Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра математического моделирования и программного обеспечения

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности
5В100200 - Системы информационной безопасности

Алматы 2017

СОСТАВИТЕЛИ: Толеуова Б.Ж., Отарова А.Г. Теория вероятностей и математическая статистика. Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 5В100200- Системы информационной безопасности. - Алматы: АУЭС, 2017. - 36 с.

Методические указания и задания к расчетно-графическим работам содержат типовые расчеты №1, №2 дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов очной формы обучения специальности 5В100200 - Системы информационной безопасности. Приведены основные теоретические вопросы программы. Дано решение типового варианта.

Ил. 11, табл. 34, библиогр. назв. 6.

Рецензент: доцент каф. ИКТ Гармашова Ю.М.

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2017 г.

Сводный план 2017 г., поз. 131

Толеуова Багила Жаксылыковна
Отарова Анар Гайппаевна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности
5В100200 - Системы информационной безопасности

Редактор: Н.М. Голева
Специалист по стандартизации : Н.К. Молдабекова

Подписано в печать_______ Формат 60х84 1/16
Тираж 20 экз. Бумага типографская №1
Объем 2,18 уч.-из.л. Заказ______ цена 1094 тг.

Копировально-множительное бюро
некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013, Алматы, ул.Байтурсынова, 126

Введение

Наблюдаемые в окружающей нас действительности события (явления) можно разделить на три вида: достоверные, невозможные и случайные. Каждое случайное событие есть следствие действия очень многих причин. Невозможно учесть влияние этих причин на результат, поскольку их очень много и законы их действия неизвестны. Теория вероятностей не ставит перед собой задачу предсказать, произойдет событие или нет. Но когда речь идет о массовых однородных случайных событиях, то оказывается, что достаточное большое число однородных случайных событий независимо от их природы подчиняются определенным закономерностям. Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники. А также теория вероятностей служит для обоснования математической и прикладной статистики.

Методические указания содержат расчетно-графические работы по разделам «Теория вероятностей и математическая статистика».

В каждой части приведены теоретические вопросы и материалы. Дано решение типового варианта.

1 Расчётно-графическая работа №1. Теория вероятностей

Цели: ознакомиться с понятием случайного события, его вероятностью, основными теоремами теории вероятностей, ознакомиться с законами распределения и числовыми характеристиками случайных величин, основными законами распределения случайных величин.

1.1 Теоретические вопросы

1.Предмет теории вероятностей. Классическое, статистическое и геометрическое определения вероятности.

2. Пространство элементарных событий. Алгебра событий. Определение вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность.

3. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

4. Повторение испытаний. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. Теорема Пуассона.

5. Дискретные и непрерывные случайные величины. Законы распределения случайных величин и их числовые характеристики.

6. Законы распределения вероятностей ДСВ: гипергеометрическое, геометрическое, биномиальное, пуассоновское, их числовые характеристики.

7. Законы распределения вероятностей НСВ: равномерное, показательное, нормальное распределения, их основные характеристики.

8. Понятие о предельных теоремах. Закон больших чисел, центральная предельная теорема.

1.2 Расчётные задания

1. В урне n шаров, среди них m белых, остальные красные. Найти:

а) относительную частоту белых шаров;

б) вероятность того, что все m наугад взятых шаров будут белыми;

в) вероятность того, что среди k наугад взятых шаров будет m_1 белых;

г) вероятность того, что среди m наугад взятых шаров будет хотя бы один белый.

№	n	m	k	m_1	№	n	m	k	m_1
1.1	70	8	5	3	1.16	100	25	10	8
1.2	75	9	8	4	1.17	90	15	12	7
1.3	85	6	5	2	1.18	85	10	7	4
1.4	90	12	7	4	1.19	80	9	5	3
1.5	87	10	8	3	1.20	95	15	9	3
1.6	100	30	15	5	1.21	70	10	9	5
1.7	90	20	9	3	1.22	80	15	7	5
1.8	95	15	10	4	1.23	90	10	6	4
1.9	85	10	7	2	1.24	75	10	8	4
1.10	90	12	6	3	1.25	100	20	10	7
1.11	85	10	5	2	1.26	90	10	8	5
1.12	75	8	5	3	1.27	80	7	5	3
1.13	100	15	9	4	1.28	95	10	8	5
1.14	80	10	7	4	1.29	96	12	7	1
1.15	85	7	5	2	1.30	89	13	5	2

2. Три стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в цель для первого, второго и третьего стрелка соответственно p_1, p_2, p_3. Найти вероятность того, что:

а) попадёт только один;

б) попадут все трое;

в) попадёт хотя бы один.

№	p_1	p_2	p_3	№	p_1	p_2	p_3	№	p_1	p_2	p_3
2.1	0,5	0,7	0,9	2.11	0,9	0,6	0,5	2.21	0,5	0,9	0,4
2.2	0,6	0,5	0,8	2.12	0,8	0,7	0,6	2.22	0,7	0,8	0,5
2.3	0,7	0,9	0,7	2.13	0,7	0,5	0,8	2.23	0,5	0,7	0,6
2.4	0,8	0,4	0,6	2.14	0,6	0,9	0,8	2.24	0,4	0,6	0,7
2.5	0,9	0,5	0,5	2.15	0,5	0,7	0,9	2.25	0,5	0,5	0,8
2.6	0,4	0,6	0,8	2.16	0,9	0,6	0,8	2.26	0,6	0,9	0,5
2.7	0,5	0,7	0,9	2.17	0,8	0,5	0,7	2.27	0,7	0,8	0,6
2.8	0,6	0,8	0,7	2.18	0,5	0,8	0,6	2.28	0,8	0,5	0,7

2.9	0,7	0,9	0,5	2.19	0,6	0,9	0,5	2.29	0,9	0,6	0,8
2.10	0,8	0,9	0,4	2.20	0,7	0,9	0,4	2.30	0,9	0,4	0,9

3. При отправке сообщения вероятность допущения одной ошибки равна 1-*p*. Найти вероятность того, что в тексте из *n* знаков допущены:

а) k_1 ошибок;

б) не менее k_2 ошибок;

в) не более k_3 ошибок.

№	n	k_1	k_2	k_3	p	№	n	k_1	k_2	k_3	p
3.1	4	2	3	2	0,9	3.16	5	3	4	2	0,8
3.2	4	3	3	2	0,8	3.17	4	3	3	1	0,7
3.3	5	4	4	2	0,7	3.18	4	2	3	2	0,6
3.4	5	3	3	2	0,6	3.19	5	3	4	1	0,5
3.5	6	5	5	1	0,5	3.20	6	4	5	2	0,4
3.6	6	4	4	1	0,4	3.21	7	5	6	2	0,3
3.7	7	5	5	2	0,3	3.22	8	3	7	2	0,2
3.8	7	4	4	1	0,2	3.23	8	4	7	1	0,3
3.9	8	4	7	2	0,3	3.24	7	5	6	2	0,4
3.10	8	3	6	1	0,4	3.25	6	3	5	2	0,5
3.11	7	4	6	2	0,5	3.26	5	2	4	1	0,6
3.12	7	5	6	1	0,6	3.27	4	2	3	2	0,7
3.13	6	3	4	2	0,7	3.28	5	3	3	3	0,8
3.14	6	2	4	2	0,8	3.29	6	4	4	2	0,9
3.15	5	4	4	1	0,9	3.30	7	5	6	1	0,9

4. Промышленное оборудование состоит из *n* транзисторов. Вероятность выхода из строя одного транзистора равна *p*. Найти вероятность выхода из строя *k* транзисторов.

№	p	n	k	№	P	n	k	№	p	n	k
4.1	0,002	1000	7	4.11	0,01	2000	8	4.21	0,004	5000	9
4.2	0,003	1000	7	4.12	0,01	3000	8	4.22	0,005	6000	9
4.3	0,004	1000	7	4.13	0,02	2000	8	4.23	0,01	4000	9
4.4	0,005	1000	7	4.14	0,01	5000	8	4.24	0,01	5000	9
4.5	0,006	1000	7	4.15	0,02	3000	8	4.25	0,01	6000	9
4.6	0,007	1000	7	4.16	0,01	7000	8	4.26	0,007	1000	9
4.7	0,008	1000	7	4.17	0,02	4000	8	4.27	0,008	1000	9
4.8	0,009	1000	7	4.18	0,01	9000	8	4.28	0,009	1000	9
4.9	0,01	1000	7	4.19	0,02	5000	8	4.29	0,01	1000	9
4.10	0,011	1000	7	4.20	0,011	1000	8	4.30	0,012	1000	9

5. Вероятность появления события *A* в каждом испытании равна *p*. Найти вероятность появления события *A* при *n* испытании:

а) ровно k_1 раз;

б) для 1-15 вариантов от k_1 до k_2 раза; для 16-30 вариантов более k_2 раз.

№	n	k_1	k_2	p	№	n	k_1	k_2	p
5.1	100	80	90	0,8	5.16	100	90	95	0,6
5.2	100	85	95	0,8	5.17	100	62	82	0,6
5.3	100	70	95	0,8	5.18	100	50	70	0,8
5.4	100	83	93	0,7	5.19	100	55	75	0,8
5.5	100	50	60	0,7	5.20	100	45	80	0,8
5.6	100	65	75	0,7	5.21	100	40	60	0,8
5.7	100	70	80	0,7	5.22	100	35	70	0,3
5.8	100	40	50	0,6	5.23	100	50	80	0,3
5.9	100	65	80	0,75	5.24	100	40	65	0,3
5.10	100	70	85	0,75	5.25	200	45	75	0,4
5.11	100	78	92	0,75	5.26	200	100	150	0,4
5.12	100	20	60	0,7	5.27	200	80	170	0,4
5.13	100	30	85	0,7	5.28	300	150	180	0,8
5.14	100	40	79	0,7	5.29	400	100	190	0,6
5.15	100	80	95	0,6	5.30	400	200	295	0,7

6. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения. Найти:

а) функцию распределения $F(x)$;

б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду;

в) вероятность попадания X в интервал $(a;b)$.

