Коммерциялық емес акционерлік қоғам

АЛМАТЫ ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС УНИВЕРСИТЕТІ

Математикалық модельдеу және бағдарламалық қамтамасыз ету кафедрасы

НӘТИЖЕЛЕРДІ МАТЕМАТИКАЛЫҚ ӨҢДЕУ

5В070200 -Автоматтандыру және басқару мамандығы бойынша оқитын студенттер үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар

Алматы 2017

ҚҰРАСТЫРУШЫЛАР: Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Нәтижелерді математикалық өңдеу. 5В070200 -Автоматтандыру және басқару мамандығы бойынша оқитын студенттер үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар. - Алматы: АЭжБУ, 2017. - 43 б.

5В070200 -Автоматтандыру және басқару мамандығы бойынша оқитын студенттер үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар «Нәтижелерді математикалық өңдеу» пәнінің №1, №2 типтік есептеулерден тұрады. Бағдарламаның теориялық сұрақтары енгізілген. Типтік нұсқаның шешімі келтірілген.

Кестелер- 24, без.- 22, әдеб.көрсеткіші – 5 атау.

Рецензент: ЭР кафедрасының доценті Елеукулов Е.О.

«Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2017 ж. жоспары бойынша басылды

© «Алматы энергетика және байланыс университеті» КЕАҚ, 2017 ж.

Кіріспе

Математикалық статистиканың негізгі есеғптерінің бірі әртүрлі зерттеулердің нәтижелерін өңдеу әдістерін оқып үйрену болып табылады. Математикалық статистика ықтималдық теориясымен тығыз байланысқан. Екі пән де жаппай кездейсоқ құбылыстарды зерттейді. Ықтималдық теориясы математикалық статистика айналысатын кең ауқымдағы қолданбалы есептердің теориялық негізін қамтамасыз етеді.

Сондықтан әдістемелік нұсқаулықтар екі бөлімді есептік-графикалық жұмыстарынан тұрады. Біріншісінде ықтималдық теориясының, екіншісінде - математикалық статистиканың негізгі сұрақтары келтірілген.

Әрбір бөлімде теориялық сұрақтар мен мәліметтер келтірілген. Әрбір есептік-графикалық жұмыстардың типтік варианттың шешуі келтірілген.

Әр студенттің вариантының нөмірі топтың тізімі бойынша анықталады. Есептік-графикалық жұмыс оқушы дәптеріне анық орындалуы керек.

1 Есептік-сызба жұмыс №1. Кездейсоқ оқиғалар мен кездейсоқ шамалар

Мақсаты: кездейсоқ оқиғалар мен оның ықтималдығы туралы түсініктермен, ықтималдық теориясының негізгі теоремаларымен таныстыру. Үлестірім заңдарын және дискретті және үзіліссіз кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамаларын оқып-үйрену.

1.1 Теориялық сұрақтар

1. Ықтималдық теориясы пәні. Кездейсоқ оқиғалар. Элементар оқиғалар кеңістігі. Оқиғалар алгебрасы. Ықтималдықтың статистикалық, геометриялық және классикалық анықтамалары.

2. Ықтималдықтарды қосу және көбейту теоремалары. Шартты ықтималдық.

3. Толық ықтималдықтар формуласы. Байес формуласы. Бернулли формуласы.

4. Лапластың аймақтық және интегралдық теоремасы. Пуассона формуласы.

5. Дискретті және үзіліссіз кездейсоқ шамалар. Дискретті кездейсоқ шаманың үлестірім заңы.

6. Интегралдық үлестірім функциясы. Үлестірім тығыздығы.

7. Кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары. Дискретті және үзіліссіз кездейсоқ шамалардың математикалық үміті (күтімі), дисперсиясы және орта квадраттық ауытқуы.

8. Биномдық үлестірім, Пуассон үлестірімі. Бірқалыпты және көрсеткіштік, сенімділік функциясы.

9. Қалыпты үлестірім.

10. Шектік теоремалар туралы ұғым. Үлкен сандар заңы, орталық шектік теорема.

1.2 Есептік тапсырмалар

1. Лотереяда n билет бар, оның n_1-і 1000 тенге , n_2-і - 500 тенге, n_3-і - 100 тенге ұтысты ($\sum_i^3 n_i = n$).

Табу керек:

а) 1000 тенгелі ұтысты билеттің қатысты жиілігін;

б) m сатып алынған билеттердің барлығы 1000 тенгелі ұтысты болу ықтималдығын;

в) сатып алынған m билеттердің ішінде m_1-і 1000 тенгелі ұтысты болу ықтималдығын;

г) сатып алынған m билеттердің ішінде m_1-і 1000 тенгелі, m_2-і 500 тенгелі, m_3-і 100 тенгелі ($\sum_i^3 m_i = m$) ұтысты болу ықтималдығын.

д) сатып алынған m билеттердің ішінде ең болмағанда біреуі 1000 тенгелі ұтысты болу ықтималдығын.

№	n	n_1	n_2	n_3	m	m_1	m_2	m_3
1.1	100	41	29	30	10	5	3	2
1.2	90	29	21	40	12	6	4	2
1.3	85	25	35	25	7	2	2	3
1.4	80	18	42	20	5	1	2	2
1.5	95	43	27	25	9	3	4	2
1.6	70	22	28	20	9	2	4	3
1.7	80	30	21	29	7	3	1	1
1.8	90	42	20	28	6	1	3	2
1.9	75	24	26	25	8	2	4	2
1.10	100	37	33	30	10	2	3	5
1.11	90	26	34	30	8	3	2	3
1.12	80	31	29	20	5	1	2	2
1.13	95	29	31	35	8	3	2	3
1.14	96	34	26	36	7	4	1	2
1.15	89	25	35	29	5	1	2	2
1.16	70	20	26	24	5	2	1	2
1.17	75	40	20	15	8	4	1	3
1.18	85	35	30	20	5	2	1	2
1.19	90	20	40	30	7	2	2	3
1.20	87	30	45	12	8	3	2	3

1.21	100	25	55	20	15	8	3	4
1.22	90	40	24	26	9	4	3	2
1.23	95	28	42	25	10	3	5	2
1.24	85	30	15	40	7	2	2	3
1.25	90	17	33	40	6	1	3	2
1.26	85	31	25	29	5	2	2	1
1.27	75	28	32	15	5	1	2	2
1.28	100	30	41	29	9	3	4	2
1.29	80	32	28	20	7	3	2	2
1.30	85	24	26	35	5	1	3	1

2. Станок үш түйіннен тұрады. Олар бір бірінен тәуелсіз жұмыс істейді. Қандай да бір уақыт ішінде бірінші, екінші, үшінші түйіндердің мүлтіксіз жұмыс істеу ықтималдықтары сәйкес p_1, p_2, p_3-ке тең. Осы уақыт ішінде:

а) үш түйін де мүлтіксіз жұмыс істеу;

б) тек бір түйін істен шықпау;

в) екі түйін мүлтіксіз жұмыс істеп, біреуі істен шығу;

г) ең болмағанда біреуі істен шықпау ықтималдығын табу керек.

№	p_1	p_2	p_3	№	p_1	p_2	p_3	№	p_1	p_2	p_3
2.1	0.6	0.9	0.5	2.11	0.4	0.6	0.8	2.21	0.9	0.6	0.8
2.2	0.7	0.8	0.6	2.12	0.5	0.7	0.9	2.22	0.8	0.5	0.7
2.3	0.8	0.5	0.7	2.13	0.6	0.8	0.7	2.23	0.5	0.8	0.6
2.4	0.9	0.6	0.8	2.14	0.7	0.9	0.5	2.24	0.6	0.9	0.5
2.5	0.9	0.4	0.9	2.15	0.8	0.9	0.4	2.25	0.7	0.9	0.4
2.6	0.5	0.7	0.9	2.16	0.9	0.6	0.5	2.26	0.5	0.9	0.4
2.7	0.6	0.5	0.8	2.17	0.8	0.7	0.6	2.27	0.7	0.8	0.5
2.8	0.7	0.9	0.7	2.18	0.7	0.5	0.8	2.28	0.5	0.7	0.6
2.9	0.8	0.4	0.6	2.19	0.6	0.9	0.8	2.29	0.4	0.6	0.7
2.10	0.9	0.5	0.5	2.20	0.5	0.7	0.9	2.30	0.5	0.5	0.8

3. Бір атаулы құрылғылар үш зауытта: n_1-і бірінші, n_2-і екіншіде, n_3-і үшінші зауытта дайындалады ($\sum_i^3 n_i = 1000$). Бірінші зауыт m_1% сапасыз құрылғы дайындайды, екіншісі - m_2%, үшіншісі - m_3%.

Табу керек:

а) түсу ықтималдығын табу керек;

б) өндіріске сапасыз құрылғы түсті. Осы құрылғының i – ші зауыттан болу (i =1,2,3) ықтималдығын табу керек.

№	n_1	n_2	m_1	m_2	m_3	i	№	n_1	n_2	m_1	m_2	m_3	i
3.1	520	220	5	8	7	1	3.16	100	250	7	8	5	1
3.2	270	410	10	5	9	2	3.17	430	180	5	4	7	2
3.3	250	140	8	7	4	2	3.18	170	540	6	5	8	3
3.4	190	380	5	9	30	1	3.19	650	120	10	9	8	2
3.5	290	610	6	3	3	2	3.20	400	180	7	10	5	1
3.6	270	430	10	6	4	2	3.21	120	380	10	6	9	2
3.7	280	360	7	10	9	1	3.22	270	340	9	5	4	3
3.8	520	110	5	7	10	1	3.23	430	120	10	7	6	2
3.9	240	290	9	8	4	3	3.24	360	120	5	10	8	1
3.10	310	410	7	2	5	3	3.25	420	210	8	7	6	1
3.11	520	110	3	6	7	2	3.26	370	130	10	6	5	2
3.12	280	310	9	8	4	2	3.27	410	200	5	10	8	3
3.13	400	320	4	5	8	1	3.28	280	510	10	6	5	3
3.14	350	240	9	8	7	1	3.29	710	120	2	10	4	3
3.15	190	520	5	2	4	3	3.30	460	240	5	9	7	1

4. A оқиғасының пайда болу ықтималдығы p-ға тең. n сынақта A оқиғасының:

а) дәл k_1 рет;

б) k_1-ден кем емес;

в) k_2-ден артық емес;

г) ең болмағанда бір рет (жұп нұсқалар үшін, мұндағы n=10);

д) k_1 ден k_2 ге дейін (тақ нұсқалар үшін, мұндағы n=100)

болу ықтималдығын табу керек.

№	k_1	k_2	p	№	k_1	k_2	p	№	k_1	k_2	p
4.1	80	90	0.8	4.11	78	92	0.75	4.21	40	60	0.8
4.2	5	9	0.8	4.12	2	6	0.7	4.22	3	7	0.3
4.3	70	95	0.8	4.13	30	85	0.7	4.23	50	80	0.3
4.4	3	6	0.7	4.14	4	9	0.7	4.24	4	6	0.3
4.5	50	60	0.7	4.15	80	95	0.6	4.25	45	75	0.4
4.6	6	8	0.7	4.16	3	5	0.6	4.26	2	5	0.4
4.7	70	80	0.7	4.17	62	82	0.6	4.27	80	95	0.4
4.8	4	7	0.6	4.18	5	7	0.8	4.28	5	8	0.8
4.9	65	80	0.75	4.19	55	75	0.8	4.29	60	90	0.6
4.10	7	9	0.75	4.20	4	8	0.8	4.30	2	8	0.7

5. Дискретті кездейсоқ шама X үлестірім заңдылығымен берілген. Табу керек:

а) оның үлестірім функциясын $F(x)$, оның графигін салу керек;

б) математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын, модасын;

в) X –тің $(a;b)$ интервалына түсу ықтималдығын.

	X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a	b
	P	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6		
5.1	X	-2	-1	0	1	2	7	-3	5
	P	0.17	0.09	0.01	0.3	0.23	0.2		
5.2	X	1	2	3	5	6	7	0	4
	P	0.1	0.14	0.16	0.1	0.2	0.3		
5.3	X	-3	-1	0	3	5	6	-2	4
	P	0.16	0.09	0.01	0.3	0.24	0.2		
5.4	X	1	2	5	6	7	8	3	6
	P	0.2	0.15	0.15	0.1	0.3	0.1		
5.5	X	-1	0	2	4	7	8	1	5
	P	0.23	0.18	0.12	0.2	0.1	0.17		
6.6	X	1	2	4	5	6	8	0	7
	P	0.3	0.14	0.16	0.03	0.2	0.17		
5.7	X	-4	-3	-1	0	1	3	-2	2
	P	0.2	0.03	0.24	0.26	0.17	0.1		
5.8	X	1	2	3	4	7	9	0	8
	P	0.17	0.23	0.09	0.11	0.12	0.28		
5.9	X	0	1	3	5	7	8	2	6
	P	0.2	0.14	0.16	0.12	0.3	0.08		
5.10	X	-5	-3	-2	0	1	3	-4	2
	P	0.2	0.06	0.21	0.29	0.14	0.1		
5.11	X	1	2	3	5	8	9	4	7
	P	0.18	0.22	0.05	0.15	0.12	0.28		
5.12	X	1	3	4	5	7	8	2	6
	P	0.3	0.16	0.14	0.01	0.2	0.19		
5.13	X	-5	-3	-1	0	1	3	-4	2
	P	0.1	0.03	0.14	0.36	0.17	0.2		
5.14	X	0	2	3	4	6	8	1	7
	P	0.26	0.14	0.05	0.15	0.12	0.28		
5.15	X	-1	0	2	3	7	8	1	6
	P	0.21	0.16	0.14	0.1	0.2	0.19		
5.16	X	0	1	2	4	6	9	-2	7
	P	0.05	0.15	0.3	0.25	0.15	0.1		
5.17	X	-3	-2	-1	0	2	4	-1	3
	P	0.15	0.3	0.02	0.14	0.18	0.21		
5.18	X	1	2	3	5	7	8	-3	6
	P	0.3	0.14	0.16	0.1	0.2	0.1		

5.19	X	-4	-3	-2	0	1	2	0	1
	P	0.2	0.08	0.23	0.27	0.12	0.1		
5.20	X	1	2	4	5	7	9	3	8
	P	0.19	0.21	0.06	0.14	0.12	0.28		
5.21	X	-1	0	2	3	5	7	-4	4
	P	0.26	0.14	0.07	0.2	0.03	0.3		
5.22	X	-2	-1	0	3	5	7	1	6
	P	0.18	0.09	0.01	0.2	0.22	0.3		
5.23	X	1	2	4	5	6	8	0	6
	P	0.3	0.17	0.13	0.1	0.2	0.1		
5.24	X	1	2	3	4	7	9	5	8
	P	0.11	0.29	0.06	0.14	0.17	0.23		
5.25	X	0	1	2	3	7	9	4	8
	P	0.06	0.14	0.3	0.25	0.15	0.1		
5.26	X	-3	-2	0	1	2	4	-1	3
	P	0.15	0.3	0.01	0.14	0.19	0.21		
5.27	X	-1	0	3	5	7	8	1	6
	P	0.25	0.14	0.16	0.1	0.2	0.15		
5.28	X	-4	-3	-2	0	2	4	-1	3
	P	0.2	0.07	0.24	0.26	0.13	0.1		
5.29	X	-3	-1	0	3	4	7	-2	6
	P	0.12	0.09	0.01	0.2	0.28	0.3		
5.30	X	-1	0	1	3	7	8	2	6
	P	0.26	0.14	0.15	0.2	0.1	0.15		

6. Үзіліссіз кездейсоқ шама X үлестірім тығыздығы мен $f(x)$ берілген. Табу керек:

а) оның үлестірім функциясын $F(x)$;

б) математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын, модасын, медианасын;

в) X –тің $(a;b)$ интервалына түсу ықтималдығы табу керек.

