Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра Математического моделирования и программного обеспечения

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ

Методические указания и задания к выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 5В070200- Автоматизация и управление

Алматы 2017

СОСТАВИТЕЛИ: Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Методы обработки результатов. Методические указания и задания к выполнению расчетно - графических работ для студентов специальности 5В070200 - Автоматизация и управление - Алматы: АУЭС, 2017.- 47 стр.

Методические указания и задания содержат расчетно-графические работы №1, №2 дисциплины «Методы обработки результатов» для студентов специальности 5В070200 - Автоматизация и управление. Приведены основные теоретические вопросы программы. Дано решение типового варианта.

Ил. 22 , табл. 24, библиогр. 6 назв.

Рецензент: к.х.н., старший преподаватель кафедры ТКСиС Данько Е.Т.

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2017 г.

© НАО «Алматинский университет энергетики и связи», 2017 г.

Введение

Одной из основных задач математической статистики является изучение методов обработки результатов различных исследований. Математическая статистика тесно связана с теорией вероятностей. Обе эти дисциплины изучают массовые случайные явления. Теория вероятностей обеспечивает теоретическую базу для широкого круга практических задач, которыми занимается математическая статистика.

Поэтому методические указания содержат расчетно-графические работы по двум разделам. В первом рассматриваются основные вопросы теории вероятностей, во втором - математической статистики.

В каждой части приведены теоретические вопросы, задания и решение типового варианта.

Номер варианта студента определяется по списку группы. Расчетно-графическая работа должна выполняться четко и разборчиво в ученической тетради.

1 Расчетно-графическая работа №1. Случайные события и случайные величины

Цели: ознакомиться с понятиями случайного события и его вероятностью, основными теоремами теории вероятностей, изучить законы распределения и числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин.

1.1 Теоретические вопросы

1. Предмет теории вероятностей. Случайные события. Пространство элементарных событий. Алгебра событий. Статистическое, геометрическое и классическое определения вероятности.
2. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность.
3. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Формула Бернулли.
4. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. Формула Пуассона.
5. Дискретные и непрерывные случайные величины. Законы распределения дискретной случайной величины.
6. Интегральная функция распределения. Плотность распределения.
7. Числовые характеристики случайных величин. Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение дискретных и непрерывных случайных величин.
8. Биномиальное распределение, распределение Пуассона. Равномерное и показательное распределения, функция надёжности.
9. Нормальное распределение.
10. Понятие о предельных теоремах теории вероятностей.

1.2 Расчётные задания

1. В лотерее n билетов, среди них n_1 билетов с выигрышем 1000 тенге, n_2 - 500 тенге, n_3 - 100 тенге ($\sum_i^3 n_i = n$). Найти:

а) относительную частоту билетов с выигрышем 1000 тенге;

б) вероятность того, что все m взятых билетов будут с выигрышем 1000 тенге;

в) вероятность того, что среди m взятых билетов будет m_1 с выигрышем 1000 тенге;

г) вероятность того, что среди m взятых билетов будет m_1 с выигрышем 1000 тенге, m_2 - с выигрышем 500 тенге, m_3 - с выигрышем 100 тенге ($\sum_i^3 m_i = m$);

д) вероятность того, что среди m взятых билетов будет хотя бы один с выигрышем 1000 тенге.

№	n	n_1	n_2	n_3	m	m_1	m_2	m_3
1.1	100	41	29	30	10	5	3	2
1.2	90	29	21	40	12	6	4	2
1.3	85	25	35	25	7	2	2	3
1.4	80	18	42	20	5	1	2	2
1.5	95	43	27	25	9	3	4	2
1.6	70	22	28	20	9	2	4	3
1.7	80	30	21	29	7	3	1	1
1.8	90	42	20	28	6	1	3	2
1.9	75	24	26	25	8	2	4	2
1.10	100	37	33	30	10	2	3	5
1.11	90	26	34	30	8	3	2	3
1.12	80	31	29	20	5	1	2	2
1.13	95	29	31	35	8	3	2	3
1.14	96	34	26	36	7	4	1	2
1.15	89	25	35	29	5	1	2	2
1.16	70	20	26	24	5	2	1	2
1.17	75	40	20	15	8	4	1	3
1.18	85	35	30	20	5	2	1	2
1.19	90	20	40	30	7	2	2	3
1.20	87	30	45	12	8	3	2	3
1.21	100	25	55	20	15	8	3	4
1.22	90	40	24	26	9	4	3	2
1.23	95	28	42	25	10	3	5	2
1.24	85	30	15	40	7	2	2	3

1.25	90	17	33	40	6	1	3	2
1.26	85	31	25	29	5	2	2	1
1.27	75	28	32	15	5	1	2	2
1.28	100	30	41	29	9	3	4	2
1.29	80	32	28	20	7	3	2	2
1.30	85	24	26	35	5	1	3	1

2. Станок состоит из трёх узлов, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы в течение некоторого времени p_1, p_2, p_3 соответственно для первого, второго и третьего узла. Найти вероятность того, что за это время:

а) все три узла будут работать безотказно;

б) не откажет только один;

в) будут работать безотказно два узла, один откажет;

г) не откажет хотя бы один.

№	p_1	p_2	p_3	№	p_1	p_2	p_3	№	p_1	p_2	p_3
2.1	0.6	0.9	0.5	2.11	0.4	0.6	0.8	2.21	0.9	0.6	0.8
2.2	0.7	0.8	0.6	2.12	0.5	0.7	0.9	2.22	0.8	0.5	0.7
2.3	0.8	0.5	0.7	2.13	0.6	0.8	0.7	2.23	0.5	0.8	0.6
2.4	0.9	0.6	0.8	2.14	0.7	0.9	0.5	2.24	0.6	0.9	0.5
2.5	0.9	0.4	0.9	2.15	0.8	0.9	0.4	2.25	0.7	0.9	0.4
2.6	0.5	0.7	0.9	2.16	0.9	0.6	0.5	2.26	0.5	0.9	0.4
2.7	0.6	0.5	0.8	2.17	0.8	0.7	0.6	2.27	0.7	0.8	0.5
2.8	0.7	0.9	0.7	2.18	0.7	0.5	0.8	2.28	0.5	0.7	0.6
2.9	0.8	0.4	0.6	2.19	0.6	0.9	0.8	2.29	0.4	0.6	0.7
2.10	0.9	0.5	0.5	2.20	0.5	0.7	0.9	2.30	0.5	0.5	0.8

3. Приборы одного наименования изготавливаются на трёх заводах: n_1 на первом заводе, n_2 на втором, n_3 на третьем ($\sum_{i}^{3} n_i = 1000$). Первый завод выпускает m_1% приборов с браком, второй - m_2%, третий - m_3%. Требуется:

а) найти вероятность поступления на производство прибора с браком;

б) на производство поступил прибор с браком. Найти вероятность того, что он поступил с i – го завода (i =1,2,3).

№	n_1	n_2	m_1	m_2	m_3	i	№	n_1	n_2	m_1	m_2	m_3	№
3.1	520	220	5	8	7	1	3.16	100	250	7	8	5	3.1
3.2	270	410	10	5	9	2	3.17	430	180	5	4	7	3.2
3.3	250	140	8	7	4	2	3.18	170	540	6	5	8	3.3
3.4	190	380	5	9	30	1	3.19	650	120	10	9	8	3.4
3.5	290	610	6	3	3	2	3.20	400	180	7	10	5	3.5

3.6	270	430	10	6	4	2	3.21	120	380	10	6	9	3.6
3.7	280	360	7	10	9	1	3.22	270	340	9	5	4	3.7
3.8	520	110	5	7	10	1	3.23	430	120	10	7	6	3.8
3.9	240	290	9	8	4	3	3.24	360	120	5	10	8	3.9
3.10	310	410	7	2	5	3	3.25	420	210	8	7	6	3.10
3.11	520	110	3	6	7	2	3.26	370	130	10	6	5	3.11
3.12	280	310	9	8	4	2	3.27	410	200	5	10	8	3.12
3.13	400	320	4	5	8	1	3.28	280	510	10	6	5	3.13
3.14	350	240	9	8	7	1	3.29	710	120	2	10	4	3.14
3.15	190	520	5	2	4	3	3.30	460	240	5	9	7	3.15

4. Вероятность появления события A в каждом испытании равна p. Найти вероятность того, что в n испытаниях событие A появится:

а) ровно k_1 раз;

б) не менее k_1 раз;

в) не более k_2 раз;

г) хотя бы один раз (для нечётных вариантов, где n=10);

д) от k_1 до k_2 раз (для чётных вариантов, где n=100).

№	k_1	k_2	p	№	k_1	k_2	p	№	k_1	k_2	p
4.1	80	90	0.8	4.11	78	92	0.75	4.21	40	60	0.8
4.2	5	9	0.8	4.12	2	6	0.7	4.22	3	7	0.3
4.3	70	95	0.8	4.13	30	85	0.7	4.23	50	80	0.3
4.4	3	6	0.7	4.14	4	9	0.7	4.24	4	6	0.3
4.5	50	60	0.7	4.15	80	95	0.6	4.25	45	75	0.4
4.6	6	8	0.7	4.16	3	5	0.6	4.26	2	5	0.4
4.7	70	80	0.7	4.17	62	82	0.6	4.27	80	95	0.4
4.8	4	7	0.6	4.18	5	7	0.8	4.28	5	8	0.8
4.9	65	80	0.75	4.19	55	75	0.8	4.29	60	90	0.6
4.10	7	9	0.75	4.20	4	8	0.8	4.30	2	8	0.7

5. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения. Найти:

а) функцию распределения $F(x)$, построить график $F(x)$;

б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду;

в) вероятность попадания X в интервал $(a;b)$.

	X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a	b
	P	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6		
5.1	X	-2	-1	0	1	2	7	-3	5

	P	0.17	0.09	0.01	0.3	0.23	0.2		
5.2	X	1	2	3	5	6	7	0	4
	P	0.1	0.14	0.16	0.1	0.2	0.3		
5.3	X	-3	-1	0	3	5	6	-2	4
	P	0.16	0.09	0.01	0.3	0.24	0.2		
5.4	X	1	2	5	6	7	8	3	6
	P	0.2	0.15	0.15	0.1	0.3	0.1		
5.5	X	-1	0	2	4	7	8	1	5
	P	0.23	0.18	0.12	0.2	0.1	0.17		
6.6	X	1	2	4	5	6	8	0	7
	P	0.3	0.14	0.16	0.03	0.2	0.17		
5.7	X	-4	-3	-1	0	1	3	-2	2
	P	0.2	0.03	0.24	0.26	0.17	0.1		
5.8	X	1	2	3	4	7	9	0	8
	P	0.17	0.23	0.09	0.11	0.12	0.28		
5.9	X	0	1	3	5	7	8	2	6
	P	0.2	0.14	0.16	0.12	0.3	0.08		
5.10	X	-5	-3	-2	0	1	3	-4	2
	P	0.2	0.06	0.21	0.29	0.14	0.1		
5.11	X	1	2	3	5	8	9	4	7
	P	0.18	0.22	0.05	0.15	0.12	0.28		
5.12	X	1	3	4	5	7	8	2	6
	P	0.3	0.16	0.14	0.01	0.2	0.19		
5.13	X	-5	-3	-1	0	1	3	-4	2
	P	0.1	0.03	0.14	0.36	0.17	0.2		
5.14	X	0	2	3	4	6	8	1	7
	P	0.26	0.14	0.05	0.15	0.12	0.28		
5.15	X	-1	0	2	3	7	8	1	6
	P	0.21	0.16	0.14	0.1	0.2	0.19		
5.16	X	0	1	2	4	6	9	-2	7
	P	0.05	0.15	0.3	0.25	0.15	0.1		
5.17	X	-3	-2	-1	0	2	4	-1	3
	P	0.15	0.3	0.02	0.14	0.18	0.21		
5.18	X	1	2	3	5	7	8	-3	6
	P	0.3	0.14	0.16	0.1	0.2	0.1		
5.19	X	-4	-3	-2	0	1	2	0	1
	P	0.2	0.08	0.23	0.27	0.12	0.1		
5.20	X	1	2	4	5	7	9	3	8
	P	0.19	0.21	0.06	0.14	0.12	0.28		
5.21	X	-1	0	2	3	5	7	-4	4
	P	0.26	0.14	0.07	0.2	0.03	0.3		
5.22	X	-2	-1	0	3	5	7	1	6
	P	0.18	0.09	0.01	0.2	0.22	0.3		

5.23	X	1	2	4	5	6	8	0	6
	P	0.3	0.17	0.13	0.1	0.2	0.1		
5.24	X	1	2	3	4	7	9	5	8
	P	0.11	0.29	0.06	0.14	0.17	0.23		
5.25	X	0	1	2	3	7	9	4	8
	P	0.06	0.14	0.3	0.25	0.15	0.1		
5.26	X	-3	-2	0	1	2	4	-1	3
	P	0.15	0.3	0.01	0.14	0.19	0.21		
5.27	X	-1	0	3	5	7	8	1	6
	P	0.25	0.14	0.16	0.1	0.2	0.15		
5.28	X	-4	-3	-2	0	2	4	-1	3
	P	0.2	0.07	0.24	0.26	0.13	0.1		
5.29	X	-3	-1	0	3	4	7	-2	6
	P	0.12	0.09	0.01	0.2	0.28	0.3		
5.30	X	-1	0	1	3	7	8	2	6
	P	0.26	0.14	0.15	0.2	0.1	0.15		

6. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$. Найти:

а) функцию распределения $F(x)$;

б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду, медиану;

в) вероятность попадания X в интервал $(a;b)$.

Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

№	$f(x)$	a	b	№	$f(x)$	a	b
6.1	$\begin{cases} 0, & x \le 0, x > 3 \\ \frac{2}{3}\left(1-\frac{x}{3}\right), & 0 < x \le 3 \end{cases}$	-1	2	6.16	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 4 \\ \frac{x}{8}, 0 < x \le 4 \end{cases}$	1	3
6.2	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{\pi}{6} \\ 4\sin 2x, 0 < x \le \frac{\pi}{6} \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{12}$	6.17	$\begin{cases} 0, x \le -3, x > -2 \\ \frac{6}{x^2}, -3 < x \le -2 \end{cases}$	-2,5	0
6.3	$\begin{cases} 0, x \le 1, x > 2 \\ \frac{2}{x^2}, 1 < x \le 2 \end{cases}$	0	1,5	6.18	$\begin{cases} 0, x \le -\frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2} \\ 0{,}5\cos x, -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{4}$
6.4	$\begin{cases} 0, & x \le 2, x > 3 \\ \frac{2x}{5}, & 2 < x \le 3 \end{cases}$	1	2,5	6.19	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 1 \\ \frac{4}{\pi(1+x^2)}, 0 < x \le 1 \end{cases}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

6.5	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{6}{\pi(1+x^2)}, 0 < x \le \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$	0,1	1	6.20	$\begin{cases} 0, \ x \le 0, x > 3/4 \\ \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \ 0 < x \le 3/4 \end{cases}$	0	$\frac{1}{2}$
6.6	$\begin{cases} 0, \ x \le -1, x > 2 \\ \frac{1}{9}(x+1)^2, \ -1 < x \le 2 \end{cases}$	0	1	6.21	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \pi \\ 0,5\sin x, 0 < x \le \pi \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{2}$
6.7	$\begin{cases} 0, x \le 0, x \ge \frac{1}{2} \\ \frac{6}{\pi\sqrt{1-x^2}}, 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$	$\frac{1}{4}$	1	6.22	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 2 \\ \frac{x+2}{6}, 0 < x \le 2 \end{cases}$	1	2
6.8	$\begin{cases} 0, x \le 3, x > 5 \\ \frac{7,5}{x^2}, 3 < x \le 5 \end{cases}$	2	4	6.23	$\begin{cases} 0, \ x \le 4, x > 5 \\ \frac{2x}{9}, \ 4 < x \le 5 \end{cases}$	3	4,5
6.9	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{\pi}{6} \\ 6\sin 3x, 0 < x \le \frac{\pi}{6} \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{12}$	6.24	$\begin{cases} 0, x \le \frac{\pi}{2}, x > \frac{5\pi}{6} \\ -2\cos x, \frac{\pi}{2} < x \le \frac{5\pi}{6} \end{cases}$	0	$\frac{2\pi}{3}$
6.10	$\begin{cases} 0, x \le 1, x > 2 \\ 2x - 2,1 < x \le 2 \end{cases}$	0	1,5	6.25	$\begin{cases} 0, x \le 1, x > 2 \\ 3(x-1)^2, 1 < x \le 2 \end{cases}$	1,5	2
6.11	$\begin{cases} 0, x \le -2, x > 2 \\ \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}, -2 < x \le 2 \end{cases}$	0	1	6.26	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{\pi}{4} \\ 2\cos 2x, 0 < x \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
6.12	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 5 \\ \frac{2}{5}(1-\frac{x}{5}), 0 < x \le 5 \end{cases}$	1	4	6.27	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 4 \\ \frac{1}{2}(1-\frac{x}{4}), 0 < x \le 4 \end{cases}$	1	3
6.13	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{\pi}{6} \\ 3\cos 3x, 0 < x \le \frac{\pi}{6} \end{cases}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{9}$	6.28	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 2 \\ \frac{x+1}{4}, 0 < x \le 2 \end{cases}$	-1	1
6.14	$\begin{cases} 0, x \le -3, x > 3 \\ \frac{1}{2\pi}\sqrt{9-x^2}, -3 < x \le 3 \end{cases}$	0	2	6.29	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 1 \\ 3x^2, 0 < x \le 1 \end{cases}$	0,2	1,2
6.15	$\begin{cases} 0, x \le 1, x > 4 \\ \frac{2x}{15}, 1 < x \le 4 \end{cases}$	2	3	6.30	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{\pi}{3} \\ 2\sin x, 0 < x \le \frac{\pi}{3} \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{6}$

7. При изучении спроса населения было проверено N продуктовых магазинов. Отсутствие определённого товара в этих магазинах одинакова и равна m%. Составить закон распределения числа магазинов, в которых отсутствует этот товар (случайная величина X). Найти математическое

ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

№	N	m	№	N	m	№	N	m
7.1	5	20	7.11	2	21	7.21	2	10
7.2	3	19	7.12	4	22	7.22	4	15
7.3	2	23	7.13	5	24	7.23	5	17
7.4	4	11	7.14	3	18	7.24	3	12
7.5	5	28	7.15	2	22	7.25	2	15
7.6	3	11	7.16	3	10	7.26	4	15
7.7	2	16	7.17	2	12	7.27	5	13
7.8	4	29	7.18	4	20	7.28	3	14
7.9	5	10	7.19	5	25	7.29	2	20
7.10	3	17	7.20	3	30	7.30	4	27

8. Прядильщица обслуживает N веретён. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна p. Требуется:

а) составить закон распределения числа веретён, на которых оборвалась нить;

б) найти вероятность обрыва нити не менее, чем на m веретенах.

№	N	m	p	№	N	m	p	№	N	m	p
8.1	1500	3	0,002	8.11	2000	5	0,002	8.21	5000	2	0,001
8.2	2000	4	0,001	8.12	1000	6	0,005	8.22	2000	4	0,001
8.3	1000	5	0,007	8.13	6500	8	0,007	8.23	1500	5	0,008
8.4	3500	1	0,002	8.14	7000	6	0,002	8.24	3500	7	0,004
8.5	2000	5	0,001	8.15	5500	9	0,004	8.25	2000	2	0,003
8.6	1000	6	0,005	8.16	1500	3	0,002	8.26	1500	6	0,005
8.7	4500	2	0,003	8.17	2000	4	0,001	8.27	4000	2	0,006
8.8	2000	4	0,001	8.18	1000	5	0,007	8.28	8000	2	0,001
8.9	1000	5	0,007	8.19	3500	1	0,002	8.29	6500	6	0,002
8.10	3000	7	0,004	8.20	2000	5	0,001	8.30	3000	2	0,005

9. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения a минут. Случайная величина X – время ожидания автобуса. Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание, дисперсию;

г) вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать автобус менее (более) m минут.

Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

№	a	m	№	a	m	№	a	m
9.1	5	3	9.11	18	9	9.21	22	8
9.2	10	4	9.12	24	8	9.22	17	6
9.3	15	5	9.13	6	3	9.23	18	5
9.4	6	2	9.14	12	6	9.24	21	11
9.5	20	10	9.15	16	8	9.25	23	12
9.6	19	8	9.16	7	2	9.26	26	15
9.7	20	5	9.17	11	4	9.27	12	4
9.8	25	5	9.18	13	5	9.28	18	7
9.9	9	3	9.19	25	10	9.29	9	2
9.10	14	7	9.20	8	3	9.30	7	3

10. Время обнаружения цели радиолокатором (случайная величина T) имеет показательное распределение с параметром λ. Найти:

а) плотность распределения $f(t)$;

б) функцию распределения $F(t)$, указать её вероятностный смысл;

в) функцию надёжности $R(t)$, указать её вероятностный смысл;

г) математическое ожидание, дисперсию;

д) вероятность того, что за время t цель будет обнаружена; что за время t цель не будет обнаружена.

Построить графики $F(t)$, $R(t)$ и $f(t)$.

№	λ	t	№	λ	t	№	λ	t
10.1	8	3	10.11	9	10	10.21	7	3
10.2	9	2	10.12	10	6	10.22	8	2
10.3	10	1	10.13	1	7	10.23	9	1
10.4	1	10	10.14	2	8	10.24	10	7
10.5	2	6	10.15	3	2	10.25	1	9
10.6	3	8	10.16	1	5	10.26	2	5
10.7	4	4	10.17	2	10	10.27	3	10
10.8	6	3	10.18	3	6	10.28	4	6
10.9	7	2	10.19	4	8	10.29	6	8
10.10	8	1	10.20	6	4	10.30	7	4

11. Случайная ошибка измерения (случайная величина X) подчинена нормальному закону распределения с параметрами a и σ. Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание, дисперсию;

г) вероятность попадания в интервал $(\alpha;\beta)$;

д) вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине δ.

Построить графики $F(t)$ и $f(t)$.

№	a	σ	α	β	δ	№	a	σ	α	β	δ
11.1	10	2	9	14	2	11.16	10	1	8	14	2
11.2	12	4	5	14	3	11.17	12	2	7	14	3
11.3	14	1	9	15	5	11.18	14	3	10	15	5
11.4	11	6	8	12	3	11.19	11	5	9	12	3
11.5	13	4	6	17	2	11.20	13	2	6	13	2
11.6	12	9	8	15	4	11.21	12	3	7	15	4
11.7	10	3	6	17	2	11.22	10	2	8	17	2
11.8	12	5	6	13	6	11.23	12	4	6	14	6
11.9	14	2	12	19	5	11.24	14	6	11	19	5
11.10	15	3	4	12	3	11.25	15	5	8	12	3
11.11	17	1	5	14	2	11.26	17	4	6	14	2
11.12	12	4	9	18	4	11.27	12	5	7	18	4
11.13	11	3	4	12	3	11.28	18	5	6	12	3
11.14	17	2	5	19	5	11.29	10	4	6	15	2
11.15	13	5	6	18	3	11.30	12	3	5	18	4

1.3 Решение типового варианта

1. В лотерее 120 билетов, среди них 40 билетов с выигрышем 1000 тенге, 50 - 500 тенге, 30 - 100 тенге. Найти:

а) относительную частоту билетов с выигрышем 1000 тенге;

б) вероятность того, что все 20 взятых билетов будут с выигрышем 1000 тенге;

в) вероятность того, что среди 20 взятых билетов будет 9 с выигрышем 1000 тенге;

г) вероятность того, что среди 20 взятых билетов будет 9 с выигрышем 1000 тенге, 6 - с выигрышем 500 тенге, 5 - с выигрышем 100 тенге;

д) вероятность того, что среди 20 взятых билетов будет хотя бы один с выигрышем 1000 тенге.

Решение:

а) относительной частотой события A (обозначается $P^*(A)$) называется отношение числа m испытаний, в которых событие A появилось, к общему числу n произведённых испытаний: $P^*(A) = m/n$.

Пусть событие A – выбор билетов с выигрышем 1000 тенге, тогда $P^*(A) = 40/120 = 1/3$.