№	X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a	b
	p	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6		
6.1	X	0	1	2	4	6	9	-2	7
	p	0,05	0,15	0,3	0,25	0,15	0,1		
6.2	X	-3	-2	-1	0	2	4	-1	3
	p	0,15	0,3	0,02	0,14	0,18	0,31		
6.3	X	1	2	3	5	7	8	-3	6
	p	0,3	0,14	0,16	0,1	0,2	0,1		
6.4	X	-4	-3	-2	0	1	2	0	1
	p	0,2	0,08	0,23	0,27	0,12	0,1		
6.5	X	1	2	4	5	7	9	3	8
	p	0,19	0,21	0,06	0,14	0,12	0,28		
6.6	X	-1	0	2	3	5	7	-4	4
	p	0,26	0,14	0,07	0,2	0,03	0,3		
6.7	X	-2	-1	0	3	5	7	1	6
	p	0,18	0,09	0,01	0,2	0,22	0,3		
6.8	X	1	2	4	5	6	8	0	6
	p	0,3	0,17	0,13	0,1	0,2	0,1		

6.9	*X*	1	2	3	4	7	9	5	8
	p	0,11	0,29	0,06	0,14	0,17	0,23		
6.10	*X*	0	1	2	3	7	9	4	8
	p	0,06	0,14	0,3	0,25	0,15	0,1		
6.11	*X*	-3	-2	0	1	2	4	-1	3
	p	0,15	0,3	0,01	0,14	0,19	0,31		
6.12	*X*	-1	0	3	5	7	8	1	6
	p	0,25	0,14	0,16	0,1	0,2	0,15		
6.13	*X*	-4	-3	-2	0	2	4	-1	3
	p	0,2	0,07	0,24	0,26	0,13	0,1		
6.14	*X*	-3	-1	0	3	4	7	-2	6
	p	0,12	0,09	0,01	0,2	0,28	0,3		
6.15	*X*	-1	0	1	3	7	8	2	6
	p	0,26	0,14	0,15	0,2	0,3	0,15		
6.16	*X*	-2	-1	0	1	2	7	-3	5
	p	0,17	0,09	0,01	0,3	0,23	0,2		
6.17	*X*	1	2	3	5	6	7	0	4
	p	0,1	0,14	0,16	0,1	0,2	0,3		
6.18	*X*	-3	-1	0	3	5	6	-2	4
	p	0,16	0,09	0,01	0,3	0,24	0,2		
6.19	*X*	1	2	5	6	7	8	3	6
	p	0,2	0,15	0,15	0,1	0,3	0,1		
6.20	*X*	-1	0	2	4	7	8	1	5
	p	0,23	0,18	0,12	0,2	0,1	0,17		
6.21	*X*	1	2	4	5	6	8	0	7
	p	0,3	0,14	0,16	0,03	0,2	0,17		
6.22	*X*	-4	-3	-1	0	1	3	-2	2
	p	0,2	0,03	0,24	0,26	0,17	0,1		
6.23	*X*	1	2	3	4	7	9	0	8
	p	0,17	0,23	0,09	0,11	0,12	0,28		
6.24	*X*	0	1	3	5	7	8	2	6
	p	0,2	0,14	0,16	0,12	0,3	0,08		
6.25	*X*	-5	-3	-2	0	1	3	-4	2
	p	0,2	0,06	0,21	0,29	0,14	0,1		
6.26	*X*	1	2	3	5	8	9	4	7
	p	0,18	0,22	0,05	0,15	0,12	0,28		
6.27	*X*	1	3	4	5	7	8	2	6
	p	0,3	0,16	0,14	0,01	0,2	0,19		
6.28	*X*	-5	-3	-1	0	1	3	-4	2
	p	0,1	0,03	0,14	0,36	0,17	0,2		
6.29	*X*	0	2	3	4	6	8	1	7
	p	0,26	0,14	0,05	0,15	0,12	0,28		

6.30	X	-1	0	2	3	7	8	1	6
	p	0,21	0,16	0,14	0,1	0,2	0,19		

7. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти:

а) её плотность распределения $f(x)$;

б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду, медиану;

в) вероятность попадания X в интервал $(a;b)$.

№	$F(x)$	a	b	№	$F(x)$	a	b
7.1	$\begin{cases} 0,\ если\ x\langle 0 \\ \frac{1}{8}x^3,\ если\ 0\le x\le 2 \\ 1,\ если\ x\rangle 2 \end{cases}$	0	4	7.16	$\begin{cases} 0,\ если\ x<0 \\ \frac{1}{5}(x+1),\ если\ -1\le x\le 4 \\ 1,\ если\ x>4 \end{cases}$	0	3
7.2	$\begin{cases} 0,\ если\ x<0 \\ \frac{1}{33}(2x^2+5x),\ если\ 0\le x\le 3 \\ 1,\ если\ x>3 \end{cases}$	1	2	7.17	$\begin{cases} 0,\ если\ x<0 \\ \sin x,\ если\ 0\le x\le \pi/2 \\ 1,\ если\ x>/\,2\pi \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{6}$
7.3	$\begin{cases} 0,\ если\ x<0 \\ \frac{1}{9}x^2,\ если\ 0\le x\le 3 \\ 1,\ если\ x>3 \end{cases}$	0	1	7.18	$\begin{cases} 0,\ если\ x<0 \\ (x^3+3x),\ если\ 0\le x\le 2 \\ 1,\ если\ x>2 \end{cases}$	0,2	0,9
7.4	$\begin{cases} 0,\ если\ x<0 \\ \frac{1}{24}(2x^2+5x),\ если\ 0\le x\le 4 \\ 1,\ если\ x>4 \end{cases}$	0	1	7.19	$\begin{cases} 0,\ если\ x<0 \\ (x^2-x)/2,\ если\ 1\le x\le 2 \\ 1,\ если\ x>2 \end{cases}$	1,5	2
7.5	$\begin{cases} 0,\ если\ x<0 \\ \frac{1}{10}(x^3+x),\ если\ 0\le x\le 2 \\ 1,\ если\ x>2 \end{cases}$	0	1	7.20	$\begin{cases} 0,\ если\ x<0 \\ (x^2+x)/6,\ если\ 0\le x\le 2 \\ 1,\ если\ x>2 \end{cases}$	0	1,5
7.6	$\begin{cases} 0,\ если\ x<0 \\ \frac{1}{20}(x^3+x),\ если\ 0\le x\le 4 \\ 1,\ если\ x>4 \end{cases}$	0	3	7.21	$\begin{cases} 0,\ если\ x<0 \\ \frac{1}{10}(x^2+3x),\ если\ 0\le x\le 2 \\ 1,\ если\ x>2 \end{cases}$	1	1,5

7.7	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ \cos 2x, \text{ если } 3\pi/4\le x\le\pi \\ 1, \text{ если } x>\pi \end{cases}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	7.22	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ \frac{1}{4}(x^2-2x), \text{ если } 1\le x\le 2 \\ 1, \text{ если } x>2 \end{cases}$	1,2	1,5
7.8	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ 1-\cos x, \text{ если } 0\le x\le\pi/2 \\ 1, \text{ если } x>\pi/2 \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{3}$	7.23	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<2 \\ \frac{1}{2}x-1, \text{ если } 2\le x\le 4 \\ 1, \text{ если } x>4 \end{cases}$	1	3
7.9	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ \frac{1}{96}(x^3+8x), \text{ если } 0\le x\le 4 \\ 1, \text{ если } x>4 \end{cases}$	0	2	7.24	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ \frac{1}{6}x, \text{ если } 0\le x\le 6 \\ 1, \text{ если } x>6 \end{cases}$	2	5
7.10	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<-1 \\ \frac{1}{9}(x+1)^2, \text{ если } -1\le x\le 2 \\ 1, \text{ если } x>2 \end{cases}$	1	2	7.25	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<-1 \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}, \text{ если } -1\le x\le 1 \\ 1, \text{ если } x>1 \end{cases}$	-0,5	0,2
7.11	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<\pi/2 \\ 1-\sin x, \text{ если } \pi/2\le x\le\pi \\ 1, \text{ если } x>\pi \end{cases}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	7.26	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<2 \\ (x-2)^2, \text{ если } 2\le x\le 3 \\ 1, \text{ если } x>3 \end{cases}$	2,5	2,8
7.12	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<-1 \\ \frac{1}{9}(x^3+1), \text{ если } -1\le x\le 2 \\ 1, \text{ если } x>2 \end{cases}$	1	2	7.27	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<1 \\ \frac{1}{2}(x^2-x), \text{ если } 1\le x\le 2 \\ 1, \text{ если } x>2 \end{cases}$	1,5	1,9
7.13	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ \frac{1}{33}(3x^2+2x), \text{ если } 0\le x\le 3 \\ 1, \text{ если } x>3 \end{cases}$	0	2	7.28	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<\pi/2 \\ -\cos x, \text{ если } \pi/2\le x\le\pi \\ 1, \text{ если } x>\pi \end{cases}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
7.14	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<3\pi/2 \\ \cos x, \text{ если } 3\pi/2\le x\le 2\pi \\ 1, \text{ если } x>2\pi \end{cases}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	7.29	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<1 \\ \frac{1}{4}(x-1), \text{ если } 1\le x\le 5 \\ 1, \text{ если } x>5 \end{cases}$	2	4

7.15	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ \frac{1}{15}(x^2+2x), \text{ если } 0\le x\le 3 \\ 1, \text{ если } x>3 \end{cases}$	0	2	7.30	$\begin{cases} 0, \text{ если } x<0 \\ \frac{1}{2}(1-\cos x), \text{ если } 0\le x\le \pi \\ 1, \text{ если } x>\pi \end{cases}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

8. Случайная величина X в отрезке $[0;a]$ распределена равномерно. Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание, дисперсию;

г) вероятность того, что $X< m$.