$F(x)$ және $f(x)$ графиктерін салу керек.

№	$f(x)$	a	b	№	$f(x)$	a	b
6.1	$\begin{cases} 0, & x \le 0, x > 3 \\ \frac{2}{3}\left(1-\frac{x}{3}\right), & 0 < x \le 3 \end{cases}$	-1	2	6.16			
6.2	$\begin{cases} 0, & x \le 0, x > \frac{\pi}{6} \\ 4\sin 2x, & 0 < x \le \frac{\pi}{6} \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{12}$	6.17			

6.3	$\begin{cases} 0, x \le 1, x > 2 \\ \frac{2}{x^2}, 1 < x \le 2 \end{cases}$	0	1,5	6.18			
6.4	$\begin{cases} 0, \ x \le 2, x > 3 \\ \frac{2x}{5}, \ 2 < x \le 3 \end{cases}$	1	2,5	6.19			
6.5	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{6}{\pi(1+x^2)}, 0 < x \le \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$	0,1	1	6.20			
6.6	$\begin{cases} 0, \ x \le -1, x > 2 \\ \frac{1}{9}(x+1)^2, \ -1 < x \le 2 \end{cases}$	0	1	6.21			
6.7	$\begin{cases} 0, x \le 0, x \ge \frac{1}{2} \\ \frac{6}{\pi\sqrt{1-x^2}}, 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$	$\frac{1}{4}$	1	6.22			
6.8	$\begin{cases} 0, x \le 3, x > 5 \\ \frac{7,5}{x^2}, 3 < x \le 5 \end{cases}$	2	4	6.23			
6.9	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{\pi}{6} \\ 6\sin 3x, 0 < x \le \frac{\pi}{6} \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{12}$	6.24			
6.10	$\begin{cases} 0, x \le 1, x > 2 \\ 2x - 2, 1 < x \le 2 \end{cases}$	0	1,5	6.25			
6.11	$\begin{cases} 0, x \le -2, x > 2 \\ \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}, -2 < x \le 2 \end{cases}$	0	1	6.26			
6.12	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 5 \\ \frac{2}{5}(1-\frac{x}{5}), 0 < x \le 5 \end{cases}$	1	4	6.27			
6.13	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{\pi}{6} \\ 3\cos 3x, 0 < x \le \frac{\pi}{6} \end{cases}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{9}$	6.28			
6.14	$\begin{cases} 0, x \le -3, x > 3 \\ \frac{1}{2\pi}\sqrt{9-x^2}, -3 < x \le 3 \end{cases}$	0	2	6.29			
6.15	$\begin{cases} 0, x \le 1, x > 4 \\ \frac{2x}{15}, 1 < x \le 4 \end{cases}$	2	3	6.30			

7. Тұтынушылардың талабын зерттеу кезінде N азық-түлік дүкендері тексерілді. Қандай да бір тауардың осы дүкенде болмауы бірдей және m%-ды құрайды. Осы тауар жоқ дүкен санының үлестірім заңын құру керек (X кездейсоқ шамасы). Осы кездейсоқ шаманың математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын табу керек.

№	N	m	№	N	m	№	N	m
7.1	5	20	7.11	2	21	7.21	2	10
7.2	3	19	7.12	4	22	7.22	4	15
7.3	2	23	7.13	5	24	7.23	5	17
7.4	4	11	7.14	3	18	7.24	3	12
7.5	5	28	7.15	2	22	7.25	2	15
7.6	3	11	7.16	3	10	7.26	4	15
7.7	2	16	7.17	2	12	7.27	5	13
7.8	4	29	7.18	4	20	7.28	3	14
7.9	5	10	7.19	5	25	7.29	2	20
7.10	3	17	7.20	3	30	7.30	4	27

8. Тоқымашы N ұршық иіреді. Бір минут ішінде бір ұршықта жіптің үзілу ықтималдығы p-ға тең.

Табу керек:

а) жібі үзілген ұршықтар саны бойынша үлестірім заңын;

б) m ұршықтан кем емес ұршықта жіптің үзілу ықтималдығын табу керек.

№	N	m	p	№	N	m	p	№	N	m	p
8.1	1500	3	0,002	8.11	2000	5	0,002	8.21	5000	2	0,001
8.2	2000	4	0,001	8.12	1000	6	0,005	8.22	2000	4	0,001
8.3	1000	5	0,007	8.13	6500	8	0,007	8.23	1500	5	0,008
8.4	3500	1	0,002	8.14	7000	6	0,002	8.24	3500	7	0,004
8.5	2000	5	0,001	8.15	5500	9	0,004	8.25	2000	2	0,003
8.6	1000	6	0,005	8.16	1500	3	0,002	8.26	1500	6	0,005
8.7	4500	2	0,003	8.17	2000	4	0,001	8.27	4000	2	0,006
8.8	2000	4	0,001	8.18	1000	5	0,007	8.28	8000	2	0,001
8.9	1000	5	0,007	8.19	3500	1	0,002	8.29	6500	6	0,002
8.10	3000	7	0,004	8.20	2000	5	0,001	8.30	3000	2	0,005

9. Қайбір маршруттың автобустары кесте бойынша ғана жүреді. Жүру интервалы a минут. X кездейсоқ шамасы –автобусты күту уақыты.

Табу керек:

а) оның үлестірім тығыздығын $f(x)$;

б) үлестірім функциясын $F(x)$;

в) математикалық үмітін, дисперсиясын;

г) аялдамаға келген жолаушы трамвайды m минуттен кем (артық) күту ықтималдығын.

$F(x)$ және $f(x)$ графиктерін салу керек.

№	a	m	№	a	m	№	a	m
9.1	5	3	9.11	18	9	9.21	22	8
9.2	10	4	9.12	24	8	9.22	17	6
9.3	15	5	9.13	6	3	9.23	18	5
9.4	6	2	9.14	12	6	9.24	21	11
9.5	20	10	9.15	16	8	9.25	23	12
9.6	19	8	9.16	7	2	9.26	26	15
9.7	20	5	9.17	11	4	9.27	12	4
9.8	25	5	9.18	13	5	9.28	18	7
9.9	9	3	9.19	25	10	9.29	9	2
9.10	14	7	9.20	8	3	9.30	7	3

10. Радиолокатордың нысананы табу уақыты (T кездейсоқ шамасы) λ параметрімен көрсеткішті үлестірілген.

Табу керек:

а) $f(t)$ үлестірім тығыздығын;

б) $F(t)$ үлестірім функциясын, оның ықтималдық мағынасын көрсету керек;

в) сенімділік функциясын $R(t)$, оның ықтималдық мағынасын көрсету керек;

г) математикалық үмітін, дисперсиясын;

д) t уақыт ішінде нысана табылу ықтималдығын және t уақыт ішінде табылмау ықтималдығын.

$F(t)$, $R(t)$ және $f(t)$ графиктерін салу керек.

№	λ	t	№	λ	t	№	λ	t
10.1	8	3	10.11	9	10	10.21	7	3
10.2	9	2	10.12	10	6	10.22	8	2
10.3	10	1	10.13	1	7	10.23	9	1
10.4	1	10	10.14	2	8	10.24	10	7
10.5	2	6	10.15	3	2	10.25	1	9
10.6	3	8	10.16	1	5	10.26	2	5
10.7	4	4	10.17	2	10	10.27	3	10
10.8	6	3	10.18	3	6	10.28	4	6
10.9	7	2	10.19	4	8	10.29	6	8
10.10	8	1	10.20	6	4	10.30	7	4

11. Өлшеудің кездейсоқ қатесі (X кездейсоқ шамасы) a және σ параметрлі қалыпты үлестірім заңына бағынады.

Табу керек:

а) $f(x)$ үлестірім тығыздығын;

б) $F(x)$ үлестірім функциясын;

в) математикалық үмітін, дисперсиясын;

г) $(\alpha;\beta)$ аралығына түсу ықтималдығын;

д) өлшеу абсолют шамасы бойынша δ-дан аспайтындай қате жіберу ықтималдығын.

$F(t)$ және $f(t)$ графиктерін салу керек.

№	a	σ	α	β	δ	№	a	σ	α	β	δ
11.1	10	2	9	14	2	11.16	10	1	8	14	2
11.2	12	4	5	14	3	11.17	12	2	7	14	3
11.3	14	1	9	15	5	11.18	14	3	10	15	5
11.4	11	6	8	12	3	11.19	11	5	9	12	3
11.5	13	4	6	17	2	11.20	13	2	6	13	2
11.6	12	9	8	15	4	11.21	12	3	7	15	4
11.7	10	3	6	17	2	11.22	10	2	8	17	2
11.8	12	5	6	13	6	11.23	12	4	6	14	6
11.9	14	2	12	19	5	11.24	14	6	11	19	5
11.10	15	3	4	12	3	11.25	15	5	8	12	3
11.11	17	1	5	14	2	11.26	17	4	6	14	2
11.12	12	4	9	18	4	11.27	12	5	7	18	4
11.13	11	3	4	12	3	11.28	18	5	6	12	3
11.14	17	2	5	19	5	11.29	10	4	6	15	2
11.15	13	5	6	18	3	11.30	12	3	5	18	4

1.3 Типтік варианттың шешуі

1. Лотереяда 120 билет бар, оның 40-ы 1000 тенге , 50-і - 500 тенге, 30-ы - 100 тенге ұтысты.

Табу керек:

а) 1000 тенгелі ұтысты билеттің қатысты жиілігін;

б) 20 сатып алынған билеттердің барлығы 1000 тенгелі ұтысты болу ықтималдығын;

в) сатып алынған 20 билеттердің ішінде 9-ы 1000 тенгелі ұтысты болу ықтималдығын;

г) сатып алынған 20 билеттердің ішінде 9-ы 1000 тенгелі, алтауы 500 тенгелі, бесеуі 100 тенгелі ұтысты болу ықтималдығын.

д) сатып алынған 20 билеттердің ішінде ең болмағанда біреуі 1000 тенгелі ұтысты болу ықтималдығын.

Шешуі:

а) А оқиғасының қатысты жиілігі деп (белгіленуі $P^*(A)$) А оқиғасы пайда болған сынақ санының m барлық сынақтың жалпы санына n қатынасы айтылады: $P^*(A) = m/ n$.

А – 1000 тенгелі ұтысты билетті таңдау оқиғасы болсын, сонда $P^*(A) = 40/ 120=1/3$.

Қалған пункттерде А оқиғасының ықтималдығының классикалық анықтамасын қолданамыз: $P(A) = m/ n$, мұндағы m –А оқиғасының пайда болуына қолайлы сынақтар саны, n – сынақтардың жалпы саны;

б) А – сатып алынған 20 билеттің барлығы да 1000 тенгелі ұтысты болу оқиғасы болсын. Элементар оқиғалардың жалпы саны 120 билеттің ішінен 20 билетті таңдап алудың әртүрлі жолдар саны, яғни $n = C_{120}^{20}$; қолайлы оқиғалар саны 40 билеттің ішінен 1000 тенгелі ұтысты 20 билет алудың әртүрлі жолдар санына тең, яғни $m = C_{40}^{20}$. Сонымен,

$$P(A) = m/ n = C_{40}^{20}/ C_{120}^{20} = 4{,}679\times 10^{-12};$$

в) А – кез келген ретпен алынған 20 билеттің тоғызы 1000 тенгелі ұтысты болу оқиғасы болсын. Жоғарыда айтылғандай, $n = C_{120}^{20}$.

A элементар оқиғасының *m* қолайлы сынақтар санын комбинатористиканың ережелерінің бірін қолдану арқылы табамыз: *n* элементті жиында *s* ішкі жиын бар болсын. Ішкі жиындар сәйкес $n_1, n_2,...,n_s$ элементтерден тұрады ($\sum_1^s n_i = n$). Осы жиыннан таңдау жүргізілсін делік: n_1 -ден m_1 элемент, n_2 -ден m_2 элемент,…, n_s -тен m_s элемент таңдап алынсын. Онда *N* жалпы саны $m_1, m_2,...,m_s$ элементтерден тұратын *s* группасын құру әдістер саны болады $N = C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \ldots C_{n_s}^{m_s}$, бұл жағдайда элементтердің реті ескерілмеген.