В остальных пунктах используем классическое определение вероятности события A: $P(A) = m/n$, где m – число испытаний, благоприятствующих появлению события A; n – общее число испытаний;

б) пусть событие A - все 20 выбранных билетов с выигрышем 1000 тенге. Общее число элементарных событий равно числу различных способов

взять 20 билетов из 120, т.е. $n = C_{120}^{20}$; число благоприятствующих событий равно числу различных способов взять из 40 билетов с выигрышем 1000 тенге 20, т.е. $m = C_{40}^{20}$. Таким образом, $P(A) = m/n = C_{40}^{20} / C_{120}^{20} = 4{,}679 \times 10^{-12}$;

в) пусть событие A – среди 20 выбранных билетов будет 9 билетов с выигрышем 1000 тенге. Как выше сказано, $n = C_{120}^{20}$. Число m благоприятствующих событию A элементарных событий находится по одному из правил комбинаторики: пусть во множестве из n элементов имеются s подмножеств, состоящих соответственно из $n_1, n_2, ..., n_s$ элементов ($\sum_1^s n_i = n$). Тогда, если из этого множества происходит отбор по схеме: m_1 из n_1 элементов, m_2 из n_2 элементов,…, m_s из n_s элементов, то общее число N способов образования s групп по $m_1, m_2, ..., m_s$ элементов без учёта порядка в каждой из них равно $N = C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \ldots C_{n_s}^{m_s}$. Таким образом, в этом пункте $m = C_{40}^{9} \cdot C_{80}^{11}$, где C_{40}^{9} равно числу различных способов выбрать 9 билетов с выигрышем 1000 тенге из 40 билетов с выигрышем 1000 тенге, а C_{80}^{11} равно числу различных способов выбрать 11 остальных билетов не с выигрышем 1000 тенге из 80 остальных). Итак, $P(A) = m/n = C_{40}^{9} \cdot C_{80}^{11} / C_{120}^{20} = 0{,}097$;

г) пусть событие A - среди 20 выбранных наудачу билетов 9 билетов с выигрышем 1000 тенге, 6 - билетов с выигрышем 500 тенге, 5 - билетов с выигрышем 100 тенге. Для решения задачи также используем классическое определение вероятности события A: $P(A) = m/n$, где n число всех возможных способов выбора 20 билетов из имеющихся 120, т.е. $n = C_{120}^{20}$. Число m благоприятствующих событию A элементарных событий находится по выше приведённому правилу комбинаторики, т.е. $m = C_{40}^{9} \cdot C_{50}^{4} \cdot C_{30}^{5}$. Поэтому $P(A) = m/n = 0{,}021$;

д) пусть событие A – среди 20 выбранных билетов будет хотя бы один билет с выигрышем 1000 тенге, тогда противоположное событие $\overline{A}$ - среди 20 выбранных билетов не будет ни одного билета с выигрышем 1000 тенге. Как в случае б) вероятность этого события найдём по формуле $P(\overline{A}) = m/n = C_{80}^{20} / C_{120}^{20} = 1{,}2 \times 10^{-4}$. Тогда вероятность события A равна $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 1{,}2 \times 10^{-4} \approx 1$, т.е. это событие почти достоверное.

При вычислении числа сочетаний была использована функция combin в Mathcad. Ниже приведена копия файла, в котором combin(Q,R) введена как функция пользователя C(Q,R), позволяющая получать значения сочетаний при произвольных Q и R.

$C(Q,R) := combin(Q,R)$,

$C(40,9) = 2.734 \times 10^{8}$

$C(80,11) = 1.048 \times 10^{13}$,

$C(40,20) = 1.378 \times 10^{11}$

$C(120,20) = 2.946 \times 10^{22}$

$$\frac{C(80,20)}{C(120,20)} = 1.2 \times 10^{-4} \qquad \frac{C(40,9)\cdot C(80,11)}{C(120,20)} = 0.097$$

$$\frac{C(40,9)\cdot C(50,6)\cdot C(30,5)}{C(120,20)} = 0.021$$

2. Станок состоит из трёх узлов, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы в течении некоторого времени 0,75; 0,8; 0,9 соответственно для первого, второго и третьего узла. Найти вероятность того, что за это время:

а) все три узла будут работать безотказно;

б) не откажет только один;

в) будут работать безотказно два узла, один откажет;

г) не откажет хотя бы один.

Решение: пусть событие A_1 – безотказная работа первого узла, A_2 – второго, A_3 – третьего. По условию $P(A_1)$=0,75, $P(A_2)$=9,8, $P(A_3)$=0,9.

а) пусть событие A - все три узла будут работать безотказно, тогда $A = A_1A_2A_3$ и, т.к. A_1, A_2, A_3 события независимые, то $P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = = 0{,}75 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}54$;

б) пусть событие B - не откажет только один узел, тогда $B = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$, где $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ события противоположные A_1, A_2, A_3, т.е. отказ первого, второго и третьего узла соответственно. Так как $P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$, $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, $P(\overline{A}_3) = 1 - P(A_3) = = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$ и т.к. слагаемые есть события несовместные, то $P(B) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = 0{,}75 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}25 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 =$ 0,08;

в) событие C - будут работать безотказно два узла, один откажет составляется аналогично, как в предыдущем пункте, т.е. $C = A_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3$. Его вероятность определяется также аналогично: $P(C) = 0{,}75 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}25 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 + 0{,}75 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}3456$;

г) пусть событие D - не откажет хотя бы один узел, рассмотрим противоположное событие $\overline{D}$ - откажут все три. Т.к. $\overline{D} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, то $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = 1 - 0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}995$.

3. Приборы одного наименования изготавливаются на трёх заводах: 100 на первом заводе, 300 на втором, 600 на третьем. Первый завод выпускает 5% приборов с браком, второй - 4%, третий - 6%. Требуется:

а) найти вероятность поступления на производство прибора с браком;

б) на производство поступил прибор с браком. Найти вероятность того, что он поступил со 2– го завода.

Решение: пусть событие A – поступление на производство прибора с браком, а события B_1, B_2, B_3 - прибор поступил соответственно с первого, второго, третьего завода (эти события называются гипотезами).

а) вероятность события A находится по формуле полной вероятности: $P(A) = P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+P(B_3)P(A/B_3)$, где $P(A/B_i)$ – условные вероятности того, что поступивший на производство прибор с i– го завода (i=1,2,3). По условию задачи имеем: $P(B_1) = 100/1000 = 0{,}1$; $P(B_2) = 300/1000 = 0{,}3$; $P(B_3) = 600/1000 = 0{,}6$; $P(A/B_1)=0{,}05$; $P(A/B_2)=0{,}04$; $P(A/B_3)=0{,}06$. Поэтому $P(A) = 0.1\cdot 0.05 + 0{,}3\cdot 0{,}04 + 0{,}6\cdot 0{,}06 = 0{,}053$;

б) в этом пункте требуется найти условную вероятность $P(B_2/A)$. Используем для этого формулу Байеса:

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i/A)P(A/B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A/B_k)},\ i=1,2,\ldots,n.$$

В нашем случае $P(B_2/A) = \dfrac{P(B_2/A)P(A/B_2)}{\sum_{k=1}^{3} P(B_k)P(A/B_k)} = \dfrac{0{,}3\cdot 0{,}04}{0{,}053} = 0{,}226.$

4. Вероятность появления события A в каждом испытании равна 0,8. Найти вероятность того, что в n испытаниях событие A появится:

а) ровно k_1 раз (событие A);

б) не менее k_1 раз (событие B);

в) не более k_2 раз (событие C);

г) хотя бы один раз (для нечётных вариантов, где n=10) (событие D);

д) от k_1 до k_2 раз (для чётных вариантов, где n=100) (событие E).

Решение: в этой задаче используется вероятность того, что в n испытаниях событие A появится k раз, обозначается $P_n(k)$. В зависимости от условий задачи к её решению подходят по- разному:

- пусть n =10, k_1=9, k_2=2 (для нечётных вариантов). Здесь n не велико, поэтому вероятность события A можно найти точно по формуле Бернулли: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $q = 1-p$, $(k = 0,1,2,..n)$. Вероятности событий B и C определяются как суммы вероятностей: $P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n)$- вероятность того, что событие произойдёт не менее, чем k раз в n независимых испытаниях, т.е. или k, или $k+1$,…, или n раз; $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k)$- вероятность того, что событие произойдёт не более k раз в n независимых испытаниях, т.е. или 0, или 1, или 2,…, или k раз. Эти вероятности называют кумулятивными (накопленными). Таким образом:

а) $P(A) = P_{10}(9) = \mathrm{C}(10,9)\cdot 0.8^9 \cdot 0.2^1 = 0.268$;

б) $P(B) = P_{10}(9) + P_{10}(10) = 1{,}246\times 10^{-9}$;

в) $P(C) = P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2) = 0{,}96;$

г) рассмотрим событие $\overline{D}$ противоположное *D*. $\overline{D}$ - в серии из 10 независимых испытаний событие *A* не появилось ни разу. Тогда $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - P_{10}(0) \approx 0{,}566.$

Ниже приведена копия файла из Mathcad с вычислениями.

$C(Q,R) := \text{combin}(Q,R)$

$C(10,9) \cdot 0.8^{9} \cdot 0.2^{1} = 0.268$

$C(10,9) \cdot 0.08^{9} \cdot 0.92^{1} + C(10,10) \cdot 0.08^{10} \cdot 0.92^{0} = 1.246 \times 10^{-9}$

$C(10,0) \cdot 0.08^{0} \cdot 0.92^{10} + C(10,1) \cdot 0.08^{1} \cdot 0.92^{9} + C(10,2) \cdot 0.08^{2} \cdot 0.92^{8} = 0.96$

$1 - C(10,0) \cdot 0.08^{0} \cdot 0.92^{10} = 0.566$

- пусть n =100, k_1=70, k_2=80 (для чётных вариантов). Поскольку число независимых испытаний n велико, то вероятность $P_n(k)$ появления события *A* *k* раз n испытаниях определяется по локальной теореме Муавра-Лапласа и приближённо равна $P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, где $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $0 < p < 1$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2)$ (значения этой функции находят из таблиц или с помощью встроенной функции dnorm в системе Mathcad).

Для определения вероятностей событий *B*, *C* и *E* используют интегральную теорему Муавра-Лапласа: вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что число *k* появления некоторого события будет находится в промежутке от k_1 до k_2 приближённо равна $P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \exp(-t^2/2)dt$ - функция Лапласа, значения которой находятся из специальных таблиц или с помощью встроенной функции pnorm в системе Mathcad:

а) $P(A) = P_{100}(80) \cong \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\varphi(2{,}5) = 0{,}018/4 = 0{,}0045;\ x = \frac{70 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -2{,}5;$

б) $P(B) = P_{100}(k \geq 80) = P_{100}(80{,}100) \approx \Phi(x_3) - \Phi(x_2) = 0{,}5;\ x_3 = 5;$

в) $P(C) = P_{100}(k \leq 70) = P_{100}(0{,}70) \approx \Phi(x_1) - \Phi(x_4) = 0{,}006;\ x_4 = -20;$

д) $P(E) = P_{100}(70{,}80) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0{,}494,\ x_2 = 0,\ x_1 = -2{,}5.$

Ниже приведена копия файла, в котором сделаны вычисления в системе Mathcad.

$n := 100$ $k1 := 70$ $k2 := 80$

$p := 0.8$ $q := 1 - p$

$$x1 := \frac{k1 - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}} \qquad x2 := \frac{k2 - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}} \qquad x3 := \frac{n - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}} \qquad x4 := \frac{0 - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}$$

$x1 = -2.5 \qquad x2 = 0$

$dnorm(x1,0,1) = 0.018$

$pnorm(x2,0,1) - pnorm(x1,0,1) = 0.494$

$pnorm(x3,0,1) - pnorm(x2,0,1) = 0.5$

$pnorm(x1,0,1) - pnorm(x4,0,1) = 6.21 \times 10^{-3}$

или другой вариант

$\Phi(x) := pnorm(x,0,1) - 0.5$

$P(k1,k2) := \Phi(x2) - \Phi(x1)$

$\Phi(x1) = -0.494 \qquad \Phi(x2) = 0$

$P(k1,k2) = 0.494 \qquad x3 = 5 \qquad x4 = -20$

$\Phi(x3) = 0.5 \qquad \Phi(x4) = -0.5$

$\Phi(x3) - \Phi(x2) = 0.5 \qquad \Phi(x1) - \Phi(x4) = 6.21 \times 10^{-3}$

- известна ещё одна формула для определения вероятности $P_n(k)$, которую применяют, если n велико, p мало, а произведение $\lambda = n \cdot p$ - небольшое число. Это формула Пуассона $P_n(k) \approx \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k!$.

Пусть n=1000, k=6, p=0,003, $\lambda = 1000 \cdot 0{,}003 = 3$, поэтому $P(A)$ = $= P_{1000}(6) = 3^6 \cdot e^{-3} / 6! = 0{,}05$.

При вычислении можно использовать таблицу значений функции $p(k,\lambda) = \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k!$, приводимую в некоторых учебниках, или функцию dpois в Mathcad. Ниже приведена копия файла, в котором проведены вычисления в Mathcad.

$p(k,\lambda) := dpois(k,\lambda) \qquad p(6,3) = 0.05$

5. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	0	10	20	30	40	50
P	0,05	0,15	0,3	0,25	0,2	0,05

Найти:

а) функцию распределения $F(x)$, построить график $F(x)$;

б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду;

в) вероятность попадания X в интервал (15;45).

Решение:

а) функция распределения $F(x)$ (интегральная функция распределения) случайной величины X определяет вероятность события $X<x$. Для дискретной случайной величины она находится по формуле $F(x)=P(X<x)=\sum_{x_i<x} p_i =$ $=\sum_{x_i<x} P(X=x_i)$, где суммирование распространяется на все те значения x_i, для которых $x_i < x$.