№	a	m	№	A	M	№	a	m
8.1	0,2	0,04	8.11	0,3	0,08	8.21	19	8
8.2	0,3	0,02	8.12	0,6	0,01	8.22	20	5
8.3	0,1	0,06	8.13	0,9	0,06	8.23	25	5
8.4	0,5	0,01	8.14	0,5	0,05	8.24	9	3
8.5	0,6	0,05	8.15	0,8	0,07	8.25	14	7
8.6	0,9	0,02	8.16	5	3	8.26	18	9
8.7	0,1	0,08	8.17	10	4	8.27	24	8
8.8	0,7	0,01	8.18	15	5	8.28	6	3
8.9	0,4	0,06	8.19	6	2	8.29	12	6
8.10	0,5	0,07	8.20	20	10	8.30	16	8

9. Время безотказной работы радиолампы (случайная величина T) имеет показательное распределение, где T_0 – среднее число отказов радиолампы в единицу времени. Найти:

а) плотность распределения $f(t)$;

б) функцию распределения $F(t)$, указать её вероятностный смысл;

в) функцию надёжности $R(t)$, указать её вероятностный смысл;

г) математическое ожидание, дисперсию;

д) вероятность того, что за время t элемент откажет и вероятность того, что за время t элемент не откажет.

№	T_0	t	№	T_0	t	№	T_0	t
9.1	2	*5*	9.11	3	*8*	9.21	1	*5*
9.2	3	*10*	9.12	4	*4*	9.22	2	*10*
9.3	4	*6*	9.13	6	*3*	9.23	3	*6*
9.4	6	*8*	9.14	7	*2*	9.24	4	*8*
9.5	7	*4*	9.15	8	*1*	9.25	6	*4*
9.6	8	*3*	9.16	9	*10*	9.26	7	*3*
9.7	9	*2*	9.17	10	*6*	9.27	8	*2*

9.8	10	*1*	9.18	1	*7*	9.28	9	*1*
9.9	1	*10*	9.19	2	*8*	9.29	10	*7*
9.10	2	*6*	9.20	3	*2*	9.30	1	*9*

10. Случайная ошибка измерения (случайная величина X) подчинена нормальному закону распределения с параметрами a и σ. Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание, дисперсию;

г) вероятность попадания в интервал $(\alpha;\beta)$;

д) вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине δ. Построить графики $F(t)$ и $f(t)$.

№	a	σ	α	β	δ	№	a	σ	α	β	δ
10.1	10	2	9	14	2	10.16	10	1	8	14	2
10.2	12	4	5	14	3	10.17	12	2	7	14	3
10.3	14	1	9	15	5	10.18	14	3	10	15	5
10.4	11	6	8	12	3	10.19	11	5	9	12	3
10.5	13	4	6	17	2	10.20	13	2	6	13	2
10.6	12	9	8	15	4	10.21	12	3	7	15	4
10.7	10	3	6	17	2	10.22	10	2	8	17	2
10.8	12	5	6	13	6	10.23	12	4	6	14	6
10.9	14	2	12	19	5	10.24	14	6	11	19	5
10.10	15	3	4	12	3	10.25	15	5	8	12	3
10.11	17	1	5	14	2	10.26	17	4	6	14	2
10.12	12	4	9	18	4	10.27	12	5	7	18	4
10.13	11	3	4	12	3	10.28	18	5	6	12	3
10.14	17	2	5	19	5	10.29	10	4	6	15	2
10.15	13	5	6	18	3	10.30	12	3	5	18	4

1.3 Решение типового варианта

1. В урне 120 шаров, среди них 40 белых, остальные красные. Найти:

а) относительную частоту белых шаров;

б) вероятность того, что все m=12 наугад взятых шаров будут белыми;

в) вероятность того, что среди k=10 наугад взятых шаров будет m_1=8 белых;

г) вероятность того, что среди m=12 наугад взятых шаров будет хотя бы один белый.

Решение: а) относительной частотой события A (обозначается ω) называется отношение числа m испытаний, в которых событие A появилось, к общему числу n произведённых испытаний: $\omega = m/n$.

Относительная частота белых шаров равна ω = 40/120= = 1/3.

В пунктах б) и в) используем классическое определение вероятности события A: $P(A)$ = m/n, где m – число испытаний, благоприятствующих появлению события A, n – общее число испытаний;

б) пусть событие A – все m=12 наугад взятые шары будут белыми. Общее число элементарных событий равно числу различных способов взять 12 шаров из 120, т.е. n = C_{120}^{12}; число благоприятствующих событий равно числу различных способов взять из 40 шаров 12, т.е. m = C_{40}^{12}. Таким образом, $P(A) = m/n = C_{40}^{12} / C_{120}^{12} = 52{,}99\times 10^{-8}$;

в) пусть событие A – среди 10 взятых шаров будет 8 белых. n = C_{120}^{10}; число благоприятствующих событий равно m = $C_{40}^{8}\cdot C_{80}^{2}$. Таким образом, $P(A) = m/n = C_{40}^{8}\cdot C_{80}^{2}$ / C_{120}^{10} = 0,152;

г) пусть событие A – среди 12 взятых шаров будет хотя бы один белый, тогда противоположное событие $\overline{A}$ - среди 12 взятых шаров не будет ни одного белого. $P(\overline{A}) = m / n = C_{80}^{12} / C_{120}^{12}$ = 0,0057. Тогда вероятность события A равна $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}0057 \approx 0{,}9943$, т.е. это событие почти достоверное.

2. Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого, второго и третьего стрелков соответственно 0,75, 0,8, 0,9. Найти вероятность того, что:

а) попадёт только один;

б) попадут все трое;

в) попадёт хотя бы один.

Решение: пусть событие A_1 – попадание в цель первым стрелком, A_2 – вторым, A_3 – третьим. По условию $P(A_1)$=0,75, $P(A_2)$=9,8, $P(A_3)$=0,9:

а) пусть событие A - попадёт только один, тогда $A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$, где $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ события противоположные A_1, A_2, A_3, т.е. промах первого, второго и третьего стрелков соответственно. Так как $P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$, $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, $P(\overline{A}_3) = 1 - P(A_3) =$ $= 1 - 0{,}9 = 0{,}1$ и т.к. слагаемые есть события несовместные, то $P(A) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) =$ $0{,}75\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1 + 0{,}25\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1 + 0{,}25\cdot 0{,}2\cdot 0{,}9 = 0{,}08$;

б) пусть событие B - все трое попадут в цель, тогда $B = A_1A_2A_3$ и, т.к. A_1, A_2, A_3 события независимые, то $P(B)$ = $P(A_1A_2A_3)$ = $P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ = $= 0{,}75\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9 = 0{,}54$;

в) событие C - попадёт хотя бы один стрелок, рассмотрим противоположное событие $\overline{C}$ - промахнутся все трое. Т.к. $\overline{C} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, то $P(C) = 1 - P(\overline{C})$ $= 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = 1 - 0{,}25\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1 = 0{,}995$.

3. При отправке сообщения вероятность допущения одной ошибки равна 1-p (p=0,8). Найти вероятность того, что в тексте из n =5 знаков допущены:

а) k_1 = 3 ошибки;

б) не менее k_2 = 2 ошибок;

в) не более k_3 =1 ошибки.

Решение: а) пусть событие A – допущение трех ошибок при отправке сообщения из 5 знаков. Вероятность события A вычисляем по формуле Бернулли:

$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $P_n(k)$ – вероятность появления события A при n независимых испытаниях ровно k $(k = 0,1,2,..n)$ раз. Так как $p = 0{,}8;\quad q = 1 - p = 0{,}2$, то $P(A) = P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2$=0,2048;

б) пусть событие B – допущение не менее двух ошибок при отправке сообщения из 5 знаков. Вероятность события B равна сумме вероятностей:

$P(B) = P_5(2) + P_5(3) + P_5(4) + P_5(5).$

Но так как вычисление вероятности события B требует громоздких вычислений, то воспользуемся формулой

$P(B) = 1 - P(\overline{B})$ $= 1 - \left(P_5(0) + P_5(1)\right) =$ 1-(0,00032+0,0064)=0,99328;

в) пусть событие C – допущение не более одной ошибки при отправке сообщения из 5 знаков, тогда вероятность события C равна:

$P(C) = P_5(0) + P_5(1) = 0{,}00672.$

4. Промышленное оборудование состоит из n=1000 транзисторов. Вероятность выхода из строя одного транзистора равна p=0,003. Найти вероятность выхода из строя k=6 транзисторов.

