Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра математического моделирования и программного обеспечения

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности
5В100200 - Системы информационной безопасности

Алматы 2017

СОСТАВИТЕЛИ: Толеуова Б.Ж., Отарова А.Г. Теория вероятностей и математическая статистика. Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 5В100200- Системы информационной безопасности. - Алматы: АУЭС, 2017. - 36 с.

Методические указания и задания к расчетно-графическим работам содержат типовые расчеты №1, №2 дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов очной формы обучения специальности 5В100200 - Системы информационной безопасности. Приведены основные теоретические вопросы программы. Дано решение типового варианта.

Ил. 11, табл. 34, библиогр. назв. 6.

Рецензент: доцент каф. ИКТ Гармашова Ю.М.

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2017 г.

© НАО «Алматинский университет энергетики и связи», 2017 г.

Сводный план 2017 г., поз. 131

Толеуова Багила Жаксылыковна
Отарова Анар Гайппаевна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности
5В100200 - Системы информационной безопасности

Редактор: Н.М. Голева
Специалист по стандартизации : Н.К. Молдабекова

Подписано в печать_____ Формат 60х84 1/16
Тираж 20 экз. Бумага типографская №1
Объем 2,18 уч.-из.л. Заказ_____ цена 1094 тг.

Копировально-множительное бюро
некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013, Алматы, ул.Байтурсынова, 126

Введение

Наблюдаемые в окружающей нас действительности события (явления) можно разделить на три вида: достоверные, невозможные и случайные. Каждое случайное событие есть следствие действия очень многих причин. Невозможно учесть влияние этих причин на результат, поскольку их очень много и законы их действия неизвестны. Теория вероятностей не ставит перед собой задачу предсказать, произойдет событие или нет. Но когда речь идет о массовых однородных случайных событиях, то оказывается, что достаточное большое число однородных случайных событий независимо от их природы подчиняются определенным закономерностям. Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники. А также теория вероятностей служит для обоснования математической и прикладной статистики.

Методические указания содержат расчетно-графические работы по разделам «Теория вероятностей и математическая статистика».

В каждой части приведены теоретические вопросы и материалы. Дано решение типового варианта.

1 Расчётно-графическая работа №1. Теория вероятностей

Цели: ознакомиться с понятием случайного события, его вероятностью, основными теоремами теории вероятностей, ознакомиться с законами распределения и числовыми характеристиками случайных величин, основными законами распределения случайных величин.

1.1 Теоретические вопросы

1.Предмет теории вероятностей. Классическое, статистическое и геометрическое определения вероятности.

2. Пространство элементарных событий. Алгебра событий. Определение вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность.

3. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

4. Повторение испытаний. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. Теорема Пуассона.

5. Дискретные и непрерывные случайные величины. Законы распределения случайных величин и их числовые характеристики.

6. Законы распределения вероятностей ДСВ: гипергеометрическое, геометрическое, биномиальное, пуассоновское, их числовые характеристики.

7. Законы распределения вероятностей НСВ: равномерное, показательное, нормальное распределения, их основные характеристики.

8. Понятие о предельных теоремах. Закон больших чисел, центральная предельная теорема.

1.2 Расчётные задания

1. В урне n шаров, среди них m белых, остальные красные. Найти:

а) относительную частоту белых шаров;

б) вероятность того, что все m наугад взятых шаров будут белыми;

в) вероятность того, что среди k наугад взятых шаров будет m_1 белых;

г) вероятность того, что среди m наугад взятых шаров будет хотя бы один белый.

№	n	m	k	m_1	№	n	m	k	m_1
1.1	70	8	5	3	1.16	100	25	10	8
1.2	75	9	8	4	1.17	90	15	12	7
1.3	85	6	5	2	1.18	85	10	7	4
1.4	90	12	7	4	1.19	80	9	5	3
1.5	87	10	8	3	1.20	95	15	9	3
1.6	100	30	15	5	1.21	70	10	9	5
1.7	90	20	9	3	1.22	80	15	7	5
1.8	95	15	10	4	1.23	90	10	6	4
1.9	85	10	7	2	1.24	75	10	8	4
1.10	90	12	6	3	1.25	100	20	10	7
1.11	85	10	5	2	1.26	90	10	8	5
1.12	75	8	5	3	1.27	80	7	5	3
1.13	100	15	9	4	1.28	95	10	8	5
1.14	80	10	7	4	1.29	96	12	7	1
1.15	85	7	5	2	1.30	89	13	5	2

2. Три стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в цель для первого, второго и третьего стрелка соответственно p_1, p_2, p_3. Найти вероятность того, что:

а) попадёт только один;

б) попадут все трое;

в) попадёт хотя бы один.

№	p_1	p_2	p_3	№	p_1	p_2	p_3	№	p_1	p_2	p_3
2.1	0,5	0,7	0,9	2.11	0,9	0,6	0,5	2.21	0,5	0,9	0,4
2.2	0,6	0,5	0,8	2.12	0,8	0,7	0,6	2.22	0,7	0,8	0,5
2.3	0,7	0,9	0,7	2.13	0,7	0,5	0,8	2.23	0,5	0,7	0,6
2.4	0,8	0,4	0,6	2.14	0,6	0,9	0,8	2.24	0,4	0,6	0,7
2.5	0,9	0,5	0,5	2.15	0,5	0,7	0,9	2.25	0,5	0,5	0,8
2.6	0,4	0,6	0,8	2.16	0,9	0,6	0,8	2.26	0,6	0,9	0,5
2.7	0,5	0,7	0,9	2.17	0,8	0,5	0,7	2.27	0,7	0,8	0,6
2.8	0,6	0,8	0,7	2.18	0,5	0,8	0,6	2.28	0,8	0,5	0,7

2.9	0,7	0,9	0,5	2.19	0,6	0,9	0,5	2.29	0,9	0,6	0,8
2.10	0,8	0,9	0,4	2.20	0,7	0,9	0,4	2.30	0,9	0,4	0,9

3. При отправке сообщения вероятность допущения одной ошибки равна 1-*p*. Найти вероятность того, что в тексте из *n* знаков допущены:

а) k_1 ошибок;

б) не менее k_2 ошибок;

в) не более k_3 ошибок.

№	n	k_1	k_2	k_3	p	№	n	k_1	k_2	k_3	p
3.1	4	2	3	2	0,9	3.16	5	3	4	2	0,8
3.2	4	3	3	2	0,8	3.17	4	3	3	1	0,7
3.3	5	4	4	2	0,7	3.18	4	2	3	2	0,6
3.4	5	3	3	2	0,6	3.19	5	3	4	1	0,5
3.5	6	5	5	1	0,5	3.20	6	4	5	2	0,4
3.6	6	4	4	1	0,4	3.21	7	5	6	2	0,3
3.7	7	5	5	2	0,3	3.22	8	3	7	2	0,2
3.8	7	4	4	1	0,2	3.23	8	4	7	1	0,3
3.9	8	4	7	2	0,3	3.24	7	5	6	2	0,4
3.10	8	3	6	1	0,4	3.25	6	3	5	2	0,5
3.11	7	4	6	2	0,5	3.26	5	2	4	1	0,6
3.12	7	5	6	1	0,6	3.27	4	2	3	2	0,7
3.13	6	3	4	2	0,7	3.28	5	3	3	3	0,8
3.14	6	2	4	2	0,8	3.29	6	4	4	2	0,9
3.15	5	4	4	1	0,9	3.30	7	5	6	1	0,9

4. Промышленное оборудование состоит из *n* транзисторов. Вероятность выхода из строя одного транзистора равна *p*. Найти вероятность выхода из строя *k* транзисторов.

№	p	n	k	№	P	n	k	№	p	n	k
4.1	0,002	1000	7	4.11	0,01	2000	8	4.21	0,004	5000	9
4.2	0,003	1000	7	4.12	0,01	3000	8	4.22	0,005	6000	9
4.3	0,004	1000	7	4.13	0,02	2000	8	4.23	0,01	4000	9
4.4	0,005	1000	7	4.14	0,01	5000	8	4.24	0,01	5000	9
4.5	0,006	1000	7	4.15	0,02	3000	8	4.25	0,01	6000	9
4.6	0,007	1000	7	4.16	0,01	7000	8	4.26	0,007	1000	9
4.7	0,008	1000	7	4.17	0,02	4000	8	4.27	0,008	1000	9
4.8	0,009	1000	7	4.18	0,01	9000	8	4.28	0,009	1000	9
4.9	0,01	1000	7	4.19	0,02	5000	8	4.29	0,01	1000	9
4.10	0,011	1000	7	4.20	0,011	1000	8	4.30	0,012	1000	9

5. Вероятность появления события *A* в каждом испытании равна *p*. Найти вероятность появления события *A* при *n* испытании:

а) ровно k_1 раз;

б) для 1-15 вариантов от k_1 до k_2 раза; для 16-30 вариантов более k_2 раз.

