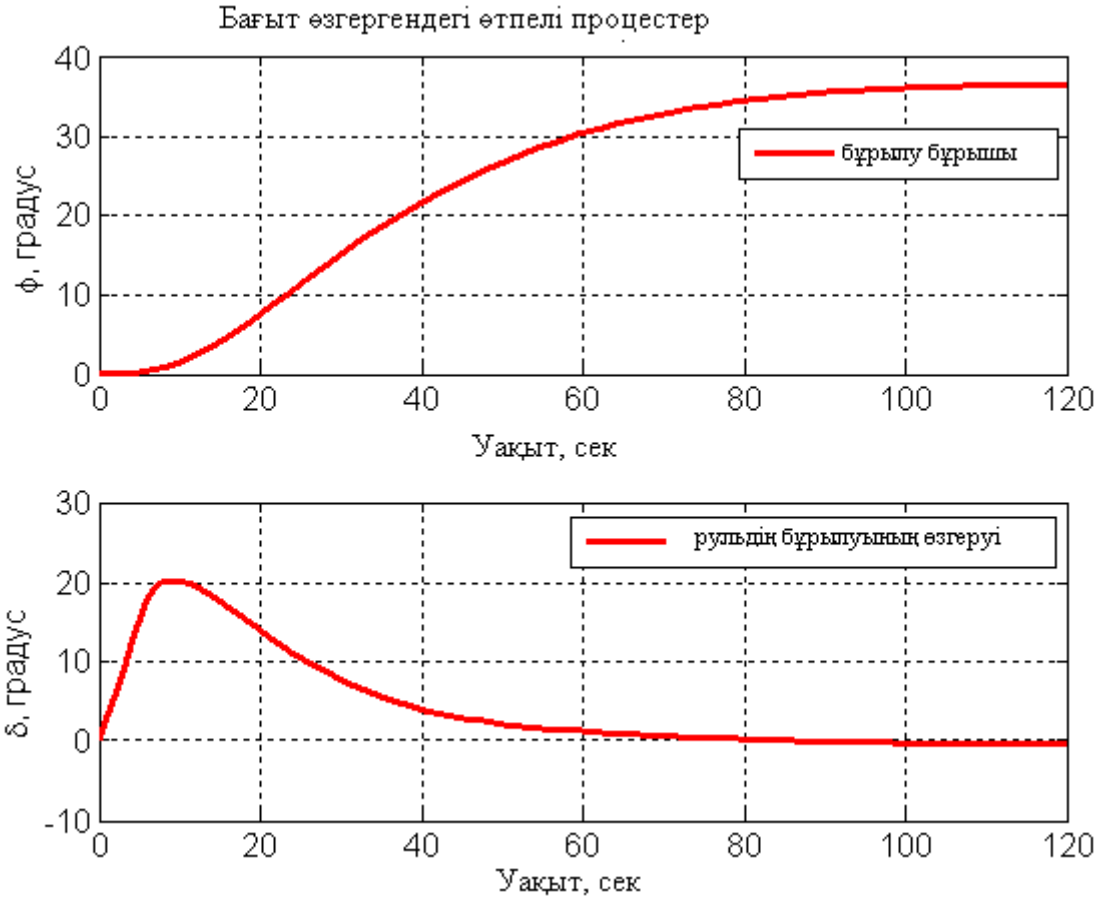
- үш М-файлды құрастырамыз: бірінші *Sysdata.m* файлында айнымалылардың мәндері орнатылады; екінші *graph.m* файлында графиктер құрастырылады: жоғарғы графикте кеменің бұрылу бұрышының өзгеруі, төмендегіде – рульдің бұрылуының өзгеруі көрсетіледі. *zapusk.m* файлында аталған файлдардың орындалуы және жүйені модельдеу сипатталады. Берілген әсер кеменің 30° бұрылуы болып табылады:

Sysdata.m
K = 0.07; Ts = 19;
TR = 2; Toc = 4;
ddMax = 3; deltaMax = 30;
phiZad = 30; fConst = 0;
TI = 200; Kc = 0.7045;
graph.m
function graph (phi, delta)
figure(1);
subplot(2,1,1);
plot(phi(:,1),phi(:,2),'b');

```
legend('угол поворота');


title('Переходные процессы при изменении курса');
xlabel('Время, сек');
ylabel('\phi, градусы');
set(gca,'FontSize',14)
h = get(gca, 'Children');
set(h(1),'LineWidth',1.5);
subplot(2,1,2);
plot(delta(:,1),delta(:,2),'b');
legend('изменение поворота руля');
xlabel('Время, сек');
ylabel('\delta, градусы');
set(gca,'FontSize',14)
h = get(gca, 'Children');
set(h(1),'LineWidth',1.5);

zapusk.m
sysdata;
sim ( 'model' )
graph(phi, delta);
```



4.28 сурет – Жүйенің әсерге реакциясын модельдеу

- *zapusk.m* орындалатын файлды *zapusk_T.m* атымен сақтап, оны әртүрлі *Ts* мәндерімен *overshoot.m* файлында сапалық көрсеткіштер (асыра реттеу, өтпелі процестің уақыты) есептелетіндей өзгертеміз. Графикті тұрғызу үшін *graph.m* файлды өзгертіп, *graph_2.m* атымен сақтаймыз (4.29 сурет):

```
overshoot.m
function [sigma,Tpp] = overshoot ( t, y )
yInf = y(end);
% y орнықталған мән ретінде қабылданатын y массивінің соңғы мәнін
%есептеу
diff = (y - yInf) / abs (yInf);
% графиктің әр нүктесінде салыстырмалы ауытқуды есептеу
sigma = max(diff) * 100;
% асыра ретеуді пайыз мөлшерімен есептеу
i = find(abs(diff) > 0.02);
% модулі %0.02 үлкен болатын diff массивінің барлық элементтері i
массивіне жазылады  (өтпелі процестің уақытын анықтау үшін 2% ауытқу
қолданылады)
Tpp = t(max(i)+1);
% t масивінің бірінші элементі ретінде өтпелі процестің уақыты
есептеледі, y массивінің содан кейінгі барлық элементтерінің орнықталған
күйден ауытқулары 2% артық болмайды

graph_2.m
figure(1);
subplot(2,1,1);
plot(aTs',aSi','b');
legend('Величина перерегулирования');
title('Переходные процессы при изменении курса');
xlabel('Ts, сек');
ylabel('Перерегулирование, %');
set(gca,'FontSize',14)
h = get(gca, 'Children');
set(h(1),'LineWidth',1.5);
subplot(2,1,2);
plot(aTs',aTpp','b');
legend('Время переходного процесса');
xlabel('Ts, сек');
ylabel('Время, сек');
set(gca,'FontSize',14)
h = get(gca, 'Children');
```