Решение: число элементарных событий n очень большое, p очень малое, $\lambda = n \cdot p$ – малое число, поэтому вероятность появления события при n независимых испытаниях ровно k раз $P_n(k)$ вычисляем не по формуле Бернулли, а по формуле Пуассона: $P_n(k) \approx \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$.

n=1000, k=6, p=0,003, $\lambda = 1000 \cdot 0{,}003 = 3$, $P_{1000}(6) = \dfrac{3^6 \cdot e^{-3}}{6!} = 0{,}05.$

5. Вероятность появления события A в каждом испытании равна p=0,8. Найти вероятность появления события A при n=100 испытаниях:

а) ровно k_1=80 раз (событие A);

б) от 70 до 80 раз (событие B).

Решение: т.к. число элементарных событий n очень большое, то вероятность появления события при n независимых испытаниях ровно k раз вычисляем по локальной теореме Муавра-Лапласа:

$$P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \quad \text{где} \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}, \quad 0 < p < 1, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2)$$

(значения этой функции находим по таблице).

Для вычисления вероятности события B воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа:

$$P_n(k_1,k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad \text{где} \qquad x_2 = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}, \qquad x_1 = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \exp(-t^2/2)dt$ – функция Лапласа. Значения этой функции также находим по таблице.

а) $x = \frac{80-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=0$, $P_{100}(80) \cong \frac{1}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\varphi(0) = 0{,}399$;

б) $P_{100}(70,80) \approx \Phi(\frac{80-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}) - \Phi(\frac{70-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}) = \Phi(0) - \Phi(-2{,}5) = 0{,}494.$

6. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	0	10	20	30	40	50
P	0,05	0,15	0,3	0,25	0,2	0,05

Найти:

а) функцию распределения $F(x)$;

б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду;

в) вероятность попадания X в интервал (15;45).

Решение: а) функция $F(x)$ определяет вероятность события $X<x$. Для дискретной случайной величины она определяется формулой $F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i<x} p_i = \sum_{x_i<x} P(X = x_i)$:

- если $x \le 0$, то $F(x) = P(X < 0) = 0$;

- если $0 < x \le 10$, то $F(x) = P(X = 0) = 0{,}05$;

- если $10 < x \le 20$, то $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) = 0{,}05 + 0{,}15 = 0{,}2$;

- если $20 < x \le 30$, то
$F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$;

- если $30 < x \le 40$, то
$F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30) = 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75$;

- если $40 < x \le 50$, то $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) +$
$+ P(X = 30) + P(X = 40) = 0{,}75 + 0{,}2 = 0{,}95$;

- если $x > 50$, то
$F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30) + P(X = 40) + P(X = 50) =$
$= 0{,}95 + 0{,}05 = 1.$

Итак,

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ \textit{егер}\ x\le 0 \\ 0{,}05,\ \textit{егер}\ 0<x\le 10 \\ 0{,}2,\ \textit{егер}\ 10<x\le 20 \\ 0{,}5,\ \textit{егер}\ 20<x\le 30 \\ 0{,}75,\ \textit{егер}\ 30<x\le 40 \\ 0{,}95,\ \textit{егер}\ 40<x\le 50 \\ 1,\ \textit{егер}\ x>50 \end{cases};$$

б) вычисляем числовые характеристики случайной величины X:

$M(X)=0\cdot 0{,}15+10\cdot 0{,}15+20\cdot 0{,}3+30\cdot 0{,}25+40\cdot 0{,}2+50\cdot 0{,}05=25{,}5$;

$D(X)=154{,}75$; $\sigma(x)=\sqrt{154{,}75}=12{,}44$; $M_0=20$;

$P(15;45)=F(45)-F(15)=0{,}75$.

7. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases} 0,\ \textit{если}\ x<2 \\ (x-2)^2,\ \textit{если}\ 2\le x\le 3 \\ 1,\ \textit{если}\ x>3 \end{cases}$. Найти:

а) её плотность распределения $f(x)$;

б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду, медиану;

в) вероятность попадания X в интервал (1; 2,5).

Решение: а) плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины равна производной её функции распределения:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0,\ \textit{если}\ x<2 \\ 2(x-2),\ \textit{если}\ 2\le x\le 3 \\ 0,\ \textit{если}\ x>3 \end{cases};$$

б) $M(x)=\int\limits_{-\infty(a)}^{\infty(b)} xf(x)dx$, $M(x)=\int\limits_2^3 2x(x-2)=8/3$;

$D(x)=\int\limits_{-\infty(a)}^{\infty(b)} (x-M(x))^2 f(x)dx$, $D(x)=\int\limits_2^3 x^2\cdot 2(x-2)dx-(8/3)^2=1/18$;

$\sigma(X)=\sqrt{1/18}=$ 0,236. Для определения моды надо найти максимум функции $f(x)=2(x-2)$ на отрезке [2; 3]. Поскольку эта функция линейная, то её максимум достигается на конце отрезка, т.е. $f_{\max}=f(3)=2$. Итак, $M_o=3$. Медиану можно найти из условия $P(X<M_e)=0{,}5$, где вероятность $P(X<M_e)=P(-\infty<X<M_e)=$ $P(2<X<M_e)$ находится по формуле $P(a<X<b)=\int\limits_a^b f(x)dx$ или по формуле $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$- вероятность попадания случайной величины в промежуток ($a;\ b$). Так как

$P(2 < X < M_e) = \int_2^{M_e} 2(x-2)dx = (M_e - 2)^2$, то, решая уравнение $(M_e - 2)^2 =$ 0,5, получим два корня 1,29 и 2,71, из которых подходит один: M_e = 2,71;

в) вероятность попадания X в интервал (1; 2,5) находим по выше приведённым формулам $P(1 < X < 2{,}5) = P(1 < X < 2) + P(2 < X < 2{,}5) =$

$= 0 + \int_2^{2,5} 2(x-2)dx = 0{,}25$ или $P(1 < X < 2{,}5) = F(2{,}5) - F(1) = (2{,}5 - 2)^2 - 0 = 0{,}25$.

8. Случайная величина X в отрезке [0; 0,2] распределена равномерно. Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание, дисперсию;

г) вероятность того, что X< 0,04.

Решение: а) плотность распределения находим по формуле:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \textit{егер } x \in (a,b), \\ 0, & \textit{егер } x \notin (a,b). \end{cases}$$

Т.к. a=0, b=0,2, то $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{0{,}2} = 5, & \textit{егер } x \in (0; 0{,}2), \\ 0, & \textit{егер } x \notin (0; 0{,}2); \end{cases}$

б) функцию распределения находим по формуле

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{егер } x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \textit{егер } a < x \le b, \\ 1, & \textit{егер } x > b \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{егер } x \le 0, \\ 5x, & \textit{егер } 0 < x \le 0{,}2, \\ 1, & \textit{егер } x > 0{,}2; \end{cases}$$

в) $M(X) = \dfrac{a+b}{2}$=0,1, $D(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$=0,003;

г) вероятность попадания в интервал (α, β) вычисляем по формуле: $P(a < \alpha < X < \beta \le b) = \dfrac{\beta - \alpha}{b-a} = F(b) - F(a)$.

Тогда вероятность того, что $X < 0{,}04$ равна:

$$P(X < 0{,}04) = P(\infty < X < 0{,}04) = F(0{,}04) - F(0) = \frac{0{,}04}{0{,}2} - \frac{0}{0{,}2} = 0{,}02.$$

9. Время безотказной работы элемента (случайная величина T) имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0{,}5$, где λ – интенсивность отказов, т.е. среднее число отказов в единицу времени. Найти:

а) плотность распределения $f(t)$;

б) функцию распределения $F(t)$, указать её вероятностный смысл;

в) функцию надёжности $R(t)$, указать её вероятностный смысл;

г) математическое ожидание, дисперсию;

д) вероятность того, что за время *t* элемент откажет и вероятность того, что за время *t* элемент не откажет.

Решение: показательным называют закон распределения непрерывной случайной величины X с плотностью $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ } если \text{ } x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{ } если \text{ } x \geq 0 \end{cases}$. Другие понятия и формулы для показательного распределения: $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ } если \text{ } x<0 \\ 1-e^{-\lambda x}, \text{ } если \text{ } x \geq 0 \end{cases}$ - функция распределения; если случайная величина *X*=*T* – время безотказной работы элемента, то $F(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t}$ определяет вероятность отказа элемента за время *t*; $R(t)=P(T>t)=e^{-\lambda t}$ – функция надёжности, определяет вероятность безотказной работы элемента за время *t*;

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\ \sigma(X)=\frac{1}{\lambda};\ P(\alpha<X<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}.$$

В нашей задаче, учитывая то, что $t \geq 0$, имеем:

а) $f(t)=0{,}5e^{-0{,}5t}$;

б) $F(t)=P(T<t)=1-e^{-0{,}5t}$, определяет вероятность отказа элемента за время *t*;

в) $R(t)=e^{-0{,}5t}$, определяет вероятность безотказной работы элемента за время *t*;

г) $M(X)=\frac{1}{0{,}5}=2$; $D(X)=\frac{1}{0{,}5^2}=4$;

д) поскольку функция распределения определяет вероятность отказа за время *t*, то, подставив в неё *t*=5, получим вероятность отказа за время *t*=5ч: $F(5)=1-e^{-0{,}5\cdot 5}=1-e^{-2{,}5}$=0,918; события «элемент откажет» и «элемент не откажет» - противоположные, поэтому вероятность безотказной работы элемента за время *t*=5 равна 1-0,918=0,082. Этот же результат можно получить непосредственно, пользуясь функцией надёжности: $R(5)=e^{-0{,}5\cdot 5}=e^{-2{,}5}$=0,082.

10. Случайная ошибка измерения (случайная величина *X*) подчинена нормальному закону распределения с параметрами *a*=10 и σ=2. Найти:

а) плотность распределения *f*(*x*);

б) функцию распределения *F*(*x*);

в) математическое ожидание, дисперсию;

г) вероятность попадания в интервал $(12;14)$;

д) вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине δ=3.