№	n	k_1	k_2	p	№	n	k_1	k_2	p
5.1	100	80	90	0,8	5.16	100	90	95	0,6
5.2	100	85	95	0,8	5.17	100	62	82	0,6
5.3	100	70	95	0,8	5.18	100	50	70	0,8
5.4	100	83	93	0,7	5.19	100	55	75	0,8
5.5	100	50	60	0,7	5.20	100	45	80	0,8
5.6	100	65	75	0,7	5.21	100	40	60	0,8
5.7	100	70	80	0,7	5.22	100	35	70	0,3
5.8	100	40	50	0,6	5.23	100	50	80	0,3
5.9	100	65	80	0,75	5.24	100	40	65	0,3
5.10	100	70	85	0,75	5.25	200	45	75	0,4
5.11	100	78	92	0,75	5.26	200	100	150	0,4
5.12	100	20	60	0,7	5.27	200	80	170	0,4
5.13	100	30	85	0,7	5.28	300	150	180	0,8
5.14	100	40	79	0,7	5.29	400	100	190	0,6
5.15	100	80	95	0,6	5.30	400	200	295	0,7

6. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения. Найти:

а) функцию распределения $F(x)$;

б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду;

в) вероятность попадания X в интервал $(a;b)$.

№	X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a	b
	p	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6		
6.1	X	0	1	2	4	6	9	-2	7
	p	0,05	0,15	0,3	0,25	0,15	0,1		
6.2	X	-3	-2	-1	0	2	4	-1	3
	p	0,15	0,3	0,02	0,14	0,18	0,31		
6.3	X	1	2	3	5	7	8	-3	6
	p	0,3	0,14	0,16	0,1	0,2	0,1		
6.4	X	-4	-3	-2	0	1	2	0	1
	p	0,2	0,08	0,23	0,27	0,12	0,1		
6.5	X	1	2	4	5	7	9	3	8
	p	0,19	0,21	0,06	0,14	0,12	0,28		
6.6	X	-1	0	2	3	5	7	-4	4
	p	0,26	0,14	0,07	0,2	0,03	0,3		
6.7	X	-2	-1	0	3	5	7	1	6
	p	0,18	0,09	0,01	0,2	0,22	0,3		
6.8	X	1	2	4	5	6	8	0	6
	p	0,3	0,17	0,13	0,1	0,2	0,1		

6.9	X	1	2	3	4	7	9	5	8
	p	0,11	0,29	0,06	0,14	0,17	0,23		
6.10	X	0	1	2	3	7	9	4	8
	p	0,06	0,14	0,3	0,25	0,15	0,1		
6.11	X	-3	-2	0	1	2	4	-1	3
	p	0,15	0,3	0,01	0,14	0,19	0,31		
6.12	X	-1	0	3	5	7	8	1	6
	p	0,25	0,14	0,16	0,1	0,2	0,15		
6.13	X	-4	-3	-2	0	2	4	-1	3
	p	0,2	0,07	0,24	0,26	0,13	0,1		
6.14	X	-3	-1	0	3	4	7	-2	6
	p	0,12	0,09	0,01	0,2	0,28	0,3		
6.15	X	-1	0	1	3	7	8	2	6
	p	0,26	0,14	0,15	0,2	0,3	0,15		
6.16	X	-2	-1	0	1	2	7	-3	5
	p	0,17	0,09	0,01	0,3	0,23	0,2		
6.17	X	1	2	3	5	6	7	0	4
	p	0,1	0,14	0,16	0,1	0,2	0,3		
6.18	X	-3	-1	0	3	5	6	-2	4
	p	0,16	0,09	0,01	0,3	0,24	0,2		
6.19	X	1	2	5	6	7	8	3	6
	p	0,2	0,15	0,15	0,1	0,3	0,1		
6.20	X	-1	0	2	4	7	8	1	5
	p	0,23	0,18	0,12	0,2	0,1	0,17		
6.21	X	1	2	4	5	6	8	0	7
	p	0,3	0,14	0,16	0,03	0,2	0,17		
6.22	X	-4	-3	-1	0	1	3	-2	2
	p	0,2	0,03	0,24	0,26	0,17	0,1		
6.23	X	1	2	3	4	7	9	0	8
	p	0,17	0,23	0,09	0,11	0,12	0,28		
6.24	X	0	1	3	5	7	8	2	6
	p	0,2	0,14	0,16	0,12	0,3	0,08		
6.25	X	-5	-3	-2	0	1	3	-4	2
	p	0,2	0,06	0,21	0,29	0,14	0,1		
6.26	X	1	2	3	5	8	9	4	7
	p	0,18	0,22	0,05	0,15	0,12	0,28		
6.27	X	1	3	4	5	7	8	2	6
	p	0,3	0,16	0,14	0,01	0,2	0,19		
6.28	X	-5	-3	-1	0	1	3	-4	2
	p	0,1	0,03	0,14	0,36	0,17	0,2		
6.29	X	0	2	3	4	6	8	1	7
	p	0,26	0,14	0,05	0,15	0,12	0,28		

6.30	X	-1	0	2	3	7	8	1	6
	p	0,21	0,16	0,14	0,1	0,2	0,19		

7. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти:

а) её плотность распределения $f(x)$;

б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду, медиану;

в) вероятность попадания X в интервал $(a;b)$.

№	$F(x)$	a	b	№	$F(x)$	a	b
7.1	$\begin{cases} 0, \text{ если } x\langle 0 \\ \frac{1}{8}x^3, \text{ если } 0\le x\le 2 \\ 1, \text{ если } x\rangle 2 \end{cases}$	0	4	7.16	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ \frac{1}{5}(x+1), \text{ если } -1\le x\le 4 \\ 1, \text{ если } x>4 \end{cases}$	0	3
7.2	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ \frac{1}{33}(2x^2+5x), \text{ если } 0\le x\le 3 \\ 1, \text{ если } x>3 \end{cases}$	1	2	7.17	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ \sin x, \text{ если } 0\le x\le \pi/2 \\ 1, \text{ если } x>/2\pi \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{6}$
7.3	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ \frac{1}{9}x^2, \text{ если } 0\le x\le 3 \\ 1, \text{ если } x>3 \end{cases}$	0	1	7.18	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ (x^3+3x), \text{ если } 0\le x\le 2 \\ 1, \text{ если } x>2 \end{cases}$	0,2	0,9
7.4	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ \frac{1}{24}(2x^2+5x), \text{ если } 0\le x\le 4 \\ 1, \text{ если } x>4 \end{cases}$	0	1	7.19	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ (x^2-x)/2, \text{ если } 1\le x\le 2 \\ 1, \text{ если } x>2 \end{cases}$	1,5	2
7.5	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ \frac{1}{10}(x^3+x), \text{ если } 0\le x\le 2 \\ 1, \text{ если } x>2 \end{cases}$	0	1	7.20	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ (x^2+x)/6, \text{ если } 0\le x\le 2 \\ 1, \text{ если } x>2 \end{cases}$	0	1,5
7.6	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ \frac{1}{20}(x^3+x), \text{ если } 0\le x\le 4 \\ 1, \text{ если } x>4 \end{cases}$	0	3	7.21	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ \frac{1}{10}(x^2+3x), \text{ если } 0\le x\le 2 \\ 1, \text{ если } x>2 \end{cases}$	1	1,5

7.7	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ \cos 2x, \text{ если } 3\pi/4 \le x \le \pi \\ 1, \text{ если } x>\pi \end{cases}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	7.22	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ \frac{1}{4}(x^2-2x), \text{ если } 1 \le x \le 2 \\ 1, \text{ если } x>2 \end{cases}$	1,2	1,5
7.8	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ 1-\cos x, \text{ если } 0 \le x \le \pi/2 \\ 1, \text{ если } x>\pi/2 \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{3}$	7.23	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<2 \\ \frac{1}{2}x-1, \text{ если } 2 \le x \le 4 \\ 1, \text{ если } x>4 \end{cases}$	1	3
7.9	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ \frac{1}{96}(x^3+8x), \text{ если } 0 \le x \le 4 \\ 1, \text{ если } x>4 \end{cases}$	0	2	7.24	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ \frac{1}{6}x, \text{ если } 0 \le x \le 6 \\ 1, \text{ если } x>6 \end{cases}$	2	5
7.10	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<-1 \\ \frac{1}{9}(x+1)^2, \text{ если } -1 \le x \le 2 \\ 1, \text{ если } x>2 \end{cases}$	1	2	7.25	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<-1 \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}, \text{ если } -1 \le x \le 1 \\ 1, \text{ если } x>1 \end{cases}$	-0,5	0,2
7.11	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<\pi/2 \\ 1-\sin x, \text{ если } \pi/2 \le x \le \pi \\ 1, \text{ если } x>\pi \end{cases}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	7.26	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<2 \\ (x-2)^2, \text{ если } 2 \le x \le 3 \\ 1, \text{ если } x>3 \end{cases}$	2,5	2,8
7.12	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<-1 \\ \frac{1}{9}(x^3+1), \text{ если } -1 \le x \le 2 \\ 1, \text{ если } x>2 \end{cases}$	1	2	7.27	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<1 \\ \frac{1}{2}(x^2-x), \text{ если } 1 \le x \le 2 \\ 1, \text{ если } x>2 \end{cases}$	1,5	1,9
7.13	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ \frac{1}{33}(3x^2+2x), \text{ если } 0 \le x \le 3 \\ 1, \text{ если } x>3 \end{cases}$	0	2	7.28	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<\pi/2 \\ -\cos x, \text{ если } \pi/2 \le x \le \pi \\ 1, \text{ если } x>\pi \end{cases}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
7.14	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<3\pi/2 \\ \cos x, \text{ если } 3\pi/2 \le x \le 2\pi \\ 1, \text{ если } x>2\pi \end{cases}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	7.29	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<1 \\ \frac{1}{4}(x-1), \text{ если } 1 \le x \le 5 \\ 1, \text{ если } x>5 \end{cases}$	2	4

7.15	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ \frac{1}{15}(x^2+2x), \text{ если } 0\le x\le 3 \\ 1, \text{ если } x>3 \end{cases}$	0	2	7.30	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ \frac{1}{2}(1-\cos x), \text{ если } 0\le x\le \pi \\ 1, \text{ если } x>\pi \end{cases}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

8. Случайная величина X в отрезке $[0;a]$ распределена равномерно. Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание, дисперсию;

г) вероятность того, что $X< m$.

