Коммерциялық емес акционерлік қоғам

ҒҰМАРБЕК ДАУКЕЕВ АТЫНДАҒЫ АЛМАТЫ ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС УНИВЕРСИТЕТІ

IT-инжиниринг кафедрасы

ИМИТАЦИЯЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

5В060200 - Информатика, 5В070300 - Ақпараттық жүйелер мамандықтарының студенттерін үшін зертханалық жұмыстарға арналған әдістемелік нұсқау

Алматы 2021

ҚҰРАСТЫРУШЫ: Б.Б. Тусупова, А.К. Мамырова. Имитациялық модельдеу. 5В060200 - Информатика, 5В070300 - Ақпараттық жүйелер мамандықтарының студенттеріне арналған зертханалық жұмыстарды іске асыру үшін әдістемелік нұсқаулар. - Алматы: АЭжБУ, 2021. – 38 б.

Әдістемелік нұсқаулықта зертханалық жұмыстарға дайындық туралы нұсқаулар, әр зертханалық жұмыстың сипаттамасы, зертханалық жұмыстың әр тақырыбы бойынша теориялық материал, тапсырма, зертханалық жұмыстарды орындау әдістемесі, нәтижелерді және бақылау сұрақтары жүргізу және өңдеу әдістері бар. Ұсынылған әдебиет әдістемелік нұсқаулықтың соңында келтірілген.

Барлық зертханалық жұмыстар студенттердің ғылыми зерттеу жұмыстың элементтерін қолдана отырып құрылды.

Әдістемелік нұсқаулар 5В060200 - Информатика, 5В070300 - Ақпараттық жүйелер мамандықтарының барлық студенттеріне арналған.

10-сурет, библиограф. - 13 атау.

Рецензент: Чежимбаева К.С.

«Ғұмарбек Дәукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2020 жылғы жоспары бойынша басылады.

© НАО «Ғұмарбек Дәукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университеті», 2021 ж.

Кіріспе

Бұл әдістемелік нұсқаулықтар нақты ең жақын жағдайлардағы әртүрлі процестер мен жүйелерді имитациялық модельдеу саласындағы қолданбалы мәселелерді шешуге бағытталған. Сондықтан, зертханалық жұмыстарда кездейсоқ үлгінің кең ауқымын модельдеу әдістеріне - кездейсоқ сандардан кездейсоқ ағындар мен көпшілікке көрсету жүйелерге (ККЖ) дейін ерекше назар аударылады. Осы жұмыстарды орындау барысында алынған дағдылар студенттерге күрделі жүйелердің әртүрлі кластары үшін модельдеу әдістерін зерттеуге арналған зертханалық жұмыстардың параметрлері мен айнымалы мәндерін өздігінен таңдауға мүмкіндік береді.

Сонымен қатар, зертханалық жұмыстарды орындау кезінде студенттер бірдей маңызды міндеттерді шешеді – имитациялық модельдеу саласындағы ғылыми-техникалық әдебиетпен және программалық құжаттамамен өз бетінше жұмыс істеуді үйрену, заманауи компьютерлік модельдеу технологиясы аясында жұмыс жасау, компьютерлік құжаттарды және имитациялық эксперименттерінің нәтижелерін стандарт талаптарына сәйкес рәсімдеуді ұйымдастыру.

Бұл әдістемелік нұсқаулықта жеті зертханалық жұмыс қарастырылған.

№ 1 зертханалық жұмыс. Базалық тізбекті модельдеу

Жұмыстың мақсаты – кездейсоқ сандарды компьютермен модельдеу әдістерін оқып үйрену.

Тапсырма

1. *Қиықтау әдісі (метод усечения)* бойынша екі алгоритмді қолдану керек: орта шаршы және орта туынды.

Орта шаршы алгоритмнің көмегімен келесі операцияларды жүргізу керек:

а) (0.6100; 0.4100; 0.2100; 0.8100) циклімен сипатталатын тізбекті тауып, оның бастапқы $\mathbf{z_0}$, $\mathbf{z_1}$ мәндерін және осы циклдің бастапқы мәнінің тізбелік нөмірін белгілеп алу;

б) тізбек элементтерінің нөл немесе басқа бір тұрақты санды қайталай беруін, $\mathbf{z_0}$, $\mathbf{z_1}$ мен осы қайталаныс басталған элементінің кезекті нөмірін сақтау қажет.

а) және б) пункттерінде алынған алғашқы $\mathbf{z_0}$, $\mathbf{z_1}$ мәндер үшін, орта туынды алгоритмі көмегімен апериодтылық кесіндісінің ұзындығын анықтау керек.

2. *Шегеру әдісі (метод вычетов)*. Бұл әдістің алгоритмі үшін мынандай параметрлердің мәндерін таңдау керек, максималды мүмкін период мәні толық алгоритм үшін ***m***-ге тең, ал толық емес алгоритм үшін ***m/4.***

3. *Қосындылау әдісі (метод суммирования)*. Базалық тізбекті Фиббоначи алгоритмімен модельдеу үшін, қиықтау әдісінің а) пунктіндегі бастапқы $\mathbf{z_0}$, $\mathbf{z_1}$ мәндерін қолдану керек. Аддитивті алгоритмі үшін Фиббоначи тізбегіндегі $\mathbf{z_0}$ және $\mathbf{z_{16}}$ элементтері қолданылуы қажет.

Осы тізбектердің апериодтылық аралығының ұзындығын анықтап, оларды бір-бірімен салыстырыңдар.

4. Бұрын модельденген кез келген екі тізбектің сапасын Пирсон критерийі арқылы тексеру керек.

Теориялық бөлім

Қиықтау әдісі

Бұл әдіс бір немесе бірнеше алдыңғы сандарды бейсызықты түрлендіру нәтижесінде табылған жаңа санның цифрларының бір бөлігін алып тастау, немесе қию жолымен алынған кезекті кездейсоқ сандарды табуға негізделген.

Қиықтау әдісінің идеясын қолданып, бірқалыпты үлестірілген кездейсоқ сандарды тудыратын алғашқы алгоритмді 1946 жылы Фон Нейман мен Метрополис ұсынған болатын. Бұл алгоритм «орта шаршы» деген атқа ие болды, және $2k$ -орынды сандармен жұмыс істейді. Есептеу алгоритмі келесі қадамдардан тұрады:

1-қадам. $z_i = 0, a_1, a_2, ..., a_{2k}$ деп аламыз.

2-қадам. z_i-ді шаршылаймыз: $z_i^2 = 0, b_1, b_2, ..., b_k, b_{k+1}, ..., b_{3k}, b_{3k+1}, ..., b_{4k}$.

3-қадам. Алынған шаршының $2k$ орта цифрын алып, оларды тізбектің келесі санының разрядтары деп есептейміз: $z_{i+1} = 0, b_{k+1}, b_{k+2}, ..., b_{3k}$.

Дж. Фон Нейманның жолын қуушылар бұл алгоритмнің біраз модификациясын ұсынды. Мысалы, жақсы нәтижелерге (1):

$$\Phi(z) = 10^{-2k}\, Ц\left[10^{2k}\, D\left(10^{k} z_n z_{n-1}\right)\right]. \qquad (1)$$

функциясына негізделген алгоритммен жетуге болады. Соған қарамастан, қазіргі кезде кездейсоқ сандар тізбегін тудыратын барлық қолданбалы бағдарламалар шегерінділер мен қосындылар тәсілдеріне негізделген.

Шегерінділер әдісі (конгруэнттік әдіс)

Бұл әдісті 1948 жылы Д. Леймар ұсынған болатын. Жалпы жағдайда шегерінді әдісі мына түрдегі сызықты формулаға негізделеді:

$$z^*_{n+1} = az^*_n + c(\mathrm{mod}\ \ m), \qquad (2)$$

мұндағы z^*_0, a, c және m- теріс емес бүтін сандар.

(2) түріндегі жазу z^*_{n+1} саны $az^*_n + c$ өрнегін m -ге бөлгендегі қалдыққа тең екенін көрсетеді, басқаша айтқанда, z^*_{n+1} - бұл $az^*_n + c$-ң m модулі бойынша алынған ең кіші оң шегерінділісі. Параметрлері қандай да мәнге ие болмасын (2) формуламен тек қана ақырлы жиын құратын бүтін кездейсоқ сандар ғана алуға болады, содан кейін тізбектегі сандар қайталана бастайды. Бұл айқындығы күмәнсіз $P < m$ шектелуінен келіп шығады, мұндағы P - кездейсоқ тізбектің периоды.

Енді (2) өрнектің $c = 0$ болған жағдайдағы дербес түрін қарастырайық:

$$z^*_{n+1} = az^*_n(\mathrm{mod}\ \ m), \qquad (3)$$

Бұл 3-формула кездейсоқ тізбектерді біршама тез, бірақ (2) формулаға қарағанда азырақ периодпен модельдейді. a, c, m параметрлерін және кездейсоқ тізбектің бастапқы санын z^*_0 таңдағанда мынадай жағдайлар есте болуы керек: тізбектің периоды неғұрлым үлкен, тізбекті генерациялаудың жылдамдығы жоғары және кездейсоқ сандардың арасындағы арақатысы (корреляциясы) неғұрлым кем болғаны жөн.

Қазіргі кезде компьютерде қолдануға шегерінділер әдісінің (3) формуласы ыңғайлы екені анықталған. Ол үшін $m = 2^b$ болуы қажет. Мұндағы

b - машиналық сөздегі екілік цифрдың саны. Сонда кездейсоқ тізбектің $P = m/4$ тең болатын максималды периодына мына шарттар орындалғанда жетуге болады:

а) z_0^* кез келген оң, тақ, бүтін сан;

б) $a = 8t \pm 3$, мұндағы t - кез келген оң бүтін сан.

(2) формула бойынша алынған кездейсоқ тізбек периодының ұзындығы m-ға тең болу үшін мынадай шарттар орындалуы керек:

а) c және m - өзара жай сандар;

б) $a - 1$ саныr -ге еселі, егер r жәй сан және m санының бөлгіші болса;

в) $a - 1$ саны 4-ке еселі, егер m саны да 4-ке еселі болса.

Кездейсоқ тізбек периодының ұзындығы дәл m болғандықтан, 0 мен m–1-дің арасынадғы әр сан бұл тізбекте бір ақ рет кездеседі. Сондықтан z_0^*-ның мәні периодтың ұзындығына әсер етпейді.

Айта кететін тағы да бір жәй (2) және (3) формулаларымен алынған кездейсоқ тізбектер мүшелерінің мәндері [0, m] кесіндісіне бірқалыпты орналасады, ал [0, 1] аралығындағы сандарды алу үшін бұл формулаларды мына өрнекпен толтыру қажет:

$$z_{n+1} = \frac{z_{n+1}^*}{m}. \qquad (4)$$

Қосындылау әдісі

Ван Вейнгарден ұсынған қосындылау әдісі мына жалпы мағналы сызықтық формуланы қолданады:

$$z_{k+j} = \sum_{l=0}^{k-1} a_l z_{j+l} + c \pmod{m}, \; j = 1,2,.... \qquad (5)$$

Бұл әдіспен алынған кездейсоқ тізбектердің периоды шегерінді әдісі қолданғандағы периодтан едәуір ұзын болады. Оның себебі, бұл тізбектерде период пайда болу үшін шегерінді әдісі сияқты оның екі ғана емес, бірнеше мүшесі сәйкес келуі керек. Сонымен қатар, қосындылау әдісімен алынған тізбек сандарының корреляциясы аз.