Решение: нормальным называют закон распределения непрерывной случайной величины X с плотностью $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где a $=M(X)$ – математическое ожидание, $\sigma=\sigma(X)$ – среднее квадратическое отклонение X. Другие понятия и формулы для нормального распределения: функция распределения – $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left[\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}\right]dt$ или $F(x)=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)+0{,}5$, где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\sigma}}\int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа, её значения табулированы или их можно найти в системе Mathcad;

$$P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right);$$

вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидания не более чем на δ, находится по формуле: $P(|X-a|\le\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

В нашей задаче:

а) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}$;

б) $F(x)=\Phi\left(\frac{x-10}{2}\right)+0{,}5$;

в) $M(X)=a=10$, $\sigma(X)=\sigma=2$, $D(X)=\sigma^2=4$;

г) $P(12<X<14)=\Phi\left(\frac{14-10}{2}\right)-\Phi\left(\frac{12-10}{2}\right)=\Phi(2)-\Phi(1)$=0,4772-0,3413=0,1359;

д) вероятность того, что измерение произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине δ=3, будет равна $P(|X-10|\le 3)=2\Phi\left(\frac{3}{2}\right)=$ $2\Phi(1{,}5)$=0,4332.

Здесь значения функции Лапласа взяты из таблицы.

2 Расчётно-графическая работа №2. Элементы математической статистики

Цели: изучить основные задачи математической статистики: задачи обработки и анализа результатов наблюдений случайных массовых явлений.

2.1 Теоретические вопросы

1. Предмет математической статистики и её основные задачи. Основные понятия (выборка, объём выборки, варианты, статистический ряд, интервальный ряд).

2. Эмпирическая функция распределения, полигон, гистограмма.

3. Определение неизвестных параметров распределения (выборочная средняя, выборочная и исправленная выборочная дисперсии).

4. Точечные и интервальные оценки параметров распределения.

5. Точность и надёжность оценки. Доверительный интервал.

6. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормально распределённой случайной величины с известным σ.

7. Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения нормально распределённой случайной величины.

8. Понятие корреляционной зависимости. Функции и линии регрессии.

2.2 Расчётные задания

1. Для данной выборки выполнить задачу обработки и систематизации, определить:

а) вариационный ряд (выборку в порядке возрастания);

б) статистические ряды частот и относительных частот;

в) интервальные статистические ряды частот и относительных частот (минимальную и максимальную варианты, размах выборки, число интервалов, длину интервалов);

г) дискретные (группированные) статистические ряды частот и относительных частот.

2. Для данной выборки выполнить задачу анализа и оценки, определить:

а) по интервальному статистическому ряду построить гистограмму частот и относительных частот;

б) по дискретному статистическому ряду найти:

- полигон частот и относительных частот;
- эмпирическую функцию распределения;
- выборочную среднюю;
- выборочную и исправленную выборочную дисперсии;
- исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение;
- выборочные моду и медиану;
- выборочные начальные моменты третьего и четвёртого порядков;
- выборочный эксцесс;
- выборочный коэффициент асимметрии.

1	112 125 106 120 132 128 112	101 125 109 118 132 118 121	155 142 138 133 138 126 105	137 140 145 118 128 132 117	109 125 118 129 122 134 112	129 118 128 149 115 123 129	152 125 125 124 143 122 129	128 135 105 153 140 159 118	132 149 122 132 122 112 112	116 145 138 118 152 110 116
2	87 120 115 88 95 94 100	85 122 100 90 105 106 101	91 101 97 101 112 112 123	94 88 91 95 116 122 97	102 80 87 93 118 100 90	80 97 116 92 108 92 104	75 92 121 88 95 93 108	102 91 101 94 99 82 101	99 94 123 98 92 111 96	101 82 97 99 100 102 111
3	547 565 543 552 558 577 599	565 555 568 545 563 554 561	587 563 574 554 563 552 552	553 568 564 571 547 566 551	548 586 547 569 552 557 561	554 549 549 539 562 551 538	561 575 553 549 554 552 533	562 537 572 553 563 571 541	551 581 535 562 558 551 588	572 553 555 561 572 552 558
4	90 118 106 102 112 95 103	123 105 92 130 115 124 122	132 115 118 112 88 103 94	85 92 105 98 118 102 112	122 115 118 115 103 118 97	105 142 86 120 102 112 128	125 98 125 118 95 115 102	142 123 105 103 124 92 116	99 103 122 118 106 115 125	125 144 138 129 135 119 132
5	139 116 106 102 112 95 125 134	112 105 92 130 115 124 118 112	132 92 118 112 88 103 96 101	85 115 86 98 118 102 126 105	122 98 125 115 103 118 98 117	105 123 105 120 102 112 106 92	125 103 122 118 95 115 128 129	142 144 138 103 124 103 118 99	99 115 105 118 106 95 126 118	125 142 118 129 135 122 103 112
6	154 145 146 157 155 163 168	143 168 152 178 152 169 157	155 122 142 149 145 165 143	113 163 132 195 198 148 179	155 117 152 146 192 151 165	171 165 161 166 143 153 159	168 132 148 182 159 139 149	153 139 136 135 116 166 141	135 107 138 136 126 138 102	168 125 149 170 155 128 169

7	470 699 797 950 532 584 950	801 840 797 741 885 967 458	790 869 789 473 590 950 511	764 551 875 988 590 531 857	764 707 698 737 975 775 536	950 635 580 787 910 485 699	533 703 821 667 731 756 474	402 801 737 649 869 656 789	520 859 910 797 435 680 889	780 475 856 939 889 741 533
8	450 442 438 496 466 481 444	434 452 442 468 488 468 498	424 444 482 424 452 404 466	432 425 432 438 489 498 442	440 403 416 452 451 467 483	443 458 477 446 422 398 462	415 455 431 418 442 440 492	446 431 432 474 492 449 435	423 446 412 432 473 417 449	472 424 462 452 402 425 422
9	250 248 242 296 276 244 271	244 216 212 242 254 276 212	224 230 231 254 282 224 234	232 254 251 218 242 240 262	240 258 204 226 270 272 204	224 202 246 252 254 268 261	244 225 232 238 260 281 254	226 224 282 224 232 234 266	253 252 242 298 268 268 278	232 234 252 260 242 251 248
10	165 147 175 187 153 148 154 161	143 155 153 158 186 161 175 164	152 158 174 154 147 189 163 178	167 145 154 171 169 199 149 138	164 158 163 163 147 162 162 164	199 177 174 172 166 167 161 172	171 161 152 152 161 198 161 187	171 181 188 178 171 168 193 178	156 153 162 151 161 135 172 143	149 171 197 172 186 152 175 161
11	153 188 155 149 156 162 165	174 158 186 161 175 164 163	154 154 147 189 163 178 177	163 171 169 199 149 138 161	174 163 147 162 162 164 149	152 172 166 167 161 172 146	188 152 161 198 161 187 152	162 178 171 168 193 178 139	197 151 161 135 172 143 156	234 172 186 152 175 161 152

12	212	231	251	204	246	232	282	242	252	276
	297	242	254	218	226	252	238	224	298	260
	277	254	282	242	270	254	260	232	268	242
	345	276	224	240	272	268	281	234	268	232
	272	212	234	292	204	261	254	266	278	248
	253	262	256	264	272	242	244	246	253	234
	237	264	252	248	247	268	229	235	262	212
	238	242	254	263	261	266	254	264	248	251
13	165	143	52	166	164	199	171	171	156	171
	148	155	158	145	158	177	161	181	153	197
	176	153	174	154	163	174	152	188	162	172
	189	158	154	171	163	172	152	178	151	186
	157	186	147	169	147	166	161	171	161	152
	150	161	189	199	162	167	198	168	135	175
	158	175	163	149	162	161	161	193	172	
14	216	230	254	258	202	225	224	252	234	250
	243	212	231	251	204	246	232	282	242	252
	298	242	254	218	226	252	238	224	298	260
	278	254	282	242	270	254	260	232	268	242
	246	276	224	240	272	268	281	234	268	232
	273	212	234	262	201	261	254	266	278	248
	254	262	256	264	272	242	244	246	253	234
	239	264	252	248	247	268	229	235	262	212
15	165	143	152	167	165	199	171	171	156	152
	149	155	158	145	158	177	161	181	153	171
	153	174	154	163	174	152	188	162	197	178
	190	158	154	171	163	172	152	178	151	172
	159	186	147	169	147	166	161	171	161	186
	151	161	189	199	162	167	198	168	135	152
	160	175	163	149	162	161	161	193	172	175
	165	164	178	137	164	172	187	178	143	161
16	147	153	179	165	159	149	141	102	169	157
	169	154	143	155	113	155	171	168	153	135
	150	152	142	132	152	161	148	136	138	149
	157	178	149	195	146	166	182	135	136	170
	156	152	145	198	192	143	159	116	126	155
	164	169	165	148	151	153	139	166	138	128
	169	169	155	152	175	177	131	154	174	187
	180	177	162	149	146	113	151	152	134	125