Итак,

- если $x \le 0$, то $F(x)=P(X<0)=0$;
- если $0<x\le 10$, то $F(x)=P(X=0)=0{,}05$;
- если $10<x\le 20$, то $F(x)=P(X=0)+P(X=10)=0{,}05+0{,}15=0{,}2$;
- если $20<x\le 30$, то

$F(x)=P(X=0)+P(X=10)+P(X=20)=0{,}2+0{,}3=0{,}5$;

- если $30<x\le 40$, то

$F(x)=P(X=0)+P(X=10)+P(X=20)+P(X=30)=0{,}5+0{,}25=0{,}75$;

- если $40<x\le 50$, то

$F(x)=P(X=0)+P(X=10)+P(X=20)+P(X=30)+$

$P(X=40)=0{,}75+0{,}2=0{,}95$;

- если $x>50$, то $F(x)=P(X=0)+P(X=10)+P(X=20)+P(X=30)+$ $+P(X=40)+P(X=50)=0{,}95+0{,}05=1$.

Таким образом, $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x\le 0 \\ 0{,}05, \text{ если } 0<x\le 10 \\ 0{,}2, \text{ если } 10<x\le 20 \\ 0{,}5, \text{ если } 20<x\le 30 \\ 0{,}75, \text{ если } 30<x\le 40 \\ 0{,}95, \text{ если } 40<x\le 50 \\ 1, \text{ если } x>50 \end{cases}$.

График построен в системе Mathcad (см. ниже);

б) найдём числовые характеристики. Для дискретной случайной величины математическое ожидание равно сумме произведений всех её возможных значений на вероятности этих значений: $M(X)=\sum_i x_i p_i$. Поэтому

$M(X)=0\cdot 0{,}15+10\cdot 0{,}15+20\cdot 0{,}3+30\cdot 0{,}25+40\cdot 0{,}2+50\cdot 0{,}05=25{,}5.$

Дисперсия случайной величины X находится либо по формуле $D(X)=M[X-M(X)]^2$, либо по формуле $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$.

Для дискретной случайной величины эти формулы перепишутся так: $D(X)=\sum_i (x_i-M(X))^2\cdot p_i$ или $D(X)=\sum_i x_i{}^2 p_i-(\sum_i x_i p_i)^2$.

Среднее квадратическое отклонение равно $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}$; мода дискретной случайной величины (обозначается M_0) – это её значение, принимаемое с наибольшей вероятностью; вероятность попадания X в интервал $(a;b)$ находится по формуле $P(a;b)=F(b)-F(a)$. В нашей задаче эти величины равны:

$D(x)$=154,75; $\sigma(x)=\sqrt{154,75}=12,44$; M_0=20;

$P(15;45)=F(45)-F(15)$=0,75.

Ниже приведена копия файла, в котором сделаны вычисления в системе Mathcad, причём вычисление дисперсии проведено по обеим формулам.

ORIGIN= 1

$s := (0 \;\; 10 \;\; 20 \;\; 30 \;\; 40 \;\; 50)$

$M := s^T \cdot p^T$

$p := (0.05 \;\; 0.15 \;\; 0.3 \;\; 0.25 \;\; 0.2 \;\; 0.05)$

$M = 25.5$

$s0 := s^T - M$

$$s0 = \begin{pmatrix} -25.5 \\ -15.5 \\ -5.5 \\ 4.5 \\ 14.5 \\ 24.5 \end{pmatrix}$$

$D := \left[\overrightarrow{(s0 \cdot s0)}\right]^T \cdot p^T$

$D = 154.75$

$s2 := \left(0^2 \;\; 10^2 \;\; 20^2 \;\; 30^2 \;\; 40^2 \;\; 50^2\right)$

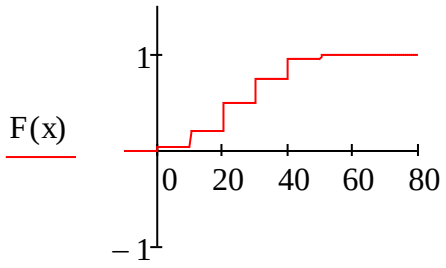
$D1 := s2^T \cdot p^T - M^2$

$D1 = 154.75$

$\sigma := \sqrt{D} = 12.44$

$F(45) - F(15) = 0.75$

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \le 0 \\ 0.05 & \text{if } 0 < x \le 10 \\ 0.2 & \text{if } 10 < x \le 20 \\ 0.5 & \text{if } 20 < x \le 30 \\ 0.75 & \text{if } 30 < x \le 40 \\ 0.95 & \text{if } 40 < x \le 50 \\ 1 & \text{if } x > 50 \end{cases}$$



6. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le 0\\ \frac{2}{9}(3x-x^2), \text{ если } 0<x\le 3\\ 0, \text{ если } x>3\end{cases}$.

Найти:

а) функцию распределения $F(x)$;

б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду, медиану;

в) вероятность попадания X в интервал $(1;4)$.

Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

Решение:

а) функцию распределения находим по формуле $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$. Итак, -

- если $x\le 0$, то $f(x)=0$, поэтому $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx=0$;

- если $0<x\le 3$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int\limits_{0}^{x}\frac{2}{9}(3x-x^2)dx=-\frac{x^2(2x-9)}{27}$;

- если $x>3$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int\limits_{0}^{3}\frac{2}{9}(3x-x^2)dx+\int\limits_{3}^{x} 0\,dx=1$.

Таким образом, искомая функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le 0\\ -\frac{x^2(2x-9)}{27}, \text{ если } 0<x\le 3;\\ 1, \text{ если } x>3\end{cases}$$

б) числовые характеристики непрерывных случайных величин находятся по формулам: математическое ожидание - $M(x)=\int\limits_{-\infty(a)}^{\infty(b)} xf(x)dx$; дисперсия - $D(x)=\int\limits_{-\infty(a)}^{\infty(b)}(x-M(x))^2 f(x)dx$ или $D(x)=\int\limits_{-\infty(a)}^{\infty(b)} x^2 f(x)dx-\left[M(x)\right]^2$ (пределы интегрирования зависят от того, принадлежат ли возможные значения случайной величины всей оси Ox или интервалу $(a;b)$); среднее

квадратическое отклонение - $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}$; модой непрерывной случайной величины X называется то её значение M_o, при котором плотность распределения максимальна; медианой непрерывной случайной величины X называется такое её значение M_e, для которого одинаково вероятно, окажется ли случайная величина меньше или больше M_e, т.е. $P(X<M_e)=P(X>M_e)=0{,}5$.

Таким образом, в нашей задаче $M(x)=\int_0^3 2/9x(3x-x^2)dx=1{,}5$;

$D(x)=\int_0^3 x^2\cdot 2/9(3x-x^2)dx-1{,}5^2=0{,}45$; $\sigma(X)=\sqrt{0{,}45}=0{,}671$.

Для определения моды надо найти максимум функции $f(x)=2/9(3x-x^2)$ на отрезке [0; 3]. Для этого находим производную и приравниваем её к нулю: $f'(x)=2/3-4x/9$, $f'(x)=0$ при x=3/2, эта точка критическая. Проверяем её на экстремум: $f'(1)>0$, $f'(2)<0$, итак, при переходе через точку x=3/2 знак производной сменился с плюса на минус, значит, x=3/2 точка максимума, поэтому M_o=3/2.

Медиану находим из условия $P(X<M_e)=0{,}5$, где $P(X<M_e)=$ $=P(-\infty<X<M_e)=$ $P(0<X<M_e)$. Так как $P(0<X<M_e)=\int_0^{M_e} 2/9(3x-x^2)dx=$ $=-M_e^{\,2}(2M_e-9)/27$, то, решая уравнение $-M_e^{\,2}(2M_e-9)/27=0{,}5$, получим три корня, из которых подходит один: $M_e=1{,}5$.

Ниже приведёна копия файла с вычислениями в системе Mathcad.

$f(x):=\frac{2}{9}\cdot\left(3\cdot x-x^2\right)$ $\qquad \sqrt{\frac{9}{20}}=0.671$

$\int_0^3 x\cdot f(x)\,dx\rightarrow\frac{3}{2}=1.5$ $\qquad \int_0^3 x^2\cdot f(x)\,dx-\left(\frac{3}{2}\right)^2\rightarrow\frac{9}{20}=0.45$

$\frac{d}{dx}f(x)\rightarrow\frac{2}{3}-\frac{4\cdot x}{9}$ $\qquad f1(x):=\frac{d}{dx}f(x)$

$\int_0^y f(x)\,dx\rightarrow-\frac{y^2\cdot(2\cdot y-9)}{27}$ $\qquad f1(x)\ \text{solve}\rightarrow\frac{3}{2}$

$f1(1)=0.222$ $\qquad f1(2)=-0.222$

$$-\frac{y^2\cdot(2\cdot y-9)}{27}-0.5 \text{ solve} \rightarrow \begin{pmatrix} 4.0980762113533159403 \\ -1.0980762113533159403 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.098 \\ -1.098 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

в) вероятность попадания X в интервал $(1;4)$ равна:

$$P(1<X<4)=P(1<X<3)+P(3<X<4)=\int_1^3 2/9(3x-x^2)dx+\int_3^4 0dx=0{,}741$$

или $P(1<X<4)=F(4)-F(1)=1-\left(-\frac{1\cdot(2-9)}{27}\right)=\frac{20}{27}=0{,}74.$

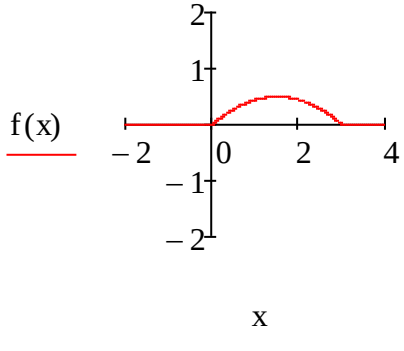
Ниже приведёна копия файла из Mathcad с вычислениями.

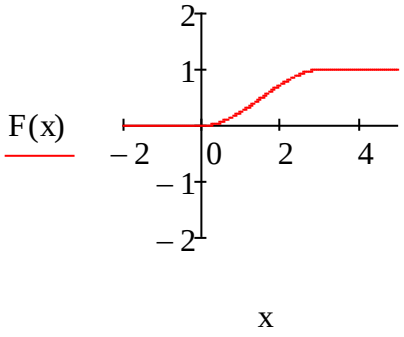
$$\int_1^3 f(x)\,dx \rightarrow \frac{20}{27}=0.741 \qquad f2(x):=-\frac{x^2\cdot(2\cdot x-9)}{27}$$

$$f2(1)=0.259 \qquad 1-0.259=0.741$$

Графики функций $F(x)$ и $f(x)$ построим в системе Mathcad:

$$f(x):=\begin{cases} 0 & \text{if } x\le 0 \\ \left[\frac{2}{9}\cdot\left(3\cdot x-x^2\right)\right] & \text{if } 0<x\le 3 \\ 0 & \text{if } x>3 \end{cases} \qquad F(x):=\begin{cases} 0 & \text{if } x\le 0 \\ \frac{x^2\cdot(9-2\cdot x)}{27} & \text{if } 0<x\le 3 \\ 1 & \text{if } x>3 \end{cases}$$





7. При изучении спроса населения было проверено 6 продуктовых магазинов. Отсутствие определённого товара в этих магазинах одинаково и равно 25%. Составить закон распределения числа магазинов, в которых отсутствует этот товар (случайная величина X). Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Решение: дискретная случайная величина X – число магазинов, в которых отсутствует товар. Её возможные значения: $x_1=0$ (нет магазинов, в

которых отсутствует товар), $x_2 = 1$ (один магазин, в котором отсутствует товар) и т.д. $x_7 = 6$ (шесть магазинов, в которых отсутствует товар). Возможные значения независимы, и вероятность появления каждого из них одинакова и равна p=0,25, поэтому случайная величина X распределена по биномиальному закону: $P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $k = 0,1,2,\ldots,6$, $q = 1 - p$, $n = 6$.

Итак, $P(X = 0) = P_6(0) = C_6^0 0{,}25^0 0{,}75^6 = 0{,}178$;

$P(X = 1) = P_6(1) = C_6^1 0{,}25^1 0{,}75^5 = 0{,}356$; $P(X = 2) = P_6(2) = C_6^2 0{,}25^2 0{,}75^4 = 0{,}297$;

$P(X = 3) = P_6(3) = C_6^3 0{,}25^3 0{,}75^3 = 0{,}132$; $P(X = 4) = P_6(4) = C_6^4 0{,}25^4 0{,}75^2 = 0{,}033$;

$P(X = 5) = P_6(5) = C_6^5 0{,}25^5 0{,}75^1 = 0{,}004$; $P(X = 6) = P_6(6) = C_6^6 0{,}25^6 0{,}75^0 = 0{,}0002$.