Қосындылау әдісінің ең қарапайым формуласын алу үшін (5) өрнегінің параметрлеріне мынадай мағына беру керек:

$$a_0 = a_1 = 1, \; a_2 = a_3 = ... = a_{k-1} = c = 0$$

Сонда:

$$z_{j+1} = z_j + z_{j-1} \pmod{m}. \qquad (6)$$

Бұл өрнек Фибоначчи формуласы деген атқа ие болды және өткен ғасырдың елуінші жылдарының бас кезінде кең қолданыс тапты. Алайда,

Фибоначчи формуласымен генерацияланған сандар жеткілікті кездейсоқ болған жоқ. Тек қана Дэвис деген ғалым осы формуламен, оның бастапқы z_0 және z_1 сандарын сәтті таңдап, статистикалық қасиеттері жақсы бірқалыпты кездейсоқ сандардың тізбегін алды.

Дэвистің алгоритмі мына формуланы қолданады:

$$z_{j+1} = z_j + z_{j-1} \pmod 4, \tag{7}$$

мұндағы $z_0 = \pi, z_1 = 5^{17} * 2^{-42} = 0{,}542101887$.

Қазіргі уақытта қосындылау әдісі алгоритмдерінің арасында ең көп тараған аддитивті алгоритмдер болып отыр. Ол алгоритмдер мынаформуланы қолданады:

$$z_{j+1} = z_j + z_{j-k} \pmod m,$$

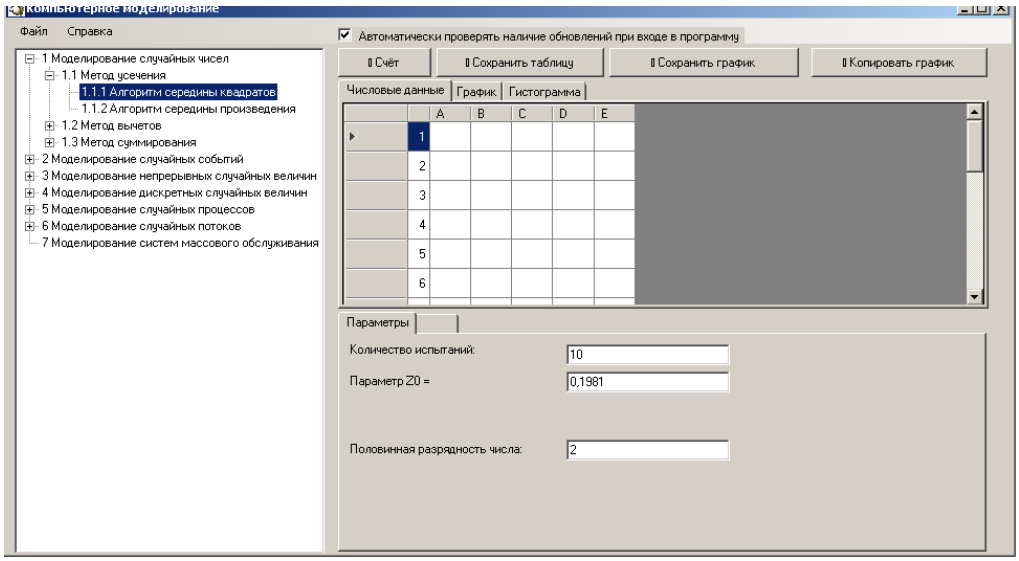
мұндағы k - үлкен және бүтін сан (k>16). Бастапқы z_0, $z_1, z_2, z_3 \ldots z_k$ сандарын ойлағандай таңдаған күнде, бұл алгоритмдер статистикалық қасиеттері жақсы кездейсоқ сандардың көзі бола алады.

Жұмысты орындау тәртібі

1. КМ программаға кіру.
2. КМ.exe файлын жұмысқа қосу.
3. Менюден керек әдіс пен алгоритмді таңдап алып, оларға қажетті деректерді енгізіп, «Есептеу» батырмасын басу.
4. «Нәтижелер» жапсырмасында есептеу нәтижелері келтірілді.
5. Алынған деректердің статистикалық өңдеу нәтижелері «Статистикалық өңдеу» жапсырмасында орналасқан.

Есептеме мазмұны:

1. Қысқаша базалық тізбектерді модельдеу әдістерін, базалық тізбектерді модельдеу әдістерінің блок-сұлбаларын келтіру.
2. Базалық тізбектерді модельдейтін алгоритмдердің параметрлерін таңдау және керек жағдайларда оларды негіздеу.
3. Модельденген тізбектерді Пирсон критериімен тексеріп, алгоритмнің блок-сұлбасын келтіру керек.
4. Әрбір модельденген тізбектердің 1-2 элементін қолмен есептеу керек.
5. Алынған нәтижелердің салыстырмалы талдамасын жасау қажет.



1 сурет - Бағдарламаның басты нысаны

Бақылау сұрақтары:

1. ξ кездейсоқ шамасы қандай үлестірім заңына бағынады?
2. Шегерінді әдіспен сандар тізбегін модельдеу мысалын келтіріңіз?
3. Фибоначчи алгоритмінің Дэвис алгоритмінен айырмашылығы неде?
4. Тізбектің периодын қалай анықтау керек?
5. Сандар тізбегін шегерінді әдіспен модельдегенде, тізбек периоды қандай шарттарда максималды болады?

№ 2 зертханалық жұмыс. Кездейсоқ оқиғаларды модельдеу

Жұмыстың мақсаты: кездейсоқ оқиғаларды компьютермен модельдеуді үйрену.

Тапсырма

Әртүрлі басты мәндерді алып, кездейсоқ оқиғалардың әрбір типі бойынша (қарапайым оқиғалар, оқиғалардың толық тобы, күрделі тәуелсіз және күрделі тәуелді оқиғалар) 2-3 нақтылама жасау. Модельдеудің бастапқы мәндері мен соңғы нәтижелерін есептеме жасау үшін машинаның жадына сақтау.

Теориялық бөлім

Қарапайым оқиғаларды модельдеу

Түрлендіру қолайлы болу үшін, бірқалыпты үлестірілген кездейсоқ тізбектің сандарын, ξ кездейсоқ шаманың тәуелсіз z нақтыламасы ретінде қарастырайық. Алдағы уақытта гректің ξ әріпін тек [0, 1] кесіндісінде бірқалыпты үлестірілген заңдылыққа бағынатын кездейсоқ шамаға бекітеміз.

Әртүрлі кездейсоқ заңдылықтарды модельдеу үшін базалық кездейсоқ сандарды қолдануды, ең қарапайым заңдылықтың бірін, яғни кездейсоқ қарапайым оқиғаны модельдеуден бастайық.

A оқиғасы *P*(*A*) = *p* ықтималдығымен берілсін. Қарапайым оқиғаны модельдеудің негізі ретінде келесі теореманы тұжырымдайық.

1-теорема. Қарапайым *A* оқиғасының берілген ықтималдылығы *p*, ал базалық ξ кездейсоқ шамасының тәуелсіз нақтыламасы z болсын. Сонда *A* оқиғасы пайда болу үшін $z \le p$ шарты орындалуы керек.

Дәлелдемесі:

$$p = P(A) = P\{\xi \le p\} = \int_0^P f(z)dz = \int_0^P 1 \cdot dz = p$$

Оқиғалардың толық тобын модельдеу

A_1, A_2, …,A_n- үйлесімсіз оқиғалардың толық тобы болсын. Бұл оқиғалардың ықтималдылықтары берілген:

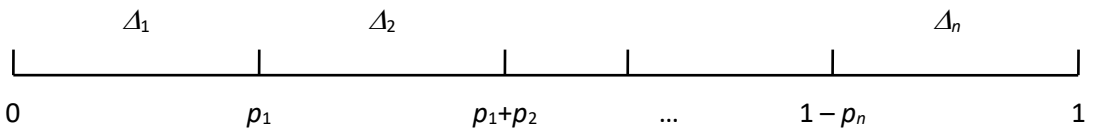
$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \cdots & A_n \\ p_1 & p_2 \cdots & p_n \end{pmatrix},$$

мұндағы $p_k = P\{A_k\}$, $k = 1, 2, ..., n$, $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$.

Оқиғалардың толық тобын модельдеу үшін, $z \in [0, 1]$ кездейсоқ сандарын қолданамыз. Алдын-ала [0, 1] аралығын бірнеше кесіндіге бөліп алайық. Бұл кесінділердің мөлшері мына шартпен алынсын (2 сурет): $\Delta_k = p_k$.

Үйлесімсіз оқиғалардың толық тобын модельдеуге негіз ретінде тағы бір теореманы тұжырымдайық:

2-теорема. Кездейсоқ сан z базалық ξ кездейсоқ шамасының тәуелсіз нақтыламасы болсын. Сонда оқиғалардың толық тобын құратын әрбір A_k оқиғасы, $z \in \Delta_k$ шарты орындалғанда ғана p_k ықтималдығымен табылады.



2 сурет

Күрделі оқиғаларды модельдеу.

Күрделі оқиға деп, нәтижесі екі, немесе одан да көп қарапайым оқиғалардың нәтижесіне байланысты оқиғаны айтады. Күрделі оқиғалар тәуелді және тәуелсіз болып бөлінеді. Егер күрделі оқиғаның құраушылары тәуелсіз қарапайым оқиғалар болса, оқиғаның өзі де тәуелсіз болады. Мысалы,

жатақхананың бір бөлмесінде тұратын екі студенттің емтихан тапсыруы керек болсын. А оқиғасы 1-ші студенттің емтиханды ойдағыдай тапсыру оқиғасы, ал В оқиғасы 2-ші студенттің ойдағыдай тапсыруына сәйкес келсін. Бұл қарапайым оқиғаларды тәуелсіз деп санауға болатыны айқын. Осы мысалдағы күрделі оқиғаның нақтыламалары мыналар: AB, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$, $\overline{A}\overline{B}$. Олардың ықтималдылықтары: P_AP_B, $P_A(1-P_B)$,$(1-P_A)P_B$, $(1-P_A)(1-P_B)$.

Осындай күрделі оқиғаларды модельдеуге жоғарыда қарастырылған 1-теорема негіз бола алады.

Енді *A* және *B* оқиғалары бірінен бірі тәуелді болатын жағдайды қарастырайық. Жоғарыда келтірілген мысалдағы екі студентті бұл жолы жас жұбайлар деп есептейік. Ендігі жерде ерлі-зайыпты студенттердің біреуі емтиханын тапсыра алмаса, ол жанұяның бюджетіне әдеуір нұқсан келтіреді. Сондықтан екінші студенттің емтихан тапсыру барысына өзінің әсерін тигізеді, яғни осы екі оқиғаны біріне бірін тәуелді қылады. Бұл жағдайда p_A және p_B ықтималдығынан өзге $p_{B/A}$ шартты ықтималдық берілуі тиіс.