№	a	m	№	A	M	№	a	m
8.1	0,2	0,04	8.11	0,3	0,08	8.21	19	8
8.2	0,3	0,02	8.12	0,6	0,01	8.22	20	5
8.3	0,1	0,06	8.13	0,9	0,06	8.23	25	5
8.4	0,5	0,01	8.14	0,5	0,05	8.24	9	3
8.5	0,6	0,05	8.15	0,8	0,07	8.25	14	7
8.6	0,9	0,02	8.16	5	3	8.26	18	9
8.7	0,1	0,08	8.17	10	4	8.27	24	8
8.8	0,7	0,01	8.18	15	5	8.28	6	3
8.9	0,4	0,06	8.19	6	2	8.29	12	6
8.10	0,5	0,07	8.20	20	10	8.30	16	8

9. Время безотказной работы радиолампы (случайная величина T) имеет показательное распределение, где T_0 – среднее число отказов радиолампы в единицу времени. Найти:

а) плотность распределения $f(t)$;

б) функцию распределения $F(t)$, указать её вероятностный смысл;

в) функцию надёжности $R(t)$, указать её вероятностный смысл;

г) математическое ожидание, дисперсию;

д) вероятность того, что за время t элемент откажет и вероятность того, что за время t элемент не откажет.

№	T_0	t	№	T_0	t	№	T_0	t
9.1	2	*5*	9.11	3	*8*	9.21	1	*5*
9.2	3	*10*	9.12	4	*4*	9.22	2	*10*
9.3	4	*6*	9.13	6	*3*	9.23	3	*6*
9.4	6	*8*	9.14	7	*2*	9.24	4	*8*
9.5	7	*4*	9.15	8	*1*	9.25	6	*4*
9.6	8	*3*	9.16	9	*10*	9.26	7	*3*
9.7	9	*2*	9.17	10	*6*	9.27	8	*2*

9.8	10	*1*	9.18	1	*7*	9.28	9	*1*
9.9	1	*10*	9.19	2	*8*	9.29	10	*7*
9.10	2	*6*	9.20	3	*2*	9.30	1	*9*

10. Случайная ошибка измерения (случайная величина X) подчинена нормальному закону распределения с параметрами a и σ. Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание, дисперсию;

г) вероятность попадания в интервал $(\alpha;\beta)$;

д) вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине δ. Построить графики $F(t)$ и $f(t)$.

№	a	σ	α	β	δ	№	a	σ	α	β	δ
10.1	10	2	9	14	2	10.16	10	1	8	14	2
10.2	12	4	5	14	3	10.17	12	2	7	14	3
10.3	14	1	9	15	5	10.18	14	3	10	15	5
10.4	11	6	8	12	3	10.19	11	5	9	12	3
10.5	13	4	6	17	2	10.20	13	2	6	13	2
10.6	12	9	8	15	4	10.21	12	3	7	15	4
10.7	10	3	6	17	2	10.22	10	2	8	17	2
10.8	12	5	6	13	6	10.23	12	4	6	14	6
10.9	14	2	12	19	5	10.24	14	6	11	19	5
10.10	15	3	4	12	3	10.25	15	5	8	12	3
10.11	17	1	5	14	2	10.26	17	4	6	14	2
10.12	12	4	9	18	4	10.27	12	5	7	18	4
10.13	11	3	4	12	3	10.28	18	5	6	12	3
10.14	17	2	5	19	5	10.29	10	4	6	15	2
10.15	13	5	6	18	3	10.30	12	3	5	18	4

1.3 Решение типового варианта

1. В урне 120 шаров, среди них 40 белых, остальные красные. Найти:

а) относительную частоту белых шаров;

б) вероятность того, что все m=12 наугад взятых шаров будут белыми;

в) вероятность того, что среди k=10 наугад взятых шаров будет m_1=8 белых;

г) вероятность того, что среди m=12 наугад взятых шаров будет хотя бы один белый.

Решение: а) относительной частотой события A (обозначается ω) называется отношение числа m испытаний, в которых событие A появилось, к общему числу n произведённых испытаний: $\omega = m/n$.

Относительная частота белых шаров равна ω = 40/120= = 1/3.

В пунктах б) и в) используем классическое определение вероятности события A: $P(A) = m/n$, где m – число испытаний, благоприятствующих появлению события A, n – общее число испытаний;

б) пусть событие A – все m=12 наугад взятые шары будут белыми. Общее число элементарных событий равно числу различных способов взять 12 шаров из 120, т.е. $n = C_{120}^{12}$; число благоприятствующих событий равно числу различных способов взять из 40 шаров 12, т.е. $m = C_{40}^{12}$. Таким образом, $P(A) = m/n = C_{40}^{12} / C_{120}^{12} = 52{,}99 \times 10^{-8}$;

в) пусть событие A – среди 10 взятых шаров будет 8 белых.
$n = C_{120}^{10}$; число благоприятствующих событий равно $m = C_{40}^{8} \cdot C_{80}^{2}$. Таким образом, $P(A) = m/n = C_{40}^{8} \cdot C_{80}^{2} / C_{120}^{10} = 0{,}152$;

г) пусть событие A – среди 12 взятых шаров будет хотя бы один белый, тогда противоположное событие $\overline{A}$ - среди 12 взятых шаров не будет ни одного белого. $P(\overline{A}) = m / n = C_{80}^{12} / C_{120}^{12} = 0{,}0057$. Тогда вероятность события A равна $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}0057 \approx 0{,}9943$, т.е. это событие почти достоверное.

2. Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого, второго и третьего стрелков соответственно 0,75, 0,8, 0,9. Найти вероятность того, что:

а) попадёт только один;

б) попадут все трое;

в) попадёт хотя бы один.

Решение: пусть событие A_1 – попадание в цель первым стрелком, A_2 – вторым, A_3 – третьим. По условию $P(A_1)$=0,75, $P(A_2)$=9,8, $P(A_3)$=0,9:

а) пусть событие A - попадёт только один, тогда $A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$, где $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ события противоположные A_1, A_2, A_3, т.е. промах первого, второго и третьего стрелков соответственно. Так как $P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$, $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, $P(\overline{A}_3) = 1 - P(A_3) =$ $= 1 - 0{,}9 = 0{,}1$ и т.к. слагаемые есть события несовместные, то
$P(A) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) =$
$0{,}75 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}25 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}08$;

б) пусть событие B - все трое попадут в цель, тогда $B = A_1A_2A_3$ и, т.к. A_1, A_2, A_3 события независимые, то $P(B) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) =$ $= 0{,}75 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}54$;

в) событие C - попадёт хотя бы один стрелок, рассмотрим противоположное событие $\overline{C}$ - промахнутся все трое. Т.к. $\overline{C} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, то $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = 1 - 0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}995$.

3. При отправке сообщения вероятность допущения одной ошибки равна 1-p (p=0,8). Найти вероятность того, что в тексте из n =5 знаков допущены:

а) k_1 = 3 ошибки;

б) не менее k_2 = 2 ошибок;

в) не более k_3 =1 ошибки.

Решение: а) пусть событие A – допущение трех ошибок при отправке сообщения из 5 знаков. Вероятность события A вычисляем по формуле Бернулли:

$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $P_n(k)$ – вероятность появления события A при n независимых испытаниях ровно k $(k = 0,1,2,..n)$ раз. Так как $p = 0,8;\quad q = 1 - p = 0,2$, то $P(A) = P_5(3) = C_5^3 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^2$=0,2048;

б) пусть событие B – допущение не менее двух ошибок при отправке сообщения из 5 знаков. Вероятность события B равна сумме вероятностей:

$P(B) = P_5(2) + P_5(3) + P_5(4) + P_5(5)$.

Но так как вычисление вероятности события B требует громоздких вычислений, то воспользуемся формулой

$P(B) = 1 - P(\overline{B})$ $= 1 - \left(P_5(0) + P_5(1)\right)$=1-(0,00032+0,0064)=0,99328;

в) пусть событие C – допущение не более одной ошибки при отправке сообщения из 5 знаков, тогда вероятность события C равна:

$$P(C) = P_5(0) + P_5(1) = 0,00672.$$

4. Промышленное оборудование состоит из n=1000 транзисторов. Вероятность выхода из строя одного транзистора равна p=0,003. Найти вероятность выхода из строя k=6 транзисторов.

Решение: число элементарных событий n очень большое, p очень малое, $\lambda = n \cdot p$ – малое число, поэтому вероятность появления события при n независимых испытаниях ровно k раз $P_n(k)$ вычисляем не по формуле Бернулли, а по формуле Пуассона: $P_n(k) \approx \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$.

n=1000, k=6, p=0,003, $\lambda = 1000 \cdot 0,003 = 3$, $P_{1000}(6) = \dfrac{3^6 \cdot e^{-3}}{6!} = 0,05.$

5. Вероятность появления события A в каждом испытании равна p=0,8. Найти вероятность появления события A при n=100 испытаниях:

а) ровно k_1=80 раз (событие A);

б) от 70 до 80 раз (событие B).