Сонымен бұл пункте $m = C_{40}^{9}\cdot C_{80}^{11}$, мұндағы C_{40}^{9} теруі 1000 теңгелі ұтысты 40 билеттің ішінен 1000 теңгелі ұтысты 9 билетті таңдап алу санын береді, ал C_{80}^{11} теруі 1000 теңгелі ұтысты 80 қалған билеттің ішінен 1000 теңгелі ұтысты 11 қалған билетті таңдап алу санын береді, яғни $m = C_{40}^{9}\cdot C_{80}^{11}$. Сонымен,

$$P(A) = m/ n = C_{40}^{9}\cdot C_{80}^{11} / C_{120}^{20} = 0{,}097;$$

г) *A* - кез келген ретпен алынған 20 билеттің тоғызы 1000 теңгелі ұтысты, алтауы 500 теңгелі, бесеуі 100 теңгелі ұтысты болу оқиғасы болсын. Бұл есепті шешу үшін *A* оқиғасының ықтималдығының классикалық анықтамасын қолданамыз: $P(A) = m/ n$, мұндағы *n* қолда бар 120 билеттің арасынан 20 билетті таңдап алудың мүмкін әдістерінің саны, яғни $n = C_{120}^{20}$. *A* оқиғасының пайда болуына қолайлы элементар оқиғалар саны жоғарыда келтірілген комбинаторика ережесі бойынша табылады, яғни $m = C_{40}^{9}\cdot C_{50}^{4}\cdot C_{30}^{5}$. Сондықтан $P(A) = m/ n = 0{,}021$;

д) A - сатып алынған 20 билеттердің ішінде ең болмағанда біреуі 1000 теңгелі ұтысты болу оқиғасы болсын, онда оған қарама-қарсы $\overline{A}$ - сатып алынған 20 билеттердің ішінде ешқайсысы 1000 теңгелі ұтысты болмау оқиғасы. б) пунктіндегі сияқты бұл оқиғаның ықтималдығын келесі формуламен табамыз $P(\overline{A}) = m/n = C_{80}^{20} / C_{120}^{20} = 1{,}2\times10^{-4}$. Онда A оқиғасының ықтималдығы $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 1{,}2\times10^{-4} \approx 1$, яғни бұл оқиға ақиқат оқиғаға жуық оқиға.

Теру санын есептегенде Mathcad-та combin функциясы қолданылды. Төменде combin(Q,R) қолданушының C(Q,R) функциясы ретінде енгізілген файлдың көшірмесі келтірілген, ол Q мен R-дің кез келген мәндерінде

$C(Q,R) := combin(Q,R)$, $C(80,11) = 1.048 \times 10^{13}$,

$C(40,9) = 2.734 \times 10^{8}$ $C(40,20) = 1.378 \times 10^{11}$

$C(120,20) = 2.946 \times 10^{22}$

$\frac{C(80,20)}{C(120,20)} = 1.2 \times 10^{-4}$ $\frac{C(40,9)\cdot C(80,11)}{C(120,20)} = 0.097$

$$\frac{C(40,9)\cdot C(50,6)\cdot C(30,5)}{C(120,20)} = 0.021$$

2. Станок үш түйіннен тұрады. Олар бір бірінен тәуелсіз жұмыс істейді. Қандай да бір уақыт ішінде бірінші, екінші, үшінші түйіндердің мүлтіксіз жұмыс істеу ықтималдықтары сәйкес 0,75; 0,8; 0,9-ға тең. Осы уақыт ішінде:

а) үш түйін де мүлтіксіз жұмыс істеу;

б) тек бір түйін істен шықпау;

в) екі түйін мүлтіксіз жұмыс істеп, біреуі істен шығу;

г) ең болмағанда біреуі істен шықпау ықтималдығын табу керек.

Шешуі: келесі оқиғалар енгіземіз: A_1 – бірінші түйіннің мүлтіксіз жұмыс істеуі, A_2 – екінші, A_3 – үшінші. Шарт бойынша $P(A_1)$=0,75, $P(A_2)$=0,8, $P(A_3)$=0,9.

а) A – үш түйін де мүлтіксіз жұмыс істеу оқиғасы болсын, сонда $A = A_1A_2A_3$ және A_1, A_2, A_3 тәуелсіз оқиғалар болғандықтан, $P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0{,}75\cdot0{,}8\cdot0{,}9 = 0{,}54$;

б) B – тек бір түйін істен шықпау оқиғасы болсын, сонда $B = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$, мұндағы $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ - A_1, A_2, A_3 оқиғаларына қарама-қарсы оқиғалар, яғни сәйкес бірінші, екінші, үшінші атқыштардың тимеуі. $P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$, $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, $P(\overline{A}_3) = 1 - P(A_3) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$. Қосылғыштар тәуелсіз оқиғалар болғандықтан,

$P(B) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = 0{,}75\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1 + 0{,}25\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1 + 0{,}25\cdot 0{,}2\cdot 0{,}9 =$ 0,08;

в) C - екі түйін мүлтіксіз жұмыс істеп, біреуі істен шығу оқиғасы болсын, яғни біреуі нысынаға тимейді, $C = A_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3$. Оның ықтималдығы да алдыңғы пункттегідей есептелінеді:

$$P(C) = 0{,}75\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1 + 0{,}25\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9 + 0{,}75\cdot 0{,}2\cdot 0{,}9 = 0{,}3456;$$

г) D - ең болмағанда біреуі істен шықпау оқиғасы болсын. Қарама-қарсы оқиғаны қарастырамыз: $\overline{D}$ - үшеуі де нысынаға тимеді. $\overline{D} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ болғандықтан, $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = 1 - 0{,}25\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1 = 0{,}995.$

3. Жинақтау бөліміне үш зауыттан тетіктер келіп түседі: n_1=100 бірінші зауыттан, n_2 = 300 екіншіден, n_3 = 1000 - $n_1 - n_2$= 600 үшіншіден ($\sum_{i}^{3} n_i = 1000$). Бірінші зауыт 5% сапасыз тетік шығарады, екіншісі - 4%, үшіншісі - 6%.

а) жинақтау бөліміне сапасыз тетіктер түсу ықтималдығын табу керек;

б) жинақтау бөліміне сапасыз тетік түсті. Осы тетіктің 2 – ші зауыттан болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі: А – сапасыз тетік сатып алынған оқиғасы болсын, ал B_1, B_2, B_3 – тетік сәйкес бірінші, екінші, үшінші зауыттан келіп түскен оқиғалары болсын (бұл оқиғалар гипотезалар деп аталады).

а) А оқиғасының ықтималдығы толық ықтималдықтар формуласымен есептелінеді:

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3),$$

мұндағы $P(A/B_i)$ – сатып алынған тетік і– ші зауыттан келіп түскен оқиғасының шартты ықтималдығы (i=1,2,3).

Есептің шарты бойынша:

$P(B_1) = 100/1000 = 0{,}1$; $P(B_2) = 300/1000 = 0{,}3$; $P(B_3) = 600/1000 = 0{,}6$;

$P(A/B_1)=0{,}05$; $P(A/B_2)=0{,}04$; $P(A/B_3)=0{,}06$.

Сондықтан $P(A) = 0.1\cdot 0.05 + 0{,}3\cdot 0{,}04 + 0{,}6\cdot 0{,}06 = 0{,}053;$

б) бұл пунктте $P(B_2/A)$ шартты ықтималдығын табу керек. Ол үшін Байеса формуласын қолданамыз:

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A/B_k)},\ i = 1,2,\ldots,n,$$

біздің есеп үшін ол былай жазылынады

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2)P(A/B_2)}{P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+P(B_3)P(A/B_3)} = \frac{0{,}3\cdot 0{,}04}{0{,}053} = 0{,}226.$$

4. A оқиғасының пайда болу ықтималдығы 0,8-ге тең. n сынақта A оқиғасының:

а) дәл k_1 рет (A оқиғасы);

б) k_1-ден кем емес (B оқиғасы);

в) k_2-ден артық емес (C оқиғасы);

г) ең болмағанда бір рет (жұп нұсқалар үшін, мұндағы n=10) (D оқиғасы);

д) k_1 ден k_2 ге дейін (тақ нұсқалар үшін, мұндағы n=100) болу ықтималдығын табу керек (E оқиғасы).

Шешуі: бұл есепте қандай да бір оқиғаның n тәуелсіз оқиғалар арасынын k рет пайда болу ықтималдығын табу керек, ол $P_n(k)$ деп белгіленеді. Есептің шартына байланысты оның шешімін әртүрлі жолмен қарастырады:

1) n =10, k_1=9, k_2=2 болсын (тақ нұсқалар үшін). Бұл жерде n үлкен емес, сондықтан А оқиғасының ықтималдығын анықтау үшін Бернулли формуласын қолданамыз: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, мұндағы $q = 1 - p$, $(k = 0,1,2,..n)$.

B және C оқиғаларының ықтималдығы ықтималдықтардың қосындысы ретінде анықталады: $P_n(k) + P_n(k+1) + ... + P_n(n)$ – бұл n тәуелсіз оқиғалар арасынын k реттен кем емес пайда болу оқиғаларының ықтималдығы, яғни немесе k рет, немесе $k+1$ рет,…, немесе n рет; $P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(k)$– бұл n тәуелсіз оқиғалар арасынын k реттен артық емес пайда болу оқиғаларының ықтималдығы, яғни немесе 0 рет, немесе 1 рет, немесе 2 рет,…, немесе k рет. Бұл оқиғалар комулятивті (жинақталған) деп аталады. Сонымен,

а) $P(A) = P_{10}(8) = C_{10}^8 \cdot 0{,}08^8 \cdot 0{,}92^2 = 6{,}39 \times 10^{-8}$;

б) $P(B) = P_{10}(9) + P_{10}(10) = 1{,}246 \times 10^{-9}$;

в) $P(C) = P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2) = 0{,}96$;

г) қарама қарсы $\overline{D}$ оқиғасын енгіземіз – бұл 10 тәуелсіз сынықтарда D оқиғасының мүлдем пайда болмауы. Онда

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - P_{10}(0) \approx 0{,}566.$$

Төменде Mathcad-тан есептеулермен файлдың көшірмесі келтірілген.

$C(Q,R) := \text{combin}(Q,R)$

$C(10,9) \cdot 0.8^9 \cdot 0.2^1 = 0.268$

$C(10,9) \cdot 0.08^9 \cdot 0.92^1 + C(10,10) \cdot 0.08^{10} \cdot 0.92^0 = 1.246 \times 10^{-9}$

$C(10,0) \cdot 0.08^0 \cdot 0.92^{10} + C(10,1) \cdot 0.08^1 \cdot 0.92^9 + C(10,2) \cdot 0.08^2 \cdot 0.92^8 = 0.96$

$1 - C(10,0) \cdot 0.08^0 \cdot 0.92^{10} = 0.566$

2) n =100, k_1=70, k_2=80 болсын (жұп нұсқалар үшін). тәуелсіз тәжірибелер саны n үлкен болғандықтан, қандай да бір оқиғаның n тәжірибеде k рет пайда болу ықтималдығы $P_n(k)$ Муавр-Лаплас аймақтық

теоремасымен есептелінеді және жуық шамамен $P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$ тең, мұндағы $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $0 < p < 1$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2)$ (осы функцияның мәнін кестеден немесе Mathcad жүйесіндегі dnorm функциясы арқылы табады).

B, *C* және *D* оқиғаларының ықтималдығын анықтау үшін Муавр-Лаплас интегралдық теоремасын қолданады: қандай да бір оқиғаның пайда болу *k* саны k_1-ден k_2-ге дейінгі аралығында болу ықтималдығы $P_n(k_1, k_2)$ жуық шамамен $P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ тең, мұндағы $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \exp(-t^2/2)dt$ - Лаплас функциясы, оның мәні арнайы кестеден немесе Mathcad жүйесіндегі pnorm функциясы арқылы.

а) $P(A) = P_{100}(80) \cong \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\varphi(2{,}5) = 0{,}018/4 = 0{,}0045$; $x = \frac{70 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -2{,}5$;

б) $P(B) = P_{100}(k \geq 80) = P_{100}(80{,}100) \approx \Phi(x_3) - \Phi(x_2) = 0{,}5$; $x_3 = 5$;

в) $P(C) = P_{100}(k \leq 70) = P_{100}(0{,}70) \approx \Phi(x_1) - \Phi(x_4) = 0{,}006$; $x_4 = -20$;

д) $P(E) = P_{100}(70{,}80) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0{,}494$, $x_2 = 0$, $x_1 = -2{,}5$.

Mathcad жүйесіндегі есептелінген есептеулер көрсетілген.

$n := 100$ $k1 := 70$ $k2 := 80$

$p := 0.8$ $q := 1 - p$

$x1 := \frac{k1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$ $x2 := \frac{k2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$ $x3 := \frac{n - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$ $x4 := \frac{0 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$

$x1 = -2.5$ $x2 = 0$

$pnorm(x2, 0, 1) - pnorm(x1, 0, 1) = 0.494$, $dnorm(x1, 0, 1) = 0.018$

$pnorm(x3, 0, 1) - pnorm(x2, 0, 1) = 0.5$

$pnorm(x1, 0, 1) - pnorm(x4, 0, 1) = 6.21 \times 10^{-3}$

немесе басқа нұсқа

$\Phi(x) := pnorm(x, 0, 1) - 0.5$

$P(k1, k2) := \Phi(x2) - \Phi(x1)$

$\Phi(x1) = -0.494$ $\Phi(x2) = 0$

$P(k1, k2) = 0.494$ $x3 = 5$ $x4 = -20$

$\Phi(x3) = 0.5$ $\Phi(x4) = -0.5$

$\Phi(x3) - \Phi(x2) = 0.5$ $\Phi(x1) - \Phi(x4) = 6.21 \times 10^{-3}$

3) $P_n(k)$ ықтималдығын есептейтін тағы бір формула бар, ол n үлкен шама, p кіші шама, ал көбейтіндісі $\lambda = n \cdot p$ үлкен емес сан болғанда қолданылады. Ол Пуассон формуласы $P_n(k) \approx \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k!$.

n=1000, k=6, p=0,003, $\lambda = 1000 \cdot 0{,}003 = 3$ болсын. Сондықтан $P_{1000}(6) = 3^6 \cdot e^{-3} / 6!$=0,05.

Есептеулер кезінде $p(k, \lambda) = \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k!$ функциясының кестелік мәнін немесе Mathcad-тан dpois функциясын қолдануға болады. Төменде Mathcad-тан есетеулермен файлдың көшірмесі келтірілген.

