



**Некоммерческое  
акционерное общество**

**АЛМАТИНСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
ЭНЕРГЕТИКИ И  
СВЯЗИ**

Кафедра математики и  
математического моделирования

## **МАТЕМАТИКА**

Методические указания и задания  
по выполнению расчетно-графических работ  
для студентов специальности  
5В070400 – Вычислительная техника и программное обеспечение

Часть 3

Алматы 2018

СОСТАВИТЕЛИ: Василина Г.К., Сарсенбаева А.К. Математика. Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 5В070400 – Вычислительная техника и программное обеспечение. Часть 3. – Алматы: АУЭС, 2018. – 22 с.

Представлены методические указания и задания по выполнению расчетно-графической работы №3 дисциплины «Математика» для студентов специальности 5В070400 – Вычислительная техника и программное обеспечение. Представленный материал соответствует разделу «Интегральное исчисление функции одной переменной», предусмотренному учебными планами для студентов указанной специальности.

Приведены основные теоретические вопросы, дано решение типового варианта.

Табл. – 13, библиогр. – 4 назв.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент А.К. Искакова

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2018 г.

© НАО «Алматинский университет энергетики и связи», 2018 г.

## Введение

Математика как фундаментальная дисциплина имеет большие возможности для формирования ключевых компетенций специалиста. Данный учебный предмет формирует способность к самообразованию, поиску и усвоению новой информации, умение планировать и адекватно оценивать свои действия, принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях, работать в коллективе и команде, развивает силу и гибкость ума, способность к аргументации и другие качества, необходимые современному специалисту.

В представленной работе даны задания расчетно-графической работы (РГР) №3 по дисциплине «Математика» для студентов специальности «5В070400 – Вычислительная техника и программное обеспечение». Задания соответствуют разделу «Интегральное исчисление функции одной переменной».

Приведены основные теоретические вопросы программы. Даны основные методические указания в виде формул к решению задач. Приводится решение типового варианта.

Номер варианта каждого студента определяется по списку группы. Расчетно-графическая работа выполняется в отдельной тетради. В номере каждого задания число после точки указывает на номер варианта. Например, 1.5 означает «первое задание, 5 вариант».

### **Расчётно-графическая работа №3. Интегральное исчисление функции одной переменной**

**Цель:** овладеть понятиями первообразной, интеграла и методами интегрирования; уметь применять определенный интеграл к вычислению площадей плоских фигур; получить представление о несобственных интегралах, изучить основные свойства несобственных интегралов и их признаки сходимости.

#### **1 Теоретические вопросы**

1. Комплексные числа. Их изображения на плоскости. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Операции над комплексными числами. Формула Муавра.

2. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных формул интегрирования. Непосредственное интегрирование. Интегрирование по частям и с помощью замены переменной.

3. Интегрирование рациональных функций путем разложения на простейшие дроби. Интегрирование выражений, содержащих

тригонометрические функции. Интегрирование некоторых иррациональных выражений.

4. Задачи, приводящие к понятию определенных интегралов. Основные свойства определенных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница.

5. Вычисление определенного интеграла: интегрирование по частям и заменой переменной.

6. Несобственные интегралы с бесконечными пределами. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Основные свойства несобственных интегралов. Признаки сходимости.

7. Приложения определенных интегралов к вычислению площадей плоских фигур. Физические приложения определенного интеграла.

## 2 Задания расчетно-графической работы

Задание 1. Даны комплексные числа  $z_1$  и  $z_2$ . Требуется найти:

- 1) Модуль комплексного числа  $z_1$ .
- 2) Аргумент комплексного числа  $z_1$ .
- 3) Представление комплексного числа  $z_1$  в тригонометрической и показательной формах.
- 4) Результат сложения комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$ .
- 5)  $z_2^5$ .
- 6) Произведение  $z_1 \cdot z_2$  в тригонометрической форме.
- 7) Все комплексные корни уравнения  $z^3 = z_2$  по формуле Муавра.