Тәуелді күрделі оқиғаларды модельдеу үшін де 1-теоремасына негізделген қарапайым оқиғаларды модельдеу сұлбасын қолдануға болады.

Жұмысты орындау тәртібі

1. КМ программаға кіру.
2. КМ.exe файлын жұмысқа қосу.
3. Менюден керек әдіс пен алгоритмді таңдап алып, оларға қажетті деректерді енгізіп, «Есептеу» батырмасын басу.
4. «Нәтижелер» жапсырмасында есептеу нәтижелері келтірілді.

Есептеме мазмұны:

1. Кездейсоқ оқиғаларды модельдеуге қысқаша теориялық сипаттама.
2. Кездейсоқ оқиғаларды модельдеу алгоритмдерінің блок-сұлбалары.
3. Қолмен есептелген және компьютерден алынған модельдеу нәтижелерін келтіру.
4. Кездейсоқ оқиғалардың барлық түріне нақты мысалдар келтіру.

Бақылау сұрақтары:

1. Қарапайым оқиғаны модельдеу алгоритмін келтіріңіз.
2. Оқиғалардың толық тобын модельдеудің қарапайым оқиғаларды модельдеуден айырмашылығы неде?
3. Қандай оқиғаны күрделі деп атайды?
4. Қандай оқиғаны тәуелді күрделі оқиға деп атайды?
5. Шартты ықтималдықты есептеу формуласын келтіріңіз.

№ 3 зертханалық жұмыс. Үздіксіз кездейсоқ шамаларды модельдеу

Жұмыстың мақсаты: берілген үлестіру заңдылығымен кездейсоқ шамаларды модельлдеу әдістерін үйрену және жиі кездесетін үлестіру заңдылықтарды кездейсоқ шамаларды модельдеуге дағдылану.

Тапсырма

Үздіксіз кездейсоқ шамаларды модельдеудің әрбір әдісі және үлестіру заңдылықтары бойынша бір нақтыламаны орындау. Модельдеудің бастапқы мәндері мен соңғы нәтижелерін есептеме жасау үшін машинаның жадына сақтау.

Теориялық бөлім.

Кері функция әдісі

Кездейсоқ η шамасы $(a,\ b)$ интервалында анықталған, тығыздық функциясы $f(x)>0$,$a < x < b$ берілген шама болсын және $a = -\infty$, $b = \infty$ болатын жағдай шектелмесін. Сонда бұл шаманың үлестірім функциясы болады:

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx. \qquad (8)$$

Кері функция әдісінің теориялық негізін мына теорема түрінде тұжырымдайық.

3-теорема. Кездейсоқ сан z бірқалыпты үлестірімді базалық ξ кездейсоқ шамасының нақтыламасы болсын. Сонда:

$$F(x) = z \quad \text{немесе} \quad x = F^{-1}(z) \qquad (9)$$

өрнегінен табылған x саны алдын ала берілген $f(x)$тығыздығымен сипатталатын η кездейсоқ шамасының нақтыламасы болады.

Кері функция әдісін іс жүзінде қолдану үшін x нақтыламасын мына интегралдық теңдеуді шешіп табу қажет:

$$\int_a^{x_j} f(x)dx = z_j \qquad (10)$$

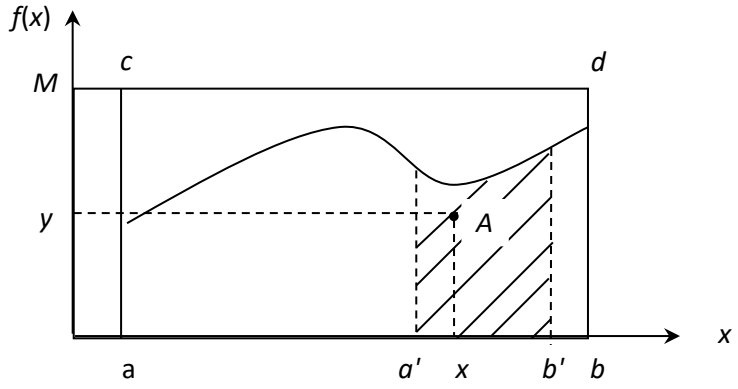
Нейманның «шығарып тастау» әдісі

Джон Фон Нейманның «шығарып тастау» әдісі, бірқалыпты үлестірімді базалық тізбектің кездейсоқ сандарының кейбіреулерін алып тастағанда, қалғандарын берілген үлестірім заңына сәйкес келтіруге негізделген.

Кездейсоқ η шамасы $[a,\ b]$ аралығында жоғарыдан шектелген (3 сурет) тығыздық функциясымен берілсін: $f(x)< M$.

Теоремалар әдісі

Кездейсоқ шамаларды модельдеудің бұл әдісі ықтималдықтар теориясының белгілі шектік теоремаларының кейбір шарттарын жуықтап елестетуге негізделген. Мысалы, ықтималдықтар теориясының орталық шектік теоремасы қалыпты үлестірім заңына бағынатын кездейсоқ шаманы модельдеуге мүмкіндік береді. Бұл теореманы алғаш рет Лаплас тұжырымдаған. Оны толықтырып, жетілдіруге көптеген атақты математиктер ат салысты, солардың ішінде П. Чебышев, А.А. Марков және А.М. Ляпуновтар да бар.



3 сурет

Орталық шектік теоремасының келесі тұжырымын келтірейік.

5-теорема. $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ - бір ғана үлестірім заңына бағынған, өзара тәуелсіз және мөлшерленген кездейсоқ шамалар болсын. Сонда $n \to \infty$ жағдайында, мөлшерленген $\eta^н$ шамасының:

$$\eta^H = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \tau_i , \qquad (11)$$

үлестірім заңы, ықтималдық тығыздығы $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.болатын мөлшерленген қалыпты үлестіру заңына жақындайды. Егер формуласында ξ кездейсоқ шамасының орнына математикалық үміті m_z = 1/2 және дисперсиясы σ_z^2 = 1/12-ге тең, ξ базалық кездейсоқ шамасын қолданса, формуланы мына түрге келтіруге болады:

$$\eta^H = \sqrt{\frac{3}{n}} \sum_{i=1}^{n} (2\xi - 1). \qquad (12)$$

Демек, (11) формуламен, үлкен n-нің мөлшерін алған жағдайда, параметрлері m = 0 және σ^2 = 1 болатын, қалыпты үлестірімді кездейсоқ шаманың нақтыламаларын табуға болады. Жүргізілген зерттеулер $n=12$-ге тең болғанның өзінде (12) қосындысының қатесі $9\cdot10^{-3}$-тен аспайтынын дәлелдеді. Сондықтан, іс жүзінде m_x және σ_x^2 параметрлері берілген қалыпты үлестірім заңын модельдеу үшін мына формула жиі қолданылады:

$$x = m_x + \sigma_x\left(\sum_{i=1}^{12} z_i - 6\right), \tag{13}$$

мұндағы z және x базалық ξ және модельденетін η кездейсоқ шамалардың нақтыламалары.

Композиция әдісі

Егер кездейсоқ η шамасының үлестірім функциясының түрі күрделі болса, оны көп жағдайларда бірнеше қарапайым үлестірімдердің композициясы ретінде қарастыруға болады:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{m} C_k * F_k(x), \tag{14}$$

мұндағы $C_k > 0$. (14) формуласынан $k \to \infty$ ұмтылғанда мына теңдікті аламыз: $\sum_{k=1}^{m} C_k = 1$.

Демек, $\{A_k\}$ оқиғаларының толық тобын құруға болады:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \dots & A_m \\ C_1 & C_2 \dots & C_m \end{pmatrix},$$

мұндағы $C_k=H(A_k)$.

Бұл әдіске негіз бола алатын мына теореманы тұжырымдайық.

6-теорема. z_1 және z_2 базалық ξ кездейсоқ шаманың тәуелсіз нақтыламалары болсын. Егер z_1-ң көмегімен, оқиғалардың толық тобын модельдеу арқылы табылған, A_k оқиғасының номерін анықтасақ, сонан соң $F_k(x) = z_2$ теңдеуінен x санын тапсақ, бұл сан берілген $F(x)$ үлестірім функциясымен сипатталатын η кездейсоқ шамасының нақтыламасы болады.

Дәлелдеуі: белгілі толық ықтималдық теоремасын қолданып η кездейсоқ шамасының үлестірім функциясын (15) есептейік:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{m} C_k * f_k(x). \qquad (15)$$

Қалыпты үлестірім

Қалыпты немесе Гаусс үлестірімі маңызды және жиі қолданылатын үздіксіз үлестірімдердің бірі.

Қалыпты үлестірімнің тығыздық функциясы:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}};-\infty<x<\infty.$$

Математикалық үміті: $M[\eta]=m_x$, дисперсиясы: $D[\eta]=\delta_x^2$.

Қалыпты үлестірімді кездейсоқ η шаманы модельдеу үшін бірнеше алгоритмдер қолдануға болады. Солардың бірі, шектік теоремаларын қолдану әдісіне байланысты. Басқа бір әдісті американдықтар Т. Бокс пен М. Мюллер ұсынды. Бұл әдіс орайлық координаттар әдісі деп аталады. Енді осы әдіспен танысайық.

η және ξ - мөлшерленген қалыпты үлестірім заңы бар екі тәуелсіз кездейсоқ шама болсын. Олардың нақтыламаларын сәйкесінше x және y деп белгілейік. η мен ξ кездейсоқ шамаларын A нүктесінің декарт жазықтығындағы координаттары ретінде бейнелейік. Сонда A нүктесінің орайлық координаттарын мына өрнектерден табамыз:

$$R=\sqrt{\eta^2+\tau^2} \text{ және } \theta=arctg\frac{\tau}{\eta}.$$

Бұл екі жаңа кездейсоқ шамаларының тығыздық функцияларын келтірейік:

$$f(r)=re^{-\frac{r^2}{2}} \text{ және } f(\varphi)=\frac{1}{2\pi},$$

мұндағы r мен φ - R және θ кездейсоқ шамаларының нақтыламалары. Енді, кездейсоқ шамаларын модельдеу әдістерінің бірімен, мысалы, кері функция әдісімен r және φ нақтыламаларын модельдеп, солар арқылы A нүктесінің декарт координаттарының нақтыламалары x пен y-ті табуға болады:

$$x = r\cos\varphi = \sqrt{-2\ln z_1}\cos 2\pi z_2;$$
$$y = r\sin\varphi = \sqrt{-2\ln z_1}\sin 2\pi z_2. \qquad (16)$$

Қалыпты заңдылығы бар кездейсоқ шаманың нақтыламасын модельдеу үшін (16) формулаларының кез келгенін қолдана аламыз, мысалы, олардың біріншісін:

$$x_j = m_x + \sigma_x\sqrt{-2\ln z_{2j-1}}\cos 2\pi z_{2j}$$

(16) формуламен есептеу көп уақытты талап ететіндіктен американ ғалымы Г. Марсалья орайлық координаттар әдісінің келесі алгоритмін ұсынды.