$p(k, \lambda) := dpois(k, \lambda)$ $\quad$ $p(6, 3) = 0.05$

5. Дискретті кездейсоқ шама X үлестірім заңдылығымен берілген.

X	0	10	20	30	40	50
P	0,05	0,15	0,3	0,25	0,2	0,05

Табу керек:

а) оның үлестірім функциясын $F(x)$, оның графигін салу керек;

б) математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын, модасын;

в) X –тің (15;45) интервалына түсу ықтималдығын табу керек.

Шешуі:

а) X кездейсоқ шамасының $F(x)$ үлестірім функциясы (интегралдық үлестірім функциясы) $X<x$ оқиғасының ықтималдығын анықтайды. Дискретті кездейсоқ шамасы $F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$ формуласымен есептелінеді, мұндағы $x_i < x$ үшін қосу барлық i бойынша жүргізіледі.

Сонымен,

1) Егер $x \le 0$, онда $F(x) = P(X < 0) = 0$.

2) Егер $0 < x \le 10$, онда $F(x) = P(X = 0) = 0{,}05$.

3) Егер $10 < x \le 20$, онда $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) = 0{,}05 + 0{,}15 = 0{,}2$.

4) Егер $20 < x \le 30$, онда $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) =$
$= 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$.

5) Егер $30 < x \le 40$, онда $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30) =$
$= 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75$.

6) Егер $40 < x \le 50$, онда $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30) +$
$+ P(X = 40) = 0{,}75 + 0{,}2 = 0{,}95$.

7) Егер $x > 50$, онда $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30) +$
$+ P(X = 40) + P(X = 50) = 0{,}95 + 0{,}05 = 1$.

Сонымен, $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ егер } x\le 0 \\ 0,05, \text{ егер } 0<x\le 10 \\ 0,2, \text{ егер } 10<x\le 20 \\ 0,5, \text{ егер } 20<x\le 30 \\ 0,75, \text{ егер } 30<x\le 40 \\ 0,95, \text{ егер } 40<x\le 50 \\ 1, \text{ егер } x>50 \end{cases}$.

График Mathcad жүйесінде сызылған (төменде);

б) сандық сипаттамаларын табайық. Дискретті кездейсоқ шама үшін математикалық үміт кездейсоқ шаманың барлық мүмкін мәндерін оның ықтималдықтарына көбейтіп қосқанға тең: $M(X)=\sum_i x_i p_i$. Сондықтан

$$M(X)=0\cdot 0{,}15+10\cdot 0{,}15+20\cdot 0{,}3+30\cdot 0{,}25+40\cdot 0{,}2+50\cdot 0{,}05=25{,}5.$$

X кездейсоқ шаманың дисперсиясы $D(X)=M[X-M(X)]^2$ формуласымен немесе $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$ формуласымен есептелінеді. Дискретті кездейсоқ шама үшін бұл формулалар мына түрде қолданылады: $D(X)=\sum_i (x_i-M(X))^2\cdot p_i$ немесе $D(X)=\sum_i x_i{}^2 p_i-(\sum_i x_i p_i)^2$.

Орта квадраттық ауытқу $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}$ санына тең; дискретті кездейсоқ шаманың модасы (белгіленуі M_0) – осы кездейсоқ шаманың ең үлкен ықтималдықты қабылдайтын мәні; X –тің (a;b) интервалына түсу ықтималдығы $P(a;b)=F(b)-F(a)$ формуласымен есептелінеді. Біздің есеп үшін бұл шамалар:

D(x)=154,75; $\sigma(x)=\sqrt{154{,}75}=12{,}44$; M_0=20;

$P(15;45)=F(45)-F(15)$=0,75.

Төменде Mathcad-тан есептеулермен файлдың көшірмесі келтірілген, дисперсия екі формуламен де есептелінген.

ORIGIN= 1

s := (0 10 20 30 40 50)

p := (0.05 0.15 0.3 0.25 0.2 0.05)

M := $s^T \cdot p^T$

$M = 25.5$

$s0 := s^T - M$

$$s0 = \begin{pmatrix} -25.5 \\ -15.5 \\ -5.5 \\ 4.5 \\ 14.5 \\ 24.5 \end{pmatrix}$$

$D := \left[\overrightarrow{(s0 \cdot s0)}\right]^T \cdot p^T$

$D = 154.75$

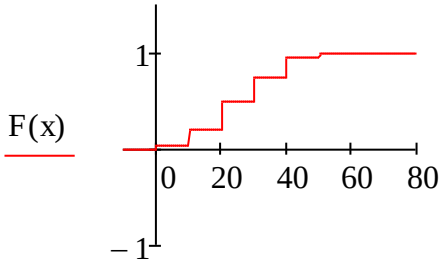
$s2 := \left(0^2 \quad 10^2 \quad 20^2 \quad 30^2 \quad 40^2 \quad 50^2\right)$

$D1 := s2^T \cdot p^T - M^2$

$D1 = 154.75$

$\sigma := \sqrt{D} = 12.44$

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \le 0 \\ 0.05 & \text{if } 0 < x \le 10 \\ 0.2 & \text{if } 10 < x \le 20 \\ 0.5 & \text{if } 20 < x \le 30 \\ 0.75 & \text{if } 30 < x \le 40 \\ 0.95 & \text{if } 40 < x \le 50 \\ 1 & \text{if } x > 50 \end{cases}$$



$F(45) - F(15) = 0.75$

6. Үзіліссіз кездейсоқ шама X үлестірім тығыздығымен $f(x)$ берілген.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \le 0 \\ \frac{2}{9}(3x - x^2), & \text{егер } 0 < x \le 3 \\ 0, & \text{егер } x > 3 \end{cases}.$$

Табу керек:

а) оның үлестірім функциясын $F(x)$;

б) математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын, модасын, медианасын;

в) X –тің (1; 4) интервалына түсу ықтималдығы табу керек.

$F(x)$ және $f(x)$ графиктерін салу керек.

Шешуі:

а) үлестірім функциясын келесі формула бойынша табамыз $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Сонымен,

- егер $x \le 0$, онда $f(x) = 0$, Сондықтан $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx = 0$;

- егер $0 < x \le 3$, онда $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{x} \frac{2}{9}(3x - x^2)dx = - \frac{x^2(2x-9)}{27}$;

- егер $x > 3$, онда $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{3} \frac{2}{9}(3x - x^2)dx + \int_{3}^{x} 0\,dx = 1$.

Сонымен, ізделінді үлестірім функциясы

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ егер } x \le 0 \\ -\frac{x^2(2x-9)}{27}, \text{ егер } 0 < x \le 3; \\ 1, \text{ егер } x > 3 \end{cases}$$

б) үзіліссіз кездейсоқ шаманың сандық сипаттамалары мына формулалармен табылады: математикалық үміт $M(x) = \int_{-\infty(a)}^{\infty(b)} xf(x)dx$; дисперсия $D(x) = \int_{-\infty(a)}^{\infty(b)} (x - M(x))^2 f(x)dx$ немесе $D(x) = \int_{-\infty(a)}^{\infty(b)} x^2 f(x)dx - [M(x)]^2$ (интегралдау шектері кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері Ox осінің барлық немесе $(a;b)$ интервалының мәндерін қабылдауына байланысты); орта квадраттық ауытқуы $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$; X кездейсоқ шаманың модасы деп үлестірім тығыздығы максималды болатын M_o мәні айтылады; X кездейсоқ шаманың медианасы деп кездейсоқ шама M_e-ден кем немесе артық болғанда ықтималдығы бірдей болатын M_e мәні айтылады, яғни $P(X < M_e) = P(X > M_e) = 0{,}5$.

Сонымен, біздің есепте $M(x) = \int_{0}^{3} 2/9x(3x - x^2)dx = 1{,}5$;

$D(x) = \int_{0}^{3} x^2 \cdot 2/9(3x - x^2)dx - 1{,}5^2 = 0{,}45$; $\sigma(X) = \sqrt{0{,}45} = 0{,}671$.

Моданы табу үшін функцияның [0; 3] кесіндісіндегі максимумын табу керек $f(x) = 2/9(3x - x^2)$. Ол үшін туынды тауып, нөлге теңестіреміз: $f'(x) = 2/3 - 4x/9$, x=3/2 нүктесінде $f'(x) = 0$, бұл кризистік нүкте. Функцияны экстремумға зерттейміз: $f'(1) > 0$, $f'(2) < 0$, Сонымен, x=3/2 нүктесінен ауысқанда функцияның туындысы таңбасын плюстен минуске өзгертеді, олай болса x=3/2 максимум нүктесі, сондықтан M_o=3/2.

Медианаңы келесі шарттан табамыз $P(X < M_e) = 0{,}5$, мұндағы $P(X < M_e) = P(-\infty < X < M_e) = P(0 < X < M_e)$.

$P(0 < X < M_e) = \int_0^{M_e} 2/9(3x - x^2)dx = - M_e^{\,2}(2M_e - 9)/27$ болғандықтан,

$M_e^{\,2}(2M_e - 9)/27 = 0{,}5$ теңдеуін шешіп, үш түбір аламыз, олардың біреуі берілген кесіндіге тиісті: $M_e = 1{,}5$.

Төменде Mathcad-тан есетеулермен файлдың көшірмесі келтірілген.

$f(x) := \frac{2}{9}\cdot\left(3\cdot x - x^2\right)$ $\sqrt{\frac{9}{20}} = 0.671$

$\int_0^3 x\cdot f(x)\,dx \to \frac{3}{2} = 1.5$ $\int_0^3 x^2\cdot f(x)\,dx - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \to \frac{9}{20} = 0.45$

$\frac{d}{dx} f(x) \to \frac{2}{3} - \frac{4\cdot x}{9}$ $f1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

$\int_0^y f(x)\,dx \to -\frac{y^2\cdot(2\cdot y - 9)}{27}$ $f1(x)\ \text{solve} \to \frac{3}{2}$

$f1(1) = 0.222$ $f1(2) = -0.222$

$$-\frac{y^2\cdot(2\cdot y - 9)}{27} - 0.5\ \text{solve} \to \begin{pmatrix} 4.0980762113533159403 \\ -1.0980762113533159403 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.098 \\ -1.098 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

в) X–тің (1;4) интервалына түсу ықтималдығы

$P(1 < X < 4) = P(1 < X < 3) + P(3 < X < 4) = \int_1^3 2/9(3x - x^2)dx + \int_3^4 0dx = 0{,}741$

немесе $P(1 < X < 4) = F(4) - F(1) = 1 - \left(-\frac{1\cdot(2-9)}{27}\right) = \frac{20}{27} = 0{,}74.$

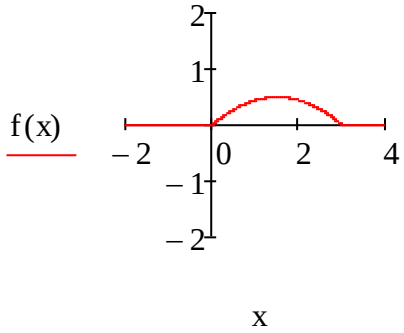
Төменде Mathcad-тан есептеулермен файлдың көшірмесі келтірілген.

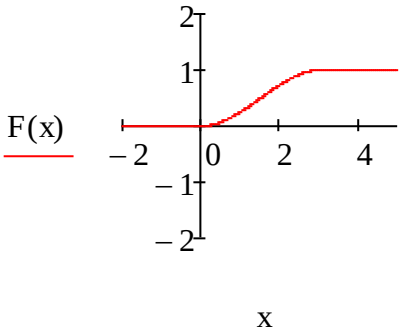
$\int_1^3 f(x)\,dx \to \frac{20}{27} = 0.741$ $f2(x) := -\frac{x^2\cdot(2\cdot x - 9)}{27}$

$f2(1) = 0.259$ $1 - 0.259 = 0.741$

$F(x)$ және $f(x)$ функцияларының графиктерін Mathcad жүйесінде саламыз:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \le 0 \\ \left[\frac{2}{9}\cdot\left(3\cdot x - x^2\right)\right] & \text{if } 0 < x \le 3 \\ 0 & \text{if } x > 3 \end{cases} \qquad F(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \le 0 \\ \frac{x^2\cdot(9-2\cdot x)}{27} & \text{if } 0 < x \le 3 \\ 1 & \text{if } x > 3 \end{cases}$$





7. Тұтынушылардың талабын зерттеу кезінде 6 азық-түлік дүкендері тексерілді. Қандай да бір тауардың осы дүкенде болмауы бірдей және *m*%-ды құрайды. Осы тауар жоқ дүкен санының үлестірім заңын құру керек (X кездейсоқ шамасы). Осы кездейсоқ шаманың математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын табу керек.

Шешуі: дискретті кездейсоқ шама X – азық-түлік дүкендер саны. Оның мүмкін мәндері: $x_1 = 0$(тауарлары жоқ дүкен жоқ), $x_2 = 1$(тауарлары жоқ бір дүкен) и т.д. $x_7 = 6$ (тауарлары жоқ алты дүкен). Мүмкін мәндер тәуелсіз және олардың әрқайсысының пайда болуы бірдей p=0,25, сондықтан кездейсоқ шама X бином заңы бойынша үлестірілген: $P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, мұндағы $k = 0,1,2,\ldots,6$, $q = 1 - p$, $n = 6$.

Сонымен, $P(X = 0) = P_6(0) = C_6^0 0{,}25^0 0{,}75^6 = 0{,}178$;

$P(X = 1) = P_6(1) = C_6^1 0{,}25^1 0{,}75^5 = 0{,}356$; $P(X = 2) = P_6(2) = C_6^2 0{,}25^2 0{,}75^4 = 0{,}297$;

$P(X = 3) = P_6(3) = C_6^3 0{,}25^3 0{,}75^3 = 0{,}132$; $P(X = 4) = P_6(4) = C_6^4 0{,}25^4 0{,}75^2 = 0{,}033$;

$P(X = 5) = P_6(5) = C_6^5 0{,}25^5 0{,}75^1 = 0{,}004$; $P(X = 6) = P_6(6) = C_6^6 0{,}25^6 0{,}75^0 = 0{,}0002$.