Решение: т.к. число элементарных событий n очень большое, то вероятность появления события при n независимых испытаниях ровно k раз вычисляем по локальной теореме Муавра-Лапласа:

$$P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \quad \text{где} \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}, \quad 0 < p < 1, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2)$$

(значения этой функции находим по таблице).

Для вычисления вероятности события B воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad \text{где} \qquad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}},$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \exp(-t^2/2)dt$ – функция Лапласа. Значения этой функции также находим по таблице.

а) $x = \frac{80 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 0$, $P_{100}(80) \cong \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\varphi(0) = 0{,}399$;

б) $P_{100}(70{,}80) \approx \Phi(\frac{80 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}) - \Phi(\frac{70 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}) = \Phi(0) - \Phi(-2{,}5) = 0{,}494.$

6. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	0	10	20	30	40	50
P	0,05	0,15	0,3	0,25	0,2	0,05

Найти:

а) функцию распределения $F(x)$;

б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду;

в) вероятность попадания X в интервал (15;45).

Решение: а) функция $F(x)$ определяет вероятность события $X<x$. Для дискретной случайной величины она определяется формулой $F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$:

- если $x \le 0$, то $F(x) = P(X < 0) = 0$;
- если $0 < x \le 10$, то $F(x) = P(X = 0) = 0{,}05$;
- если $10 < x \le 20$, то $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) = 0{,}05 + 0{,}15 = 0{,}2$;
- если $20 < x \le 30$, то

$F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$;

- если $30 < x \le 40$, то

$F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30) = 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75$;

- если $40 < x \le 50$, то $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) +$

$+ P(X = 30) + P(X = 40) = 0{,}75 + 0{,}2 = 0{,}95$;

- если $x > 50$, то

$F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30) + P(X = 40) + P(X = 50) =$

$= 0{,}95 + 0{,}05 = 1$.

Итак,

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x\le 0 \\ 0{,}05, \text{ если } 0<x\le 10 \\ 0{,}2, \text{ если } 10<x\le 20 \\ 0{,}5, \text{ если } 20<x\le 30 \\ 0{,}75, \text{ если } 30<x\le 40 \\ 0{,}95, \text{ если } 40<x\le 50 \\ 1, \text{ если } x>50 \end{cases};$$

б) вычисляем числовые характеристики случайной величины X:

$M(X)=0\cdot 0{,}15+10\cdot 0{,}15+20\cdot 0{,}3+30\cdot 0{,}25+40\cdot 0{,}2+50\cdot 0{,}05=25{,}5;$

$D(X)=154{,}75;\ \sigma(x)=\sqrt{154{,}75}=12{,}44;\ \ M_0=20;$

$P(15;45)=F(45)-F(15)=0{,}75.$

7. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x<2 \\ (x-2)^2, \text{ если } 2\le x\le 3 \\ 1, \text{ если } x>3 \end{cases}$. Найти:

а) её плотность распределения $f(x)$;

б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду, медиану;

в) вероятность попадания X в интервал (1; 2,5).

Решение: а) плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины равна производной её функции распределения: $f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x<2 \\ 2(x-2), \text{ если } 2\le x\le 3 \\ 0, \text{ если } x>3 \end{cases};$

б) $M(x)=\int\limits_{-\infty(a)}^{\infty(b)} xf(x)dx,$ $\qquad M(x)=\int\limits_{2}^{3} 2x(x-2)=8/3;$

$D(x)=\int\limits_{-\infty(a)}^{\infty(b)}(x-M(x))^2 f(x)dx,$ $\qquad D(x)=\int\limits_{2}^{3} x^2\cdot 2(x-2)dx-(8/3)^2=1/18;$

$\sigma(X)=\sqrt{1/18}=$ 0,236. Для определения моды надо найти максимум функции $f(x)=2(x-2)$ на отрезке [2; 3]. Поскольку эта функция линейная, то её максимум достигается на конце отрезка, т.е. $f_{\max}=f(3)=2$. Итак, M_o=3. Медиану можно найти из условия $P(X<M_e)=0{,}5$, где вероятность $P(X<M_e)=P(-\infty<X<M_e)=$ $P(2<X<M_e)$ находится по формуле $P(a<X<b)=\int\limits_a^b f(x)dx$ или по формуле $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$- вероятность попадания случайной величины в промежуток (a; b). Так как

$P(2 < X < M_e) = \int_2^{M_e} 2(x-2)dx = (M_e - 2)^2$, то, решая уравнение $(M_e - 2)^2 =$ 0,5, получим два корня 1,29 и 2,71, из которых подходит один: M_e = 2,71;

в) вероятность попадания X в интервал (1; 2,5) находим по выше приведённым формулам $P(1 < X < 2{,}5) = P(1 < X < 2) + P(2 < X < 2{,}5) =$

$= 0 + \int_2^{2,5} 2(x-2)dx = 0{,}25$ или $P(1 < X < 2{,}5) = F(2{,}5) - F(1) = (2{,}5-2)^2 - 0 = 0{,}25$.

8. Случайная величина X в отрезке [0; 0,2] распределена равномерно.

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание, дисперсию;

г) вероятность того, что X< 0,04.

Решение: а) плотность распределения находим по формуле:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{егер } x \in (a,b), \\ 0, & \text{егер } x \notin (a,b). \end{cases}$$

Т.к. a=0, b=0,2, то $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{0{,}2} = 5, & \text{егер } x \in (0;0{,}2), \\ 0, & \text{егер } x \notin (0;0{,}2); \end{cases}$

б) функцию распределения находим по формуле

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{егер } a < x \le b, \\ 1, & \text{егер } x > b \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \le 0, \\ 5x, & \text{егер } 0 < x \le 0{,}2, \\ 1, & \text{егер } x > 0{,}2; \end{cases}$$

в) $M(X) = \dfrac{a+b}{2}$=0,1, $D(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$=0,003;

г) вероятность попадания в интервал (α, β) вычисляем по формуле: $P(a < \alpha < X < \beta \le b) = \dfrac{\beta - \alpha}{b-a} = F(b) - F(a)$.

Тогда вероятность того, что X < 0,04 равна:

$$P(X < 0{,}04) = P(\infty < X < 0{,}04) = F(0{,}04) - F(0) = \frac{0{,}04}{0{,}2} - \frac{0}{0{,}2} = 0{,}02.$$

9. Время безотказной работы элемента (случайная величина T) имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0{,}5$, где λ – интенсивность отказов, т.е. среднее число отказов в единицу времени. Найти:

а) плотность распределения $f(t)$;

б) функцию распределения $F(t)$, указать её вероятностный смысл;

в) функцию надёжности $R(t)$, указать её вероятностный смысл;

г) математическое ожидание, дисперсию;

д) вероятность того, что за время t элемент откажет и вероятность того, что за время t элемент не откажет.

Решение: показательным называют закон распределения непрерывной случайной величины X с плотностью $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{ если } x\geq 0 \end{cases}$. Другие понятия и формулы для показательного распределения: $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ 1-e^{-\lambda x}, \text{ если } x\geq 0 \end{cases}$ - функция распределения; если случайная величина $X=T$ – время безотказной работы элемента, то $F(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t}$ определяет вероятность отказа элемента за время t; $R(t)=P(T>t)=e^{-\lambda t}$ – функция надёжности, определяет вероятность безотказной работы элемента за время t;

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\ \sigma(X)=\frac{1}{\lambda};\ P(\alpha<X<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}.$$

В нашей задаче, учитывая то, что $t\geq 0$, имеем:

а) $f(t)=0{,}5e^{-0{,}5t}$;

б) $F(t)=P(T<t)=1-e^{-0{,}5t}$, определяет вероятность отказа элемента за время t;

в) $R(t)=e^{-0{,}5t}$, определяет вероятность безотказной работы элемента за время t;

г) $M(X)=\frac{1}{0{,}5}=2$; $D(X)=\frac{1}{0{,}5^2}=4$;

д) поскольку функция распределения определяет вероятность отказа за время t, то, подставив в неё t=5, получим вероятность отказа за время t=5ч: $F(5)=1-e^{-0{,}5\cdot 5}=1-e^{-2{,}5}$=0,918; события «элемент откажет» и «элемент не откажет» - противоположные, поэтому вероятность безотказной работы элемента за время t=5 равна 1-0,918=0,082. Этот же результат можно получить непосредственно, пользуясь функцией надёжности: $R(5)=e^{-0{,}5\cdot 5}=e^{-2{,}5}$=0,082.

10. Случайная ошибка измерения (случайная величина X) подчинена нормальному закону распределения с параметрами a=10 и σ=2. Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание, дисперсию;

г) вероятность попадания в интервал $(12;14)$;

д) вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине δ=3.

Решение: нормальным называют закон распределения непрерывной случайной величины X с плотностью $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где a =$M(X)$ – математическое ожидание, $\sigma=\sigma(X)-$ среднее квадратическое отклонение X. Другие понятия и формулы для нормального распределения: функция распределения – $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}\right]dt$ или $F(x)=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)+0{,}5$, где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\sigma}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа, её значения табулированы или их можно найти в системе Mathcad;

$$P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right);$$

вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидания не более чем на δ, находится по формуле: $P(|X-a|\le\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

В нашей задаче:

а) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}$;

б) $F(x)=\Phi\left(\frac{x-10}{2}\right)+0{,}5$;

в) $M(X)=a=10$, $\sigma(X)=\sigma=2$, $D(X)=\sigma^2=4$;

г) $P(12<X<14)=\Phi\left(\frac{14-10}{2}\right)-\Phi\left(\frac{12-10}{2}\right)=\Phi(2)-\Phi(1)$=0,4772-0,3413=0,1359;

д) вероятность того, что измерение произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине δ=3, будет равна $P(|X-10|\le 3)=2\Phi\left(\frac{3}{2}\right)=2\Phi(1{,}5)$=0,4332.