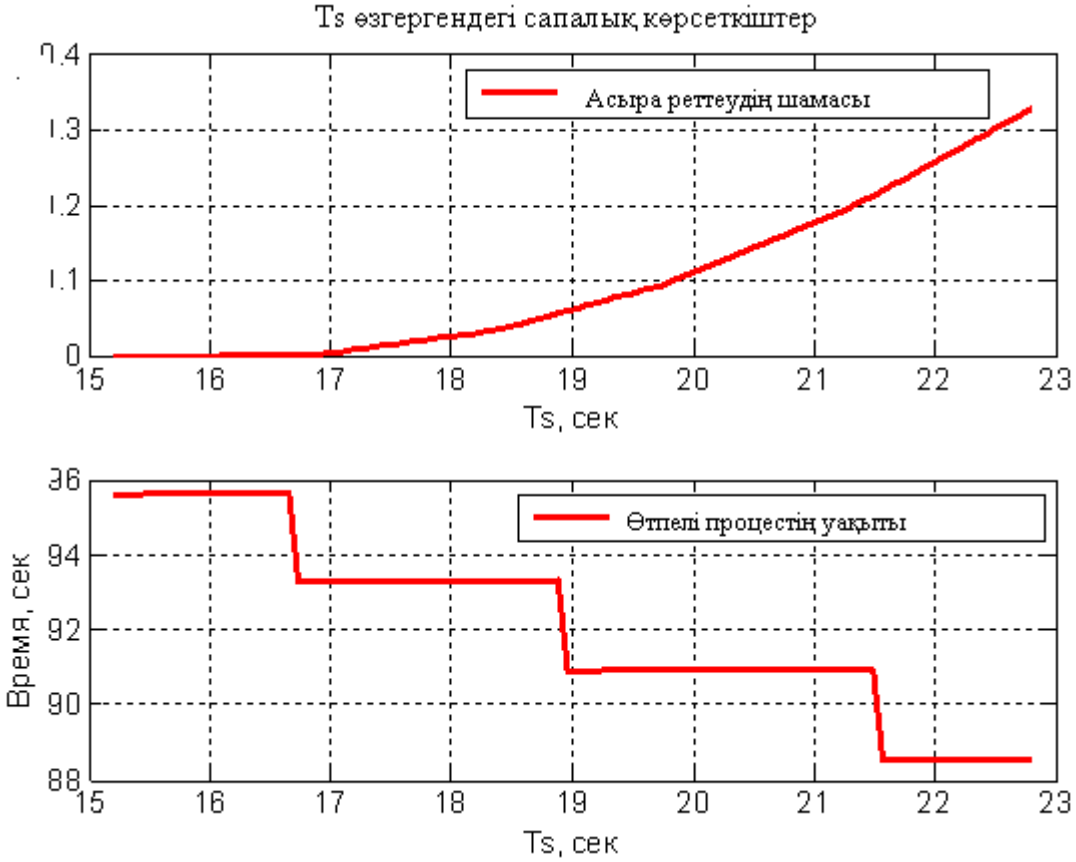
```
set(h(1),'LineWidth',1.5);

zapusk_T.m
sysdata;
Ts0 = Ts;
% сохраняем номинальное значение постоянной времени в переменной Ts0
aTs = linspace(0.8, 1.2, 100) * Ts0;
% создается массив из 100 постоянных времени, которые изменяются в диапазоне от  80 до %120% от номинального (расчетного) значения
aSi = []; aTpp = [];
% создаются пустые массивы aSi (для хранения значений перерегулирования) и aTpp (для %хранения значений времени переходного процесса)
for Ts=aTs
% начало цикла, переменная Ts принимает последовательно все значения из массива aTs
sim ( 'model' )
% моделирование при новом значении Ts
[si,Tpp] = overshoot ( phi(:,1), phi(:,2) );
% вычисление перерегулирования и времени переходного процесса
aSi = [aSi si];
% в конец массива aSi добавляется новое значение
aTpp = [aTpp Tpp];
% в конец массива aTpp добавляется новое значение
end;
% конец цикла
graph_2.m;
```

- орындалатын файлды *zapusk_g.m* атымен сақтаймыз. Осы файл көмегімен бағыттың 1-ден 110-ға дейін өзгергендегі әртүрлі жағдайларды модельдейміз; сонымен бірге *overshoot.m* файлында сапалық көрсеткіштерін (асыра реттеу, өтпелі процестің уақыты) есептейміз. График өзгертілген *graph_3.m* файл көмегімен құрылады (4.29 сурет).

```
graph_3.m
figure(1);
subplot(2,1,1);
plot(aphiZad',aSi','b');
legend('Величина перерегулирования');
title('Качественные показатели при изменении курса');
xlabel('заданное значение, сек');
ylabel('Перерегулирование, %');
```

```
set(gca,'FontSize',14)
h = get(gca, 'Children');
set(h(1),'LineWidth',1.5);
```