Ізделінді үлестірім заңы:

X	0	1	2	3	4	5	6
p	0,178	0,356	0,297	0,132	0,033	0,004	0,0002

Бином үлестірімінің сандық сипаттамаларын дискретті кездейсоқ шаманың белгілі формулалары бойынша алуға болады:

$M(X) = \sum_i x_i p_i$, $D(X) = \sum_i (x_i - M(X))^2 \cdot p_i$ немесе $D(X) = \sum_i x_i^{\,2} p_i - (\sum_i x_i p_i)^2$.

Алайда, математикалық үміт пен дисперсияның қасиеттерін қолданған қолайлы, егер X – оқиғасының n сынақта пайда болуы: $M(X) = np$,

$D(X)=npq$. Біздің жағдайда $M(X)=6\cdot 0{,}25=1{,}5$, $D(X)=6\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75=1{,}125$. $\sigma(x)=\sqrt{D(X)}\approx 1{,}06$.

Төменде Mathcad-тан есептеулермен файлдың көшірмесі келтірілген.

$C(Q,R) := \text{combin}(Q,R)$

$C(6,0)\cdot 0.25^{0}\cdot 0.75^{6}=0.178$

$C(6,1)\cdot 0.25^{1}\cdot 0.75^{5}=0.356$

$C(6,2)\cdot 0.25^{2}\cdot 0.75^{4}=0.297$

$C(6,3)\cdot 0.25^{3}\cdot 0.75^{3}=0.132$

$C(6,4)\cdot 0.25^{4}\cdot 0.75^{2}=0.033$

$C(6,5)\cdot 0.25^{5}\cdot 0.75^{1}=4.395\times 10^{-3}$

$C(6,6)\cdot 0.25^{6}\cdot 0.75^{0}=2.441\times 10^{-4}$

Бином үлестірімінің талдауын Mathcad жүйесінде арнайы функцияларды қолданып жүргізуге болады, ол функциялардың түпкі сөзі binom (dbinom, pbinom, qbinom, rbinom). Мысалы, dbinom(*k*,*n*,*p*) функциясы ықтималдықтар мәнін шығарады т.с.с.

8. Тоқымашы 1000 ұршық иіреді. Бір минут ішінде бір ұршықта жіптің үзілу ықтималдығы 0,001-ге тең.

Табу керек:

а) жібі үзілген ұршықтар саны бойынша үлестірім заңын;

б) 2 ұршықтан кем емес ұршықта жіптің үзілу ықтималдығын табу керек.

Шешуі:

а) дискретті кездейсоқ шама X – жібі үзілген ұршықтар саны Пуассон заңымен үлестірілген (биномдық үлестірзаңы заңы үшін шектік, әрбір сынақта оқиғаның пайда болу ықтималдығы p аз, ал сынақ саны n үлкен): $P(X=k)=P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, где $\lambda=np=1000\cdot 0{,}001=1$, $k=0,1,2,\ldots,1000$, $n=1000$.

Сонымен,

$$P(X=0)=P_{1000}(0)\approx\frac{1^0}{0!}e^{-1}=0{,}368;\ P(X=1)=P_{1000}(1)\approx\frac{1^0}{1!}e^{-1}=0{,}368;$$

$$P(X=2)=P_{1000}(2)\approx\frac{1^2}{2!}e^{-1}=0{,}184;$$

$P(X=3)=P_{1000}(3)\approx\frac{1^3}{3!}e^{-1}0{,}061$, и т.д. $P(X=10)=P_{1000}(10)\approx\frac{1^{10}}{10!}e^{-1}=0{,}0000001$

және т.с.с. Ізделінді үлестірім заңы:

X	0	1	2	3	…	10	…
p	0,368	0,368	0,184	0,061	…	0,0000001	…

Төменде Mathcad-тан есептеулермен файлдың көшірмесі келтірілген.

$p(k,\lambda) := dpois(k,\lambda)$

$p(0,1) = 0.368$ $\quad p(4,1) = 0.015$

$p(1,1) = 0.368$ $\quad p(5,1) = 3.066 \times 10^{-3}$

$p(2,1) = 0.184$ $\quad p(10,1) = 1.014 \times 10^{-7}$

$p(3,1) = 0.061$ $\quad p(1000,1) = 0$

б) 2 ұршықтан кем емес ұршықта жіптің үзілу ықтималдығы келесі формуламен есептелінеді:

$P(X \geq 2) = \sum_{k=2}^{1000} P_{1000}(k)$ немесе $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$ = 1 - 0,368 - 0,368 = 0,264.

Пуассон үлестіріміне Mathcad жүйесінде арнайы функцияларды қолданып жүргізуге болады, ол функциялардың түпкі сөзі pois (dpois, ppois, qpois, rpois). Мысалы, dpois(k,n,p) функциясы ықтималдықтар мәнін шығарады т.с.с.

9. Қайбір маршруттың автобустары кесте бойынша ғана жүреді. Жүру интервалы 5 минут. X кездейсоқ шамасы –автобусты күту уақыты.

Табу керек:

а) оның үлестірім тығыздығын $f(x)$;

б) үлестірім функциясын $F(x)$;

в) математикалық үмітін, дисперсиясын;

г) аялдамаға келген жолаушы трамвайды 3 минуттен кем (артық) күту ықтималдығын.

$F(x)$ және $f(x)$ графиктерін салу керек.

Шешуі: X кездейсоқ шамасы – автобусты күту уақыты, автобустың алдамаға тізбектей екі рет келуінің арасында бірқалыпты жүргізілген; $b - a = 5$ – X–тің мүмкін мәндер енетін интервалдың ұзындығы.

Бірқалыпты үлестірімнің негізгі формулалары:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{егер } x \in (a,b) \\ 0, & \text{егер } x \notin (a,b) \end{cases}$$ - бірқалыпты үлестірімнің тығыздығы;

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{егер } a < x \leq b \\ 1, & \text{егер } x > b \end{cases}$$ - үлестірім функциясы;

$M(X) = \dfrac{a+b}{2}$ - математикалық үміті;

$D(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$ - дисперсиясы;

$P(\alpha < X < \beta) = \dfrac{\beta - \alpha}{b - a}$ - (α, β) аралығына түсу ықтималдығы .

Біздің есеп үшін:

а) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5} = 0{,}2, & \text{егер } x \in (0;5) \\ 0, & \text{егер } x \notin (0;5) \end{cases}$;

б) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \le 0 \\ \dfrac{x}{5} = 0{,}2x, & \text{егер } 0 < x \le 5 \\ 1, & \text{егер } x > 5 \end{cases}$;

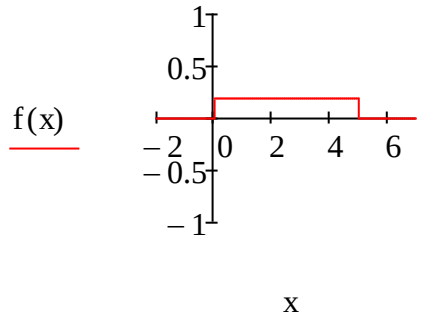
в) $M(X) = \dfrac{5+0}{2} = 2{,}5$; $D(X) = \dfrac{(5-0)^2}{12} = 2{,}08$;

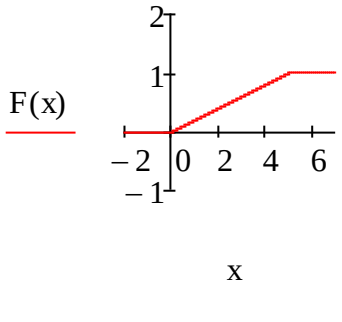
г) жолаушы автобусты 3 минуттен кем күтетіндігі белгілі, егер ол аялдамаға (0; 3) немесе (2; 5) уақыт аралығында келсе (*A* оқиғасы), онда ол автобусты, яғни бұл оқиғаның ықтималдығы $P(A) = P(0 < X < 3) = \dfrac{3-0}{5} = 0{,}6$; егер жолаушы аялдамаға (0; 2) немесе (3; 5) уақыт аралығында келсе (*B* оқиғасы), онда ол автобусты 3 минуттен артық күтетіндігі белгілі, яғни бұл оқиғаның ықтималдығы

$P(B) = P(3 < X < 5) = \dfrac{5-3}{5} = 0{,}4$ немесе $P(B) = 1 - P(A)$.

Mathcad жүйесінде *F*(*x*) және *f*(*x*) графиктерін саламыз.

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \le 0 \\ 0.2 & \text{if } 0 < x \le 5 \\ 0 & \text{if } x > 5 \end{cases} \qquad F(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \le 0 \\ (0.2 \cdot x) & \text{if } 0 < x \le 5 \\ 1 & \text{if } x > 5 \end{cases}$$





Бірқалыпты үлестіріміне Mathcad жүйесінде арнайы функцияларды қолданып жүргізуге болады, ол функциялардың түпкі сөздері unif: dunif(x,a,b)– үлестірім тығыздығының мәндерін шығарады; түпкі сөздері punif(x,a,b) – үлестірім функциясының мәндерін шығарады; runif(n,a,b) – (a,b) аралығында бірқалыпты үлестірілген n тәуелсіз кездейсоқ сандардың массивін шығарады.

10. Радиолокатордың нысананы табу уақыты (T кездейсоқ шамасы) λ = 0,5 параметрімен көрсеткішті үлестірілген.

Табу керек:

а) $f(t)$ үлестірім тығыздығын;

б) $F(t)$ үлестірім функциясын, оның ықтималдық мағынасын көрсету керек;

в) сенімділік функциясын $R(t)$, оның ықтималдық мағынасын көрсету керек;

г) математикалық үмітін, дисперсиясын;

д) t=5 уақыт ішінде нысана табылу ықтималдығын және t=5 сағат уақыт ішінде табылмау ықтималдығын.

$F(t)$, $R(t)$ және $f(t)$ графиктерін салу керек.

Шешуі: X үзіліссіз кездейсоқ шамасы $f(x)=\begin{cases} 0, \textit{егер } x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, \textit{ егер } x\geq 0 \end{cases}$ тығыздығымен берілсе, онда ол көрсеткіштік үлестірім заңына бағынады. Көрсеткіштік үлестірімнің басқа ұғымдары мен формулалары: $F(x)=\begin{cases} 0, \textit{егер } x<0 \\ 1-e^{-\lambda x}, \textit{ егер } x\geq 0 \end{cases}$ - үлестірім функциясы; егер кездейсоқ шама $X=T$ – уақыты болса, онда $F(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t}$ - радиолокатордың нысананы табу уақыты; $R(t)=P(T>t)=e^{-\lambda t}-$ сенімділік функциясы, t уақытындағы нысананы табу ықтималдығы;

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\ \sigma(X)=\frac{1}{\lambda};\ P(\alpha<X<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}.$$

Біздің есепте $t\geq 0$ болатындығын ескерсек:

а) $f(t)=0{,}5e^{-0{,}5t}$;

б) $F(t)=P(T<t)=1-e^{-0{,}5t}$, радиолокатордың t уақытындағы нысананы таба алмау ықтималдығын анықтайды;

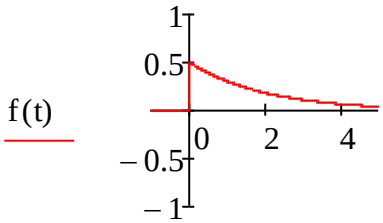
в) $R(t)=e^{-0{,}5t}$, t уақытындағы нысананы табу ықтималдығын анықтайды;

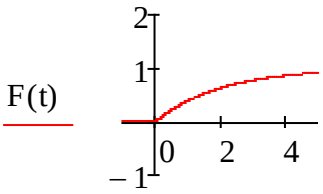
г) $M(X)=\frac{1}{0{,}5}=2$; $D(X)=\frac{1}{0{,}5^2}=4$;

д) үлестірім функциясы t уақытындағы нысананы таба алмау ықтималдығын анықтайтын болғандықтан, оған t=5 мәнін қойып, t=5 сағат уақыты ішіндегі нысананы таба алмау ықтималдығын аламыз: $F(5)=1-e^{-0{,}5\cdot 5}=1-e^{-2{,}5}$=0,918; «нысана табылды» және «нысана табылмады» оқиғалары – қарама-қарсы, сондықтан t=5 уақытындағы нысананы табу ықтималдығы 1-0,918=0,082. Бұл нәтижені сенімділік функциясын тікелей қолданып алуға болады: $R(5)=e^{-0{,}5\cdot 5}=e^{-2{,}5}$=0,082.

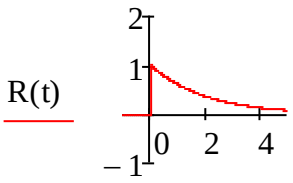
Mathcad жүйесінде $F(t)$, $R(t)$ және $f(t)$ графиктерін салып, кейбір есептеулер жүргіземіз:

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 0.5 \cdot e^{-0.5 \cdot t} & \text{if } t \geq 0 \end{cases} \qquad F(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 1 - e^{-0.5 \cdot t} & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$





$$R(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ e^{-0.5 \cdot t} & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$



$e^{-2.5} = 0.082$ $\qquad 1 - e^{-2.5} = 0.918$

Көрсеткіштік үлестіріміне Mathcad жүйесінде арнайы функцияларды қолданып жүргізуге болады, ол функциялардың түпкі сөздері exp: dexp(x, λ) – үлестірім тығыздығының мәндерін шығарады; түпкі сөздері pexp(x, λ) – үлестірім функциясының мәндерін шығарады; rexp(n, λ) – λ параметрлі көрсеткішті үлестірілген n тәуелсіз кездейсоқ сандардың массивін шығарады.

11. Өлшеудің кездейсоқ қатесі (X кездейсоқ шамасы) a=10 және σ=2 параметрлі қалыпты үлестірім заңына бағынады. Табу керек:

а) $f(x)$ үлестірім тығыздығын;

б) $F(x)$ үлестірім функциясын;

в) математикалық үмітін, дисперсиясын;

г) $(12;14)$ аралығына түсу ықтималдығын;

д) өлшеу абсолют шамасы бойынша δ=3-тен аспайтындай қате жіберу ықтималдығын.

$F(t)$ және $f(t)$ графиктерін салу керек.