Бірқалыпты үлестірім

Қолдану жиілігі қалыпты заңына парапар бірқалыпты үлестірім заңы мына тығыздық функциясымен сипатталады:

$$f(x) = \frac{1}{b-a},\ x \in [a, b].$$

Математикалық үміті: $M[\eta] = m_x = \frac{a+b}{2}$. Дисперсия: $D[\eta] = \delta_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Бірқалыпты үлестірімді η кездейсоқ шамасын модельдеу үшін кері функция әдісімен табылған мына формуланы қолдануға болады:

$$x = a + z(b - a), \qquad (17)$$

Экспоненциалдық үлестірім

Экспоненциалдық үлестірім «пайда болу уақытымен» сипатталатын біраз нақтылы процестерді бейнелейді. Мысалы, электрон аппараттарының істен шықпай жұмыс істеу ұзақтығы, телефон шылдырының арасындағы уақыт аралығы, немесе ірі жер сілкіністер арасы және т.б.
Экспоненциалдық үлестірімнің тығыздық функциясы:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0.$$

Математикалық үміті: $M[\eta] = m_x = \frac{1}{\lambda}$. Дисперсиясы: $D[\eta] = \delta_x^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

Бұл үлестірімді модельдеу үшін кері функция әдісін қолданамыз. Демек кері функция:

$$x_j = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - z_j), \qquad (18)$$

ξ мен $\xi_1 = 1 - \xi$ кездейсоқ шамаларының екеуі де $[0, 1]$ арасында бірқалыпты үлестірілгенін ескере отырып, (18) формуланың орнына есептеуге тиімдірек формуласын келтірейік.

$$x_j = -\frac{1}{\lambda} \ln z_j. \tag{19}$$

Сызықтық үлестірім

Сызықтық заңның үлестірім тығыздығы мына формуламен беріледі:

$$f(x) = \lambda\left(1 - \frac{\lambda}{2}x\right); \qquad x \in \left(0, \frac{2}{\lambda}\right].$$

Математикалық үміті $M[\eta] = m_x = \frac{1}{\lambda}$, дисперсиясы $D[\eta] = \delta_x^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

Сызықтық үлестірім нақтыламаларын есептейтін формуланы кері функция әдісімен алуға болады:

$$F(x) = \lambda \int_0^{x_j} \left(1 - \frac{\lambda}{2}x\right)dx = \lambda\left(x_j - \frac{\lambda}{4}x_j^2\right) = z_j$$

Сондакеріфункция

$$x_j = \frac{2}{\lambda}\left(1 - \sqrt{z_j}\right). \tag{20}$$

Гамма-үлестірімі

Тығыздық функциясы (21) өрнегімен берілген және барлық:

$$f(x) = \frac{\alpha^k}{(k-1)!} x^{(k-1)} e^{-\alpha x}, \tag{21}$$

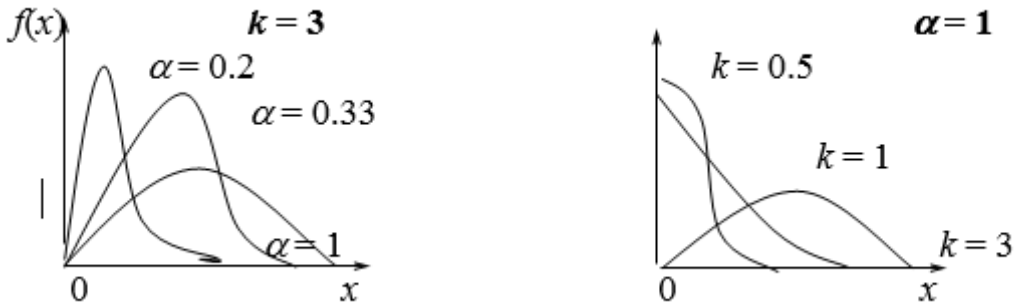
параметрлері оң, яғни $\alpha > 0$, $k > 0$, $x \geq 0$ кездейсоқ шамасы гамма үлестіріміне бағынады. Бұл кездейсоқ шаманың математикалық үміті мен дисперсиясын келтірейік:

$$M[\eta] = m_x = \frac{k}{\alpha}, \; D[\eta] = \delta_x^2 = \frac{k}{\alpha^2}.$$

Әртүрлі кездейсоқ құбылыстарды бейнелейтін көптеген теріс емес кездейсоқ шамаларды гамма үлестірімінің көмегімен сипаттауға болады.

Шынымен, α мен k параметрлері гамма үлестірімі заңының сұлбасы мен масштабын анықтайтын болғандықтан, бұл параметрлердің мөлшерлерін таңдау арқылы тығыздық функциясының түрін күрделі (4 сурет) өзгертуге болады. Сондықтан бұл заң, көптеген қолданбалы зерттеулерде пайдалана алатын, универсальды үлестірім ретінде танылмалы. Гамма - үлестірімі параметрлерінің мәнін анықтау үшін мына өрнектерді қолдануға болады:

$$k = \frac{m_x^2}{\sigma_x^2} \text{ және } \alpha = \frac{m_x}{\sigma_x^2}.$$



4 сурет

Гамма үлестірімінің тағы бір ерекшелігі, параметрлерінің мәнін өзгерту арқылы осы үлестірімнің жекеленген жағдайы ретінде бірнеше пайдалы басқа үлестірім заңдарын алуға болады. Мысалы, $k=1$ тең, ал α- тұрақты сан болса, гамма үлестірімінің көмегімен экспоненциялдық заңға бағынышты кездейсоқ шама модельденеді. Егер k-ң бүтін санды мәні болса, онда гамма үлестірімі k -ретті Эрланг үлестірімі деп аталады. Ары қарай, егер $\alpha=1$ болса, онда k өскен сайын гамма үлестірімі қалыпты үлестірімге жақындайды. Ал $k=1/2$ және $i=2$ (i-еркіндік дәрежесінің саны) деп алып, x^2үлестірімді кездейсоқ шаманы модельдеуге болады.

Гамма үлестірімімен сипатталатын η кездейсоқ шамасының нақтыламалары:

$$x = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(z_1 * z_2 * \ldots * z_k\right),$$

формуласымен есептеледі. Бұл формула, гамма тығыздық функциясының $k=1$ параметрін бірге тең деп қарастырғанда, кері функция әдісі арқылы алынған:

$$x = -\frac{1}{\alpha}\ln z.$$

Жұмысты орындау тәртібі:

1. КМ программаға кіру.

2. КМ.exe файлын жұмысқа қосу.

3. Сол жақтағы тізімнен орындалатын зертханалық жұмыстың тақырыбын таңдау.

4. Оң жақтағы тізімнен сәйкес әдіс пен алгоритмді таңдап алып, оларға қажетті деректерді енгізіп, «Есептеу» батырмасын басу.

5. «Нәтижелер» жапсырмасында есептеу нәтижелері келтірілді.

Есептеме мазмұны

1. Үздіксіз кездейсоқ шамаларды үлестірудің стандартты заңдылықтары мен модельдеу әдістері алгоритмдерінің блок-сұлбалары мен қысқаша сипаттамалары.

2. Таңдалған бастапқы мәндер мен оларға сәйкес мысалдар келтіру.

3. Модельдеу нәтижелері.

4. Әрбір модельденген заңдылық бойынша кездейсоқ шаманың бастапқы екі мәнін қолмен есептеу.

Бақылау сұрақтары:

1. Қандай кездейсоқ шама үздіксіз деп аталады?

2. Үздіксіз кездейсоқ шамаларды модельдеудің қандай әдісін графикалық түрде көрсетуге болады?

3. Кері функция әдісінің мәні неде?

4. Үздіксіз кездейсоқ шамаларды Нейманның «шығарып тастау» әдісімен модельдеу алгоритмін келтіріңіз.

5. Үздіксіз кездейсоқ шамалардың қандай стандартты үлестірімдерін білесіз?

№ 4 зертханалық жұмыс. Дискретті кездейсоқ шамаларды модельдеу

Жұмыстың мақсаты: берілген үлестіру заңдылығымен дискретті кездейсоқ шамаларды модельдеу әдістерін үйрену және белгілі үлестіру заңдылықтарды дискреттік кездейсоқ шамаларды модельдеуге дағдылану.

Тапсырма

Дискретті кездейсоқ шамаларды модельдеудің әрбір әдісі және үлестіру заңдылықтары бойынша бір нақтыламаны орындау. Модельдеудің бастапқы мәндері мен соңғы нәтижелерін есептеме жасау үшін машинаның жадына сақтау.

Теориялық бөлім

Дискретті кездейсоқ шамаларды модельдеудің негізгі әдісі

Дискретті кездейсоқ шамасын гректің ν әрпімен белгілеп, оның үлестіру заңын келесі үлестірім кестесімен сипаттайық:

$$\nu = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix},$$

мұндағы $p_k = P\{\nu = x_k\}$..

Дискретті кездейсоқ шамаларды модельдеудің бұл әдісі универсалды болғанымен, компьютер уақытының елеулі шығындалуына әкеледі. Сондықтан, белгілі дискретті үлестірім заңдарын модельдеу үшін, есептеуге тиімді басқа әдістерді қарастырайық.

Геометриялық үлестірім

Егер кейбір оқиға p ықтималдылығымен орындалатын болса, онда осы оқиғаның пайда болуына дейінгі бірінен бірі тәуелсіз сынақтардың ν кездейсоқ саны, геометриялық үлестіріммен сипатталады. Демек, p ықтималдығымен $\nu = 1$-ге. $(1-p)p$ ықтималдығымен $\nu = 2$-ге, ал жалпы алғанда:

$$P\{\nu = k\} = p * (1-p)^{k-1} = p_k. \qquad (22)$$

ықтималдығымен $\nu = k$-ға тең болады.

Геометриялық үлестірімнің математикалық үміті: $M[\nu] = m_x = \frac{(1-p)}{p}$ ал диперсиясы $D[\nu] = \sigma_x^2 = \frac{(1-p)}{p^2}$-ге тең.

Геометриялық үлестірімді ν кездейсоқ шамасын модельдеу үшін:

$$\nu = \left[\frac{\ln \xi}{\ln(1-p)} \right], \qquad (23)$$

формуласын қолдануға болады.

Пуассон үлестірімі

Пуассон үлестірімін сирек оқиғалар пайда болу заңы деп атайды және ол әр қайсысы кез келген мезгілде орындалатын оқиғалар санымен сипатталады. Мысалы, бір жылда болатын қатты жер сілкінісінің әлде басқа бір үлкен апаттың саны.

Осы үлестірімге бағынышты ν кездейсоқ шамасының бүтін санды k мәнін қабылдау ықтималдығы Пуассон формуласымен анықталады:

$$P\{\nu = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad (24)$$

мұндағы λ- уақыт бірлігінде орын алатын оқиғалардың орта саны. Математикалық үміті мен дисперсиясы сәйкесінше мынаған тең:

$$M[\nu] = m_x = \lambda; \qquad D[\nu] = \sigma_x^2 = \lambda. \qquad (25)$$

Пуассон заңына сәйкес кездейсоқ шаманы модельдеу үшін Пуассонның шектік теоремасын қолданамыз. Егер p-бір сынақ кезіндегі A оқиғасының пайда болу ықтималдылығы болса, онда n тәуелсіз сынақтар кезінде $n \to \infty$ және $p \to 0$ ұмтылған жағдайда k оқиғалар пайда болуының ықтималдылығы (24) формуламен табылады.