Здесь значения функции Лапласа взяты из таблицы.

2 Расчётно-графическая работа №2. Элементы математической статистики

Цели: изучить основные задачи математической статистики: задачи обработки и анализа результатов наблюдений случайных массовых явлений.

2.1 Теоретические вопросы

1. Предмет математической статистики и её основные задачи. Основные понятия (выборка, объём выборки, варианты, статистический ряд, интервальный ряд).

2. Эмпирическая функция распределения, полигон, гистограмма.

3. Определение неизвестных параметров распределения (выборочная средняя, выборочная и исправленная выборочная дисперсии).

4. Точечные и интервальные оценки параметров распределения.

5. Точность и надёжность оценки. Доверительный интервал.

6. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормально распределённой случайной величины с известным σ.

7. Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения нормально распределённой случайной величины.

8. Понятие корреляционной зависимости. Функции и линии регрессии.

2.2 Расчётные задания

1. Для данной выборки выполнить задачу обработки и систематизации, определить:

а) вариационный ряд (выборку в порядке возрастания);

б) статистические ряды частот и относительных частот;

в) интервальные статистические ряды частот и относительных частот (минимальную и максимальную варианты, размах выборки, число интервалов, длину интервалов);

г) дискретные (группированные) статистические ряды частот и относительных частот.

2. Для данной выборки выполнить задачу анализа и оценки, определить:

а) по интервальному статистическому ряду построить гистограмму частот и относительных частот;

б) по дискретному статистическому ряду найти:

- полигон частот и относительных частот;
- эмпирическую функцию распределения;
- выборочную среднюю;
- выборочную и исправленную выборочную дисперсии;
- исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение;
- выборочные моду и медиану;
- выборочные начальные моменты третьего и четвёртого порядков;
- выборочный эксцесс;
- выборочный коэффициент асимметрии.

1	112	101	155	137	109	129	152	128	132	116
	125	125	142	140	125	118	125	135	149	145
	106	109	138	145	118	128	125	105	122	138
	120	118	133	118	129	149	124	153	132	118
	132	132	138	128	122	115	143	140	122	152
	128	118	126	132	134	123	122	159	112	110
	112	121	105	117	112	129	129	118	112	116
2	87	85	91	94	102	80	75	102	99	101
	120	122	101	88	80	97	92	91	94	82
	115	100	97	91	87	116	121	101	123	97
	88	90	101	95	93	92	88	94	98	99
	95	105	112	116	118	108	95	99	92	100
	94	106	112	122	100	92	93	82	111	102
	100	101	123	97	90	104	108	101	96	111
3	547	565	587	553	548	554	561	562	551	572
	565	555	563	568	586	549	575	537	581	553
	543	568	574	564	547	549	553	572	535	555
	552	545	554	571	569	539	549	553	562	561
	558	563	563	547	552	562	554	563	558	572
	577	554	552	566	557	551	552	571	551	552
	599	561	552	551	561	538	533	541	588	558
4	90	123	132	85	122	105	125	142	99	125
	118	105	115	92	115	142	98	123	103	144
	106	92	118	105	118	86	125	105	122	138
	102	130	112	98	115	120	118	103	118	129
	112	115	88	118	103	102	95	124	106	135
	95	124	103	102	118	112	115	92	115	119
	103	122	94	112	97	128	102	116	125	132
5	139	112	132	85	122	105	125	142	99	125
	116	105	92	115	98	123	103	144	115	142
	106	92	118	86	125	105	122	138	105	118
	102	130	112	98	115	120	118	103	118	129
	112	115	88	118	103	102	95	124	106	135
	95	124	103	102	118	112	115	103	95	122
	125	118	96	126	98	106	128	118	126	103
	134	112	101	105	117	92	129	99	118	112
6	154	143	155	113	155	171	168	153	135	168
	145	168	122	163	117	165	132	139	107	125
	146	152	142	132	152	161	148	136	138	149
	157	178	149	195	146	166	182	135	136	170
	155	152	145	198	192	143	159	116	126	155
	163	169	165	148	151	153	139	166	138	128
	168	157	143	179	165	159	149	141	102	169

7	470	801	790	764	764	950	533	402	520	780
	699	840	869	551	707	635	703	801	859	475
	797	797	789	875	698	580	821	737	910	856
	950	741	473	988	737	787	667	649	797	939
	532	885	590	590	975	910	731	869	435	889
	584	967	950	531	775	485	756	656	680	741
	950	458	511	857	536	699	474	789	889	533
8	450	434	424	432	440	443	415	446	423	472
	442	452	444	425	403	458	455	431	446	424
	438	442	482	432	416	477	431	432	412	462
	496	468	424	438	452	446	418	474	432	452
	466	488	452	489	451	422	442	492	473	402
	481	468	404	498	467	398	440	449	417	425
	444	498	466	442	483	462	492	435	449	422
9	250	244	224	232	240	224	244	226	253	232
	248	216	230	254	258	202	225	224	252	234
	242	212	231	251	204	246	232	282	242	252
	296	242	254	218	226	252	238	224	298	260
	276	254	282	242	270	254	260	232	268	242
	244	276	224	240	272	268	281	234	268	251
	271	212	234	262	204	261	254	266	278	248
10	165	143	152	167	164	199	171	171	156	149
	147	155	158	145	158	177	161	181	153	171
	175	153	174	154	163	174	152	188	162	197
	187	158	154	171	163	172	152	178	151	172
	153	186	147	169	147	166	161	171	161	186
	148	161	189	199	162	167	198	168	135	152
	154	175	163	149	162	161	161	193	172	175
	161	164	178	138	164	172	187	178	143	161
11	153	174	154	163	174	152	188	162	197	234
	188	158	154	171	163	172	152	178	151	172
	155	186	147	169	147	166	161	171	161	186
	149	161	189	199	162	167	198	168	135	152
	156	175	163	149	162	161	161	193	172	175
	162	164	178	138	164	172	187	178	143	161
	165	163	177	161	149	146	152	139	156	152

12	212	231	251	204	246	232	282	242	252	276
	297	242	254	218	226	252	238	224	298	260
	277	254	282	242	270	254	260	232	268	242
	345	276	224	240	272	268	281	234	268	232
	272	212	234	292	204	261	254	266	278	248
	253	262	256	264	272	242	244	246	253	234
	237	264	252	248	247	268	229	235	262	212
	238	242	254	263	261	266	254	264	248	251
13	165	143	52	166	164	199	171	171	156	171
	148	155	158	145	158	177	161	181	153	197
	176	153	174	154	163	174	152	188	162	172
	189	158	154	171	163	172	152	178	151	186
	157	186	147	169	147	166	161	171	161	152
	150	161	189	199	162	167	198	168	135	175
	158	175	163	149	162	161	161	193	172	
14	216	230	254	258	202	225	224	252	234	250
	243	212	231	251	204	246	232	282	242	252
	298	242	254	218	226	252	238	224	298	260
	278	254	282	242	270	254	260	232	268	242
	246	276	224	240	272	268	281	234	268	232
	273	212	234	262	201	261	254	266	278	248
	254	262	256	264	272	242	244	246	253	234
	239	264	252	248	247	268	229	235	262	212
15	165	143	152	167	165	199	171	171	156	152
	149	155	158	145	158	177	161	181	153	171
	153	174	154	163	174	152	188	162	197	178
	190	158	154	171	163	172	152	178	151	172
	159	186	147	169	147	166	161	171	161	186
	151	161	189	199	162	167	198	168	135	152
	160	175	163	149	162	161	161	193	172	175
	165	164	178	137	164	172	187	178	143	161
16	147	153	179	165	159	149	141	102	169	157
	169	154	143	155	113	155	171	168	153	135
	150	152	142	132	152	161	148	136	138	149
	157	178	149	195	146	166	182	135	136	170
	156	152	145	198	192	143	159	116	126	155
	164	169	165	148	151	153	139	166	138	128
	169	169	155	152	175	177	131	154	174	187
	180	177	162	149	146	113	151	152	134	125

17	558	563	569	547	552	562	554	549	575	578
	561	552	551	561	538	533	547	552	557	543
	547	565	587	553	548	554	561	564	562	558
	566	555	563	568	586	549	575	564	553	555
	567	556	546	552	543	554	556	566	592	562
	544	568	574	564	547	549	553	578	557	561
	553	545	554	571	569	539	549	538	575	554
	577	552	566	557	551	552	546	584	572	535
18	577	568	557	564	547	549	553	578	557	575
	554	5455	554	571	569	539	549	538	575	566
	558	563	563	547	552	562	554	549	575	558
	547	595	587	553	548	554	561	564	562	544
	555	563	568	586	549	575	564	553	585	592
	577	554	552	566	557	551	552	546	584	556
	601	561	552	551	561	538	533	547	552	557
	555	541	588	558	563	558	572	578	539	556
19	77	45	49	92	13	69	52	26	22	36
	48	25	59	57	65	69	55	68	49	63
	38	53	48	68	52	73	42	62	71	45
	63	55	16	78	52	95	77	66	35	54
	68	55	49	65	79	48	59	53	41	38
	12	39	57	51	65	66	43	52	63	43
	55	69	31	62	48	46	51	43	16	34
	74	51	82	52	46	75	49	55	57	54
20	347	365	387	348	354	361	364	362	346	358
	365	355	363	368	359	375	364	353	385	363
	343	368	374	364	347	349	353	378	357	358
	352	345	354	352	371	369	349	338	375	388
	366	358	363	347	352	362	354	349	375	341
	377	354	352	366	357	351	352	346	384	351
	399	363	361	352	351	361	338	353	333	357
21	9	9	6	9	9	7	6	11	6	7
	6	10	6	7	6	8	6	5	5	4
	6	6	7	12	5	7	8	5	10	9
	7	7	5	11	9	7	6	5	7	6
	5	5	12	9	8	7	9	8	5	5
	6	13	11	11	5	8	10	9	4	7
	3	6	9	8	12	11	9	10	4	14