Шешуі: X үзіліссіз кездейсоқ шамасы $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ тығыздығымен берілсе, онда ол қалыпты үлестірім заңына бағынады, мұндағы a =M(x) – математикалық үміт, $\sigma = \sigma(X)$ – орта квадраттық ауытқу. Қалыпты үлестірімнің басқа ұғымдары мен формулалары

$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left[\dfrac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}\right]dt$ немесе $F(x)=\Phi\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)+0{,}5$, мұндағы $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\sigma}}\int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – Лаплас функциясы, оның мәнін кестеден немесе Mathcad жүйесінде табуға болады;

$$P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үмітінен δ-дан артық емес ауытқуының ықтималдығы $P(|X-a|\le\delta)=2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)$ формуласымен есептелінеді.

Біздің есеп үшін:

а) $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}$;

б) $F(x)=\Phi\left(\dfrac{x-10}{2}\right)+0{,}5$;

в) $M(X)=a=10$, $\sigma(X)=\sigma=2$, $D(X)=\sigma^2=4$;

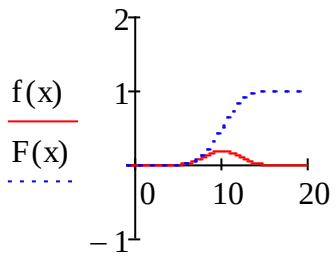
г) $P(12<X<14)=\Phi\left(\dfrac{14-10}{2}\right)-\Phi\left(\dfrac{12-10}{2}\right)=\Phi(2)-\Phi(1)$=0,4772-0,3413= =0,1359;

д) өлшеу абсолют шамасы бойынша δ=3-тен аспайтындай қате жіберу ықтималдығын $P(|X-10|\le 3)=2\Phi\left(\dfrac{3}{2}\right)=2\Phi(1{,}5)$=0,4332.

Бұл жерде Лаплас функциясының мәні кестеден алынған, оны Mathcad жүйесінде де табуға болады.

Қалыпты үлестіріміне Mathcad жүйесінде арнайы функцияларды қолданып жүргізуге болады, ол функциялардың түпкі сөздері norm және d, p, q, r. әрәптерінен басталатын сөздер. Мысалы, dnorm (x,a, σ) – үлестірім тығыздығының мәндерін шығарады; түпкі сөздері pnorm (x,a,σ) – үлестірім функциясының мәндерін шығарады. Осы функцияларды сәйкес графиктерді салу үшін қолданамыз. Төменде Mathcad-та есептеулермен файлдың көшірмелері келтірілген.

$f(x):=\text{dnorm}(x,10,2)$ $\quad$ $F(x):=\text{pnorm}(x,10,2)$



2 Есептік-сызба жұмыс №2. Математикалық статистика элементтері

Мақсаты: математикалық статистиканың негізгі есептерін: кездейсоқ жаппай құбылыстардың нәтижелерін өңдеп, талдау есептерін оқып-үйрену.

2.1 Теориялық сұрақтар

1. Математикалық статистика пәні және оның негізгі есептері. Негізгі ұғымдар (таңдама, таңдама көлемі, варианталар, статистикалық қатар, интервалдық қатар).
2. Эмпирикалық үлестірім функциясы, полигон, гистограмма.
3. Үлестірімнің белгісіз параметрлерін анықтау (таңдама ортасы, таңдама дисперсиясы және түзетілген таңдама дисперсиясы).
4. Үлестірім параметрінің нүктелік және интервалдық бағалары.
5. Бағаның дәлдігі және сенімділігі. Сенімділік интервалы.
6. σ белгілі болғанда қалыпты үлестірілген кездейсоқ шаманың математикалық үмітін бағалау үшін сенімділік интервалы.
7. Қалыпты үлестірілген кездейсоқ шаманың орта квадраттық ауытқуын бағалау үшін сенімділік интервалы.
8. Корреляциялық тәуелділік ұғымы. Регрессия функциясы мен сызығы.

2.2 Есептік тапсырмалар

1. Берілген таңдама үшін өдеу және жүйелеу есептерін анықтап және орындау керек:

а) вариациялық қатарды (таңдаманы өсу ретімен);

б) жиілік және қатысты жиілік статистикалық қатарды;

в) жиілік және қатысты жиілік интервалдық статистикалық қатарын (минималды және максималды варианталарды, таңдаманың құлашын, интервалдар санын, интервалдар ұзындығын);

г) дискретті (топталған) жиілік және қатысты жиілік статистикалық қатарды салу керек;

2. Берілген таңдама талдау және бағалау есептерін орындау керек, анықтау керек:

а) интервалдық статистикалық қатар бойынша жиілік және қатысты жиілік гистограммасын;

б) дискретті статистикалық қатар бойынша табу керек:

- жиілік және қатысты жиілік полигонын;
- үлестірімнің эмпирикалық функциясын;
- таңдама ортасын;
- таңдама және түзетілген таңдама дисперсиясын;
- түзетілген таңдама орта квадраттық ауытқуын;
- таңдама модасы мен медианасын;

в) жиілік және қатысты жиілік статистикалық қатары бойынша табу керек:

- үшінші және төртінші ретті таңдама бастапқы моменттері;
- таңдама эксцессі;
- асимметрия таңдама коэффициенті.

1	147	153	179	165	159	149	141	102	169	157
	169	154	143	155	113	155	171	168	153	135
	150	152	142	132	152	161	148	136	138	149
	157	178	149	195	146	166	182	135	136	170
	156	152	145	198	192	143	159	116	126	155
	164	169	165	148	151	153	139	166	138	128
	169	169	155	152	175	177	131	154	174	187
	180	177	162	149	146	113	151	152	134	125
2	558	563	569	547	552	562	554	549	575	578
	561	552	551	561	538	533	547	552	557	543
	547	565	587	553	548	554	561	564	562	558
	566	555	563	568	586	549	575	564	553	555
	567	556	546	552	543	554	556	566	592	562
	544	568	574	564	547	549	553	578	557	561
	553	545	554	571	569	539	549	538	575	554
	577	552	566	557	551	552	546	584	572	535
3	577	568	557	564	547	549	553	578	557	575
	554	5455	554	571	569	539	549	538	575	566
	558	563	563	547	552	562	554	549	575	558
	547	595	587	553	548	554	561	564	562	544
	555	563	568	586	549	575	564	553	585	592
	577	554	552	566	557	551	552	546	584	556
	601	561	552	551	561	538	533	547	552	557
	555	541	588	558	563	558	572	578	539	556
4	77	45	49	92	13	69	52	26	22	36
	48	25	59	57	65	69	55	68	49	63
	38	53	48	68	52	73	42	62	71	45
	63	55	16	78	52	95	77	66	35	54
	68	55	49	65	79	48	59	53	41	38
	12	39	57	51	65	66	43	52	63	43
	55	69	31	62	48	46	51	43	16	34
	74	51	82	52	46	75	49	55	57	54

5	347	365	387	348	354	361	364	362	346	358
	365	355	363	368	359	375	364	353	385	363
	343	368	374	364	347	349	353	378	357	358
	352	345	354	352	371	369	349	338	375	388
	366	358	363	347	352	362	354	349	375	341
	377	354	352	366	357	351	352	346	384	351
	399	363	361	352	351	361	338	353	333	357
6	9	9	6	9	9	7	6	11	6	7
	6	10	6	7	6	8	6	5	5	4
	6	6	7	12	5	7	8	5	10	9
	7	7	5	11	9	7	6	5	7	6
	5	5	12	9	8	7	9	8	5	5
	6	13	11	11	5	8	10	9	4	7
	3	6	9	8	12	11	9	10	4	14
7	39	40	38	43	41	42	40	38	41	42
	41	40	42	39	41	41	36	43	41	42
	34	36	37	42	42	42	40	41	41	46
	47	48	52	56	68	70	68	64	56	58
	41	42	39	33	34	37	43	45	47	71
	43	42	43	41	42	47	48	49	52	53
	57	52	41	42	46	48	49	39	32	40
	39	37	42	43	54	58	59	64	66	68
8	10	15	16	17	18	19	20	15	16	11
	17	12	13	14	15	11	18	16	15	18
	20	20	21	23	26	28	23	28	27	24
	27	24	25	25	26	32	33	31	34	43
	26	32	26	27	28	29	30	21	22	23
	42	24	23	35	23	25	36	37	24	21
	58	54	49	47	32	36	43	23	24	28
9	150	144	124	132	140	124	144	153	151	148
	116	130	154	158	102	125	124	152	134	148
	142	121	112	131	151	104	146	132	182	142
	152	196	142	154	158	118	126	152	138	124
	144	176	124	140	172	168	181	134	168	132
	144	112	134	162	104	161	154	166	178	148
	162	164	164	172	142	144	146	112	171	
10	128	105	115	92	115	142	98	123	103	144
	112	115	88	118	103	102	95	124	106	135
	95	124	103	102	118	112	115	92	115	119
	92	112	132	85	122	105	125	142	99	125
	106	92	118	105	118	86	125	105	122	138
	102	130	112	98	115	120	118	103	118	129
	103	122	94	112	97	128	102	116	125	132

11	102	112	118	85	112	115	103	95	122	125
	157	178	149	195	146	166	182	135	136	170
	157	143	179	165	159	149	141	102	169	168
	151	168	122	163	117	165	132	139	107	125
	152	152	142	132	152	161	148	136	138	149
	153	154	143	155	113	155	171	168	153	135
	157	152	145	198	192	143	159	116	126	155
	165	169	165	148	151	153	139	166	138	128
12	242	254	218	226	252	238	224	298	260	287
	250	216	230	254	258	202	225	224	252	234
	244	212	231	251	204	246	232	282	242	252
	299	254	282	242	270	254	260	232	268	242
	276	224	240	272	268	281	234	268	232	300
	274	212	234	262	204	261	254	266	278	248
	255	262	256	264	272	242	244	246	253	234
	240	264	252	248	247	268	229	235	262	212
13	262	267	275	266	246	252	261	269	262	268
	259	248	266	259	252	248	252	232	269	287
	253	286	275	235	202	239	225	236	237	224
	253	268	277	249	248	263	243	266	212	255
	249	288	213	264	247	242	228	277	256	251
	267	232	258	246	278	279	257	255	243	258
	254	244	265	274	252	265	222	269	254	278
	249	252	294	232	269	263	269	271	245	235
14	558	565	587	553	548	554	561	564	562	544
	563	568	586	549	575	564	553	585	577	553
	563	564	547	552	562	554	549	575	558	592
	546	577	568	574	564	547	549	553	578	557
	557	577	568	574	564	547	549	538	575	566
	558	554	552	566	557	551	552	546	584	532
	602	561	552	551	561	538	533	547	552	557
	556	541	588	558	563	558	572	578	539	556
15	165	143	152	167	164	199	171	171	156	151
	155	155	158	145	158	177	161	181	153	171
	177	153	174	154	163	174	152	188	162	197
	191	158	154	171	163	172	152	178	151	172
	161	186	147	169	147	166	161	171	161	186
	161	189	199	162	167	198	168	135	152	146
	162	175	163	149	162	161	161	193	172	175
	153	164	178	138	164	172	187	178	1433	161

16	112	101	155	137	109	129	152	128	132	116
	125	125	142	140	125	118	125	135	149	145
	106	109	138	145	118	128	125	105	122	138
	120	118	133	118	129	149	124	153	132	118
	132	132	138	128	122	115	143	140	122	152
	128	118	126	132	134	123	122	159	112	110
	112	121	105	117	112	129	129	118	112	116
17	87	85	91	94	102	80	75	102	99	101
	120	122	101	88	80	97	92	91	94	82
	115	100	97	91	87	116	121	101	123	97
	88	90	101	95	93	92	88	94	98	99
	95	105	112	116	118	108	95	99	92	100
	94	106	112	122	100	92	93	82	111	102
	100	101	123	97	90	104	108	101	96	111
18	547	565	587	553	548	554	561	562	551	572
	565	555	563	568	586	549	575	537	581	553
	543	568	574	564	547	549	553	572	535	555
	552	545	554	571	569	539	549	553	562	561
	558	563	563	547	552	562	554	563	558	572
	577	554	552	566	557	551	552	571	551	552
	599	561	552	551	561	538	533	541	588	558
19	90	123	132	85	122	105	125	142	99	125
	118	105	115	92	115	142	98	123	103	144
	106	92	118	105	118	86	125	105	122	138
	102	130	112	98	115	120	118	103	118	129
	112	115	88	118	103	102	95	124	106	135
	95	124	103	102	118	112	115	92	115	119
	103	122	94	112	97	128	102	116	125	132
20	139	112	132	85	122	105	125	142	99	125
	116	105	92	115	98	123	103	144	115	142
	106	92	118	86	125	105	122	138	105	118
	102	130	112	98	115	120	118	103	118	129
	112	115	88	118	103	102	95	124	106	135
	95	124	103	102	118	112	115	103	95	122
	125	118	96	126	98	106	128	118	126	103
	134	112	101	105	117	92	129	99	118	112
21	154	143	155	113	155	171	168	153	135	168
	145	168	122	163	117	165	132	139	107	125
	146	152	142	132	152	161	148	136	138	149
	157	178	149	195	146	166	182	135	136	170
	155	152	145	198	192	143	159	116	126	155
	163	169	165	148	151	153	139	166	138	128
	168	157	143	179	165	159	149	141	102	169