Пуассон теоремасына сәйкес дискреттік ν кездейсоқ шамасын модельдеуді мына сұлбамен жүргізуге болады. Әр қайсысының саны n-ге тең бірнеше, мысалы, N сериялы сынақтарды өткізейік. Әрбір сынақта A қарапайым оқиғасы p ықтималдығына сәйкес орындала алатын болсын. Сонда әрбір i номерлі серияда A оқиғасының орындалған k_i саны Пуассон үлестірімімен сипатталатын ν дискреттік кездейсоқ шамасының нақтыламасы болады. Әрбір серияның ішінде өткізілетін сынақ санын мына формуламен табамыз:

$$n = \frac{\lambda}{p}.$$

Биномиалды үлестірім

Бернулли алған биномиалды үлестірім дискретті үлестірім болып табылады және p и (1-p) ықтималдықты «сәттілік-сәтсіздік» сұлбасы бойынша n сынақтардағы қолайлы нәтижені сипаттайды.

n-тізбекті сынақтардан «сәттіліктер» k рет пайда болу ықтималдығы келесі формуламен өрнектеледі:

$$P\{V = k\} = \frac{n!\, p^k (1-p)^{(n-k)}}{k!(n-k)!};$$

$$M[\nu] = m_x = n * p; \qquad D[\nu] = \sigma_x^2 = n * p * (1-p).$$

Биномиалды үлестірімнің модельдеу әдісі n және p параметрлерінің мәндеріне тәуелді. n кішкентай мәндерінде n базалық кездейсоқ сандар $z[k]$ модельденеді және νшамасы p шамасын аспайтын z, санына тең. n үлкен және p кішкентай мәндерінде келесі теңдік тексеріледі:

$$z \le \sum_{i=0}^{k} r[i],$$

мұнда $r[i+1] = \frac{r[i]p(n-i)}{(i+1)(1-p)}$, $r[0] = (1-p)^n$.

Бұл жағдайда νдискретті кездейсоқ шамасы:

$$z \le \sum_{i=0}^{k} r[i].$$

шартының орындалуына қажетті k итерациялар санына тең.

Жұмысты орындау тәртібі

1. КМ программаға кіру.
2. КМ.exe файлын жұмысқа қосу.
3.Сол жақтағы тізімнен орындалатын зертханалық жұмыстың тақырыбын таңдау.
4. Оң жақтағы тізімнен сәйкес әдіс пен алгоритмді таңдап алып, оларға қажетті деректерді енгізіп, «Есептеу» батырмасын басу.
5. «Нәтижелер» жапсырмасында есептеу нәтижелері келтірілді.

Есептеме мазмұны:

1. Үлестірім заңдылықтарын модельдеу алгоритмдерінің блок-сұлбалары мен қысқаша сипаттамалары.
2. Таңдалған бастапқы мәндер мен оларға сәйкес мысалдар келтіру.
3. Модельдеу нәтижелері.
4. Әрбір модельденген заңдылық бойынша кездейсоқ шаманың бастапқы екі мәнін қолмен есептеу.

Бақылау сұрақтары:

1. Қандай кездейсоқ шама дискретті деп аталады?
2. Дискретті кездейсоқ шамалардың үздіксіз кездейсоқ шамалардан айырмашылығы неде?
3. Дискретті кездейсоқ шамаларды модельдеудің негізгі әдісі неге негізделген?
4. Пуассон заңы бойынша дискретті кездейсоқ шамаларды модельдеу алгоритмін келтіріңіз.
5. Дисретті кездейсоқ шамалардың қандай үлестірімдерін білесіз?

№ 5 зертханалық жұмыс. Таксопарк машиналарының жұмыс істеу процесін модельдеу

Жұмыстың мақсаты: Марков процестерінің сұлбасына келтірілген кездейсоқ процестерді модельдеу әдістерін оқып үйрену. Компьютермен диалог режимінде нақты есептерді модельдеу тәжірибесін игеру.

Тапсырма

Таксопаркте N жеңіл машина бар. Жұмыс күні басталар алдында әр машина келесі күйлерде болуы мүмкін:

- бұзылмаған және жұмысқа дайын;
- бұзылмаған, бірақ жұмысқа дайын емес (мысалы жүргізуші ауырып қалған жағдайда);
- бұзылған, тексеруден өтуде;
- жөндеуге берілген;
- істен шығарылуы тиіс.

Таксопарктің жұмысын берілген уақыт интервалында (ай, квартал, жыл) Марков процесі түрінде сипаттаңыз, бастапқы күйдің ықтималдылық векторының және ауыспалы ықтималдылықтар матрицасының нақты мәндерін таңдап алыңыз. Имитациялық эксперименттер нәтижесі ретінде мына көрсеткіштерді анықтаңыз:

- машиналардың пайдалы жұмыспен айналысу мерзімінің проценті;
- істен шығарылған машиналардың саны;
- жөндеуге кеткен күндердің жалпы саны.

Теориялық бөлім

Марков процестерін модельдеу

Марков процестері деп, олардың алдағы уақыттағы ықтималдылық сипаттамаларын болжау үшін, бұл процестердің қазіргі уақыттағы сипаттамаларын білу жеткілікті болатын, кездейсоқ процестерді айтады.

Саналымды ғана күйлері S_i, $i=\overline{1,n}$ бар және осы күйлері бір-біріне дискретті мезгілдерде ғана көше алатын біртекті марков процестерін қарастырайық.

Марков процестерін толық анықтау үшін бастапқы $P_i(0)$, $i=\overline{1,n}$ ықтималдылықтарын және өту ықтималдылығы матрицасын беру қажетті:

$$P=\begin{Vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ . & . & . & . \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad (26)$$

мұндағы $p_{ij} = P\{S_j/S_i\}$ - алдағы қадамда процесс S_i күйінде болса, келесі қадамда S_j күйіне көшудің шартты ықтималдылығы. Марков тізбегіндегі кездейсоқ процесс, алдын-ала белгіленген $t_1, t_2, ..., t_n$ моменттерінде кездейсоқ жағдайда, өзінің бір S_i күйінен екінші S_j күйіне көшуін бейнелейді, мысалы,

$$S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_4 \rightarrow ... \qquad (27)$$

Демек, Марков процестерін модельдеу (27) сипатты тізбектерді анықтаудан тұрады және келесі сұлба бойынша орындалады.

Ең бірінші, $P_i(0) = p_{0i}$, $i = \overline{1,n}$ ықтималдылықтарының көмегімен марков тізбегінің бастапқы күйі таңдалып алынады. Ол үшін (25) ықтималдықтар кестесімен берілген оқиғалардың толық тобын модельдеу әдісін қолданып, марков тізбегінің бастапқы күйін, мысалы, S_m-ді табу керек.

$$\begin{pmatrix} S_1 & S_2 & ... & S_n \\ p_{01} & p_{02} & ... & p_{0n} \end{pmatrix}. \qquad (28)$$

Сол сияқты бұл тізбектің келесі мүшесін де табуға болады. Алайда, бұл жерде (28) кестесінің төменгі жол элементтері ретінде (26) матрицасының m-ші жолының элементтері пайдалынады. Осы көрсетілген әдісті бірнеше рет қайталау нәтижесінде марков процесінің мүмкін болатын бір нақтыламасын аламыз:

$$S_m \rightarrow S_k \rightarrow ... \rightarrow S_l.$$

Осы сұлба бойынша күрделі марков процестерін, мысалы, біртекті емес марков процестерін де модельдеуге болады.

Жұмысты орындау тәртібі

1. КМ программаға кіру.
2. КМ.exe файлын жұмысқа қосу.
3. Ашылған диалог терезесінде орындалатын зертханалық жұмыстың тақырыбын таңдау.
4. Бастапқы мәндерді енгізу.
5. Әртүрлі бастапқы мәндермен 1-2 рет модельдеу. Есептеме үшін бастапқы мәндер мен модельдеу нәтижелерін қағазға түсіру.
6. Модельдеу нәтижелерін файлда сақтауға болады.

Есептеме мазмұны:

1. Модельдеу алгоритмдерінің блок-сұлбалары мен қысқаша сипаттамалары.

2. Таңдалған бастапқы мәндер.
3. Модельдеу нәтижелері және оларды талдау.
4. Марков тізбегін қолмен есептеу.

Бақылау сұрақтары:
1. Қандай процесс стационарлы деп аталады?
2. Қандай процесс Марков процесі деп аталады?
3. Ауыспалы ықтималдылық матрицасын қалай тұрғызамыз?
4. Марков тізбегін қалай анықтаймыз?
5. $P_{ij} = P\{S_j/S_i\}$ жазбасы нені білдіреді?

№ 6 зертханалық жұмыс. Кездейсоқ ағындарды модельдеу

Жұмыстың мақсаты: оқиға ағындарын модельдеу әдістерін үйрену және ең жиі кездесетін үш оқиға (қарапайым, Эрланг және Пальм) ағындарын модельдеуді игеру.

Тапсырма.

Оқиғалардың кездейсоқ ағындарының әрқайсысының типі бойынша бір нақтыламаны алу. Есептеме үшін модельдеудің бастапқы мәндері мен алынған нәтижелерін машинаның жадысына сақтау.

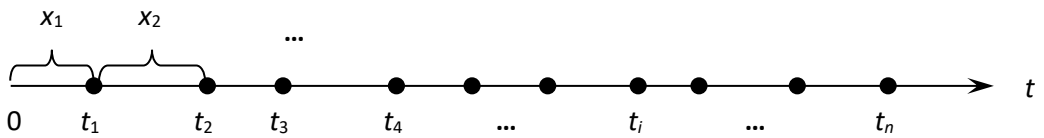
Теориялық бөлім.

Оқиғалар ағынының қасиеттері

Көптеген нақтылы жүйелер мен объектілерді иммитациялау әдісімен зерттегенде, әртүрлі кездейсоқ оқиғалар ағындарын жиі модельдеуге тура келеді. Мұндай кездейсоқ ағын ретінде, мысалы, ұшақтардың әуежайға келіп қону мезгілдері, немесе күрделі электрон аппараттарының істен шығу кезеңдері және т.б. қарастыруға болады.

Келесі анықтаманы келтірейік. Оқиғалар ағыны деп кездейсоқ уақыт моменттерінде бірінен кейін бірі пайда болатын оқиғалар тізбегін атайды.

Оқиғалар ағынын $(0,\ t)$ уақыт осінде $t_1, t_2, \ldots$ уақыт моменттерінің тізбегі ретінде кескіндеуге болады (6 сурет).



5 сурет

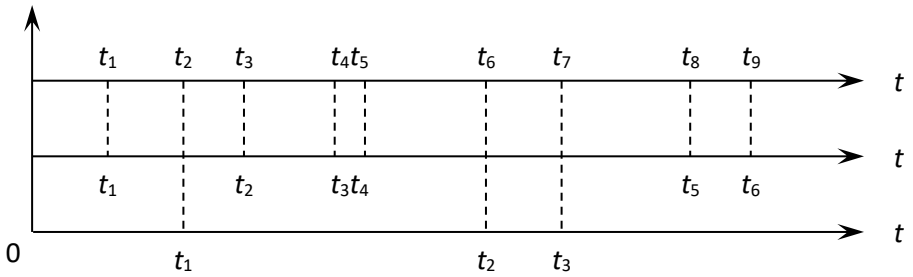
Оқиғалардың арасындағы уақыт интервалдары (x_j), жалпы жағдайда, көп өлшемді:

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{\eta_1 < x_1, \eta_2 < x_2, \ldots, \eta_n < x_n\},$$

үлестіру заңымен берілген векторлық $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ кездейсоқ шаманың құраушыларының нақтыламалары болып табылады.