Искомый закон распределения:

X	0	1	2	3	4	5	6
p	0,178	0,356	0,297	0,132	0,033	0,004	0,0002

Числовые характеристики биномиального распределения можно определить по известным формулам для дискретных случайных величин:

$M(X) = \sum_i x_i p_i$, $D(X) = \sum_i (x_i - M(X))^2 \cdot p_i$ или $D(X) = \sum_i x_i^{\,2} p_i - (\sum_i x_i p_i)^2$.

Однако, проще воспользоваться свойствами математического ожидания и дисперсии, когда X – число появления события в n испытаниях: $M(X) = np$, $D(X) = npq$. Итак, в нашем случае $M(X) = 6 \cdot 0{,}25 = 1{,}5$, $D(X) = 6 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 1{,}125$. $\sigma(x) = \sqrt{D(X)} \approx 1{,}06$.

Ниже приведена копия файла из Mathcad с вычислениями.

$C(Q,R) := \text{combin}(Q,R)$

$C(6,0) \cdot 0.25^{0} \cdot 0.75^{6} = 0.178$

$C(6,1) \cdot 0.25^{1} \cdot 0.75^{5} = 0.356$

$C(6,2) \cdot 0.25^{2} \cdot 0.75^{4} = 0.297$

$C(6,3) \cdot 0.25^{3} \cdot 0.75^{3} = 0.132$

$C(6,4) \cdot 0.25^{4} \cdot 0.75^{2} = 0.033$

$C(6,5) \cdot 0.25^{5} \cdot 0.75^{1} = 4.395 \times 10^{-3}$

$C(6,6) \cdot 0.25^{6} \cdot 0.75^{0} = 2.441 \times 10^{-4}$

Анализ биномиального распределения удобно проводить в среде Mathcad с использованием специальных функций с корневым словом binom (dbinom, pbinom, qbinom, rbinom). Например, функция dbinom(*k*,*n*,*p*) выводит значения вероятностей и т.д.

8. Прядильщица обслуживает 1000 веретён. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течении одной минуты равна 0,001. Требуется:

а) составить закон распределения числа веретён, на которых оборвалась нить;

б) найти вероятность обрыва нити не менее, чем на 2 веретенах.

Решение:

а) дискретная случайная величина X – число веретён, на которых оборвалась нить распределена по закону Пуассона (предельный для биномиального закон распределения, когда вероятность p появления события в каждом испытании мала, а число n проводимых испытаний велико): $P(X=k)=P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, где $\lambda=np=1000\cdot 0{,}001=1$, $k=0,1,2,\ldots,1000$, $n=1000$.

Таким образом, $P(X=0)=P_{1000}(0)\approx\frac{1^0}{0!}e^{-1}=0{,}368$;

$P(X=1)=P_{1000}(1)\approx\frac{1^0}{1!}e^{-1}=0{,}368$; $P(X=2)=P_{1000}(2)\approx\frac{1^2}{2!}e^{-1}=0{,}184$;

$P(X=3)=P_{1000}(3)\approx\frac{1^3}{3!}e^{-1}0{,}061$, и т.д. $P(X=10)=P_{1000}(10)\approx\frac{1^{10}}{10!}e^{-1}=0{,}0000001$ и т.д. Искомый закон распределения:

X	0	1	2	3	…	10	…	1000
p	0,368	0,368	0,184	0,061	…	0,0000001	…	0

Ниже приведена копия файла из Mathcad с вычислениями.

$p(k,\lambda) := dpois(k,\lambda)$

$p(0,1)=0.368$ $\quad p(4,1)=0.015$

$p(1,1)=0.368$ $\quad p(5,1)=3.066\times 10^{-3}$

$p(2,1)=0.184$ $\quad p(10,1)=1.014\times 10^{-7}$

$p(3,1)=0.061$ $\quad p(1000,1)=0$

б) вероятность обрыва нити не менее, чем на двух веретенах, вычисляется по формуле:

$P(X\geq 2)=\sum_{k=2}^{1000}P_{1000}(k)$ или $P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)$ = 1 - 0,368 - 0,368 = 0,264.

В среде Mathcad закону распределения Пуассона соответствуют специальные функции с корневым словом pois (dpois, ppois, qpois, rpois). Например, функция dpois(k,n,p) выводит значения вероятностей и т.д.

9. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 минут. Случайная величина X – время ожидания автобуса. Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание, дисперсию;

г) вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать автобус менее (более) 3 минут.

Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

Решение: случайная величина X – время ожидания автобуса распределена равномерно между двумя последовательными прибытиями автобуса; $b-a=5$ – длина интервала, в котором заключены возможные значения X. Основные формулы для равномерного распределения:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, \text{ если } x\in(a,b)\\ 0, \text{ если } x\notin(a,b)\end{cases}$$ - плотность равномерного распределения;

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{ если } a<x\le b\\ 1, \text{ если } x>b\end{cases}$$ - функция распределения;

$M(X)=\dfrac{a+b}{2}$ - математическое ожидание;

$D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$ - дисперсия;

$P(\alpha<X<\beta)=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$ - вероятность попадания в интервал (α,β).

Поэтому в нашей задаче:

а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}=0{,}2, \text{ если } x\in(0;5)\\ 0, \text{ если } x\notin(0;5)\end{cases}$;

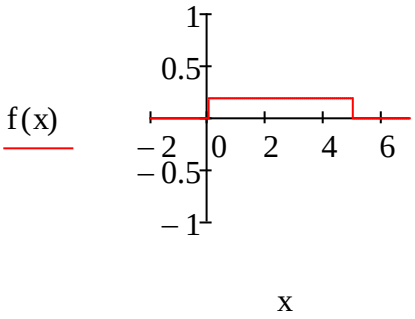
б) $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le 0\\ \dfrac{x}{5}=0{,}2x, \text{ если } 0<x\le 5\\ 1, \text{ если } x>5\end{cases}$;

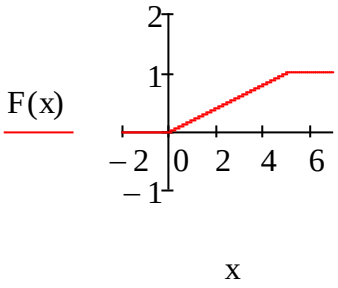
в) $M(X)=\dfrac{5+0}{2}=2{,}5$; $D(X)=\dfrac{(5-0)^2}{12}=2{,}08$;

г) ясно, что, пассажир будет ждать автобус менее 3 минут, если он подойдёт к остановке в интервал времени (0; 3) или, что всё равно, в интервал (2; 5) (событие A), т.е. вероятность этого события равна $P(A)=P(0<X<3)=$ $=\dfrac{3-0}{5}=0{,}6$; пассажир будет ждать автобус более 3 минут, если он подойдёт к остановке в интервал времени (0; 2) или, что всё равно, в интервал (3; 5) (событие B), т.е. вероятность этого события равна $P(B)=P(3<X<5)=$ $=\dfrac{5-3}{5}=0{,}4$ или $P(B)=1-P(A)$.

Построим графики $F(x)$ и $f(x)$ в системе Mathcad.

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \le 0 \\ 0.2 & \text{if } 0 < x \le 5 \\ 0 & \text{if } x > 5 \end{cases} \qquad F(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \le 0 \\ (0.2 \cdot x) & \text{if } 0 < x \le 5 \\ 1 & \text{if } x > 5 \end{cases}$$





В среде Mathcad равномерному закону распределения соответствуют специальные функции с корневым словом unif: dunif(*x*,*a*,*b*)– выводит значения плотности распределения; punif(*x*,*a*,*b*) – выводит значения функции распределения и т.д.

10. Время обнаружения цели радиолокатором (случайная величина *T*) имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0{,}5$.

Найти:

а) плотность распределения *f*(*t*);

б) функцию распределения *F*(*t*), указать её вероятностный смысл;

в) функцию надёжности *R*(*t*), указать её вероятностный смысл;

г) математическое ожидание, дисперсию;

д) вероятность того, что за время *t* = 5ч. цель будет обнаружена; что за время *t* =5 ч. цель не будет обнаружена.

Построить графики *F*(*t*), *R*(*t*) и *f*(*t*).

Решение: показательным называют закон распределения непрерывной случайной величины X с плотностью $f(x) = \begin{cases} 0, \textit{если } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, \textit{ если } x \ge 0 \end{cases}$. Другие понятия и формулы для показательного распределения: $F(x) = \begin{cases} 0, \textit{если } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, \textit{ если } x \ge 0 \end{cases}$ - функция распределения; если случайная величина $X = T -$ время обнаружения цели радиолокатором, то $F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$ определяет вероятность того, что цель не будет обнаружена за время *t*; $R(t) = P(T > t) = e^{-\lambda t} -$ функция надёжности, определяет вероятность обнаружения цели за время *t:*

$$M(X) = \frac{1}{\lambda},\ D(X) = \frac{1}{\lambda^2},\ \sigma(X) = \frac{1}{\lambda};\ P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

В нашей задаче, учитывая то, что $t \ge 0$, имеем:

а) $f(t) = 0{,}5e^{-0{,}5t}$;

б) $F(t)=P(T<t)=1-e^{-0,5t}$, определяет вероятность того, что цель не будет обнаружена за время t;

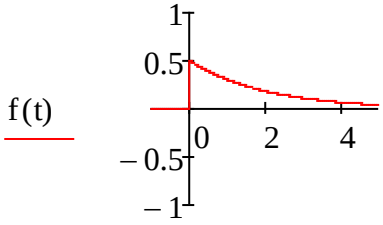
в) $R(t)=e^{-0,5t}$, определяет вероятность обнаружения цели за время t;

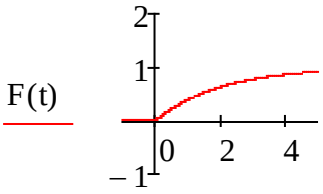
г) $M(X)=\frac{1}{0,5}=2$; $D(X)=\frac{1}{0,5^2}=4$;

д) поскольку функция распределения определяет вероятность того, что цель не будет обнаружена за время t, то, подставив в неё t = 5, получим вероятность не обнаружения цели за время t = 5 ч: $F(5)=1-e^{-0,5\cdot5}=1-e^{-2,5}=0,918$; события «цель обнаружена» и «цель не обнаружена» - противоположные, поэтому вероятность обнаружения цели за время t = 5 равна 1- 0,918 = 0,082. Этот же результат можно получить непосредственно, пользуясь функцией надёжности: $R(5)=e^{-0,5\cdot5}=e^{-2,5}=0,082$.

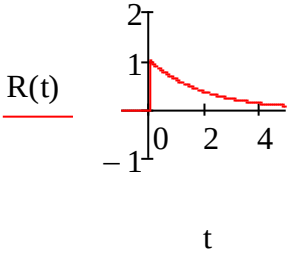
Построим графики $F(t)$, $R(t)$ и $f(t)$ и сделаем некоторые вычисления в системе Mathcad:

$$f(t):=\begin{cases}0 & \text{if } t<0\\ 0.5\cdot e^{-0.5\cdot t} & \text{if } t\ge 0\end{cases}\qquad F(t):=\begin{cases}0 & \text{if } t<0\\ 1-e^{-0.5\cdot t} & \text{if } t\ge 0\end{cases}$$





$$R(t):=\begin{cases}0 & \text{if } t<0\\ e^{-0.5\cdot t} & \text{if } t\ge 0\end{cases}$$



$$e^{-2.5}=0.082$$

$$1-e^{-2.5}=0.918$$

В среде Mathcad показательному закону распределения соответствуют специальные функции с корневым словом exp: dexp(x,λ) – выводит значения плотности распределения; pexp(x,λ) – выводит значения функции распределения и т.д.

11. Случайная ошибка измерения (случайная величина X) подчинена нормальному закону распределения с параметрами a = 10 и σ = 2.

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание, дисперсию;

г) вероятность попадания в интервал $(12;14)$;

д) вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине δ =3.

Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

Решение: нормальным называют закон распределения непрерывной случайной величины X с плотностью $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где $a = M(X)$ – математическое ожидание, $\sigma=\sigma(X)-$ среднее квадратическое отклонение X. Другие понятия и формулы для нормального распределения: функция распределения – $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f(t)dt=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left[\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}\right]dt$ или $F(x)=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)+0{,}5$, где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt-$ функция Лапласа (или интеграл вероятностей), её значения табулированы или их можно найти в системе Mathcad; $P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$ - вероятность попадания в интервал (α,β); вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидания не более чем на δ, находится по формуле: $P(|X-a|\le\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

В нашей задаче:

а) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}$;

б) $F(x)=\Phi\left(\frac{x-10}{2}\right)+0{,}5$;

в) $M(X)=a=10$, $\sigma(X)=\sigma=2$, $D(X)=\sigma^2=4$;

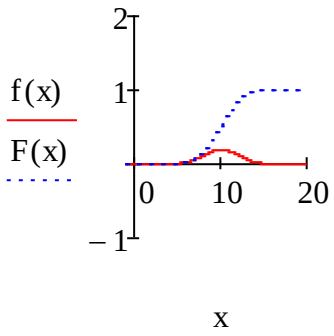
г) $P(12<X<14)=\Phi\left(\frac{14-10}{2}\right)-\Phi\left(\frac{12-10}{2}\right)=\Phi(2)-\Phi(1)$=0,4772-0,3413=0,1359;

д) вероятность того, что измерение произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине δ =3, будет равна $P(|X-10|\le 3)=2\Phi\left(\frac{3}{2}\right)=2\Phi(1{,}5)$=0,4332.