17	558	563	569	547	552	562	554	549	575	578
	561	552	551	561	538	533	547	552	557	543
	547	565	587	553	548	554	561	564	562	558
	566	555	563	568	586	549	575	564	553	555
	567	556	546	552	543	554	556	566	592	562
	544	568	574	564	547	549	553	578	557	561
	553	545	554	571	569	539	549	538	575	554
	577	552	566	557	551	552	546	584	572	535
18	577	568	557	564	547	549	553	578	557	575
	554	5455	554	571	569	539	549	538	575	566
	558	563	563	547	552	562	554	549	575	558
	547	595	587	553	548	554	561	564	562	544
	555	563	568	586	549	575	564	553	585	592
	577	554	552	566	557	551	552	546	584	556
	601	561	552	551	561	538	533	547	552	557
	555	541	588	558	563	558	572	578	539	556
19	77	45	49	92	13	69	52	26	22	36
	48	25	59	57	65	69	55	68	49	63
	38	53	48	68	52	73	42	62	71	45
	63	55	16	78	52	95	77	66	35	54
	68	55	49	65	79	48	59	53	41	38
	12	39	57	51	65	66	43	52	63	43
	55	69	31	62	48	46	51	43	16	34
	74	51	82	52	46	75	49	55	57	54
20	347	365	387	348	354	361	364	362	346	358
	365	355	363	368	359	375	364	353	385	363
	343	368	374	364	347	349	353	378	357	358
	352	345	354	352	371	369	349	338	375	388
	366	358	363	347	352	362	354	349	375	341
	377	354	352	366	357	351	352	346	384	351
	399	363	361	352	351	361	338	353	333	357
21	9	9	6	9	9	7	6	11	6	7
	6	10	6	7	6	8	6	5	5	4
	6	6	7	12	5	7	8	5	10	9
	7	7	5	11	9	7	6	5	7	6
	5	5	12	9	8	7	9	8	5	5
	6	13	11	11	5	8	10	9	4	7
	3	6	9	8	12	11	9	10	4	14

22	39 41 34 47 41 43 57 39	40 40 36 48 42 42 52 37	38 42 37 52 39 43 41 42	43 39 42 56 33 41 42 43	41 41 42 68 34 42 46 54	42 41 42 70 37 47 48 58	40 36 40 68 43 48 49 59	38 43 41 64 45 49 39 64	41 41 41 56 47 52 32 66	42 42 46 58 71 53 40 68
23	10 17 20 27 26 42 58	15 12 20 24 32 24 54	16 13 21 25 26 23 49	17 14 23 25 27 35 47	18 15 26 26 28 23 32	19 11 28 32 29 25 36	20 18 23 33 30 36 43	15 16 28 31 21 37 23	16 15 27 34 22 24 24	11 18 24 43 23 21 28
24	150 116 142 152 144 144 162	144 130 121 196 176 112 164	124 154 112 142 124 134 164	132 158 131 154 140 162 172	140 102 151 158 172 104 142	124 125 104 118 168 161 144	144 124 146 126 181 154 146	153 152 132 152 134 166 112	151 134 182 138 168 178 171	148 148 142 124 132 148
25	128 112 95 92 106 102 103	105 115 124 112 92 130 122	115 88 103 132 118 112 94	92 118 102 85 105 98 112	115 103 118 122 118 115 97	142 102 112 105 86 120 128	98 95 115 125 125 118 102	123 124 92 142 105 103 116	103 106 115 99 122 118 125	144 135 119 125 138 129 132
26	102 157 157 151 152 153 157 165	112 178 143 168 152 154 152 169	118 149 179 122 142 143 145 165	85 195 165 163 132 155 198 148	112 146 159 117 152 113 192 151	115 166 149 165 161 155 143 153	103 182 141 132 148 171 159 139	95 135 102 139 136 168 116 166	122 136 169 107 138 153 126 138	125 170 168 125 149 135 155 128

27	242	254	218	226	252	238	224	298	260	287
	250	216	230	254	258	202	225	224	252	234
	244	212	231	251	204	246	232	282	242	252
	299	254	282	242	270	254	260	232	268	242
	276	224	240	272	268	281	234	268	232	300
	274	212	234	262	204	261	254	266	278	248
	255	262	256	264	272	242	244	246	253	234
	240	264	252	248	247	268	229	235	262	212
28	262	267	275	266	246	252	261	269	262	268
	259	248	266	259	252	248	252	232	269	287
	253	286	275	235	202	239	225	236	237	224
	253	268	277	249	248	263	243	266	212	255
	249	288	213	264	247	242	228	277	256	251
	267	232	258	246	278	279	257	255	243	258
	254	244	265	274	252	265	222	269	254	278
	249	252	294	232	269	263	269	271	245	235
29	558	565	587	553	548	554	561	564	562	544
	563	568	586	549	575	564	553	585	577	553
	563	564	547	552	562	554	549	575	558	592
	546	577	568	574	564	547	549	553	578	557
	557	577	568	574	564	547	549	538	575	566
	558	554	552	566	557	551	552	546	584	532
	602	561	552	551	561	538	533	547	552	557
	556	541	588	558	563	558	572	578	539	556
30	165	143	152	167	164	199	171	171	156	151
	155	155	158	145	158	177	161	181	153	171
	177	153	174	154	163	174	152	188	162	197
	191	158	154	171	163	172	152	178	151	172
	161	186	147	169	147	166	161	171	161	186
	161	189	199	162	167	198	168	135	152	146
	162	175	163	149	162	161	161	193	172	175
	153	164	178	138	164	172	187	178	1433	161

3. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания *a* нормального распределения с надёжностью γ, зная выборочную среднюю $\bar{x}_в$, объём выборки *n* и среднее квадратическое отклонение σ.

	γ	$\bar{x}_в$	n	σ		γ	$\bar{x}_в$	n	σ		γ	$\bar{x}_в$	n	σ
3.1	0.95	75.17	36	6	3.11	0.97	5.21	46	6	3.21	0.92	11.48	36	6
3.2	0.97	7.27	56	7	3.12	0.96	55.23	38	5	3.22	0.94	23.38	39	8
3.3	0.93	75.17	35	5	3.13	0.92	5.21	36	7	3.23	0.93	30.44	56	7
3.4	0.94	8.27	58	9	3.14	0.95	55.23	68	7	3.24	0.99	15.32	38	5

3.5	0.98	76.17	46	6	3.15	0.98	7.21	56	6	3.25	0.95	10.48	46	6
3.6	0.99	7.37	58	7	3.16	0.93	65.23	78	5	3.26	0.98	13.38	39	8
3.7	0.93	65.13	34	6	3.17	0.92	8.21	49	7	3.27	0.93	20.44	66	7
3.8	0.94	9.27	53	8	3.18	0.95	51.23	58	9	3.28	0.97	14.32	58	6
3.9	0.93	85.17	35	6	3.19	0.94	5.21	39	6	3.29	0.94	30.44	86	7
3.10	0.95	8.27	57	9	3.20	0.95	85.23	58	7	3.30	0.99	16.32	38	9

4. Для данных задач 1-2 и результатов этих задач, предполагая, что задано нормальное распределение, найти:

а) точность оценки математического ожидания a по выборочной средней $\bar{x}_в$ с надёжностью γ;

б) доверительный интервал для оценки математического ожидания a с надёжностью γ.

Выборочную среднюю $\bar{x}_в$, объём выборки n, среднее квадратическое отклонение σ взять из задач 1-2, γ - из задачи 3.

5. Глубина моря измеряется прибором, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки измерения распределены нормально со средним квадратическим отклонением σ. Сколько надо сделать независимых измерений, чтобы определить глубину моря с ошибкой не более δ при надёжности γ?

	γ	σ	δ		γ	σ	δ		γ	σ	δ
5.1	0.95	23	6	5.11	0.97	15	5	5.21	0.92	11	4
5.2	0.97	14	8	5.12	0.96	14	6	5.22	0.94	23	8
5.3	0.93	21	9	5.13	0.92	23	4	5.23	0.93	25	7
5.4	0.94	15	5	5.14	0.95	12	3	5.24	0.99	17	5
5.5	0.98	13	6	5.15	0.98	14	8	5.25	0.95	10	3
5.6	0.99	20	4	5.16	0.93	20	6	5.26	0.98	13	4
5.7	0.93	24	7	5.17	0.92	22	7	5.27	0.93	21	7
5.8	0.94	18	4	5.18	0.95	19	5	5.28	0.97	14	5
5.9	0.93	16	7	5.19	0.94	16	3	5.29	0.94	24	8
5.10	0.95	19	6	5.20	0.95	18	4	5.30	0.99	12	4

2.3 Решение типового варианта

1. Для данной выборки выполнить задачу обработки и систематизации, определить:

а) вариационный ряд (выборку в порядке возрастания);

б) статистические ряды частот и относительных частот;

в) интервальные статистические ряды частот и относительных частот (минимальную и максимальную варианты, размах выборки, число интервалов, длину интервалов);

г) дискретные (группированные) статистические ряды частот и относительных частот.

2. Для данной выборки выполнить задачу анализа, определить:

а) по интервальному статистическому ряду построить гистограмму частот и относительных частот;

б) по дискретному статистическому ряду найти:

- полигон частот и относительных частот;
- эмпирическую функцию распределения;
- выборочную среднюю;
- выборочную и исправленную выборочную дисперсии;
- выборочное и исправленное выборочное среднеквадратические отклонения;
- выборочные моду и медиану;

в) по статистическим рядам частот и относительных частот найти:

- выборочные начальные и центральные моменты третьего и четвёртого порядков;
- выборочный эксцесс;
- выборочный коэффициент асимметрии.

20	15	17	19	23	18	21	15	16	13
20	16	19	20	14	20	16	14	20	19
15	19	17	16	15	22	21	12	10	21
18	14	14	18	18	13	19	18	20	23
16	20	19	17	19	17	21	17	19	17
13	17	11	18	19					

Решение: заметим, что вычисления и построение графиков производится в среде Mathcad. Копия файла из Mathcad приведена ниже. То, что получено в Mathcad, следует оформить и пояснить.