1.1	$z_1 = 8i,$ $z_2 = 8 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$	1.2	$z_1 = -8i,$ $z_2 = 8 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$
1.3	$z_1 = 27,$ $z_2 = 27 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$	1.4	$z_1 = -27,$ $z_2 = 27 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$
1.5	$z_1 = 3 - i\sqrt{3},$ $z_2 = 2\sqrt{3} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$	1.6	$z_1 = 3 + i\sqrt{3},$ $z_2 = 2\sqrt{3} \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$
1.7	$z_1 = 3 + i\sqrt{3},$ $z_2 = 2\sqrt{3} \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$	1.8	$z_1 = -3 - i\sqrt{3},$ $z_2 = 2\sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$
1.9	$z_1 = -4 + 4i,$ $z_2 = 4\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$	1.10	$z_1 = 4 - 4i,$ $z_2 = 4\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$
1.11	$z_1 = -4 - 4i,$ $z_2 = 4\sqrt{2} \left( \cos \left( -\frac{3\pi}{4} \right) + \right.$ $\left. + i \sin \left( -\frac{3\pi}{4} \right) \right)$	1.12	$z_1 = 4 + 4i,$ $z_2 = 4\sqrt{2} \left( \cos \left( -\frac{2\pi}{3} \right) + \right.$ $\left. + i \sin \left( -\frac{2\pi}{3} \right) \right)$

1.13	$z_1 = 8,$ $z_2 = 8 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$	1.14	$z_1 = -8,$ $z_2 = 8 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$
1.15	$z_1 = -27i,$ $z_2 = 27 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) + \right.$ $\left. + i \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right) \right)$	1.16	$z_1 = 27i,$ $z_2 = 27 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$
1.17	$z_1 = \sqrt{3} - 3i,$ $z_2 = 2\sqrt{3} \left( \cos \left( -\frac{3\pi}{4} \right) + \right.$ $\left. + i \sin \left( -\frac{3\pi}{4} \right) \right)$	1.18	$z_1 = -\sqrt{3} + 3i,$ $z_2 = 2\sqrt{3} \left( \cos \left( -\frac{5\pi}{6} \right) + \right.$ $\left. + i \sin \left( -\frac{5\pi}{6} \right) \right)$
1.19	$z_1 = \sqrt{3} + 3i,$ $z_2 = 2\sqrt{3} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right) + \right.$ $\left. + i \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right)$	1.20	$z_1 = -\sqrt{3} - 3i,$ $z_2 = 2\sqrt{3} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) + \right.$ $\left. + i \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right) \right)$
1.21	$z_1 = 64,$ $z_2 = 64 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$	1.22	$z_1 = -64,$ $z_2 = 64 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$
1.23	$z_1 = 64i,$ $z_2 = 64 \left( \cos \left( -\frac{2\pi}{3} \right) + \right.$ $\left. + i \sin \left( -\frac{2\pi}{3} \right) \right)$	1.24	$z_1 = -64,$ $z_2 = 64 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) + \right.$ $\left. + i \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right) \right)$
1.25	$z_1 = -8 + 8i,$ $z_2 = 8\sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$	1.26	$z_1 = 8 - 8i,$ $z_2 = 8\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$
1.27	$z_1 = -8 + 8i,$ $z_2 = 8\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$	1.28	$z_1 = -8 - 8i,$ $z_2 = 8\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$
1.29	$z_1 = 1 + i,$ $z_2 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$	1.30	$z_1 = -1 + i,$ $z_2 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

Задание 2. Найти неопределенный интеграл.

2.1	а) $\int \frac{1-5x^3}{x^4} dx,$ б) $\int 2^x \cdot 5^x dx,$ в) $\int \frac{5}{9+x^2} dx$	2.2	а) $\int \frac{\sqrt{x}-3x^3\sqrt{x}+x^5}{x^2} dx,$ б) $\int 3^x(5-7^{-x})dx,$ в) $\int \frac{4}{5+x^2} dx,$
-----	---	-----	--