Здесь значения функции Лапласа взяты из таблицы, хотя их можно было бы найти в системе Mathcad, где нормальному закону распределения соответствуют функции, в названии имеющие корневое слово norm и начинающиеся с букв d, p, q, r. Например, dnorm (x,a,σ) – выводит значения плотности распределения $f(x)$; pnorm (x,a,σ) – выводит значения функции

распределения $F(x)$. Воспользуемся этими функциями для построения соответствующих графиков. Копия файла из Mathcad приведена ниже.

$f(x) := dnorm(x, 10, 2)$ $F(x) := pnorm(x, 10, 2)$



2 Расчётно-графическая работа №2. Элементы математической статистики

Цели: изучить основные задачи математической статистики: задачи обработки и анализа результатов наблюдений случайных массовых явлений.

2.1 Теоретические вопросы

1. Предмет математической статистики и её основные задачи. Основные понятия (выборка, объём выборки, варианты, статистический ряд, интервальный ряд).
2. Эмпирическая функция распределения, полигон, гистограмма.
3. Определение неизвестных параметров распределения (выборочная средняя, выборочная и исправленная выборочная дисперсии).
4. Точечные и интервальные оценки параметров распределения.
5. Точность и надёжность оценки. Доверительный интервал.
6. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормально распределённой случайной величины с известным σ.
7. Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения нормально распределённой случайной величины.
8. Понятие корреляционной зависимости. Функции и линии регрессии.

2.2 Расчётные задания

1. Для данной выборки выполнить задачу обработки и систематизации, определить:

а) вариационный ряд (выборку в порядке возрастания);

б) статистические ряды частот и относительных частот;

в) интервальные статистические ряды частот и относительных частот (минимальную и максимальную варианты, размах выборки, число интервалов, длину интервалов);

г) дискретные (группированные) статистические ряды частот и относительных частот.

2. Для данной выборки выполнить задачу анализа и оценки:

а) по интервальному статистическому ряду построить гистограмму частот и относительных частот;

б) по дискретному статистическому ряду найти:

- полигон частот и относительных частот;
- эмпирическую функцию распределения;
- выборочную среднюю;
- выборочную и исправленную выборочную дисперсии;
- исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение;
- выборочные моду и медиану,

в) по статистическим рядам частот и относительных частот найти:

- выборочные начальные моменты третьего и четвёртого порядков;
- выборочный эксцесс;
- выборочный коэффициент асимметрии.

1	147	153	179	165	159	149	141	102	169	157
	169	154	143	155	113	155	171	168	153	135
	150	152	142	132	152	161	148	136	138	149
	157	178	149	195	146	166	182	135	136	170
	156	152	145	198	192	143	159	116	126	155
	164	169	165	148	151	153	139	166	138	128
	169	169	155	152	175	177	131	154	174	187
	180	177	162	149	146	113	151	152	134	125
2	558	563	569	547	552	562	554	549	575	578
	561	552	551	561	538	533	547	552	557	543
	547	565	587	553	548	554	561	564	562	558
	566	555	563	568	586	549	575	564	553	555
	567	556	546	552	543	554	556	566	592	562
	544	568	574	564	547	549	553	578	557	561
	553	545	554	571	569	539	549	538	575	554
	577	552	566	557	551	552	546	584	572	535
3	577	568	557	564	547	549	553	578	557	575
	554	5455	554	571	569	539	549	538	575	566
	558	563	563	547	552	562	554	549	575	558
	547	595	587	553	548	554	561	564	562	544
	555	563	568	586	549	575	564	553	585	592
	577	554	552	566	557	551	552	546	584	556
	601	561	552	551	561	538	533	547	552	557

	555	541	588	558	563	558	572	578	539	556
4	77 48 38 63 68 12 55 74	45 25 53 55 55 39 69 51	49 59 48 16 49 57 31 82	92 57 68 78 65 51 62 52	13 65 52 52 79 65 48 46	69 69 73 95 48 66 46 75	52 55 42 77 59 43 51 49	26 68 62 66 53 52 43 55	22 49 71 35 41 63 16 57	36 63 45 54 38 43 34 54
5	347 365 343 352 366 377 399	365 355 368 345 358 354 363	387 363 374 354 363 352 361	348 368 364 352 347 366 352	354 359 347 371 352 357 351	361 375 349 369 362 351 361	364 364 353 349 354 352 338	362 353 378 338 349 346 353	346 385 357 375 375 384 333	358 363 358 388 341 351 357
6	9 6 6 7 5 6 3	9 10 6 7 5 13 6	6 6 7 5 12 11 9	9 7 12 11 9 11 8	9 6 5 9 8 5 12	7 8 7 7 7 8 11	6 6 8 6 9 10 9	11 5 5 5 8 9 10	6 5 10 7 5 4 4	7 4 9 6 5 7 14
7	39 41 34 47 41 43 57 39	40 40 36 48 42 42 52 37	38 42 37 52 39 43 41 42	43 39 42 56 33 41 42 43	41 41 42 68 34 42 46 54	42 41 42 70 37 47 48 58	40 36 40 68 43 48 49 59	38 43 41 64 45 49 39 64	41 41 41 56 47 52 32 66	42 42 46 58 71 53 40 68
8	10 17 20 27 26 42 58	15 12 20 24 32 24 54	16 13 21 25 26 23 49	17 14 23 25 27 35 47	18 15 26 26 28 23 32	19 11 28 32 29 25 36	20 18 23 33 30 36 43	15 16 28 31 21 37 23	16 15 27 34 22 24 24	11 18 24 43 23 21 28

9	150	144	124	132	140	124	144	153	151	148
	116	130	154	158	102	125	124	152	134	148
	142	121	112	131	151	104	146	132	182	142
	152	196	142	154	158	118	126	152	138	124
	144	176	124	140	172	168	181	134	168	132
	144	112	134	162	104	161	154	166	178	148
	162	164	164	172	142	144	146	112	171	
10	128	105	115	92	115	142	98	123	103	144
	112	115	88	118	103	102	95	124	106	135
	95	124	103	102	118	112	115	92	115	119
	92	112	132	85	122	105	125	142	99	125
	106	92	118	105	118	86	125	105	122	138
	102	130	112	98	115	120	118	103	118	129
	103	122	94	112	97	128	102	116	125	132
11	102	112	118	85	112	115	103	95	122	125
	157	178	149	195	146	166	182	135	136	170
	157	143	179	165	159	149	141	102	169	168
	151	168	122	163	117	165	132	139	107	125
	152	152	142	132	152	161	148	136	138	149
	153	154	143	155	113	155	171	168	153	135
	157	152	145	198	192	143	159	116	126	155
	165	169	165	148	151	153	139	166	138	128
12	242	254	218	226	252	238	224	298	260	287
	250	216	230	254	258	202	225	224	252	234
	244	212	231	251	204	246	232	282	242	252
	299	254	282	242	270	254	260	232	268	242
	276	224	240	272	268	281	234	268	232	300
	274	212	234	262	204	261	254	266	278	248
	255	262	256	264	272	242	244	246	253	234
	240	264	252	248	247	268	229	235	262	212
13	262	267	275	266	246	252	261	269	262	268
	259	248	266	259	252	248	252	232	269	287
	253	286	275	235	202	239	225	236	237	224
	253	268	277	249	248	263	243	266	212	255
	249	288	213	264	247	242	228	277	256	251
	267	232	258	246	278	279	257	255	243	258
	254	244	265	274	252	265	222	269	254	278
	249	252	294	232	269	263	269	271	245	235

14	558	565	587	553	548	554	561	564	562	544
	563	568	586	549	575	564	553	585	577	553
	563	564	547	552	562	554	549	575	558	592
	546	577	568	574	564	547	549	553	578	557
	557	577	568	574	564	547	549	538	575	566
	558	554	552	566	557	551	552	546	584	532
	602	561	552	551	561	538	533	547	552	557
	556	541	588	558	563	558	572	578	539	556
15	165	143	152	167	164	199	171	171	156	151
	155	155	158	145	158	177	161	181	153	171
	177	153	174	154	163	174	152	188	162	197
	191	158	154	171	163	172	152	178	151	172
	161	186	147	169	147	166	161	171	161	186
	161	189	199	162	167	198	168	135	152	146
	162	175	163	149	162	161	161	193	172	175
	153	164	178	138	164	172	187	178	1433	161
16	112	101	155	137	109	129	152	128	132	116
	125	125	142	140	125	118	125	135	149	145
	106	109	138	145	118	128	125	105	122	138
	120	118	133	118	129	149	124	153	132	118
	132	132	138	128	122	115	143	140	122	152
	128	118	126	132	134	123	122	159	112	110
	112	121	105	117	112	129	129	118	112	116
17	87	85	91	94	102	80	75	102	99	101
	120	122	101	88	80	97	92	91	94	82
	115	100	97	91	87	116	121	101	123	97
	88	90	101	95	93	92	88	94	98	99
	95	105	112	116	118	108	95	99	92	100
	94	106	112	122	100	92	93	82	111	102
	100	101	123	97	90	104	108	101	96	111
18	547	565	587	553	548	554	561	562	551	572
	565	555	563	568	586	549	575	537	581	553
	543	568	574	564	547	549	553	572	535	555
	552	545	554	571	569	539	549	553	562	561
	558	563	563	547	552	562	554	563	558	572
	577	554	552	566	557	551	552	571	551	552
	599	561	552	551	561	538	533	541	588	558

19	90	123	132	85	122	105	125	142	99	125
	118	105	115	92	115	142	98	123	103	144
	106	92	118	105	118	86	125	105	122	138
	102	130	112	98	115	120	118	103	118	129
	112	115	88	118	103	102	95	124	106	135
	95	124	103	102	118	112	115	92	115	119
	103	122	94	112	97	128	102	116	125	132
20	139	112	132	85	122	105	125	142	99	125
	116	105	92	115	98	123	103	144	115	142
	106	92	118	86	125	105	122	138	105	118
	102	130	112	98	115	120	118	103	118	129
	112	115	88	118	103	102	95	124	106	135
	95	124	103	102	118	112	115	103	95	122
	125	118	96	126	98	106	128	118	126	103
	134	112	101	105	117	92	129	99	118	112
21	154	143	155	113	155	171	168	153	135	168
	145	168	122	163	117	165	132	139	107	125
	146	152	142	132	152	161	148	136	138	149
	157	178	149	195	146	166	182	135	136	170
	155	152	145	198	192	143	159	116	126	155
	163	169	165	148	151	153	139	166	138	128
	168	157	143	179	165	159	149	141	102	169
22	470	801	790	764	764	950	533	402	520	780
	699	840	869	551	707	635	703	801	859	475
	797	797	789	875	698	580	821	737	910	856
	950	741	473	988	737	787	667	649	797	939
	532	885	590	590	975	910	731	869	435	889
	584	967	950	531	775	485	756	656	680	741
	950	458	511	857	536	699	474	789	889	533
23	450	434	424	432	440	443	415	446	423	472
	442	452	444	425	403	458	455	431	446	424
	438	442	482	432	416	477	431	432	412	462
	496	468	424	438	452	446	418	474	432	452
	466	488	452	489	451	422	442	492	473	402
	481	468	404	498	467	398	440	449	417	425
	444	498	466	442	483	462	492	435	449	422
24	250	244	224	232	240	224	244	226	253	232
	248	216	230	254	258	202	225	224	252	234
	242	212	231	251	204	246	232	282	242	252
	296	242	254	218	226	252	238	224	298	260
	276	254	282	242	270	254	260	232	268	242
	244	276	224	240	272	268	281	234	268	251
	271	212	234	262	204	261	254	266	278	248