22	39	40	38	43	41	42	40	38	41	42
	41	40	42	39	41	41	36	43	41	42
	34	36	37	42	42	42	40	41	41	46
	47	48	52	56	68	70	68	64	56	58
	41	42	39	33	34	37	43	45	47	71
	43	42	43	41	42	47	48	49	52	53
	57	52	41	42	46	48	49	39	32	40
	39	37	42	43	54	58	59	64	66	68
23	10	15	16	17	18	19	20	15	16	11
	17	12	13	14	15	11	18	16	15	18
	20	20	21	23	26	28	23	28	27	24
	27	24	25	25	26	32	33	31	34	43
	26	32	26	27	28	29	30	21	22	23
	42	24	23	35	23	25	36	37	24	21
	58	54	49	47	32	36	43	23	24	28
24	150	144	124	132	140	124	144	153	151	148
	116	130	154	158	102	125	124	152	134	148
	142	121	112	131	151	104	146	132	182	142
	152	196	142	154	158	118	126	152	138	124
	144	176	124	140	172	168	181	134	168	132
	144	112	134	162	104	161	154	166	178	148
	162	164	164	172	142	144	146	112	171	
25	128	105	115	92	115	142	98	123	103	144
	112	115	88	118	103	102	95	124	106	135
	95	124	103	102	118	112	115	92	115	119
	92	112	132	85	122	105	125	142	99	125
	106	92	118	105	118	86	125	105	122	138
	102	130	112	98	115	120	118	103	118	129
	103	122	94	112	97	128	102	116	125	132
26	102	112	118	85	112	115	103	95	122	125
	157	178	149	195	146	166	182	135	136	170
	157	143	179	165	159	149	141	102	169	168
	151	168	122	163	117	165	132	139	107	125
	152	152	142	132	152	161	148	136	138	149
	153	154	143	155	113	155	171	168	153	135
	157	152	145	198	192	143	159	116	126	155
	165	169	165	148	151	153	139	166	138	128

27	242	254	218	226	252	238	224	298	260	287
	250	216	230	254	258	202	225	224	252	234
	244	212	231	251	204	246	232	282	242	252
	299	254	282	242	270	254	260	232	268	242
	276	224	240	272	268	281	234	268	232	300
	274	212	234	262	204	261	254	266	278	248
	255	262	256	264	272	242	244	246	253	234
	240	264	252	248	247	268	229	235	262	212
28	262	267	275	266	246	252	261	269	262	268
	259	248	266	259	252	248	252	232	269	287
	253	286	275	235	202	239	225	236	237	224
	253	268	277	249	248	263	243	266	212	255
	249	288	213	264	247	242	228	277	256	251
	267	232	258	246	278	279	257	255	243	258
	254	244	265	274	252	265	222	269	254	278
	249	252	294	232	269	263	269	271	245	235
29	558	565	587	553	548	554	561	564	562	544
	563	568	586	549	575	564	553	585	577	553
	563	564	547	552	562	554	549	575	558	592
	546	577	568	574	564	547	549	553	578	557
	557	577	568	574	564	547	549	538	575	566
	558	554	552	566	557	551	552	546	584	532
	602	561	552	551	561	538	533	547	552	557
	556	541	588	558	563	558	572	578	539	556
30	165	143	152	167	164	199	171	171	156	151
	155	155	158	145	158	177	161	181	153	171
	177	153	174	154	163	174	152	188	162	197
	191	158	154	171	163	172	152	178	151	172
	161	186	147	169	147	166	161	171	161	186
	161	189	199	162	167	198	168	135	152	146
	162	175	163	149	162	161	161	193	172	175
	153	164	178	138	164	172	187	178	1433	161

3. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания *a* нормального распределения с надёжностью γ, зная выборочную среднюю $\bar{x}_в$, объём выборки *n* и среднее квадратическое отклонение σ.

	γ	$\bar{x}_в$	n	σ		γ	$\bar{x}_в$	n	σ		γ	$\bar{x}_в$	n	σ
3.1	0.95	75.17	36	6	3.11	0.97	5.21	46	6	3.21	0.92	11.48	36	6
3.2	0.97	7.27	56	7	3.12	0.96	55.23	38	5	3.22	0.94	23.38	39	8
3.3	0.93	75.17	35	5	3.13	0.92	5.21	36	7	3.23	0.93	30.44	56	7
3.4	0.94	8.27	58	9	3.14	0.95	55.23	68	7	3.24	0.99	15.32	38	5

3.5	0.98	76.17	46	6	3.15	0.98	7.21	56	6	3.25	0.95	10.48	46	6
3.6	0.99	7.37	58	7	3.16	0.93	65.23	78	5	3.26	0.98	13.38	39	8
3.7	0.93	65.13	34	6	3.17	0.92	8.21	49	7	3.27	0.93	20.44	66	7
3.8	0.94	9.27	53	8	3.18	0.95	51.23	58	9	3.28	0.97	14.32	58	6
3.9	0.93	85.17	35	6	3.19	0.94	5.21	39	6	3.29	0.94	30.44	86	7
3.10	0.95	8.27	57	9	3.20	0.95	85.23	58	7	3.30	0.99	16.32	38	9

4. Для данных задач 1-2 и результатов этих задач, предполагая, что задано нормальное распределение, найти:

а) точность оценки математического ожидания a по выборочной средней $\bar{x}_в$ с надёжностью γ;

б) доверительный интервал для оценки математического ожидания a с надёжностью γ.

Выборочную среднюю $\bar{x}_в$, объём выборки n, среднее квадратическое отклонение σ взять из задач 1-2, γ - из задачи 3.

5. Глубина моря измеряется прибором, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки измерения распределены нормально со средним квадратическим отклонением σ. Сколько надо сделать независимых измерений, чтобы определить глубину моря с ошибкой не более δ при надёжности γ?

	γ	σ	δ		γ	σ	δ		γ	σ	δ
5.1	0.95	23	6	5.11	0.97	15	5	5.21	0.92	11	4
5.2	0.97	14	8	5.12	0.96	14	6	5.22	0.94	23	8
5.3	0.93	21	9	5.13	0.92	23	4	5.23	0.93	25	7
5.4	0.94	15	5	5.14	0.95	12	3	5.24	0.99	17	5
5.5	0.98	13	6	5.15	0.98	14	8	5.25	0.95	10	3
5.6	0.99	20	4	5.16	0.93	20	6	5.26	0.98	13	4
5.7	0.93	24	7	5.17	0.92	22	7	5.27	0.93	21	7
5.8	0.94	18	4	5.18	0.95	19	5	5.28	0.97	14	5
5.9	0.93	16	7	5.19	0.94	16	3	5.29	0.94	24	8
5.10	0.95	19	6	5.20	0.95	18	4	5.30	0.99	12	4

2.3 Решение типового варианта

1. Для данной выборки выполнить задачу обработки и систематизации, определить:

а) вариационный ряд (выборку в порядке возрастания);

б) статистические ряды частот и относительных частот;

в) интервальные статистические ряды частот и относительных частот (минимальную и максимальную варианты, размах выборки, число интервалов, длину интервалов);

г) дискретные (группированные) статистические ряды частот и относительных частот.

2. Для данной выборки выполнить задачу анализа, определить:

а) по интервальному статистическому ряду построить гистограмму частот и относительных частот;

б) по дискретному статистическому ряду найти:

- полигон частот и относительных частот;
- эмпирическую функцию распределения;
- выборочную среднюю;
- выборочную и исправленную выборочную дисперсии;
- выборочное и исправленное выборочное среднеквадратические отклонения;
- выборочные моду и медиану;

в) по статистическим рядам частот и относительных частот найти:

- выборочные начальные и центральные моменты третьего и четвёртого порядков;
- выборочный эксцесс;
- выборочный коэффициент асимметрии.

20	15	17	19	23	18	21	15	16	13
20	16	19	20	14	20	16	14	20	19
15	19	17	16	15	22	21	12	10	21
18	14	14	18	18	13	19	18	20	23
16	20	19	17	19	17	21	17	19	17
13	17	11	18	19					

Решение: заметим, что вычисления и построение графиков производится в среде Mathcad. Копия файла из Mathcad приведена ниже. То, что получено в Mathcad, следует оформить и пояснить.

1. а) объём выборки n = 55. Вариационный ряд (выборка в порядке возрастания):

$Y^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	10	11	12	13	13	14	14	14	14	...