22	470	801	790	764	764	950	533	402	520	780
	699	840	869	551	707	635	703	801	859	475
	797	797	789	875	698	580	821	737	910	856
	950	741	473	988	737	787	667	649	797	939
	532	885	590	590	975	910	731	869	435	889
	584	967	950	531	775	485	756	656	680	741
	950	458	511	857	536	699	474	789	889	533
23	450	434	424	432	440	443	415	446	423	472
	442	452	444	425	403	458	455	431	446	424
	438	442	482	432	416	477	431	432	412	462
	496	468	424	438	452	446	418	474	432	452
	466	488	452	489	451	422	442	492	473	402
	481	468	404	498	467	398	440	449	417	425
	444	498	466	442	483	462	492	435	449	422
24	250	244	224	232	240	224	244	226	253	232
	248	216	230	254	258	202	225	224	252	234
	242	212	231	251	204	246	232	282	242	252
	296	242	254	218	226	252	238	224	298	260
	276	254	282	242	270	254	260	232	268	242
	244	276	224	240	272	268	281	234	268	251
	271	212	234	262	204	261	254	266	278	248
25	165	143	152	167	164	199	171	171	156	149
	147	155	158	145	158	177	161	181	153	171
	175	153	174	154	163	174	152	188	162	197
	187	158	154	171	163	172	152	178	151	172
	153	186	147	169	147	166	161	171	161	186
	148	161	189	199	162	167	198	168	135	152
	154	175	163	149	162	161	161	193	172	175
	161	164	178	138	164	172	187	178	143	161
26	153	174	154	163	174	152	188	162	197	234
	188	158	154	171	163	172	152	178	151	172
	155	186	147	169	147	166	161	171	161	186
	149	161	189	199	162	167	198	168	135	152
	156	175	163	149	162	161	161	193	172	175
	162	164	178	138	164	172	187	178	143	161
	165	163	177	161	149	146	152	139	156	152
27	212	231	251	204	246	232	282	242	252	276
	297	242	254	218	226	252	238	224	298	260
	277	254	282	242	270	254	260	232	268	242
	345	276	224	240	272	268	281	234	268	232
	272	212	234	292	204	261	254	266	278	248
	253	262	256	264	272	242	244	246	253	234
	237	264	252	248	247	268	229	235	262	212
	238	242	254	263	261	266	254	264	248	251

28	165	143	52	166	164	199	171	171	156	171
	148	155	158	145	158	177	161	181	153	197
	176	153	174	154	163	174	152	188	162	172
	189	158	154	171	163	172	152	178	151	186
	157	186	147	169	147	166	161	171	161	152
	150	161	189	199	162	167	198	168	135	175
	158	175	163	149	162	161	161	193	172	
29	216	230	254	258	202	225	224	252	234	250
	243	212	231	251	204	246	232	282	242	252
	298	242	254	218	226	252	238	224	298	260
	278	254	282	242	270	254	260	232	268	242
	246	276	224	240	272	268	281	234	268	232
	273	212	234	262	201	261	254	266	278	248
	254	262	256	264	272	242	244	246	253	234
	239	264	252	248	247	268	229	235	262	212
30	165	143	152	167	165	199	171	171	156	152
	149	155	158	145	158	177	161	181	153	171
	153	174	154	163	174	152	188	162	197	178
	190	158	154	171	163	172	152	178	151	172
	159	186	147	169	147	166	161	171	161	186
	151	161	189	199	162	167	198	168	135	152
	160	175	163	149	162	161	161	193	172	175
	165	164	178	137	164	172	187	178	143	161

3. Егер таңдама ортасы $\bar{x}_T$, таңдама көлемі n және орта квадраттық ауытқуы σ болғанда, γ сенімділікпен қалыпты үлестірілген кездейсоқ шаманың a математикалық үмітін бағалау үшін сенімділік интервалын табу керек.

№	γ	$\bar{x}_в$	n	σ	№	γ	$\bar{x}_в$	n	σ	№	γ	$\bar{x}_в$	n	σ
3.1	0.93	65.23	78	5	3.11	0.98	13.38	39	8	3.21	0.99	7.37	58	7
3.2	0.92	8.21	49	7	3.12	0.93	20.44	66	7	3.22	0.93	65.13	34	6
3.3	0.95	51.23	58	9	3.13	0.97	14.32	58	6	3.23	0.94	9.27	53	8
3.4	0.94	5.21	39	6	3.14	0.94	30.44	86	7	3.24	0.93	85.17	35	6
3.5	0.95	85.23	58	7	3.15	0.99	16.32	38	9	3.25	0.95	8.27	57	9
3.6	0.92	11.48	36	6	3.16	0.95	75.17	36	6	3.11	0.97	5.21	46	6
3.7	0.94	23.38	39	8	3.17	0.97	7.27	56	7	3.12	0.96	55.23	38	5
3.8	0.93	30.44	56	7	3.18	0.93	75.17	35	5	3.13	0.92	5.21	36	7
3.9	0.99	15.32	38	5	3.19	0.94	8.27	58	9	3.14	0.95	55.23	68	7
3.10	0.95	10.48	46	6	3.20	0.98	76.17	46	6	3.15	0.98	7.21	56	6

4. 1-2 есептердің берілімдері мен нәтижелері қалыпты үлестіріммен берілген. Табу керек:

а) таңдама ортасы $\overline{x}_T$ бойынша γ сенімділікпен a математикалық үмітін бағасының дәлдігін;

б) γ сенімділікпен a математикалық үмітін бағалау үшін сенімділік интервалын.

Егер таңдама ортасы $\overline{x}_T$, таңдама көлемі n, мәндерін 3 есептен алу керек.

5. Нысанаға дейінгі ара қашықтық өлшейтін құралдың жүйелі қателігі нөлге тең, ал өлшеудің кездейсоқ қатесі σ орта квадраттық ауытқуымен қалыпты үлестірілген. Ара қашықтықты анықтау үшін қатесі δ-дан артық емес, сенімділігі γ болатын қанша тәуелсіз өлшеу жүргізу керек?

	γ	σ	δ		γ	σ	δ		γ	σ	δ
5.1	0.93	20	6	5.11	0.98	13	4	5.21	0.99	20	4
5.2	0.92	22	7	5.12	0.93	21	7	5.22	0.93	24	7
5.3	0.95	19	5	5.13	0.97	14	5	5.23	0.94	18	4
5.4	0.94	16	3	5.14	0.94	24	8	5.24	0.93	16	7
5.5	0.95	18	4	5.15	0.99	12	4	5.25	0.95	19	6
5.6	0.92	11	4	5.16	0.95	23	6	5.11	0.98	13	4
5.7	0.94	23	8	5.17	0.97	14	8	5.12	0.93	21	7
5.8	0.93	25	7	5.18	0.93	21	9	5.13	0.97	14	5
5.9	0.99	17	5	5.19	0.94	15	5	5.14	0.94	24	8
5.10	0.95	10	3	5.20	0.98	13	6	5.15	0.99	12	4

2.3 Типтік варианттың шешуі

1. Берілген таңдама үшін өдеу және жүйелеу есептерін анықтап және орындау керек:

а) вариациялық қатарды (таңдаманы өсу ретімен);

б) жиілік және қатысты жиілік статистикалық қатарды;

в) жиілік және қатысты жиілік интервалдық статистикалық қатарын (минималды және максималды вариантаарды, таңдаманың құлашын, интервалдар санын, интервалдар ұзындығын);

г) дискретті (топталған) жиілік және қатысты жиілік статистикалық қатарды салу керек;

2. Берілген таңдама талдау және бағалау есептерін орындау керек, бағалау керек:

а) интервалдық статистикалық қатар бойынша жиілік және қатысты жиілік гистограммасын;

б) дискретті статистикалық қатар бойынша табу керек:

- жиілік және қатысты жиілік полигонын;
- үлестірімнің эмпирикалық функциясын;
- таңдама ортасын;
- таңдама және түзетілген таңдама дисперсиясын;
- түзетілген таңдама орта квадраттық ауытқуын;
- таңдама модасы мен медианасын;

в) жиілік және қатысты жиілік статистикалық қатары бойынша табу керек:

- үшінші және төртінші ретті таңдама бастапқы моменттері;
- таңдама эксцессі;
- асимметрия таңдама коэффициенті.

20	15	17	19	23	18	21	15	16	13
20	16	19	20	14	20	16	14	20	19
15	19	17	16	15	22	21	12	10	21
18	14	14	18	18	13	19	18	20	23
16	20	19	17	19	17	21	17	19	17
13	17	11	18	19					

Шешуі: айта кетелік, есептеулер мен графиктер салу Mathcad-та жүргізіледі. Төменде Mathcad-та есептеулермен файлдың көшірмелері келтірілген. Mathcad-та алынған нәтижелерге түсініктеме беріп, ресімдеу керек.

а) таңдама көлемі n = 55. Вариациалық қатар (таңдама өсу ретімен алынған):

$Y^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	10	11	12	13	13	14	14	14	14	...

(Mathcad-та кестені бағыттаушы бағытын басып көруге болады);

б) вариациалық қатар бойынша әрбір варианта қанша рет кездесетінін, яғни әрбір вариантаның (n_i) жиілігін табамыз. Алынған нәтижелерді кестеге енгіземіз, сөйтіп, жиіліктің статистикалық қатарын аламыз:

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
n_i	1	1	1	2	4	4	5	7	6	8	7	5	1	2

Вариантаның қатысты жиілігін $p_i^* = \frac{n_i}{n}$ формуласынан табамыз, мұндағы n таңдама көлемі, табылған нәтижелерді кестеге енгіземіз. Сөйтіп, қатысты жиіліктің статистикалық қатарын аламыз:

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
p_i^*	0,018	0,018	0,018	0,036	0,073	0,073	0,091	0.127	0,109
x_i	19	20	21	22	23				

p_i^*	0,145	0,127	0,091	0,018	0,036				

в) интервалдық статистикалық қатар құру үшін келесі шамаларды анықтау керек: ең үлкен және ең кіші варианталар: $a = x_{\min} = 10$, $b = x_{\max} = 23$; таңдама құлашы: $R = b - a = 13$; интервалдар санын Стерджес формуласымен анықтаймыз $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + \log_2 n}$, h = 1,917 және бүтін бөлікке дейін жуықтаймыз $h \approx 2$; интервалдар саны – формуланың бөлімі $m = 1 + \log_2 n$ немесе $m = \frac{R}{h}$=6,781, бүтін бөлікке дейін жуықтаймыз $m \approx 7$; бірінші интервалдың басы ретінде $x_{баст} = x_{\min} - \frac{h}{2}$, $x_{баст} = 9{,}041 \approx 9$ шамасын алуды ұсынады; әрбір интервалға енген варианталар саны (яғни n_i (яғни $p_i = \frac{n_i}{n}$) Mathcad-та есептелінген (қараңыз $w1^T$ және $w2^T$).

Сонымен, ізделінді интервалдық қатар:

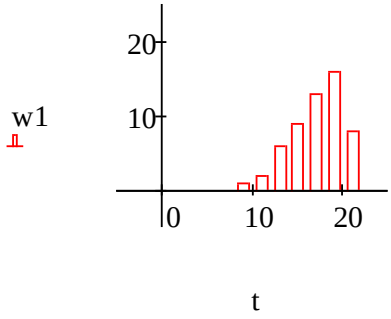
интервалдар	[9,11)	[11,13)	[13,15)	[15,17)	[17,19)	[19,21)	[21,23]
n_i	1	2	6	9	13	16	8
$p_i = \frac{n_i}{n}$	0,018	0,036	0,109	0,164	0,236	0,291	0,145

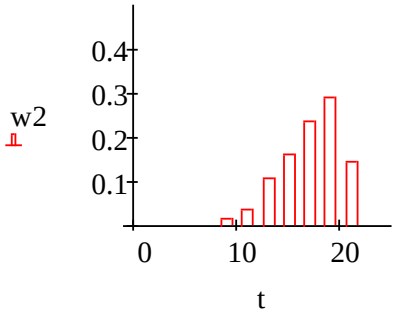
в) дискретті статистикалық қатарды құру үшін (кейбір оқулықтарда топталған статистикалық қатар деп атайды) интервалдар ортасын табамыз $\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ (Mathcad-та x^T қара), оларға интервалдық қатардың сәйкес жиілік және қатысты жиіліктері дәл келеді.

Ізделінді дискретті статистикалық қатар:

$\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	10	12	14	16	18	20	22
n_i	1	2	6	9	13	16	8
p_i	0,018	0,036	0,109	0,164	0,236	0,291	0,145

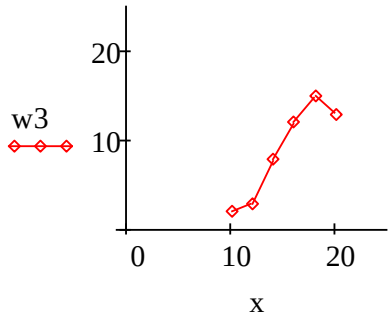
2. а) интервалдық статистикалық қатар бойынша жиілік және қатысты жиілік гистограммасын (Mathcad-та);

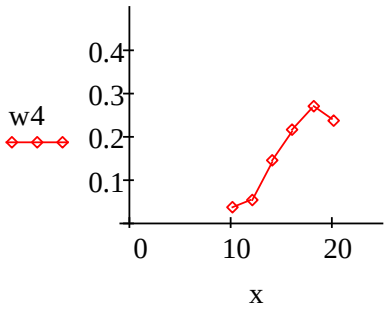




б) дискретті статистикалық қатар бойынша келесі шамаларды табамыз:

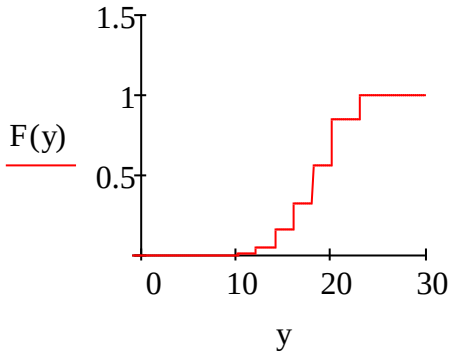
- жиілік және қатысты жиіліктер полигонын:





- үлестірімнің эмпирикалық функциясын (Mathcad-та F^T және $F(y)$ қара):

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ егер } x\le 10 \\ 0{,}018, \text{ егер } 10<x\le 12 \\ 0{,}054, \text{ егер } 12<x\le 14 \\ 0{,}163, \text{ егер } 14<x\le 16 \\ 0{,}327, \text{ егер } 16<x\le 18 \\ 0{,}563, \text{ егер } 18<x\le 20 \\ 0{,}854, \text{ егер } 20<x\le 23 \\ 1, \text{ егер } x>23 \end{cases}$$



- таңдама ортасы (Mathcad-та mean(X)): $\bar{x}_в=\dfrac{\sum_i x_i n_i}{n}$ немесе

$\bar{x}_в=\sum_i x_i\cdot p_i=17{,}564;$

- таңдама дисперсиясы мен түзетілген таңдама дисперсиясы (Mathcad-та var(X) және s): $D_в = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_в)^2}{n}$ немесе $D_в = \frac{\sum_i n_i \cdot x_i^2}{n} - (\bar{x}_в)^2$ = 8,428 – таңдама дисперсиясы; $s^2 = \frac{n}{n-1} D_в = 8{,}584$ – түзетілген таңдама дисперсиясы;

- таңдама орта квадраттық ауытқуы (Mathcad-та stdev(X) немесе σ) және түзетілген таңдама орта квадраттық ауытқуы (Mathcad-та s): $\sigma = \sqrt{D_в} = 2{,}903$; $s = \sqrt{s^2} = 2{,}93$

- таңдама модасы мен медианасы (Mathcad-та mode(X) және median(X)): мода M_0 = 19 ең үлкен жиілігі бар вариантаны анықтайды; медиана M_e =18 вариациалық қатардың ортасын анықтады және таңдама көлемінің жұптығына байланысты: $M_e = \begin{cases} x_{k+1}, \text{ егер } n = 2k+1 \\ \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, \text{ егер } n = 2k \end{cases}$;

- жиілік және қатысты жиілік статистикалық қатары бойынша (Mathcad –та *y* және *p*) табамыз:

- алдымен бастапқы таңдама және *k*-ші ретті орталық моменттерді (Mathcad –та *M*(*k*) және *m*(*k*)), содан соң, *k* мәнін 3 және 4-ке теңестіріп, бастапқы таңдама $M(3) = 5{,}355 \cdot 10^3$, $M(4) = 9{,}852 \cdot 10^4$ және орталық таңдама $m(3) = -2{,}645$, $m(4) = 147{,}375$ үшінші және төртінші ретті моменттерді аламыз;

- таңдама эксцессі $a_x^* = \frac{m(3)}{\sigma^3} = -0{,}117$;

- асимметрияның таңдама коэффициенті $c_x^* = \frac{m(4)}{\sigma^4} - 3 = -0{,}696$.