25	165	143	152	167	164	199	171	171	156	149
	147	155	158	145	158	177	161	181	153	171
	175	153	174	154	163	174	152	188	162	197
	187	158	154	171	163	172	152	178	151	172
	153	186	147	169	147	166	161	171	161	186
	148	161	189	199	162	167	198	168	135	152
	154	175	163	149	162	161	161	193	172	175
	161	164	178	138	164	172	187	178	143	161
26	153	174	154	163	174	152	188	162	197	234
	188	158	154	171	163	172	152	178	151	172
	155	186	147	169	147	166	161	171	161	186
	149	161	189	199	162	167	198	168	135	152
	156	175	163	149	162	161	161	193	172	175
	162	164	178	138	164	172	187	178	143	161
	165	163	177	161	149	146	152	139	156	152
27	212	231	251	204	246	232	282	242	252	276
	297	242	254	218	226	252	238	224	298	260
	277	254	282	242	270	254	260	232	268	242
	345	276	224	240	272	268	281	234	268	232
	272	212	234	292	204	261	254	266	278	248
	253	262	256	264	272	242	244	246	253	234
	237	264	252	248	247	268	229	235	262	212
	238	242	254	263	261	266	254	264	248	251
28	165	143	52	166	164	199	171	171	156	171
	148	155	158	145	158	177	161	181	153	197
	176	153	174	154	163	174	152	188	162	172
	189	158	154	171	163	172	152	178	151	186
	157	186	147	169	147	166	161	171	161	152
	150	161	189	199	162	167	198	168	135	175
	158	175	163	149	162	161	161	193	172	
29	216	230	254	258	202	225	224	252	234	250
	243	212	231	251	204	246	232	282	242	252
	298	242	254	218	226	252	238	224	298	260
	278	254	282	242	270	254	260	232	268	242
	246	276	224	240	272	268	281	234	268	232
	273	212	234	262	201	261	254	266	278	248
	254	262	256	264	272	242	244	246	253	234
	239	264	252	248	247	268	229	235	262	212

30	165	143	152	167	165	199	171	171	156	152
	149	155	158	145	158	177	161	181	153	171
	153	174	154	163	174	152	188	162	197	178
	190	158	154	171	163	172	152	178	151	172
	159	186	147	169	147	166	161	171	161	186
	151	161	189	199	162	167	198	168	135	152
	160	175	163	149	162	161	161	193	172	175
	165	164	178	137	164	172	187	178	143	161

3. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания *a* нормального распределения с надёжностью γ, зная выборочную среднюю $\bar{x}_в$, объём выборки *n* и среднее квадратическое отклонение σ.

№	γ	$\bar{x}_в$	*n*	σ	№	γ	$\bar{x}_в$	*n*	σ	№	γ	$\bar{x}_в$	*n*	σ
3.1	0.93	65.23	78	5	3.11	0.98	13.38	39	8	3.21	0.99	7.37	58	7
3.2	0.92	8.21	49	7	3.12	0.93	20.44	66	7	3.22	0.93	65.13	34	6
3.3	0.95	51.23	58	9	3.13	0.97	14.32	58	6	3.23	0.94	9.27	53	8
3.4	0.94	5.21	39	6	3.14	0.94	30.44	86	7	3.24	0.93	85.17	35	6
3.5	0.95	85.23	58	7	3.15	0.99	16.32	38	9	3.25	0.95	8.27	57	9
3.6	0.92	11.48	36	6	3.16	0.95	75.17	36	6	3.11	0.97	5.21	46	6
3.7	0.94	23.38	39	8	3.17	0.97	7.27	56	7	3.12	0.96	55.23	38	5
3.8	0.93	30.44	56	7	3.18	0.93	75.17	35	5	3.13	0.92	5.21	36	7
3.9	0.99	15.32	38	5	3.19	0.94	8.27	58	9	3.14	0.95	55.23	68	7
3.10	0.95	10.48	46	6	3.20	0.98	76.17	46	6	3.15	0.98	7.21	56	6

4. Для данных задач 1-2 и результатов этих задач, предполагая, что задано нормальное распределение.

Найти:

а) точность оценки математического ожидания *a* по выборочной средней $\bar{x}_в$ с надёжностью γ;

б) доверительный интервал для оценки математического ожидания *a* с надёжностью γ.

Выборочную среднюю $\bar{x}_в$, объём выборки *n*, среднее квадратическое отклонение σ взять из задач 1-2, γ - из задачи 3.

5. Расстояние до цели измеряется прибором, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки измерения распределены нормально со средним квадратическим отклонением σ. Сколько надо сделать независимых измерений, чтобы определить расстояние с ошибкой не более δ при надёжности γ?

	γ	σ	δ		γ	σ	δ		γ	σ	δ
5.1	0.93	20	6	5.11	0.98	13	4	5.21	0.99	20	4
5.2	0.92	22	7	5.12	0.93	21	7	5.22	0.93	24	7
5.3	0.95	19	5	5.13	0.97	14	5	5.23	0.94	18	4
5.4	0.94	16	3	5.14	0.94	24	8	5.24	0.93	16	7
5.5	0.95	18	4	5.15	0.99	12	4	5.25	0.95	19	6
5.6	0.92	11	4	5.16	0.95	23	6	5.11	0.98	13	4
5.7	0.94	23	8	5.17	0.97	14	8	5.12	0.93	21	7
5.8	0.93	25	7	5.18	0.93	21	9	5.13	0.97	14	5
5.9	0.99	17	5	5.19	0.94	15	5	5.14	0.94	24	8
5.10	0.95	10	3	5.20	0.98	13	6	5.15	0.99	12	4

2.3 Решение типового варианта

1. Для данной выборки выполнить задачу обработки и систематизации, определить:

а) вариационный ряд (выборку в порядке возрастания);

б) статистические ряды частот и относительных частот;

в) интервальные статистические ряды частот и относительных частот (минимальную и максимальную варианты, размах выборки, число интервалов, длину интервалов);

г) дискретные (группированные) статистические ряды частот и относительных частот.

2. Для данной выборки выполнить задачу анализа и оценки:

а) по интервальному статистическому ряду построить гистограмму частот и относительных частот;

б) по дискретному статистическому ряду найти:

- полигон частот и относительных частот;
- эмпирическую функцию распределения;
- выборочную среднюю;
- выборочную и исправленную выборочную дисперсии;
- выборочное и исправленное выборочное среднеквадратические отклонения;
- выборочные моду и медиану;

в) по статистическим рядам частот и относительных частот найти:

- выборочные начальные и центральные моменты третьего и четвёртого порядков;
- выборочный эксцесс;
- выборочный коэффициент асимметрии.

20	15	17	19	23	18	21	15	16	13
20	16	19	20	14	20	16	14	20	19
15	19	17	16	15	22	21	12	10	21
18	14	14	18	18	13	19	18	20	23
16	20	19	17	19	17	21	17	19	17
13	17	11	18	19					

Решение: заметим, что вычисления и построение графиков производится в среде Mathcad. Копия файла из Mathcad приведена ниже. То, что получено в Mathcad следует оформить и пояснить.

1. а) объём выборки n = 55. Вариационный ряд (выборка в порядке возрастания):

$Y^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	10	11	12	13	13	14	14	14	14	...

(в среде Mathcad эта таблица просматривается вся нажатием на указатель направления движения);

б) по вариационному ряду посчитаем, сколько раз имеет место каждая варианта, т.е. частоту (n_i) каждой варианты. Полученные данные занесём в таблицу – статистический ряд частот:

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
n_i	1	1	1	2	4	4	5	7	6	8	7	5	1	2

Относительные частоты вариант найдём по формуле $p_i^* = \frac{n_i}{n}$, где n объём выборки, полученные результаты занесём в таблицу - статистический ряд относительных частот:

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
p_i^*	0,018	0,018	0,018	0,036	0,073	0,073	0,091	0.127	0,109
x_i	19	20	21	22	23				
p_i^*	0,145	0,127	0,091	0,018	0,036				

в) для построения интервального статистического ряда определим сначала следующее: наибольшая и наименьшая варианты: $a = x_{min} = 10$, $b = x_{max} = 23$; размах выборки: $R = b - a = 13$; величину интервалов найдём по формуле Стерджеса $h = \frac{x_{max} - x_{min}}{1 + \log_2 n}$, h = 1,917 и округляем до целого $h \approx 2$; число интервалов – знаменатель этой формулы $m = 1 + \log_2 n$ или

$m = \frac{R}{h} = 6{,}781$, округляем до целого $m \approx 7$; за начало первого интервала рекомендуется брать величину $x_{нач} = x_{min} - \frac{h}{2}$, $x_{нач} = 9{,}041 \approx 9$; число вариант, попавших в каждый интервал (т.е. частоты n_i), и относительные частоты (т.е. $p_i = \frac{n_i}{n}$) найдены в среде Mathcad (см. $w1^T$ и $w2^T$).

Таким образом, искомый интервальный ряд имеет вид:

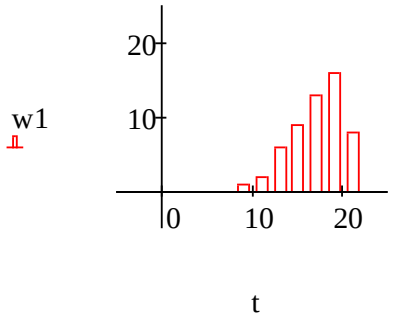
Интервалы	[9,11)	[11,13)	[13,15)	[15,17)	[17,19)	[19,21)	[21,23]
n_i	1	2	6	9	13	16	8
$p_i = \frac{n_i}{n}$	0,018	0,036	0,109	0,164	0,236	0,291	0,145

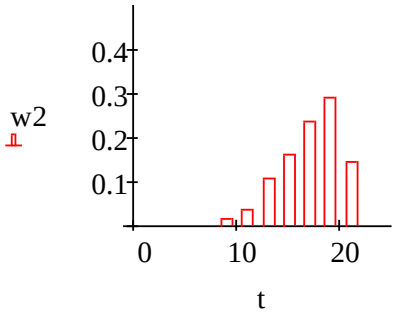
в) для построения дискретного статистического ряда (или в некоторых учебниках его называют группированным статистическим рядом) найдём середины интервалов $\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ (см. x^T в Mathcad), им будут отвечать соответствующие частоты и относительные частоты из интервального ряда.

Искомый дискретный статистический ряд:

$\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	10	12	14	16	18	20	22
n_i	1	2	6	9	13	16	8
p_i	0,018	0,036	0,109	0,164	0,236	0,291	0,145

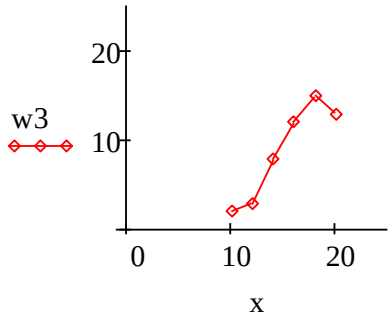
2. а) по интервальному статистическому ряду построим гистограмму частот и относительных частот (в среде Mathcad):

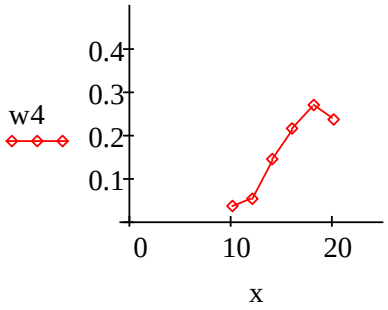




б) по дискретному статистическому ряду найдём:

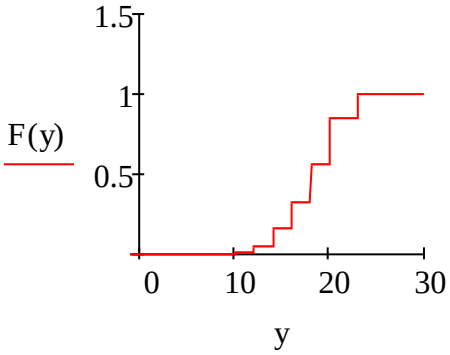
- полигон частот и относительных частот:





- эмпирическую функцию распределения (см. F^T и $F(y)$ в Mathcad):

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le 10 \\ 0{,}018, \text{ при } 10<x\le 12 \\ 0{,}054, \text{ при } 12<x\le 14 \\ 0{,}163, \text{ при } 14<x\le 16 \\ 0{,}327, \text{ при } 16<x\le 18 \\ 0{,}563, \text{ при } 18<x\le 20 \\ 0{,}854, \text{ при } 20<x\le 23 \\ 1, \text{ при } x>23 \end{cases}$$



- выборочную среднюю (см. mean(X) в Mathcad): $\bar{x}_в = \dfrac{\sum_i x_i n_i}{n}$ или $\bar{x}_в = \sum_i x_i \cdot p_i = 17{,}564$;

- выборочную и исправленную выборочную дисперсии (var(X) и s2 в Mathcad): $D_в = \dfrac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_в)^2}{n}$ или $D_в = \dfrac{\sum_i n_i \cdot x_i^2}{n} - (\bar{x}_в)^2 = 8{,}428$ – выборочная дисперсия; $s^2 = \dfrac{n}{n-1} D_в = 8{,}584$ – исправленная выборочная дисперсия;

- выборочное среднеквадратическое отклонение (см. stdev(X) или σ в Mathcad) и исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение (см. s в Mathcad): $\sigma = \sqrt{D_в} = 2{,}903$; $s = \sqrt{s^2} = 2{,}93$

- выборочные моду и медиану (см. mode(X) и median(X) в Mathcad): мода $M_0 = 19$ определяет варианту, имеющую наибольшую частоту (мода может быть не одна, её просто найти по статистическому ряду частот);

медиана $M_e = 18$ определяет середину вариационного ряда и зависит от чётности объёма выборки: $M_e = \begin{cases} x_{k+1}, \ при \ n = 2k+1 \\ \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}, \ при \ n = 2k \end{cases}$;

в) по статистическим рядам частот и относительных частот (см. *y* и *p* в Mathcad) найдём:

- сначала выборочные начальные и центральные моменты *k*-го порядка (*M*(*k*) и *m*(*k*) в Mathcad), затем, полагая *k* равно 3 и 4, выборочные начальные $M(3) = 5{,}355 \cdot 10^3$, $M(4) = 9{,}852 \cdot 10^4$ и выборочные центральные $m(3) = -2{,}645$, $m(4) = 147{,}375$ моменты третьего и четвёртого порядков;

- выборочный эксцесс $a_x^* = \dfrac{m(3)}{\sigma^3} = -0{,}117$;

- выборочный коэффициент асимметрии $c_x^* = \dfrac{m(4)}{\sigma^4} - 3 = -0{,}696$.