Кездейсоқ оқиға ағындары, осы ағындарды түр-түрге бөлуге көмектесетін, бірнеше қасиеттерімен бейнеленеді.

Ағындар біртекті және біртекті емес болуы мүмкін. Мысалы, азаматтардан қабылданатын телеграммалар ағыны біртекті емес, себебі «жедел» грифі бар телеграммалар аппаратқа кезексіз беріледі. Алайда, көптеген жағдайларда, біртекті емес ағындарды қабаттастырылған бірнеше біртекті ағындар түрінде көрсетуге болады (6 сурет).



6 сурет

Оқиғалар ағынының сыңарлық қасиеті болу үшін, Δt элементарлы уақыт интервалында екі, немесе одан да көп оқиғалардың болу ықтималдылығы, осы интервалда бір оқиғаның пайда болу ықтималдығынан көп есе аз болуы керек, яғни:

$$P_1(t, t+\Delta t) >> P_k(t, t+\Delta t),\ k = 2, 3, \ldots.$$

Ал, кез келген Δt интервалы үшін мына:

$$P_0(t, t+\Delta t) + P_1(t, t+\Delta t) + P_k(t, t+\Delta t) = 1,\ k>1,$$

теңдікті жазуға болатыны белгілі. Сондықтан, сыңарлық қасиеті бар оқиғалар ағыны үшін мына өрнектерді жазуға болады:

$$P_0(t, t+\Delta t) + P_1(t, t+\Delta t) \approx 1 \qquad (29)$$

және

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_k(t, t+\Delta t)}{\Delta t} = 0.$$

Сыңарлық ағындарға әуежайға келген ұшақтардың ағыны, нысанаға бағытталған оқтардың ағыны және т.б. мысал бола алады. Сыңар емес оқиғалар ағыны ретінде троллейбустан аялдамада түскен жолаушылар ағынын

келтіруге болады. Себебі троллейбустан бір мезгілде бірнеше жолаушы түсуі мүмкін.

Егер белгіленген уақыт аралығында пайда болатын оқиғалардың нақтылы санының ықтималдығы тек осы интервалдың ұзақтығына тәуелді, ал бұл интервалдың уақыт осінің қай жерінде орналасқанына тәуелді болмаса, осы оқиғалар ағыны стационарлық қасиетіне ие болады.

Уақыт осіндегі сыңар оқиғалар ағынын қарастырайық және Δt уақыт интервалында пайда болатын оқиғалардың орта санын табайық. (29) өрнегіне сәйкес сыңар оқиғалардың орта саны:

$$0 * P_0(t, t+\Delta t) + 1 * P_1(t, t+\Delta t) = P_1(t, t+\Delta t).$$

тең.

Сонда уақыт бірлігінде пайда болатын оқиғалардың орташа саны:

$$\frac{P_1(t, t+\Delta t)}{\Delta t}.$$

болады.

Осы өрнектің $\Delta t \to 0$ ұмтылғандағы шегін қарастырайық. Егер ондай шек бар болса, онда ол ағынның қарқындылығы деп аталады:

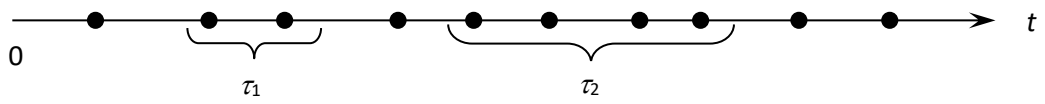
$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_1(t, t+\Delta t)}{\Delta t}.$$

$\lambda(t)$ - қарқындылығының өлшемі уақытқа кері шама.

Стационарлық ағынның, стационарлық емес ағыннан айырмашылығы, оның қарқындылығы уақытқа тәуелді еместігі, яғни: $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$.

Егер оқиғалардың саны кез келген екі қиылыспайтын τ_1 және τ_2 уақыт аралықтары үшін (7 сурет) олардың біреуіне түскен кезде, екіншісіне түскен оқиғаларға байланысты болмаса онда оқиғалар ағыны әсер бермейтін қасиетке ие болады. Негізінде бұл ағынды құрайтын оқиғалар белгілі бір уақытта бір-біріне тәуелсіз пайда болады және олардың әрқайсысы өз себептерімен туындайды.

Мысалы, анықтама бюросына жүгінген адамдар ағыны іс жүзінде әсері бар деп саналмайды, өйткені олардың әрқайсысының бюроға жүгінген себептері бір-біріне тәуелді емес. Бірақ анықтама алған адамдардың ағымы әсерге ие болады, өйткені әрбір келушіге қызмет көрсету үшін анықтама берілетін минималды уақыттан кем емес уақыт аралығы қажет.



7 сурет

Оқиғалар ағыны шектеулі әсер беретін ағын болу үшін, олардың оқиғаларының пайда болатын моменттерінің $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ аралықтары бірінен бірі тәуелсіз кездейсоқ шамалар болуы керек. Сондықтан осы n кездейсоқ шамалардың біріккен тығыздық функциясын:

$$f_\eta(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1) * f_2(x_2) * ... * f_n(x_n). \qquad (30)$$

түрінде жазуға болады.

Ал, шектеулі әсер беретін стационарлық оқиғалар ағыны үшін тағы да бір қатынас келтіре аламыз:

$$f_1(x_1) \neq f_2(x_2) = f_3(x_3) = ... = f_n(x_n) = f(x), \qquad (31)$$

Сол әрекеттің шектелуінің мәні мынада.

$f_j(x_j)$ тығыздық функциясы $j > 1$ болған жағдайда η_j интервалының шартты тығыздық үлестірімін бейнелейді. Себебі бұл интервалдар алдыңғы оқиғаның, яғни шарттың пайда болған мезгілінен басталады. Тек $f_1(x_1)$ тығыздық функциясы ғана шартсыз үлестірімін сипаттайды. Оның себебі де анық – кездейсоқ оқиғалар ағыны осінің басында оқиғаның болған әлде болмағаны туралы ешқандай болжам жасалмайды.

Қарапайым ағынды модельдеу

Қарапайым ағын деп – сыңарлық, әсер беретін және стационарлық қасиеттерімен сипатталатын Пуассон ағынын айтады.

Қарапайым ағын, басқа ағындардың арасында ерекше орын алады, себебі қарқындылықтарының мәні жақын бірнеше басқа ағындарды бірінен-бірін қосса, қарапайым ағынға жақын ағын алынады.

Анықтамадан шығатындай, қарапайым ағын оқиғаларының саны дискретті кездейсоқ шама болып табылады және Пуассон үлестіріміне бағынады. Демек, уақыттың қайсы бір τ интервалында оқиғалардың нақтылы, мысалы, k санының пайда болу ықтималдылығы Пуассон формуласымен анықталады:

$$P_k(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau} = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \qquad (32)$$

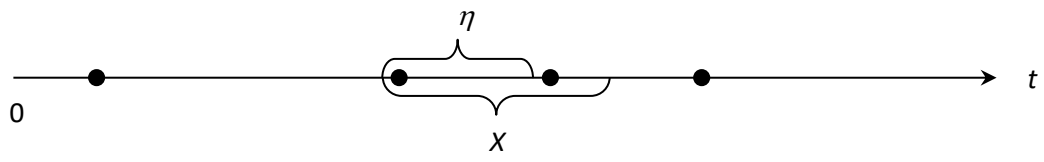
мұндағы $a = \lambda\tau$ берілген τ уақыт аралығындағы оқиғалардың орта саны.

Қарапайым ағын оқиғаларының аралығын сипаттайтын η кездейсоқ шамасының үлестірім заңын анықтайық:

$$F(x) = P\{\eta < x\}.$$

8-суретте көрсетілгендей, $P\{\eta < x\}$ ықтималдылығына, x интервалына ең болмағанда қарапайым ағынның бір оқиғасы түсетіндей жағдай сәйкес келеді, демек:

$$F(x) = P\{\eta < x\} = 1 - P\{\eta \geq x\} = 1 - P_0(x) = 1 - e^{-\lambda x}. \qquad (33)$$



8 сурет

$F(x)$ функциясын дифференциалдай отырып, η кездейсоқ шамасының үлестірім тығыздығын табамыз:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lambda e^{-\lambda x}, \ (x > 0). \qquad (34)$$

Сонымен, қарапайым ағынның, екі кез келген көршілес оқиғаларының арасындағы интервалы, экспоненциалдық заң үлестіріміне сәйкестігін көріп отырмыз.

Алынған нәтижелер, жалғыз қарапайым ағынды ғана емес, кез келген басқа ағындардыда модельдеу үшін, жоғарыда қаралған кездейсоқ шамаларды модельдеу аппаратын қолдануға болатындығын көрсетіп отыр. Шынымен, 9-суреттен кездейсоқ ағын оқиғаларының пайда болу моменттерін өрнегінен табуға болатыны анық көрініп тұр:

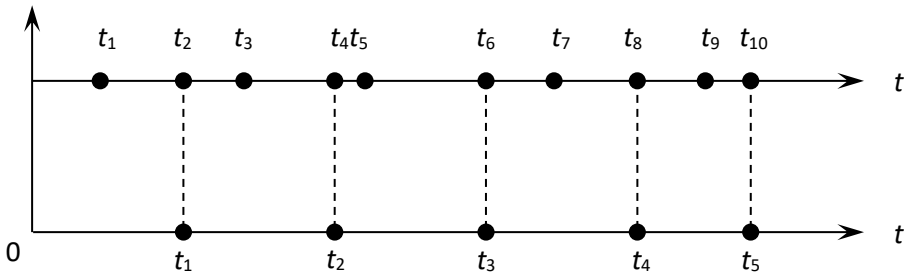
$$t_j = t_{j-1} + x_j,$$

мұндағы x_j – үлестірім тығыздығы η кездейсоқ шамасының нақтыламасы.

Эрланг ағындарын модельдеу

Бұл ағындардың атауы, телефон жүйесін зерттеу кезінде оларды ең бірінші қолданған дат ғалымының есімімен аталған.

Эрланг ағындарының сыңарлық, стационарлық, шектелген әсер беретін қасиеттері бар және бұл ағындар қарапайым ағынды «сирету» жолымен алынады. Яғни, қарапайым ағынның әрбір екінші оқиғасын сақтап қалып, қалғандарын алып тастаса, онда екінші ретті Эрланг ағыны пайда болады, ал егер әрбір k-шы оқиғаны сақтап қалса, онда k-ретті Эрланг ағыны (10 – сурет) алынады.



9 сурет

Қарапайым ағын Эрланг ағынының $k=1$ болғандағы жекеленген түрі болып табылатыны айқын.