Айта кетелік, бұл жерде таңдама ортасы да табылған $M(1) = 16{,}826 = \bar{x}_в$, таңдама дисперсиясы $m(2) = 7{,}997 = D_в$, таңдама орта квадраттық ауытқуы $\sigma = \sqrt{m(2)} = 2{,}828$. Олардың жоғарыда табылған нәтижелерден айырмашылығы біз оларды статистикалық қатар бойынша таптық.

Mathcad-тан файл көшірмесі:

n := 55 :

n := 55

X := (20 15 17 19 23 18 21 15 16 13 20 16 19 20 14 20 16 14 20 19

Y := sort(X^T)

Y^T =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	10	11	12	13	13	14	14	14	14	...

$a := \min(X)$ $b := \max(X)$

$a = 10$ $b = 23$

$R := b - a$ $R = 13$

$$h := \frac{b-a}{1+\frac{\ln(55)}{\ln(2)}} \qquad h = 1.917$$

$h1 := 2$ $m := \frac{R}{h}$

$x0 := a - \frac{h}{2}$ $x0 = 9.041$

$m = 6.781$

$a1 := 9$ $m1 := 7$

$X^T =$

	0
0	20
1	15
2	17
3	19
4	23
5	18
6	21
7	15
8	16
9	13
10	20
11	16
12	19
13	20
14	14
15	...

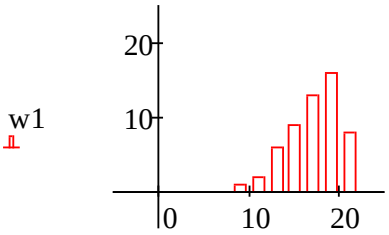
$j := 0..m1$ $i := 0..m1-1$

$t_j := a1 + h1 \cdot j$ $x_i := t_i + \frac{h1}{2}$

$w1 := hist(t, X)$ $w2 := \frac{w1}{n}$ $w1^T = (1 \quad 2 \quad 6 \quad 9 \quad 13 \quad 16 \quad 8)$

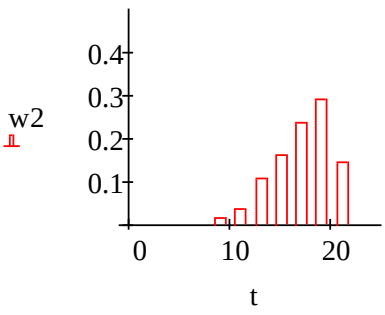
$t^T = (9 \quad 11 \quad 13 \quad 15 \quad 17 \quad 19 \quad 21 \quad 23)$

$x^T = (10 \quad 12 \quad 14 \quad 16 \quad 18 \quad 20 \quad 22)$



$w2^T = (0.018 \quad 0.036 \quad 0.109 \quad 0.164 \quad 0.236 \quad 0.291 \quad 0.145^t)$

$0.018 + 0.036 + 0.109 + 0.164 + 0.236 + 0.291 + 0.145 = 0.999$



$mode(X) = 19$

$x1 := mean(X)$ $x1 = 17.564$

$M := median(X)$ $M = 18$

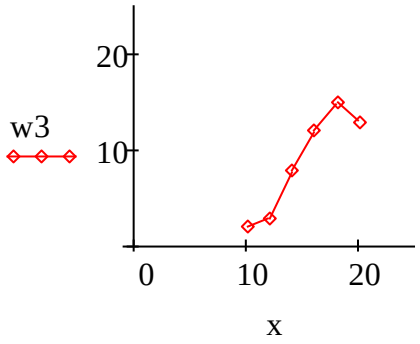
$x2 := var(X)$

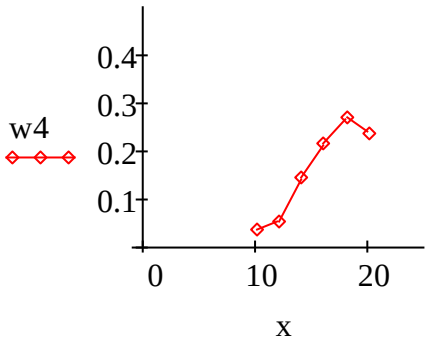
$s2 := \frac{n}{n-1} \cdot x2$

$x2 = 8.428$ $\quad stdev(X) = 2.903$

$s2 = 8.584$ $\quad s := \sqrt{s2}$ $\quad s = 2.93$

$w3 := hist(x, X)$ $\quad w4 := \frac{w3}{n}$



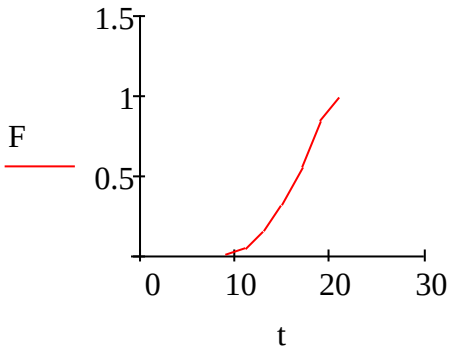


$i := 0..6$

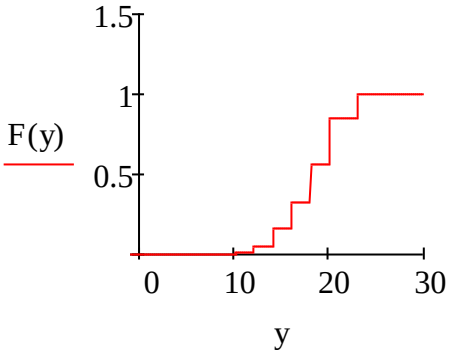
$w := (\ 0.018 \quad 0.036 \quad 0.109 \quad 0.164 \quad 0.236 \quad 0.291 \quad 0.145\ )^T$

$F_i := \sum_{j=0}^{i} w_j$

$F^T = (\ 0.018 \quad 0.054 \quad 0.163 \quad 0.327 \quad 0.563 \quad 0.854 \quad 0.999\ )$



$$F(y) := \begin{cases} 0 & \text{if } y \le 10 \\ 0.018 & \text{if } 10 < y \le 12 \\ 0.054 & \text{if } 12 < y \le 14 \\ 0.163 & \text{if } 14 < y \le 16 \\ 0.327 & \text{if } 16 < y \le 18 \\ 0.563 & \text{if } 18 < y \le 20 \\ 0.854 & \text{if } 20 < y \le 23 \\ 1 & \text{if } y > 23 \end{cases}$$



$y := (10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19 \quad 20 \quad 21 \quad 22 \quad 13)^T$

$p := (0.018 \quad 0.018 \quad 0.018 \quad 0.036 \quad 0.073 \quad 0.073 \quad 0.091 \quad 0.127 \quad 0.109 \quad 0.145 \quad 0.127 \quad 0.091 \quad 0.018 \quad 0.036)^T$

$$M(k) := \sum_{i=0}^{13} \left[(y_i)^k \cdot p_i \right] \qquad m(k) := \sum_{i=0}^{13} \left[(y_i - M(1))^k \cdot p_i \right]$$

$M(1) = 16.826 \qquad m(2) = 7.997 \qquad \sigma := \sqrt{m(2)} \qquad \sigma = 2.828$

$$\frac{m(3)}{\sigma^3} = -0.117 \qquad \frac{m(4)}{\sigma^4} - 3 = -0.696$$

$$M(3) = 5.355 \times 10^3 \qquad m(3) = -2.645$$

$$M(4) = 9.852 \times 10^4 \qquad m(4) = 147.375$$

3. Егер таңдама ортасы 18, таңдама көлемі 25 және орта квадраттық ауытқуы 3 болғанда, 0,95 сенімділікпен қалыпты үлестірілген кездейсоқ шаманың a математикалық үмітін бағалау үшін сенімділік интервалын табу керек.

Шешуі: a математикалық үмітін бағалау үшін сенімділік интервалы келесі түрде беріледі $\bar{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. t –дан басқа шамалар белгілі. t – ны $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$ қатынасынан табамыз, мұндағы $\Phi(t)$- Лаплас функциясы, оның мәні кестеден алынады. Кестеден $t = 1{,}96$. Олай болса, $18 - 1{,}96\frac{3}{\sqrt{25}} < a < 18 + 1{,}96\frac{3}{\sqrt{25}}$. Жауабы: (16,824; 19,176).

4. 1-2 есептердің берілімдері мен нәтижелері үшін қалыпты үлестірім берілген деп ұйғарып, табу керек:

а) таңдама ортасы $\bar{x}_T$ бойынша γ сенімділікпен a математикалық үмітін бағасының дәлдігін;

б) γ сенімділікпен a математикалық үмітін бағалау үшін сенімділік интервалын.

Егер таңдама ортасы $\bar{x}_T$, таңдама көлемі n, мәндерін 3 есептен алу керек.

Шешуі: 1-2 есептерден таңдама ортасы $\bar{x}_в$=17,564, таңдама көлемі n=55, орта квадраттық ауытқуы σ=2,903, 3 есептен γ=0,95:

а) a математикалық үміттің бағасының дәлдігі $\delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$ формуласымен анықталады. 3 есептен: $t = 1{,}96$. Сондықтан дәлдік $\delta = \frac{1{,}96 \cdot 2{,}903}{\sqrt{55}} \approx 0{,}77$;

б) 3 есепте көрсетілген формуладан сенімділік интервалы: $17{,}564 - 1{,}96\frac{2{,}903}{\sqrt{55}} < a < 17{,}564 + 1{,}96\frac{2{,}903}{\sqrt{55}}$ немесе $16{,}794 < a < 18{,}334$.

5. Нысанаға дейінгі ара қашықтық өлшейтін құралдың жүйелі қателігі нөлге тең, ал өлшеудің кездейсоқ қатесі σ =15 орта квадраттық ауытқуымен қалыпты үлестірілген. Ара қашықтықты анықтау үшін қатесі δ =5 -тен артық емес, сенімділігі γ =0,9 болатын қанша тәуелсіз өлшеу жүргізу керек?

Шешуі: математикалық үміттің бағасының дәлдігін анықтайтын $\delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$ формуладан $n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$ аламыз. $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}9}{2} = 0{,}45$ қатынасынан t –ны табамыз. Кестеден $t = 1{,}65$. Сондықтан $n = \frac{1{,}65^2 \cdot 15^2}{5^2} = 24{,}5025$. Олай болса, 25 –тен кем емес өлшеу жүргізу керек.

Әдебиеттер тізімі

1 Жаңбырбаев Б.С. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика элементтері. -Алматы. 2006 – 184 бет.

2 Қазешев А. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. – Алматы, 2011.

3 Мұстахишев К.М., Ералиев С.Е., Атабай Б.Ж. Математика (толық курс). -Алматы, 2009. -358 бет.

4 Қазешев А. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика бойынша есептер жинағы. – Алматы, 2005.

5 Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. 5В070400 – Есептеу техникасы және бағдарламалық қамтамасыз ету, 5В070300 – Ақпараттар жүйесі мамандықтарының студенттері үшін дәрістер жинағы. - Алматы: АЭжБУ, 2013.- 49 б.

Мазмұны

1 Есептік-сызба жұмыс №1. Кездейсоқ оқиғалар мен кездейсоқ шамалар..... 3
1.2 Есептік тапсырмалар ……..... 3
1.3 Типтік нұсқаның шешуі …….. 12
2 Есептік- сызба жұмыс №3. Математикалық статистика элементтері..... 30
2.2 Есептік тапсырмалар …….. 30
2.3 Типтік нұсқаның шешуі ……..... 37
Әдебиеттер тізімі…… 46

2017 ж. қосымша жоспары, реті 12

Астраханцева Людмила Николаевна
Байсалова Мәншүк Жұмамұратқызы

НӘТИЖЕЛЕРДІ МАТЕМАТИКАЛЫҚ ӨҢДЕУ

5В070200 -Автоматтандыру және басқару мамандығы бойынша оқитын студенттер үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар

Редактор Ж.Н.Изтелеуова
Стандарттау бойынша маман Н.Қ.Молдабекова

Басуға_____ қол қойылды
Таралымы 25 дана
Көлемі 2,88 баспа табақ

Пішімі 60х84 1/16
Баспаханалық қағаз №1
Тапсырыс Бағасы 1440 тг.

«Алматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірме-көбейткіш бюросы
050013 Алматы, Байтұрсынұлы көшесі, 126