2.3	a) $\int x^3 \sqrt{ax} dx$ , б) $\int 5^{-x}(4 - 3^{x+1})dx$ , B) $\int \frac{dx}{x^2+2}$	2.4	a) $\int \frac{(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x})^2}{x} dx$ , б) $\int 7^{-x}(\sqrt{72x} + 5^x)dx$ , B) $\int \frac{dx}{1-x^2}$
2.5	a) $\int \left( \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{x+2}{\sqrt[4]{x}} \right) dx$ , б) $\int e^{-x}(2^x - 3e^{x+3})dx$ , B) $\int \frac{dx}{3+x^2}$	2.6	a) $\int \left( a^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \right)^3 dx$ , б) $\int (4e^x \cdot 5^x - \pi^{2x})dx$ , B) $\int \frac{dx}{x^2-3}$
2.7	a) $\int \left( 5x^3 - \frac{a}{\sqrt[3]{x^5}} \right) dx$ , б) $\int 3^{-x}(7 + 2^{x+1})dx$ , B) $\int \frac{dx}{x^2-5}$	2.8	a) $\int \left( \frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x^4} - x \right) dx$ , б) $\int (e^x - 2e^{-x})dx$ , B) $\int \frac{dx}{x^2+25}$
2.9	a) $\int \frac{(\sqrt{x^3} - 2x^2 + 3x^4)}{x} dx$ , б) $\int (e^x + e^{2x})dx$ , B) $\int \frac{dx}{25-x^2}$	2.10	a) $\int \left( \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx$ , б) $\int \pi^x \cdot e^{x+1}dx$ , B) $\int \frac{7dx}{x^2+3}$
2.11	a) $\int \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^3 dx$ , б) $\int e^x \cdot \sqrt{2^x} dx$ , B) $\int \frac{2dx}{x^2+2}$	2.12	a) $\int \left( ax - \frac{4\sqrt{x}}{x^2} \right) dx$ , б) $\int 5^x \cdot 3^{1-x} dx$ , B) $\int \frac{7dx}{\sqrt{x^2+9}}$
2.13	a) $\int \left( \frac{x}{a} - \sqrt[3]{x} \right)^3 dx$ , б) $\int (5^x - 5^{-x})^2 dx$ , B) $\int \frac{5dx}{\sqrt{x^2-9}}$	2.14	a) $\int \frac{x^3 - 3\sqrt{x^5} - \sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}} dx$ , б) $\int (5^{x+1} + 5^{-x})dx$ , B) $\int \frac{5dx}{\sqrt{x^2-16}}$
2.15	a) $\int x^2 \cdot \sqrt[4]{bx} dx$ , б) $\int \frac{2^x+3^x}{2^{x+1}} dx$ , B) $\int \frac{5dx}{\sqrt{x^2+16}}$	2.16	a) $\int \frac{x^4 - 2x - \sqrt{x}}{x^2} dx$ , б) $\int \frac{3^{-x} + 2^{x+3}}{2^{x+1}} dx$ , B) $\int \frac{5dx}{\sqrt{x^2-49}}$
2.17	a) $\int \frac{(\sqrt{bx} - \frac{x}{b})^2}{x} dx$ , б) $\int 4^x (7 + 2^{-x})dx$ , B) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+49}}$	2.18	a) $\int \frac{(x-1)^3}{x\sqrt{x}} dx$ , б) $\int 3^{-x}(4 - 5^{x+2}) dx$ , B) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+81}}$
2.19	a) $\int \frac{(2x+a)^3}{x^2} dx$ , б) $\int \left( 3^{\frac{x}{2}} - 3^{-\frac{x}{2}} \right)^2 dx$ , B) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-36}}$	2.20	a) $\int \frac{(x-\frac{a}{x})^2}{\sqrt{x}} dx$ , б) $\int e^x(2^{x+1} - 5e^{3-x})dx$ , B) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