Заметим, что здесь найдены также выборочная средняя $M(1) = 16{,}826 = \bar{x}_в$, выборочная дисперсия $m(2) = 7{,}997 = D_в$, выборочное среднеквадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{m(2)} = 2{,}828$. Они отличаются от найденых выше, т.к. определены по другим статистическим рядам.

Копия файла из Mathcad :

n := 55

X := (20 15 17 19 23 18 21 15 16 13 20 16 19 20 14 20 16 14 20 19

$X^T =$

	0
0	20
1	15
2	17
3	19
4	23
5	18
6	21
7	15
8	16
9	13
10	20
11	16
12	19
13	20
14	14
15	...

Y := sort(X^T)

$Y^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	10	11	12	13	13	14	14	14	14	...

a := min(X) b := max(X)

a = 10 b = 23

R := b − a R = 13

$h := \dfrac{b-a}{1 + \dfrac{\ln(55)}{\ln(2)}}$ h = 1.917

h1 := 2 $m := \dfrac{R}{h}$

$x0 := a - \dfrac{h}{2}$ x0 = 9.041

m = 6.781

a1 := 9 m1 := 7

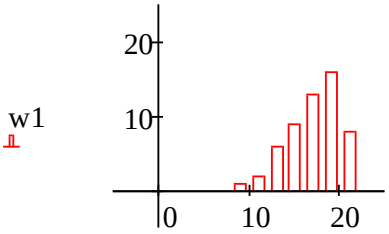
$j := 0..m1 \qquad i := 0..m1 - 1$

$t_j := a1 + h1 \cdot j \qquad x_i := t_i + \frac{h1}{2}$

$w1 := hist(t, X) \qquad w2 := \frac{w1}{n} \qquad w1^T = (1 \quad 2 \quad 6 \quad 9 \quad 13 \quad 16 \quad 8)$

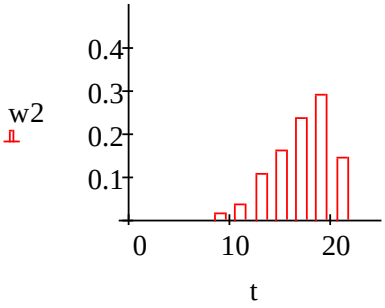
$t^T = (9 \quad 11 \quad 13 \quad 15 \quad 17 \quad 19 \quad 21 \quad 23)$

$x^T = (10 \quad 12 \quad 14 \quad 16 \quad 18 \quad 20 \quad 22)$



$w2^T = (0.018 \quad 0.036 \quad 0.109 \quad 0.164 \quad 0.236 \quad 0.291 \quad 0.145^t)$

$0.018 + 0.036 + 0.109 + 0.164 + 0.236 + 0.291 + 0.145 = 0.999$



$mode(X) = 19$

$x1 := mean(X) \qquad x1 = 17.564$

$M := median(X) \qquad M = 18$

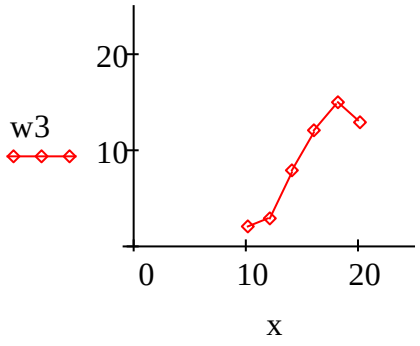
$x2 := var(X) \qquad s2 := \frac{n}{n-1} \cdot x2$

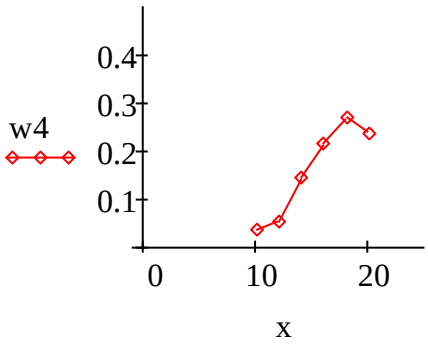
$stdev(X) = 2.903$

$x2 = 8.428$

$s2 = 8.584 \qquad s := \sqrt{s2} \qquad s = 2.93$

$w3 := hist(x, X) \qquad w4 := \frac{w3}{n}$





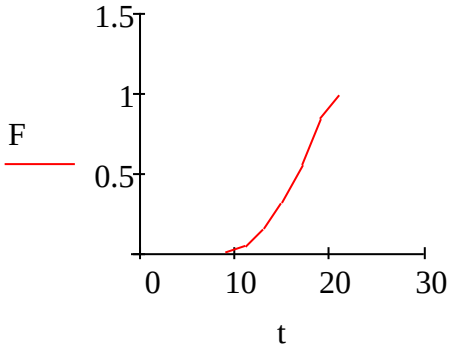
$i := 0..6$

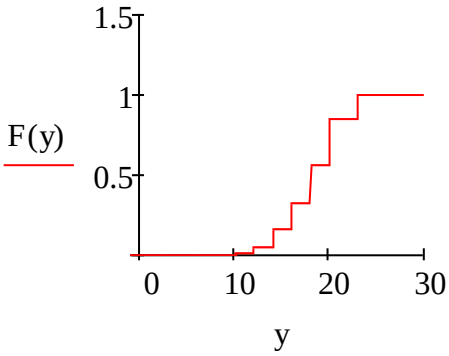
$$F_i := \sum_{j=0}^{i} w_j$$

$w := (\,0.018 \quad 0.036 \quad 0.109 \quad 0.164 \quad 0.236 \quad 0.291 \quad 0.145\,)^T$

$F^T = (\,0.018 \quad 0.054 \quad 0.163 \quad 0.327 \quad 0.563 \quad 0.854 \quad 0.999\,)$

$$F(y) := \begin{cases} 0 & \text{if } y \le 10 \\ 0.018 & \text{if } 10 < y \le 12 \\ 0.054 & \text{if } 12 < y \le 14 \\ 0.163 & \text{if } 14 < y \le 16 \\ 0.327 & \text{if } 16 < y \le 18 \\ 0.563 & \text{if } 18 < y \le 20 \\ 0.854 & \text{if } 20 < y \le 23 \\ 1 & \text{if } y > 23 \end{cases}$$





$y := (\,10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19 \quad 20 \quad 21 \quad 22 \quad 13\,)^T$

$p := (\,0.018 \quad 0.018 \quad 0.018 \quad 0.036 \quad 0.073 \quad 0.073 \quad 0.091 \quad 0.127 \quad 0.109 \quad 0.145 \quad 0.127 \quad 0.091 \quad 0.018 \quad 0.036\,)^T$

$$M(k) := \sum_{i=0}^{13} \left[(y_i)^k \cdot p_i \right] \qquad m(k) := \sum_{i=0}^{13} \left[(y_i - M(1))^k \cdot p_i \right]$$

$M(1) = 16.826 \qquad m(2) = 7.997 \qquad \sigma := \sqrt{m(2)} \qquad \sigma = 2.828$

$\frac{m(3)}{\sigma^3} = -0.117 \qquad \frac{m(4)}{\sigma^4} - 3 = -0.696$

$M(3) = 5.355 \times 10^3 \qquad m(3) = -2.645$

$M(4) = 9.852 \times 10^4 \qquad m(4) = 147.375$

3. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надёжностью 0,95, зная выборочную среднюю 18, объём выборки 25 и среднее квадратическое отклонение 3.

Решение: доверительный интервал для оценки математического ожидания a имеет вид $\bar{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Все величины, кроме t, известны. Найдём t из соотношения $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$, где $\Phi(t)$ функция Лапласа, её значения табулированы. По таблице $t = 1{,}96$. Таким образом, $18 - 1{,}96\frac{3}{\sqrt{25}} < a < 18 + 1{,}96\frac{3}{\sqrt{25}}$. Ответ: (16,824; 19,176).

4. Для данных задач 1-2 и результатов этих задач, предполагая, что задано нормальное распределение, найти:

а) точность оценки математического ожидания a по выборочной средней $\bar{x}_в$ с надёжностью γ;

б) доверительный интервал для оценки математического ожидания a с надёжностью γ.

Выборочную среднюю $\bar{x}_в$, объём выборки n, среднее квадратическое отклонение σ взять из задач 1-2, γ - из задачи 3.

Решение: из задач 1-2 выборочная средняя $\bar{x}_в$=17,564, объём выборки n=55, среднее квадратическое отклонение σ=2,903, из задачи 3 γ = 0,95:

а) точность оценки математического ожидания a определяется формулой $\delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$. t найдено в задаче 3: $t = 1{,}96$. Поэтому точность будет равна $\delta = \frac{1{,}96 \cdot 2{,}903}{\sqrt{55}} \approx 0{,}77$;

б) по формуле, указанной в задаче 3, найдём доверительный интервал: $17{,}564 - 1{,}96\frac{2{,}903}{\sqrt{55}} < a < 17{,}564 + 1{,}96\frac{2{,}903}{\sqrt{55}}$ или $16{,}794 < a < 18{,}334$.

5. Расстояние до цели измеряется прибором, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки измерения распределены нормально со средним квадратическим отклонением σ=15. Сколько надо сделать независимых измерений, чтобы определить расстояние с ошибкой не более δ=5 при надёжности γ=0,9?

Решение: из формулы, определяющей точность оценки математического ожидания, $\delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$ найдём $n = \frac{t^2 \sigma^2}{\delta^2}$. Определим t из соотношения $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,9}{2} = 0,45$. По таблице $t = 1,65$. Поэтому $n = \frac{1,65^2 \cdot 15^2}{5^2} = 24,5025$. Таким образом, надо сделать не менее 25 измерений.

Список литературы

1 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 2003.- 279 с.

2 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. школа, 2004.- 400 с.

3 Ивановский Р.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Основы, прикладные аспекты с примерами изадачами в среде Mathcad. - СПб.: БХВ- Петербург, 2008. – 528 с.

4 Письменный Д. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистики, случайные процессы. – М.: Айрис -пресс, 2006. – 288 с.

5 Лунгу К.Н. и др. Сборник задач по высшей математике. 2 курс – М.: Айрис-пресс, 2011. – 576 с.

6 Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Теория вероятностей и математическая статистика. Конспект лекций для студентов специальностей 5В070400 – Вычислительная техника и программное обеспечение, 5В070300 – Информационные системы.– Алматы: АУЭС, 2013.- 49 с.

Содержание

1 Расчётно-графическая работа №1. Случайные события и случайные величины…….. 3
1.2 Расчётные задания……. 4
1.3 Решение типового варианта……. 12
2 Расчётно-графическая работа №2 Элементы математической статистики. ……..…… 30
2.2 Расчётные задания……. 30
2.3 Решение типового варианта……. 38
Список литературы…….. 46

Дополнительный план 2017 г., поз. 13

Астраханцева Людмила Николаевна
Байсалова Маншук Жумамуратовна

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ

Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 5В070200- Автоматизация и управление

Редактор Л.Т.Сластихина
Специалист по стандартизации Н.К.Молдабекова

Подписано в печать_____ Формат 60х84 1/16
Тираж 50 экз. Бумага типографская №1
Объем 2,88 уч.-из.л. Заказ_____ цена 1440 тг.

Копировально-множительное бюро
некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013, Алматы, ул.Байтурсынова, 126