(в среде Mathcad эта таблица просматривается вся нажатием на указатель направления движения);

б) по вариационному ряду посчитаем, сколько раз имеет место каждая варианта, т.е. частоту (n_i) каждой варианты. Полученные данные занесём в таблицу – статистический ряд частот:

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
n_i	1	1	1	2	4	4	5	7	6	8	7	5	1	2

Относительные частоты вариант найдём по формуле $p_i^* = \frac{n_i}{n}$, где n объём выборки, полученные результаты занесём в таблицу - статистический ряд относительных частот:

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
p_i^*	0,018	0,018	0,018	0,036	0,073	0,073	0,091	0.127	0,109
x_i	19	20	21	22	23				
p_i^*	0,145	0,127	0,091	0,018	0,036				

2. Для построения интервального статистического ряда определим сначала следующее: наибольший и наименьший варианты: $a = x_{min} = 10$, $b = x_{\max} = 23$; размах выборки: $R = b - a = 13$; величину интервалов найдём по формуле Стерджеса $h = \frac{x_{min} - x_{min}}{1 + \log_2 n}$, $h =$ 1,917 и округляем до целого $h \approx 2$; число интервалов – знаменатель этой формулы $m = 1 + \log_2 n$ или $m = \frac{R}{h}$=6,781, округляем до целого $m \approx 7$; за начало первого интервала рекомендуется брать величину $x_{нач} = x_{min} - \frac{h}{2}$, $x_{нач} = 9{,}041 \approx 9$; число вариантов, попавших в каждый интервал (т.е. частоты n_i) и относительные частоты (т.е. $p_i = \frac{n_i}{n}$) найдены в среде Mathcad (см. $w1^T$ и $w2^T$).

Таким образом, искомый интервальный ряд имеет вид:

Интервалы	[9,11)	[11,13)	[13,15)	[15,17)	[17,19)	[19,21)	[21,23]
n_i	1	2	6	9	13	16	8
$p_i = \frac{n_i}{n}$	0,018	0,036	0,109	0,164	0,236	0,291	0,145

в) для построения дискретного статистического ряда (или в некоторых учебниках его называют группированным статистическим рядом) найдём середины интервалов $\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ (см. x^T в Mathcad), им будут отвечать соответствующие частоты и относительные частоты из интервального ряда.

Искомый дискретный статистический ряд:

$\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	10	12	14	16	18	20	22
n_i	1	2	6	9	13	16	8
p_i	0,018	0,036	0,109	0,164	0,236	0,291	0,145

2. а) по интервальному статистическому ряду построим гистограмму частот и относительных частот (в среде Mathcad):

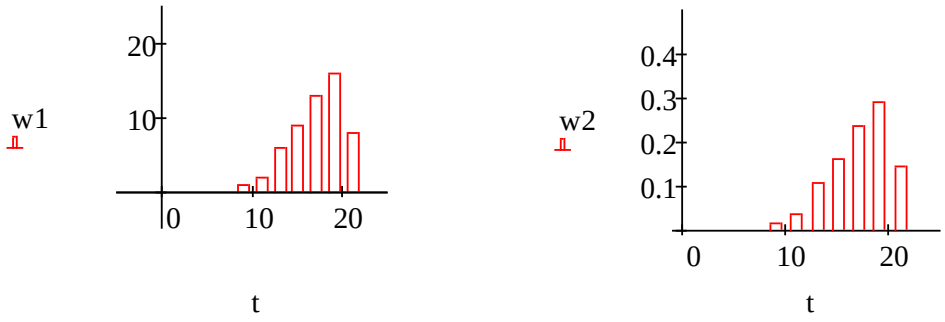


Рисунок 1

б) по дискретному статистическому ряду найдём:

- полигон частот и относительных частот:

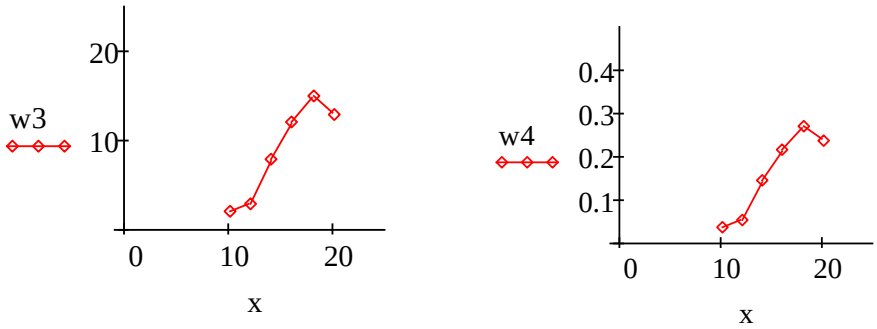


Рисунок 2

- эмпирическую функцию распределения (см. F^T и $F(y)$ в Mathcad):

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le 10 \\ 0{,}018, \text{ при } 10<x\le 12 \\ 0{,}054, \text{ при } 12<x\le 14 \\ 0{,}163, \text{ при } 14<x\le 16 \\ 0{,}327, \text{ при } 16<x\le 18 \\ 0{,}563, \text{ при } 18<x\le 20 \\ 0{,}854, \text{ при } 20<x\le 23 \\ 1, \text{ при } x>23 \end{cases}$$

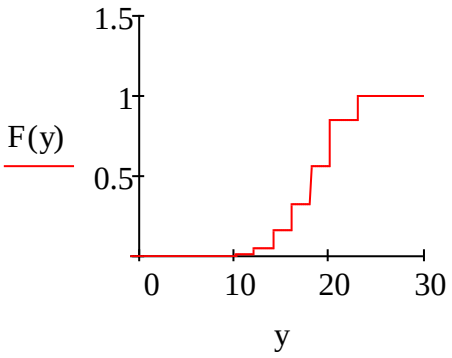


Рисунок 3

- выборочную среднюю (см. mean(X) в Mathcad): $\bar{x}_в=\dfrac{\sum\limits_i x_i n_i}{n}$ или $\bar{x}_в=\sum\limits_i x_i\cdot p_i$ =17,564;

- выборочную и исправленную выборочную дисперсии (см. var(X) и s2 в Mathcad): $D_в=\dfrac{\sum n_i(x_i-\bar{x}_в)^2}{n}$ или $D_в=\dfrac{\sum\limits_i n_i\cdot x_i^2}{n}-(\bar{x}_в)^2$ = 8,428 – выборочная дисперсия; $s^2=\dfrac{n}{n-1}D_в$ = 8,584 – исправленная выборочная дисперсия;

- выборочное среднеквадратическое отклонение (см. stdev(X) или σ в Mathcad) и исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение (см. s в Mathcad): $\sigma=\sqrt{D_в}=2{,}903$; $s=\sqrt{s^2}=2{,}93$;

- выборочные моду и медиану (см. mode(X) и median(X) в Mathcad): мода $M_0=$ 19 определяет варианту, имеющую наибольшую частоту (мода может быть не одна, её просто найти по статистическому ряду частот); медиана M_e=18 определяет середину вариационного ряда и зависит от чётности объёма выборки: $M_e=\begin{cases} x_{k+1}, \text{ при } n=2k+1 \\ \dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}, \text{ при } n=2k \end{cases}$;

в) по статистическим рядам частот и относительных частот (см. y и p в Mathcad) найдём:

- сначала выборочные начальные и центральные моменты k-го порядка ($M(k)$ и $m(k)$ в Mathcad), затем, полагая k равно 3 и 4, выборочные начальные M(3)=$5{,}355\cdot 10^3$, M(4)=$9{,}852\cdot 10^4$ и выборочные центральные $m(3)=-2{,}645$, $m(4)=147{,}375$ моменты третьего и четвёртого порядков;

- выборочный эксцесс $a_x^* = \dfrac{m(3)}{\sigma^3} = -0{,}117$;

- выборочный коэффициент асимметрии $c_x^* = \dfrac{m(4)}{\sigma^4} - 3 = -0{,}696$.

Заметим, что здесь найдены также выборочная средняя $M(1) = 16{,}826 = \bar{x}_в$, выборочная дисперсия $m(2) = 7{,}997 = D_в$, выборочное среднеквадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{m(2)} = 2{,}828$. Они отличаются от рассмотренных выше, т.к. определены по другим статистическим рядам.

Копия файла из Mathcad :

$n := 55$

$X := (20\ \ 15\ \ 17\ \ 19\ \ 23\ \ 18\ \ 21\ \ 15\ \ 16\ \ 13\ \ 20\ \ 16\ \ 19\ \ 20\ \ 14\ \ 20\ \ 16\ \ 14\ \ 20\ \ 19$

$X^T =$

	0
0	20
1	15
2	17
3	19
4	23
5	18
6	21
7	15
8	16
9	13
10	20
11	16
12	19
13	20
14	14
15	...

$Y := \mathrm{sort}(X^T)$

$Y^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	10	11	12	13	13	14	14	14	14	...