2.21	а) $\int \frac{(bx + \frac{a}{x})^2}{\sqrt[3]{x}} dx,$ б) $\int \pi^{2x} (\frac{1}{2^x} - 3^{x+1}) dx,$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$	2.22	а) $\int \frac{(2x+b)^3}{x^3} dx,$ б) $\int \frac{1}{3^x} (e^{x+1} + 2e^{-x}) dx,$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$
2.23	а) $\int \frac{(1-b\sqrt[3]{x})^3}{x^2} dx,$ б) $\int (e^{-x} - e^x) dx,$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$	2.24	а) $\int \frac{(2-a\sqrt{x^3})^2}{x^2} dx,$ б) $\int (e^x - 2) dx,$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{81-x^2}}$
2.25	а) $\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x} + x^3\sqrt{x}}{x} dx,$ б) $\int (e^x + 2^{-x}) dx,$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{12-x^2}}$	2.26	а) $\int \frac{(2x+5)^3}{x^2} dx,$ б) $\int 3^x (7 + 2^{-x}) dx,$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{24-x^2}}$
2.27	а) $\int \frac{(x+\frac{1}{x})^2}{\sqrt[4]{x}} dx,$ б) $\int 2^{-x} (3 - 5^{x+2}) dx,$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$	2.28	а) $\int \frac{(2-\sqrt{x^3})^3}{x^2} dx,$ б) $\int \frac{3^{-x} + 2^{x+3}}{2^{x+1}} dx,$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{36+x^2}}$
2.29	а) $\int \frac{(1-b\sqrt{x})^2}{x^3} dx,$ б) $\int (e^x + e^{2x}) dx,$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{27-x^2}}$	2.30	а) $\int \frac{x^4 - 2\sqrt{x} + x\sqrt{x}}{x^2} dx,$ б) $\int \frac{1}{e^x} (e^{x+1} + 2e^{-x}) dx,$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{27+x^2}}$

Задание 3. Найти неопределенный интеграл.

3.1	$\int (\cos 2x - 3\sin 5x) dx$	3.2	$\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$
3.3	$\int \frac{dx}{1 - \sin^2 5x}$	3.4	$\int \cos^2 2x dx$
3.5	$\int (e^{5x} - 4e^{\frac{x}{2}}) dx$	3.6	$\int (e^{4x} - 2e^{-3x})^2 dx$
3.7	$\int \sin(2x + 3) dx$	3.8	$\int \frac{2^{3x} - 3^x}{3^{2x}} dx$
3.9	$\int \frac{(e^{-x} + 5)^2}{e^x} dx$	3.10	$\int (\sqrt[3]{e^x} - x \cdot e^2) dx$
3.11	$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{3x}}}$	3.12	$\int \frac{dx}{\sqrt{6e^{5x-1}}}$
3.13	$\int (\cos x + \sin x)^2 dx$	3.14	$\int (\cos x - \sin 2x)^2 dx$
3.15	$\int (\cos 3x + \sin 3x)^2 dx$	3.16	$\int (\cos x - \sin x)^2 dx$

3.17	$\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$	3.18	$\int \frac{dx}{\cos^2 \left(\frac{x}{3}\right)}$
3.19	$\int \cos(1 - 5x) dx$	3.20	$\int \sin^2 x dx$
3.21	$\int \cos^2 x dx$	3.22	$\int \left(\cos \frac{x}{3} - 5\sin \frac{x}{2}\right) dx$
3.23	$\int \cos x(1 - 5\cos x) dx$	3.24	$\int \frac{5^{2x} - 3^{-x}}{2^x} dx$
3.25	$\int \frac{5^{2x-1} - 5^{2-2x}}{4^x} dx$	3.26	$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^{2x}} dx$
3.27	$\int \frac{e^{x+1} + e^{1-x}}{e^x} dx$	3.28	$\int \left(\cos \frac{x}{3} - 5\sin \frac{x}{2}\right)^2 dx$
3.29	$\int \cos x(1 - 5\cos x) dx$	3.30	$\int \sin^2 x dx$

Задание 4. Найти неопределенный интеграл.