Эрлангтың k-ретті ағынының көршілес оқиғаларының арасындағы η интервалы, экспоненциалды заң бойынша үлестірілген тәуелсіз η_i кездейсоқ шамаларының k қосындысы болып табылады:

$$\eta = \sum_{i=1}^{k} \eta_i \,. \tag{35}$$

Кездейсоқ η шамасының тығыздық функциясы мына формуламен анықталады :

$$f_k(x) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x}, \;\; x > 0, \tag{36}$$

мұндағы λ - қарапайым ағынның қарқындылығы.

Кездейсоқ η шамасының математикалық үміті, дисперсиясы және орта шаршы ауытқуы сәйкесінше мыналарға тең:

$$M[\eta] = M[\sum_{i=1}^{k} \eta_i] = \frac{k}{\lambda}, \;\; D[\eta] = D[\sum_{i=1}^{k} \eta_i] = \frac{k}{\lambda^2}, \;\; \sigma_\eta = \frac{\sqrt{k}}{\lambda}. \tag{37}$$

Эралангтың k-ретті ағынының қарқындылығы математикалық үмітке кері шама екенін: $\Lambda_k = \frac{1}{M[\eta]} = \frac{\lambda}{k}$ ескере отырып, (33) және (34) өрнектерін мына түрде жазуға болады:

$$f_k(x) = \frac{(k\Lambda_k)^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-k\Lambda_k x}, \; x > 0; \tag{38}$$

$$M[\eta] = \frac{1}{\Lambda_k}; \;\; D[\eta] = \frac{1}{k\Lambda_k^2}; \;\; \sigma_\eta = \frac{1}{\Lambda_k \sqrt{k}} \,. \tag{39}$$

Ағынның реттілігін шексіз ұлғайтқан ($k \to \infty$), ал қарқындылығы өзгеріссіз қалдырылған (Λ_k=const) жағдайда Эрланг ағыны қалай өзгеретінін анықтайық. (39) формуладан, бұл жағдайда оқиғалар аралығының математикалық үміті өзгеріссіз қалатыны, ал дисперсиясы мен орта шаршылығы нөлге ұмтылатыны байқалады. Яғни, Эрланг ағыны, оқиғаларының арасы дәл$1/\Lambda_k$ -ге тең, регулярлы ағынға ауысатыны көрініп тұр.

Эрланг ағындарының бұл қасиетінің іс жүзінде үлкен маңызы бар. Мысалы, k-реттілігінің мәнін өзгерту арқылы ағынның әсер беретін қасиеті әртүрлі дәрежесін алуға болады: $k=1$ болғанда әсер беретін қасиеті мүлде болмауынан, $k \to \infty$ ұмтылғанда оқиғалардың пайда болу моменттерінің арасында қатаң байланыс тууына дейін. Демек, іс жүзінде кездесетін көптеген кездейсоқ ағындарды Эрланг ағынымен бейнелеуге болады. Ол үшін тек k-реттілігінің мөлшерін өзгерту арқылы іс жүзіндегі ағын мен Эрланг ағынының математикалық үміттері мен дисперсияларын теңестіру керек.

Жұмысты орындау тәртібі

1. КМ программаға кіру.
2. КМ.exe файлын жұмысқа қосу
3. Ашылған диалог терезесінде орындалатын зертханалық жұмыстың тақырыбын таңдау.
4. Тізімнен берілген оқиғалар ағынын таңдау.
5. Бастапқы мәндерді енгізу. Пальма ағынын модельдегенде, алгоритмнің алдын-ала даярлану сатысын оқытушыға көрсету қажет.
6. Модельденетін ағынның бірінші, екінші және соңғы оқиғаларының пайда болу моменттерін жазып алу. Зертханалық жұмысты орындау нәтижелерін «Нәтижелер» жапсырмасынан көруге болады, сондай-ақ ішіне файлда сақтауға болады .

Есептеме мазмұны

1. Оқиғалар ағындарының мысалдарын келтіріңіз.
2. Оқиғалар ағындарының сипаттамаларын келтіріңіз ($f(x)$, математикалық үміт және дисперсия).
3. Кездейсоқ ағындарды модельдеу алгоритмдерінің блок-сұлбалары.
4. Алынған нәтижелердің қысқаша талдамасы.
5. Модельдеген ағындардың әрқайсысы үшін оқиғалардың пайда болуының бастапқы екі мәнін қолмен есептеу.

№ 7 зертханалық жұмыс. Көпшілікке қызмет көрсету (КҚК) жүйелерін модельдеу

Жұмыстың мақсаты: көпшілікке қызмет көрсету жүйесінің әр түрін модельдеу әдістерін зерттеу.

Тапсырма

Белгілі бір уақыт аралығында КҚК иммитациялық модельдеуін жүргізу қажет: апта, ай, квартал әртүрлі бастапқы мәліметтермен. Алғашқы мәліметтерді және модельдеудің соңғы нәтижесін есептеме үшін бекітіңіз. КҚК модельдеу нәтижелерін талдаңыз, ұсынылған имитациялық моделінің тиімділігін бағалаңыз.

Теориялық бөлім.

Күту уақыты шектеулі бірканалды КҚК жүйесін модельдеу.

Осы жүйенің кірісіндегі талаптар Пальм кездейсоқ оқиғалар ағынын құратын болсын және ол ағынның оқиғаларының аралық мәнінің үлестірім заңы берілсін. Бұл талаптар қызмет көрсету каналының алдына кезекке тұрып, әрқайсысы өз кезегіне сәйкес бірінен соң бірі қызмет көрсетілуге алынсын. Кезекте тұру мерзімі шектелулі деп есептейік. Жалпы жағдайда, бұл мерзім үлестірім заңы белгілі кез келген кездейсоқ шама бола алады. Талаптарға қызмет көрсету мерзімі де үлестірім заңы белгілі кездейсоқ шама болсын.

Осы көпшілікке қызмет көрсету жүйесінің $[0,\ T]$ аралығындағы жұмыс барысын модельдейік. Демек, қызмет көрсетілуге $t^{\sigma} < T$ уақытында алынған талаптан каналдың босау мезгілі $t_{бос} > T$ теңсіздігімен сипатталса, ол талапқа қызмет көрсетілмеуі тиіс.

Бұл жүйені модельдеудің арқасында келесі көрсеткіштерді анықтауға болады: қызмет көрсетілген талаптардың барлық талаптарға қатысты үлесі, талаптардың кезекте күту уақыттарының орташа мәні және тағы басқалар.

Бірканалды көпшілікке қызмет көрсету жүйесін имитациялық модельдеу алгоритмінің сұлбасы 10-суретте келтірілген. Енді осы алгоритмнің әрбір қадамымен танысайық. 1-ші оператордың көмегімен модельдеуге қажетті бастапқы деректер, яғни талаптар ағынының параметрлері, берілген үлестірім заңдарының сипаттамалары, модельдеу мерзімі және тағы басқалар тағайындалады. 2-ші оператор имитациялық модельдеудің неше рет қайталанғанын, яғни нақтыламалар санын, есептейді. 3-ші оператор жаңа нақтыламаны модельдей бастауға даярлық жасайды. 4-ші және 5-ші операторлардың көмегімен кезекті талаптың жүйеге келіп түскен мезгілі $t_j = t_{j-1} + \tau$ табылады. Бұл формуладағы t_{j-1} - алдыңғы талаптың келіп түскен мезгілі, ал τ - осы екі талаптың аралығы.6-шы оператордың көмегімен, j - шы талаптың келу уақыты модельдеу интервалына ене ме, әлде енбей ме деген сұраққа жауап алынады, яғни:

$$t_j < T_м \qquad (40)$$

шарты тексеріледі. Осы шарт $[0,\ T]$ интервалы толық модельденіп болғанда ғана орындалмайтыны анық. Сондықтан $t_j \geq T$ болған жағдайда 6 - шы оператордан тікелей 24 - операторға өтіп, модельдеудің бір

нақтыламасының нәтижелерін есептеу қажет.Ал (40) шарт орындалған жағдайда 7 - ші оператор келіп түскен талаптардың санын өзгертеді. 8 - ші оператор кезекті талаптың келген уақытында қызмет көрсетуші каналдың бостығын тексереді. Канал бос емес, яғни:

$$t_j < t_{j-1}^{бос} \tag{41}$$

жағдайында бұл талап кезекке қойылады. Сондықтан 9 -шы оператор кезекте тұрған талаптардың m санының жаңа мөлшерін есептейді және каналдың осы талапты күтпегенін $\tau^{б.Т.} = 0$ деп белгілейді.10 - шы және 11 - ші операторлар осы талаптың кезекте қай мезгілге дейін тұра алатынын анықтайды:

$$t_j^{к.у.} = t_j + \tau^{к.у.ш.},$$

мұндағы $\tau^{к.у.ш.}$- күту уақытының шектік мағынасы. Осы кездейсоқ шама, берілген үлестірім заңы бойынша 10 - шы операторда табылады, немесе константа ретінде беріледі. 12 - ші оператордың көмегімен j - шы талаптың кезектен кету уақытына дейін канал босай ала ма деген сұраққа жауап алынады. Егер,

$t_j^{к.у.} < t_{j-1}^{бос}$ шарты ақиқат болса, яғни каналдың босауын күту мерзімі талаптың шекті күту уақытынан көп болса, ол талаптың кезектен кетуіне тура келеді. Осы жағдай 13-ші операторда $\tau^{і.ж.к.} = \tau^{к.у.ш.}$. теңдігімен бейнеленеді. Яғни талаптың іс жүзінде кезекте тұру уақыты оның шектік күту мағынасына, ал осы талапқа қызмет көрсету мерзімі, әрине, нөлге тең болады. Және кезектегі талаптар саны бір данаға кемиді $(m = m - 1)$. Енді келесі талаптарды модельдеуге кірісу үшін 23 - ші оператор арқылы қайтадан 4- ші операторға көшеміз. Қайтадан 12 - ші операторға оралайық. Егер $t_j^{к.у.} < t_{j-1}^{бос}$ шарты орындалмаса, канал босасымен кезектегі талап қызмет көрсетілуге алынуы тиіс. Сондықтан 14, 15 - ші операторлар осы талаптың іс жүзінде кезекте күткен уақытын:

$$\tau^{і.ж.к.} = t_{j-1}^{бос} - t_j \tag{42}$$

есептейді және оған қызмет көрсетіле басталған уақытты тіркейді: $t_j^{б} = t_{j-1}^{бос}$.