1. а) объём выборки n = 55. Вариационный ряд (выборка в порядке возрастания):

$Y^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	10	11	12	13	13	14	14	14	14	...

(в среде Mathcad эта таблица просматривается вся нажатием на указатель направления движения);

б) по вариационному ряду посчитаем, сколько раз имеет место каждая варианта, т.е. частоту (n_i) каждой варианты. Полученные данные занесём в таблицу – статистический ряд частот:

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
n_i	1	1	1	2	4	4	5	7	6	8	7	5	1	2

Относительные частоты вариант найдём по формуле $p_i^* = \frac{n_i}{n}$, где n объём выборки, полученные результаты занесём в таблицу - статистический ряд относительных частот:

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
p_i^*	0,018	0,018	0,018	0,036	0,073	0,073	0,091	0.127	0,109
x_i	19	20	21	22	23				
p_i^*	0,145	0,127	0,091	0,018	0,036				

2. Для построения интервального статистического ряда определим сначала следующее: наибольший и наименьший варианты: $a = x_{min} = 10$, $b = x_{\max} = 23$; размах выборки: $R = b - a = 13$; величину интервалов найдём по формуле Стерджеса $h = \frac{x_{min} - x_{min}}{1 + \log_2 n}$, $h =$ 1,917 и округляем до целого $h \approx 2$; число интервалов – знаменатель этой формулы $m = 1 + \log_2 n$ или $m = \frac{R}{h}$=6,781, округляем до целого $m \approx 7$; за начало первого интервала рекомендуется брать величину $x_{нач} = x_{min} - \frac{h}{2}$, $x_{нач} = 9{,}041 \approx 9$; число вариантов, попавших в каждый интервал (т.е. частоты n_i) и относительные частоты (т.е. $p_i = \frac{n_i}{n}$) найдены в среде Mathcad (см. $w1^T$ и $w2^T$).

Таким образом, искомый интервальный ряд имеет вид:

Интервалы	[9,11)	[11,13)	[13,15)	[15,17)	[17,19)	[19,21)	[21,23]
n_i	1	2	6	9	13	16	8
$p_i = \frac{n_i}{n}$	0,018	0,036	0,109	0,164	0,236	0,291	0,145

в) для построения дискретного статистического ряда (или в некоторых учебниках его называют группированным статистическим рядом) найдём середины интервалов $\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ (см. x^T в Mathcad), им будут отвечать соответствующие частоты и относительные частоты из интервального ряда.

Искомый дискретный статистический ряд:

$\dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$	10	12	14	16	18	20	22
n_i	1	2	6	9	13	16	8
p_i	0,018	0,036	0,109	0,164	0,236	0,291	0,145

2. а) по интервальному статистическому ряду построим гистограмму частот и относительных частот (в среде Mathcad):

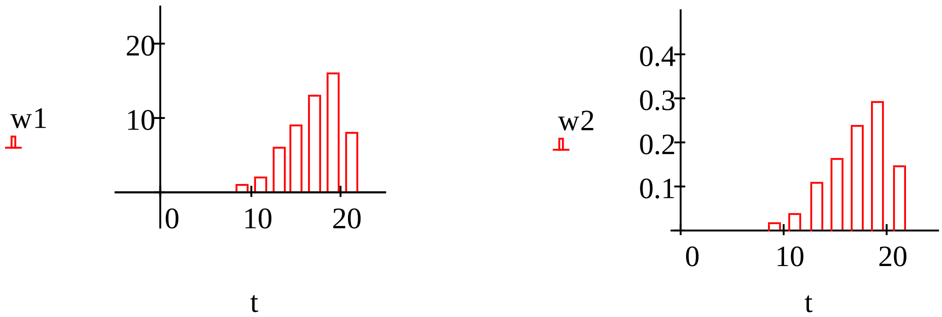


Рисунок 1

б) по дискретному статистическому ряду найдём:

- полигон частот и относительных частот:

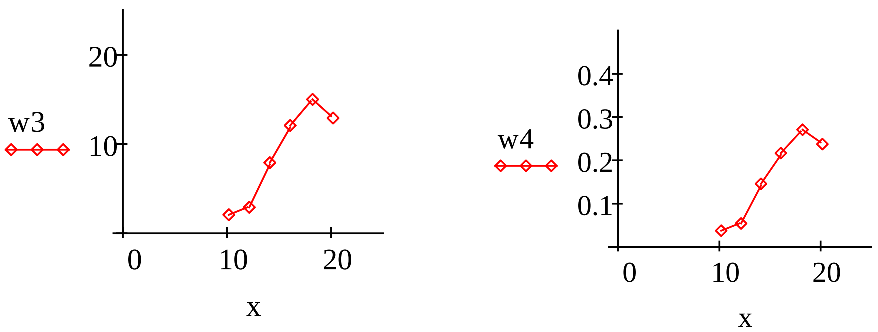


Рисунок 2

- эмпирическую функцию распределения (см. F^T и $F(y)$ в Mathcad):

$$F(x)=\begin{cases} 0, \ \text{при} \ x \le 10 \\ 0{,}018, \ \text{при} \ 10 < x \le 12 \\ 0{,}054, \ \text{при} \ 12 < x \le 14 \\ 0{,}163, \ \text{при} \ 14 < x \le 16 \\ 0{,}327, \ \text{при} \ 16 < x \le 18 \\ 0{,}563, \ \text{при} \ 18 < x \le 20 \\ 0{,}854, \ \text{при} \ 20 < x \le 23 \\ 1, \ \text{при} \ x > 23 \end{cases}$$

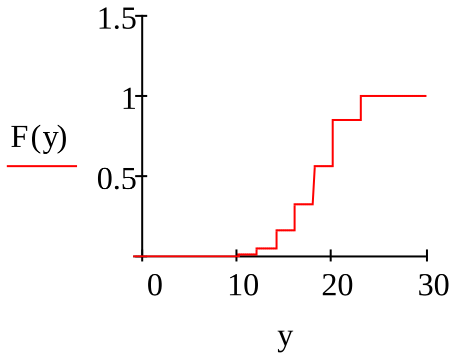


Рисунок 3

- выборочную среднюю (см. mean(X) в Mathcad): $\bar{x}_в = \dfrac{\sum_i x_i n_i}{n}$ или $\bar{x}_в = \sum_i x_i \cdot p_i$ =17,564;

- выборочную и исправленную выборочную дисперсии (см. var(X) и s2 в Mathcad): $D_в = \dfrac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_в)^2}{n}$ или $D_в = \dfrac{\sum_i n_i \cdot x_i^2}{n} - (\bar{x}_в)^2$ = 8,428 – выборочная дисперсия; $s^2 = \dfrac{n}{n-1} D_в$ = 8,584 – исправленная выборочная дисперсия;

- выборочное среднеквадратическое отклонение (см. stdev(X) или σ в Mathcad) и исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение (см. s в Mathcad): $\sigma = \sqrt{D_в} = 2{,}903$; $s = \sqrt{s^2} = 2{,}93$;

- выборочные моду и медиану (см. mode(X) и median(X) в Mathcad): мода $M_0 =$ 19 определяет варианту, имеющую наибольшую частоту (мода может быть не одна, её просто найти по статистическому ряду частот); медиана M_e =18 определяет середину вариационного ряда и зависит от чётности объёма выборки: $M_e = \begin{cases} x_{k+1}, \ \text{при} \ n = 2k+1 \\ \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}, \ \text{при} \ n = 2k \end{cases}$;

в) по статистическим рядам частот и относительных частот (см. y и p в Mathcad) найдём:

- сначала выборочные начальные и центральные моменты k-го порядка ($M(k)$ и $m(k)$ в Mathcad), затем, полагая k равно 3 и 4, выборочные начальные M(3)=$5{,}355 \cdot 10^3$, M(4)=$9{,}852 \cdot 10^4$ и выборочные центральные $m(3) = -2{,}645$, $m(4) = 147{,}375$ моменты третьего и четвёртого порядков;

- выборочный эксцесс $a_x^* = \dfrac{m(3)}{\sigma^3} = -0{,}117$;

- выборочный коэффициент асимметрии $c_x^* = \dfrac{m(4)}{\sigma^4} - 3 = -0{,}696$.

Заметим, что здесь найдены также выборочная средняя $M(1) = 16{,}826 = \bar{x}_в$, выборочная дисперсия $m(2) = 7{,}997 = D_в$, выборочное среднеквадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{m(2)} = 2{,}828$. Они отличаются от рассмотренных выше, т.к. определены по другим статистическим рядам.

Копия файла из Mathcad :

$n := 55$

$X := (20\ \ 15\ \ 17\ \ 19\ \ 23\ \ 18\ \ 21\ \ 15\ \ 16\ \ 13\ \ 20\ \ 16\ \ 19\ \ 20\ \ 14\ \ 20\ \ 16\ \ 14\ \ 20\ \ 19$

$X^T =$

	0
0	20
1	15
2	17
3	19
4	23
5	18
6	21
7	15
8	16
9	13
10	20
11	16
12	19
13	20
14	14
15	...

$Y := \mathrm{sort}\left(X^T\right)$

$Y^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	10	11	12	13	13	14	14	14	14	...