4.1	$\int e^{x^2} \cdot x dx$	4.2	$\int e^{-x^2} \cdot x dx$
4.3	$\int e^{5x^2} \cdot x dx$	4.4	$\int e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x dx$
4.5	$\int e^{x^2+3} \cdot x dx$	4.6	$\int e^{1-3x^2} \cdot x dx$
4.7	$\int x \cdot \sqrt{x^2 + 1} dx$	4.8	$\int x \cdot \sqrt[3]{(x^2 + 3)^4} dx$
4.9	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 9}}$	4.10	$\int \frac{xdx}{x^2 + 10}$
4.11	$\int \frac{e^x dx}{e^x + 5}$	4.12	$\int e^x \cdot \sqrt{3e^x - 7} dx$
4.13	$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} - 5}}$	4.14	$\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 10}$
4.15	$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$	4.16	$\int \frac{dx}{x \cdot \ln^3 x}$
4.17	$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$	4.18	$\int \operatorname{tg} x dx$
4.19	$\int \operatorname{ctg} x dx$	4.20	$\int \cos x \cdot \sqrt{\sin x} dx$
4.21	$\int e^{-x^3} \cdot x^2 dx$	4.22	$\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 4}$
4.23	$\int \frac{dx}{x \cdot (\ln^2 x + 1)}$	4.24	$\int x \cdot \sqrt{(x^2 + 3)^5} dx$



4.25	$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$	4.26	$\int 4^{\cos x} \sin x dx$
4.27	$\int \frac{\cos x}{2 + 3 \sin x} dx$	4.28	$\int \frac{x^2}{1 - x^3} dx$
4.29	$\int \frac{6^x}{1 - 6^x} dx$	4.30	$\int \frac{e^x}{(e^x - 1)^1} dx$

Задание 5. Найти неопределенный интеграл (интегрирование квадратного трехчлена).

5.1	$\int \frac{dx}{x^2 + 8x + 5}$	5.2	$\int \frac{dx}{x^2 - x + 1}$	5.3	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}}$
5.4	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 11}}$	5.5	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 1}}$	5.6	$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 2x - x^2}}$
5.7	$\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 2x - x^2}}$	5.8	$\int \frac{x dx}{x^2 + 2x + 5}$	5.9	$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}$
5.10	$\int \frac{dx}{x^2 - x + 1}$	5.11	$\int \frac{dx}{x^2 + x + 2}$	5.12	$\int \frac{dx}{x + (x + 1)^2}$
5.13	$\int \frac{dx}{x^2 + 6x - 1}$	5.14	$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$	5.15	$\int \frac{dx}{x + x^2 + 3}$
5.16	$\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$	5.17	$\int \frac{dx}{x^2 - x - 2}$	5.18	$\int \frac{dx}{2x^2 + x - 1}$
5.19	$\int \frac{dx}{x^2 + 6x - 1}$	5.20	$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 1}$	5.21	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x - 5}}$
5.22	$\int \frac{1 - 2x}{x^2 - 6x + 10} dx$	5.23	$\int \frac{dx}{\sqrt{4 + 3x - x^2}}$	5.24	$\int \frac{dx}{2x^2 - 3x + 1}$
5.25	$\int \frac{dx}{5x - x^2 - 6}$	5.26	$\int \frac{dx}{4 + 3x - x^2}$	5.27	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$
5.28	$\int \frac{dx}{x^2 + x + 3}$	5.29	$\int \frac{dx}{x^2 + x - 3}$	5.30	$\int \frac{dx}{x^2 + 8x + 7}$

Задание 6. Найти неопределенный интеграл с помощью формулы интегрирования по частям.

6.1	$\int x \cdot e^{2x} dx$	6.2	$\int (x - 1) \cdot e^{-x} dx$	6.3	$\int (2x + 5) \cdot e^3 dx$
6.4	$\int x^2 \cdot e^x dx$	6.5	$\int x \cdot 3^x dx$	6.6	$\int x \cdot \ln x dx$
6.7	$\int x \cdot \ln 5x dx$	6.8	$\int \sqrt{x} \cdot \ln x dx$	6.9	$\int (\ln x - 2 \ln^2 x) dx$
6.10	$\int \frac{\ln x}{x^2} dx$	6.11	$\int x \cdot \arctg x dx$	6.12	$\int x \cdot \cos x dx$