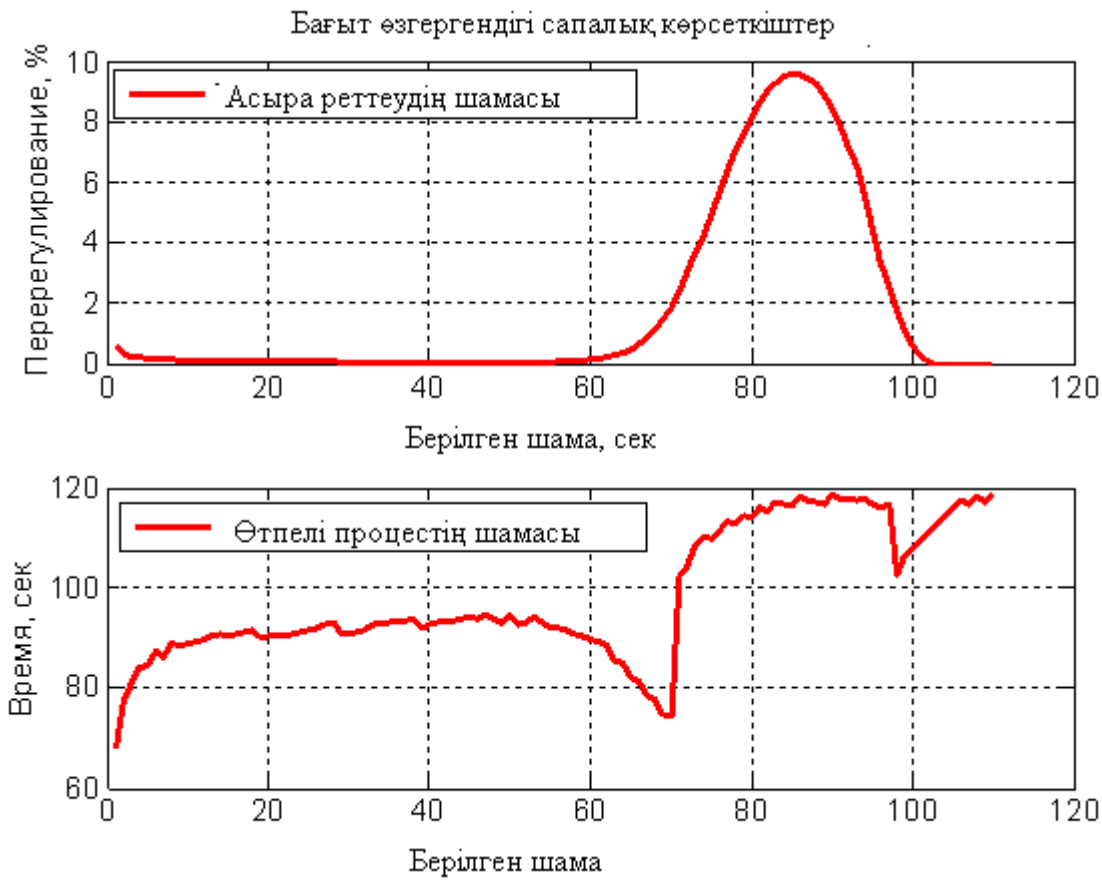


4.29 сурет – Ts өзгергендегі сапалық көрсеткіштер

```
subplot(2,1,2);
plot(aphiZad',aTpp','b');
legend('Время переходного процесса');
xlabel('заданное значение, сек');
ylabel('Время, сек');
set(gca,'FontSize',14)
h = get(gca, 'Children');
set(h(1),'LineWidth',1.5);

zapusk_g.m
sysdata;
aphiZad = 1:1:110;
aSi = []; aTpp = [];
for phiZad=aphiZad
sim ( 'srs5' )
[si,Tpp] = overshoot ( phi(:,1), phi(:,2) );
aSi = [aSi si];
aTpp = [aTpp Tpp];
```

end;
graph_3.m;



4.30 сурет – Бағыт өзгергендегі сапалық көрсеткіштер

4.5.3 Бақылау сұрақтары.

1 Модель блогының параметрлерінде айнымалы аты орнатылған. Оның мәні қалай меншіктеледі?

2 Егерде жетектің уақыт тұрақтысы белгілі болса, рульді өзгерту жылдамдығына шектеуді қалай орнатуға болады?

3 М-файл деген не?

4 Жаңа М-файл қалай жасалады?

5 Скрипт немесе функция орындалғанда қателер туралы хабарды қайдан көруге болады?

6 М-файлда функция бас жолы қалай құрастырылады?

7 Функция бірнеше шамаларды қайтара алады ма?

8 Функциядан Matlab жұмыс ортасының айнымалыларына қатысуға бола ма?

9 М-файлда жазылған функцияны қалай шақыруға болады?

10 Массивтің соңғы элементін қалай белгілеуге болады?

11 *find* функцияның жұмысын түсіндіріңіз?

13 Өтпелі процестің уақытын 5% дәлдікпен анықтау үшін *overshoot* функцияны қалай өзгертуге болады?

14 Жүйенің өрескелдігі (робастылығы) деген не?