$a := \min(X)$ $\qquad b := \max(X)$

$a = 10 \quad b = 23 \qquad R := b - a \qquad R = 13$

$h := \dfrac{b - a}{1 + \dfrac{\ln(55)}{\ln(2)}} \qquad h = 1.917$

$h1 := 2 \qquad m := \dfrac{R}{h}$

$x0 := a - \dfrac{h}{2} \qquad x0 = 9.041$

$m = 6.781$

$a1 := 9 \qquad m1 := 7$

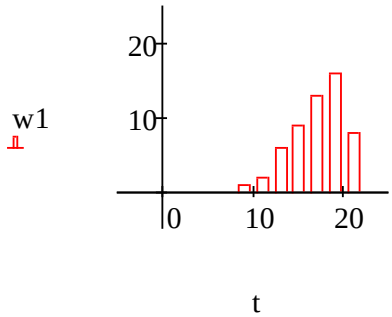
$j := 0..m1 \qquad i := 0..m1 - 1$

$t_j := a1 + h1 \cdot j \qquad x_i := t_i + \dfrac{h1}{2}$

$w1 := \mathrm{hist}(t, X) \qquad w2 := \dfrac{w1}{n} \qquad w1^T = (1\ \ 2\ \ 6\ \ 9\ \ 13\ \ 16\ \ 8)$

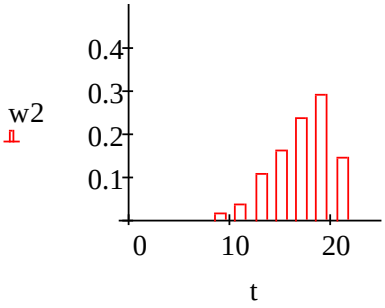
$t^T = (9\ \ 11\ \ 13\ \ 15\ \ 17\ \ 19\ \ 21\ \ 23)$

$x^T = (10\ \ 12\ \ 14\ \ 16\ \ 18\ \ 20\ \ 22)$



$w2^T = (\,0.018 \quad 0.036 \quad 0.109 \quad 0.164 \quad 0.236 \quad 0.291 \quad 0.145\,)$

$0.018 + 0.036 + 0.109 + 0.164 + 0.236 + 0.291 + 0.145 = 0.999$



$\mathrm{mode}(X) = 19$

$x1 := \mathrm{mean}(X) \qquad x1 = 17.564$

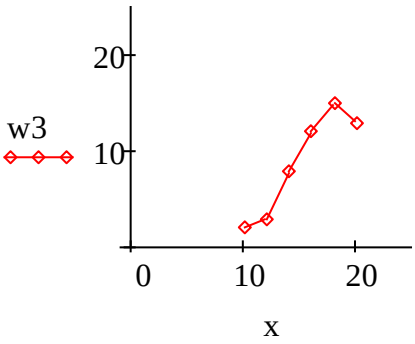
$M := \mathrm{median}(X) \qquad M = 18$

$x2 := \mathrm{var}(X) \qquad s2 := \dfrac{n}{n-1} \cdot x2$

$x2 = 8.428 \qquad \mathrm{stdev}(X) = 2.903$

$s2 = 8.584 \qquad s := \sqrt{s2} \qquad s = 2.93$

$w3 := \mathrm{hist}(x, X) \qquad w4 := \dfrac{w3}{n}$



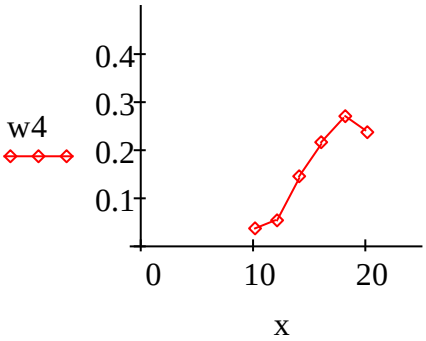
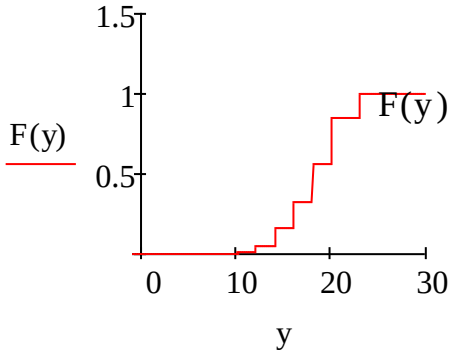


Рисунок 4

$i := 0 .. 6 \qquad w := (\,0.018 \quad 0.036 \quad 0.109 \quad 0.164 \quad 0.236 \quad 0.291 \quad 0.145\,)^T$

$$F_i := \sum_{j=0}^{i} w_j$$

$$F^T = (\,0.018 \quad 0.054 \quad 0.163 \quad 0.327 \quad 0.563 \quad 0.854 \quad 0.999\,)$$



$$F(y) := \begin{cases} 0 & \text{if } y \le 10 \\ 0.018 & \text{if } 10 < y \le 12 \\ 0.054 & \text{if } 12 < y \le 14 \\ 0.163 & \text{if } 14 < y \le 16 \\ 0.327 & \text{if } 16 < y \le 18 \\ 0.563 & \text{if } 18 < y \le 20 \\ 0.854 & \text{if } 20 < y \le 23 \\ 1 & \text{if } y > 23 \end{cases}$$

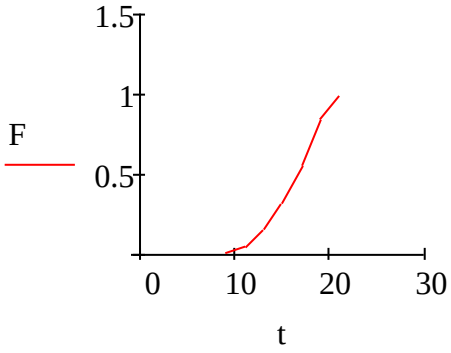


Рисунок 5

$$y := (\,10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19 \quad 20 \quad 21 \quad 22 \quad 13\,)^T$$

$$p := (\,0.018 \quad 0.018 \quad 0.018 \quad 0.036 \quad 0.073 \quad 0.073 \quad 0.091 \quad 0.127 \quad 0.109 \quad 0.145 \quad 0.127 \quad 0.091 \quad 0.018 \quad 0.036\,)^T$$

$$M(k) := \sum_{i=0}^{13} \left[(y_i)^k \cdot p_i \right] \qquad m(k) := \sum_{i=0}^{13} \left[(y_i - M(1))^k \cdot p_i \right]$$

$$M(1) = 16.826 \qquad m(2) = 7.997 \qquad \sigma := \sqrt{m(2)} \qquad \sigma = 2.828$$

$$\frac{m(3)}{\sigma^3} = -0.117 \qquad \frac{m(4)}{\sigma^4} - 3 = -0.696$$

$$M(3) = 5.355 \times 10^3 \qquad m(3) = -2.645$$

$$M(4) = 9.852 \times 10^4 \qquad m(4) = 147.375$$

3. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надёжностью 0,95, зная выборочную среднюю 18, объём выборки 25 и среднее квадратическое отклонение 3.

Решение: доверительный интервал для оценки математического ожидания a имеет вид $\bar{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Все величины, кроме t, известны. Найдём t из соотношения $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$, где $\Phi(t)$ функция Лапласа, её значения табулированы. По таблице $t = 1{,}96$. Таким образом, $18 - 1{,}96\frac{3}{\sqrt{25}} < a < 18 + 1{,}96\frac{3}{\sqrt{25}}$. Ответ: (16,824; 19,176).

4. Для данных задач 1-2 и результатов этих задач, предполагая, что задано нормальное распределение, найти:

а) точность оценки математического ожидания a по выборочной средней $\bar{x}_в$ с надёжностью γ;

б) доверительный интервал для оценки математического ожидания a с надёжностью γ.

Выборочную среднюю $\bar{x}_в$, объём выборки n, среднее квадратическое отклонение σ взять из задач 1-2, γ - из задачи 3.

Решение: из задач 1-2 выборочная средняя $\bar{x}_в$=17,564, объём выборки n=55, среднее квадратическое отклонение σ=2,903, из задачи 3 γ=0,95;

а) точность оценки математического ожидания a определяется формулой $\delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$. t найдено в задаче 3: $t = 1{,}96$. Поэтому точность будет равна $\delta = \frac{1{,}96 \cdot 2{,}903}{\sqrt{55}} \approx 0{,}77$;

б) по формуле, указанной в задаче 3, найдём доверительный интервал: $17{,}564 - 1{,}96\frac{2{,}903}{\sqrt{55}} < a < 17{,}564 + 1{,}96\frac{2{,}903}{\sqrt{55}}$ или $16{,}794 < a < 18{,}334$.

5. Глубина моря измеряется прибором, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки измерения распределены нормально со средним квадратическим отклонением σ=15. Сколько надо сделать независимых измерений, чтобы определить глубину моря с ошибкой не более δ=5 при надёжности γ=0,9?

Решение: из формулы, определяющей точность оценки математического ожидания $\delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$, найдём $n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$. Определим t из соотношения

$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,9}{2} = 0,45$. По таблице $t = 1,65$. Поэтому $n = \frac{1,65^2 \cdot 15^2}{5^2} = 24,5025$. Таким образом, надо сделать не менее 25 измерений.

Список литературы

1 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 2003.- 279 с.

2 Боровиков.А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 2006.

3 Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики.- М.: Наука, 2004.

4 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. школа, 2005.- 400 с.

5 Ивановский Р.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Основы, прикладные аспекты с примерами и задачами в среде Mathcad. - СПб.: БХВ- Петербург, 2008. – 528 с.

6 Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Теория вероятностей и математическая статистика. Конспект лекций для студентов специальностей 5В070400 – Вычислительная техника и программное обеспечение, 5В070300 – Информационные системы.– Алматы: АУЭС, 2013. - 49 с.

Содержание

Введение..... 3
1 Расчётно-графическая работа №1. Теория вероятностей..…….. 3
1.1 Теоретические вопросы…… 3
1.2 Расчётные задания…….…. 4
1.3 Решение типового варианта…….…. 11
2 Расчётно-графическая работа №2. Элементы математической статистики……. 18
2.1 Теоретические вопросы……. 19
2.2 Расчётные задания…….. 19
2.3 Решение типового варианта…….. 26
Список литературы…….. 36