Енді 8 - ші операторға қайта оралайық. Кезекті талаптың келіп түскен мезгілінде канал бос болса, бұл талап дереу қызмет көрсетілуге алынады. Сондықтан 16-шы операторда каналдың бұл талапты күту уақыты $\tau^{Т.к.} = t_j - t_{j-1}^{бос}$ анықталып, 17 - ші операторда оған қызмет көрсете бастау

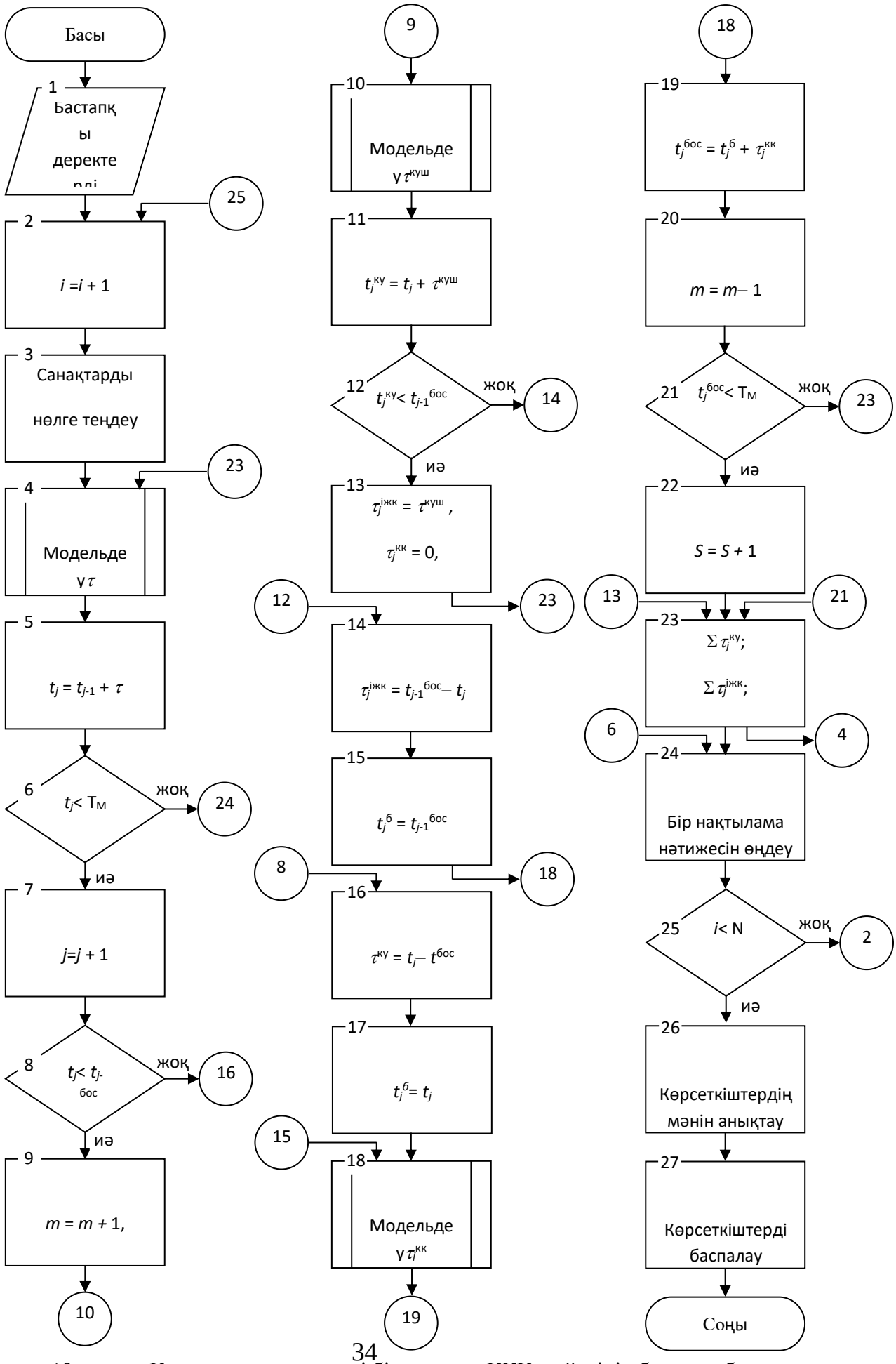
мезгілі $t_j^{\sigma} = t_j$ тағайындалып, 18 - операторда осы талапқа қызмет көрсету уақытының ($\tau^{\text{к.к.у.}}$) мәні модельденеді. 19 - шы оператор каналдың қызмет көрсетіп болып, қайтадан бос болатын мезгілін $t^{бос.} = t^{б.} + \tau^{к.к.у.}$ анықтайды, ал 20 - шы оператор кезекте тұрған талаптардың санын бір данаға кемітеді.

Дегенмен, осы талапқа қызмет көрсетіледі деп есептеу үшін тағы бір маңызды шарт орындалуы керек:

$$t_j^{\text{бос}} < T_{\text{м}}, \tag{43}$$

яғни осы талапқа қызмет модельдеу интервалының ішінде көрсетілуі қажет (21 - ші оператор). Осы шарт орындалған жағдайда ғана 22 - ші оператор кезекті талапқа қызмет көрсетілді деп есептейді. Ал 21 - ші оператордың шарты орындалмаған жағдайда талапқа қызмет көрсетілмейді. Сондықтан осы талапқа байланысты параметрлердің мәнін 23 - операторда тіркегеннен кейін кезек 4 - ші операторға, яғни келесі талапты модельдеуге беріледі. 23 - ші операторда модельдеудің арқасында анықталатын әртүрлі көрсеткіштерді есептеуге қажетті деректер біртіндеп қалыптасады.

Енді 6 - шы операторға қайта оралайық. Бұл оператор тексеретін шарт тек қана модельдеудің кезекті нақтыламасы аяқталғанда орындалатынын байқау оңай. Сондықтан кезек 24 - ші операторға беріліп, осы нақтыламаның нәтижесі анықталады.Егер бір нақтыламаның нәтижесі зерттеліп отырған жүйенің жұмыс барысын керекті дәлдікпен анықтай алмайтын болса, 25-ші оператордың көмегімен компьютерлік модельдеу N рет қайталанады. 26 - шы оператор осы N нақтыламаларда алынған көрсеткіштердің орташа мәнін есептейді.



10 сурет - Күту уақыты шектеулі бірканалды КҚК жүйесінің блок-сұлбасы

Имитациялық модельдеудің нәтижесі ретінде көбінесе мына көрсеткіштер қолданылады:

- талаптардың кезекте тұру уақытының орташа мәні $\bar{\tau}^{\text{іжк}} = \frac{1}{j}\sum \tau_j^{\text{іжк}}$;
- кезектің орташа ұзындығы $\bar{m} = \frac{1}{j}\sum m_j$;
- талаптардың қызмет көрсетілуге алыну ықтималдылығы $P_{\text{к.к.}} = \frac{S}{J}$;
- талаптарға қызмет көрсетуден бас тартудың ықтималдылығы:

$$P_{\text{б.т.}} = 1 - P_{\text{к.к.}} = 1 - \frac{S}{J};$$

- каналдың кезекті талапты күту уақытының орташа мәні:

$$\bar{\tau}^{\text{күт}} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} \tau_j^{\text{күт}}$$

- каналдың бос тұруының ықтималдылығы $P_{б.Т.} = \frac{\bar{\tau}^{б.Т.}}{T}$.

Алынған бағалардың нақтылығына қол жеткізу үшін көптеген іске асырудың нәтижелерін ортаға салу қажет. 24-оператор модельді енгізудің берілген санының (N) орындалуын қамтамасыз етеді, ал 26-оператор КҚК жүйенің тиімділік көрсеткіштерінің орташа мәндерін есептейді.

Жұмысты орындау тәртібі

1. КМ программаға кіру.
2. КМ.exe файлын жұмысқа қосу
3. Сол жақ тақтадан тиісті зертхананы таңдаңыз. Бастапқы деректерді енгізіп, «Тіркелгі» түймесін басыңыз.
4. Белгілі бір уақыт аралығында *КҚК жүйесін* модельдеу моделін жүргізу: апта, ай, тоқсан әр түрлі бастапқы мәліметтермен.
5. Есепке алғашқы мәліметтерді және модельдеудің соңғы нәтижесін жазыңыз.
6. Зертханалық жұмыстың нәтижелерін «Excel» батырмасын басу арқылы сақтауға болады.
7. *КҚК жүйесін* модельдеудің нәтижелерін талдаңыз, ұсынылған модельдеу моделінің тиімділігін бағалаңыз.

Есептемені мазмұны:

1) *КҚК* жүйесін модельдеу алгоритмінің қысқаша сипаттамасы және блок-сұлбасы.

2) Таңдалған бастапқы деректер және оларға мысалдар.

3) Модельдеу нәтижелері.
4) Модельдеу нәтижелері мен қорытындыларын талдау.

Бақылау сұрақтары.
1. *КҚК* жүйелерінің жіктелуін беріңіз.
2. Ақаулықтары бар *КҚК* жүйелерінің жіктелуін беріңіз.
3. Аралас *КҚК* жүйелерінде қандай шектеулер қолданылады?
4. Қызмет көрсету мүмкіндігі деген не?
5. Сәтсіздік ықтималдығы неге тен?

Әдебиет тізімі

1. Шукаев Д.Н. Компьютермен модельдеу негіздері. – Алматы: 2011. - 200 б.
2. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. Практикум. – М.: ВШ, 2010.
3. Тусупова Б.Б. Методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Имитационное моделирование», АУЭС, 2019. - 32 с.
4. Павловский Ю.Н. и др. Имитационное моделирование. – М.: Академия, 2008.
5. Флегонтов А.В., Матюшичев И.Ю. Моделирование информационных систем. Unified Modeling Language. – СПб.: Лань, 2019.
6. Рыжиков Ю.И. Имитационное моделирование. Авторская имитация систем и сетей с очередями. Учебное пособие. - СПб.: Лань, 2019.
7. Варфоломеев В.И. Алгоритмическое моделирование элементов экономических систем. – М.: Финансы и статистика, 2000.
8. Шукаев Д.Н. Компьютерное моделирование. – Алматы: РИК, 2004.
9. Кельтон В., Лоу А. Имитационное моделирование. – СПб.: Питер, 2004.
10. Кудрявцев Е.М. GPSS World. Основы имитационного моделирования различных систем. – М.: ДМК Пресс, 2004.
11. Иванова В.М. Случайные числа и их применение. – М.: Финансы и статистика, 1994.
12. Бусленко И.П. Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1988.
13. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука. – М.: Мир, 1978.

Мазмұны

1. Базалық тізбекті модельдеу.....4
2. Кездейсоқ оқиғаларды модельдеу.....8
3. Үздіксіз кездейсоқ шамаларды модельдеу.....11
4. Дискретті кездейсоқ шамаларды модельдеу.....18
5. Таксопарк машиналарының жұмыс істеу процесін модельдеу.....22
6. Кездейсоқ қолдану ағындарын модельдеу.....24
7. Қорды басқару жүйелерін күтуімен модельдеу.....30
8. Әдебиет.....37

Жиынтық жоспар 2020, пос. _104_

Бэлла Блялевна Тусупова
Айша Куанышевна Мамырова

ИМИТАЦИЯЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

5В060200 - Информатика, 5В070300 - Ақпараттық жүйелер мамандықтарының студенттеріне арналған зертханалық жұмыстарды іске асыруға арналған әдістемелік нұсқаулар

Редактор: Изтелеуова Ж.
Стандарттау бойынша маман: Данько Е.Т.

Басуға__.__.__ қол қойылды. Пішімі 60х84 1/16
Таралымы 20 дана. Баспаханалық қағаз №1
Көлемі 2.3 есептік-баспа табақ Тапсырыс ___ Бағасы 1160 теңге.

«Ғумарбек Даукеев атындағыАлматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғаммының
көшірмелі -көбейткіш бюросы
050013, Алматы, Байтұрсынұлы көшесі, 126/1