15 Скрипттің тек қана белгілі бірнеше жолдарын қалай орындауға болады?

Әдебиеттер тізімі

1 Ибраева Л.К., Хисаров Б.Д. Басқару объектілерін модельдеу және идентификациялау. Оқу құралы. - Алматы: АИЭС, 2009. – 207 б.

2 Сыздықов Д.Ж., Сақабаев Н.К. Басқару объектілерін моделдеу және идентификациялау. – Шымкент, 2008. – 151 б.

3 Бекбаев А., Сулеев Д., Хисаров Б. Автоматты реттеу теориясы: Оқулық. – Алматы, 2005 ж. – 267 б.

4 Афонин, А.М. Теоретические основы разработки и моделирования систем автоматизации: Учебное пособие. - М.: Форум, 2011. - 258 б.

5 Ибраева Л.К. Басқару объекттерді модельдеу және идентификациялау. 5В070200 – Автоматтандыру және басқару мамандығы үшін дәрістер жинағы. - Алматы: АУЭС, 2016. - 56 б.

6 Ибраева Л.К., Хисаров Б.Д. Моделирование и идентификация объектов управления. Учебное пособие. - Алматы: АИЭС, 2009. – 209 б.

7 Сыздықов Д.Ж. Идентификация в системах управления. – Алматы, 2007. – 216 б.

8 Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. – М.: Мир, 1983. – 688 б.

9 Matlab 6.5 SP1/7.06 Simulink 5/6 в математике и моделировании. – М.: СОЛОН-Пресс, 2009. - 361 б.

Мазмұны

б

Кіріспе. Басқару жүйесінің құрылымындағы модельдер орны..... 3

1 Басқару объектілерінің қасиеттерін математикалық модельдермен бейнелеу..... 5

1.1 Жалпы мәліметтер..... 5

1.2 Математикалықмодельдерді классификациялау..... 8

1.3 Басқару объектілерінің модельдерін құрудың екі амалы..... 13

1.4 Динамикалық жүйелерді модельдеудің математикалық негіздері..... 16

1.5 Басқару объектілерін математикалық бейнелеу..... 33

2Жинақталған параметрлері бар басқару объектілерінің моделдерін аналитикалық әдістермен құру..... 43

2.1 Жалпы принциптері..... 43

2.2Денгейді реттеу объектілері..... 49

2.3 Ерітінді денгейін реттеу объектісі..... 53

2.4 Аналитикалық модельдеуге жылулық баланс теңдеуін қолдану 55

3Басқару объектілерді идентификациялау әдістері..... 67

3.1 Идентификация мәселесі туралы жалпы мәліметтер..... 67

3.2 Негізгі анықтамалар..... 69

3.3 Идентификациялаудың тура әдістері..... 72

3.4 Параметрлік идентификация..... 80

3.5 Сызықты динамикалық объектілерді параметрлі емес идентификациялау..... 82

3.6. Сызықты емес объектілерді идентификациялау..... 88

4 MatLab ортасында динамикалық жүйелерді модельдеу және зерттеу 91

4.1Ажыратылған сызықты жүйені зерттеу..... 92

4.2. Сызықты жүйенің реттегішін жобалау..... 97

4.3 Simulink пакетінде басқару жүйелерді модельдеу..... 106

4.4 Бейсызықты басқару жүйелерін моделдьдеу..... 112

4. 5 Matlab ортасында программалау..... 119

Әдебиеттер тізімі..... 126

ИбраеваЛида Куандыковна

БАСҚАРУ ЖҮЙЕЛЕРІНДЕГІ ОБЪЕКТІЛЕРДІ МОДЕЛЬДЕУ

Оқу құралы

Редактор Қ.С.Телғожаева

Басуға __. __. _____ж.қол қойылды
Таралымы 100 дана. Пішімі 60х84 1/ 16

Баспаханалық қағаз №2
Есептік-баспа табағы 7,5. № ___ тапсырыс
Бағасы теңге

«АЭжБУ» коммерциялық емес АҚ
Алматы қ., Байтұрсынұлы көшесі, 126

«Алматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлі қоғамының
көшірмелі-көбейткіш бюросы
Алматы қ., Байтұрсынұлы көшесі, 126/1