$a := \min(X)$ $\qquad b := \max(X)$

$a = 10$ $\quad b = 23$ $\qquad R := b - a$ $\qquad R = 13$

$h := \dfrac{b-a}{1 + \dfrac{\ln(55)}{\ln(2)}}$ $\qquad h = 1.917$

$h1 := 2$ $\qquad m := \dfrac{R}{h}$

$x0 := a - \dfrac{h}{2}$ $\qquad x0 = 9.041$ $\qquad m = 6.781$

$a1 := 9$ $\qquad m1 := 7$

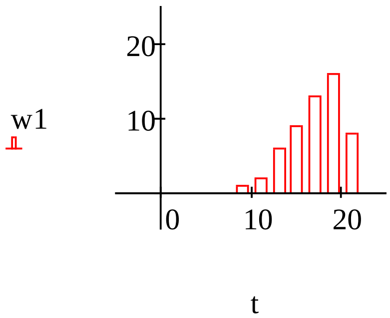
$j := 0..m1$ $\qquad i := 0..m1 - 1$

$t_j := a1 + h1 \cdot j$ $\qquad x_i := t_i + \dfrac{h1}{2}$

$w1 := \mathrm{hist}(t, X)$ $\qquad w2 := \dfrac{w1}{n}$ $\qquad w1^T = (1\ \ 2\ \ 6\ \ 9\ \ 13\ \ 16\ \ 8)$

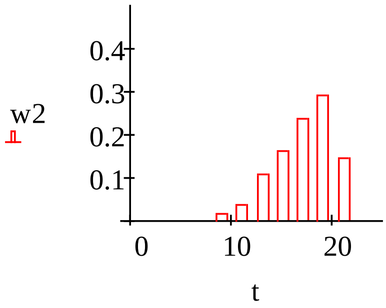
$t^T = (9\ \ 11\ \ 13\ \ 15\ \ 17\ \ 19\ \ 21\ \ 23)$

$x^T = (10\ \ 12\ \ 14\ \ 16\ \ 18\ \ 20\ \ 22)$



$$w2^T = (\,0.018 \quad 0.036 \quad 0.109 \quad 0.164 \quad 0.236 \quad 0.291 \quad 0.145\,)$$

$$0.018 + 0.036 + 0.109 + 0.164 + 0.236 + 0.291 + 0.145 = 0.999$$



$$mode(X) = 19$$

$$x1 := mean(X) \qquad x1 = 17.564$$

$$M := median(X) \qquad M = 18$$

$$x2 := var(X)$$

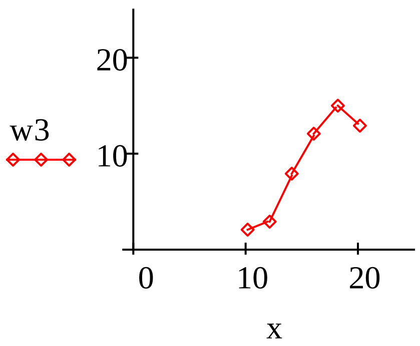
$$s2 := \frac{n}{n-1} \cdot x2$$

$$stdev(X) = 2.903$$

$$x2 = 8.428$$

$$s2 = 8.584 \qquad s := \sqrt{s2} \qquad s = 2.93$$

$$w3 := hist(x, X) \qquad w4 := \frac{w3}{n}$$



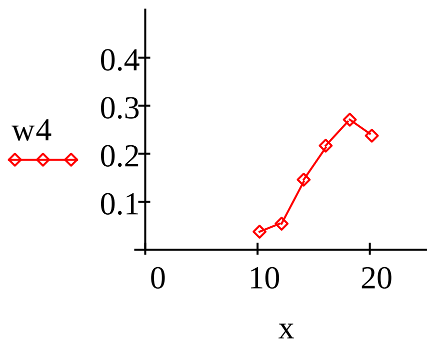
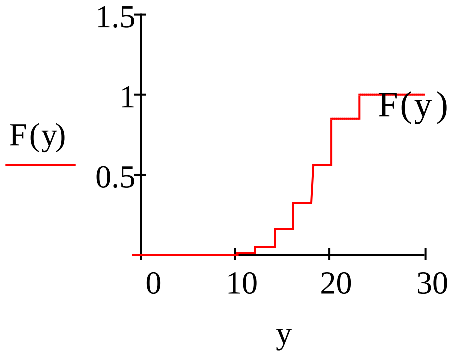


Рисунок 4

$$i := 0..6 \qquad w := (\,0.018 \quad 0.036 \quad 0.109 \quad 0.164 \quad 0.236 \quad 0.291 \quad 0.145\,)^T$$

$$F_i := \sum_{j=0}^{i} w_j$$

$$F^T = (0.018 \quad 0.054 \quad 0.163 \quad 0.327 \quad 0.563 \quad 0.854 \quad 0.999)$$



$$F(y) := \begin{cases} 0 & \text{if } y \le 10 \\ 0.018 & \text{if } 10 < y \le 12 \\ 0.054 & \text{if } 12 < y \le 14 \\ 0.163 & \text{if } 14 < y \le 16 \\ 0.327 & \text{if } 16 < y \le 18 \\ 0.563 & \text{if } 18 < y \le 20 \\ 0.854 & \text{if } 20 < y \le 23 \\ 1 & \text{if } y > 23 \end{cases}$$

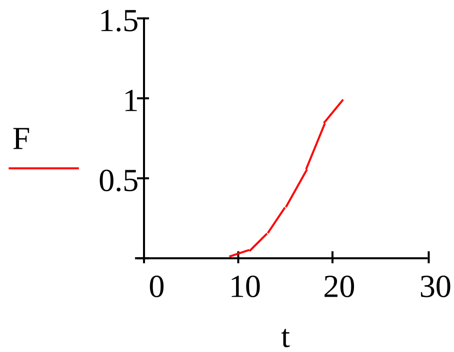


Рисунок 5

$$y := (10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19 \quad 20 \quad 21 \quad 22 \quad 13)^T$$

$$p := (0.018 \quad 0.018 \quad 0.018 \quad 0.036 \quad 0.073 \quad 0.073 \quad 0.091 \quad 0.127 \quad 0.109 \quad 0.145 \quad 0.127 \quad 0.091 \quad 0.018 \quad 0.036)^T$$

$$M(k) := \sum_{i=0}^{13} \left[(y_i)^k \cdot p_i \right] \qquad m(k) := \sum_{i=0}^{13} \left[(y_i - M(1))^k \cdot p_i \right]$$

$$M(1) = 16.826 \qquad m(2) = 7.997 \qquad \sigma := \sqrt{m(2)} \qquad \sigma = 2.828$$

$$\frac{m(3)}{\sigma^3} = -0.117 \qquad \frac{m(4)}{\sigma^4} - 3 = -0.696$$

$$M(3) = 5.355 \times 10^3 \qquad m(3) = -2.645$$

$$M(4) = 9.852 \times 10^4 \qquad m(4) = 147.375$$

3. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надёжностью 0,95, зная выборочную среднюю 18, объём выборки 25 и среднее квадратическое отклонение 3.

Решение: доверительный интервал для оценки математического ожидания a имеет вид $\bar{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Все величины, кроме *t*, известны. Найдём *t* из соотношения $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$, где $\Phi(t)$ функция Лапласа, её значения табулированы. По таблице $t = 1{,}96$. Таким образом, $18 - 1{,}96\frac{3}{\sqrt{25}} < a < 18 + 1{,}96\frac{3}{\sqrt{25}}$. Ответ: (16,824; 19,176).

4. Для данных задач 1-2 и результатов этих задач, предполагая, что задано нормальное распределение, найти:

а) точность оценки математического ожидания *a* по выборочной средней $\bar{x}_в$ с надёжностью γ;

б) доверительный интервал для оценки математического ожидания *a* с надёжностью γ.

Выборочную среднюю $\bar{x}_в$, объём выборки *n*, среднее квадратическое отклонение σ взять из задач 1-2, γ - из задачи 3.

Решение: из задач 1-2 выборочная средняя $\bar{x}_в$=17,564, объём выборки *n*=55, среднее квадратическое отклонение σ =2,903, из задачи 3 γ =0,95;

а) точность оценки математического ожидания *a* определяется формулой $\delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$. *t* найдено в задаче 3: $t = 1{,}96$. Поэтому точность будет равна $\delta = \frac{1{,}96 \cdot 2{,}903}{\sqrt{55}} \approx 0{,}77$;

б) по формуле, указанной в задаче 3, найдём доверительный интервал: $17{,}564 - 1{,}96\frac{2{,}903}{\sqrt{55}} < a < 17{,}564 + 1{,}96\frac{2{,}903}{\sqrt{55}}$ или $16{,}794 < a < 18{,}334$.

5. Глубина моря измеряется прибором, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки измерения распределены нормально со средним квадратическим отклонением σ =15. Сколько надо сделать независимых измерений, чтобы определить глубину моря с ошибкой не более δ =5 при надёжности γ =0,9?

Решение: из формулы, определяющей точность оценки математического ожидания $\delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$, найдём $n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$. Определим *t* из соотношения

$\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}=\frac{0,9}{2}=0,45$. По таблице $t=1,65$. Поэтому $n=\frac{1,65^2\cdot 15^2}{5^2}=24,5025$. Таким образом, надо сделать не менее 25 измерений.

Список литературы

1 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 2003.- 279 с.

2 Боровиков.А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 2006.

3 Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики.- М.: Наука, 2004.

4 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. школа, 2005.- 400 с.

5 Ивановский Р.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Основы, прикладные аспекты с примерами и задачами в среде Mathcad. - СПб.: БХВ- Петербург, 2008. – 528 с.

6 Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Теория вероятностей и математическая статистика. Конспект лекций для студентов специальностей 5В070400 – Вычислительная техника и программное обеспечение, 5В070300 – Информационные системы.– Алматы: АУЭС, 2013. - 49 с.

Содержание