6.13	$\int x \cdot \sin x dx$	6.14	$\int x \cdot \cos 3x dx$	6.15	$\int x \cdot \sin \frac{x}{2} dx$
6.16	$\int x \cdot \cos \frac{x}{3} dx$	6.17	$\int x \cdot \sin 5x dx$	6.18	$\int x^2 \cdot e^{-x} dx$
6.19	$\int x \cdot 5^x dx$	6.20	$\int \frac{x}{2^x} dx$	6.21	$\int x^2 \sqrt{e^x} dx$
6.22	$\int x \cdot e^{-3x} dx$	6.23	$\int x \cdot \sin \frac{x}{3} dx$	6.24	$\int x \cdot e^{\frac{x}{2}} dx$
6.25	$\int \sqrt[3]{x} \ln x dx$	6.26	$\int (x + 5) 3^x dx$	6.27	$\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$
6.28	$\int x \cdot \sin 3x dx$	6.29	$\int \frac{x}{7^x} dx$	6.30	$\int x \sqrt{e^x} dx$

Задание 7. Найти неопределенный интеграл, выделив целую часть неправильной дробно-рациональной функции.

7.1	$\int \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 25} dx$	7.2	$\int \frac{x^2 + 2x + 6}{x^2 - 9} dx$	7.3	$\int \frac{x^3}{x^2 + 9} dx$
7.4	$\int \frac{x^3}{x^2 + 9} dx$	7.5	$\int \frac{x^2 + 1}{x^2 + 5} dx$	7.6	$\int \frac{2x^2 - 2}{x^2 - 16} dx$
7.7	$\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 25} dx$	7.8	$\int \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} dx$	7.9	$\int \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + 2x - 1} dx$
7.10	$\int \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} dx$	7.11	$\int \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 6x + 25} dx$	7.12	$\int \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 8x + 20} dx$
7.13	$\int \frac{x^2 + 2}{x^2 - 6x + 10} dx$	7.14	$\int \frac{x^2 + 7}{x^2 + 4} dx$	7.15	$\int \frac{x^4}{x^2 + 9} dx$
7.16	$\int \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 8x + 25} dx$	7.17	$\int \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4x + 5} dx$	7.18	$\int \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4x + 13} dx$
7.19	$\int \frac{x^3}{x^2 - 1} dx$	7.20	$\int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$	7.21	$\int \frac{x^3}{x^3 + 8} dx$
7.22	$\int \frac{x^2 + 3}{x^2 + 9} dx$	7.23	$\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^2 + 25} dx$	7.24	$\int \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 1} dx$
7.25	$\int \frac{x^2 + 2}{x^2 + 6x - 1} dx$	7.26	$\int \frac{x^2 + 2x + 16}{x^2 - 9} dx$	7.27	$\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 5} dx$
7.28	$\int \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 2x + 26} dx$	7.29	$\int \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 49} dx$	7.30	$\int \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 9} dx$

Задание 8. Найти неопределенный интеграл от правильной дробно-рациональной функции.

8.1	$\int \frac{dx}{(x - 2)^2(x + 3)}$	8.2	$\int \frac{(x + 1)dx}{(x - 3)^2(x + 4)}$	8.3	$\int \frac{(x - 1)dx}{(x + 2)^2(x - 3)}$
-----	------------------------------------	-----	---	-----	---

8.4	$\int \frac{(x+1)dx}{x^2(x+3)}$	8.5	$\int \frac{(x-7)dx}{(x-4)^2(x+5)}$	8.6	$\int \frac{(x-14)dx}{(x+2)^2(x+3)}$
8.7	$\int \frac{(2x+1)dx}{(x+3)^2(x+4)}$	8.8	$\int \frac{(2x-1)dx}{(x+2)^2(2x-3)}$	8.9	$\int \frac{(2x+11)dx}{x^2(x+3)}$
8.10	$\int \frac{(x-1)dx}{(x-2)^3(x+3)}$	8.11	$\int \frac{dx}{x^2(x+2)}$	8.12	$\int \frac{dx}{(x+1)^2x}$
8.13	$\int \frac{(3x+1)dx}{(x-2)^2(x+1)}$	8.14	$\int \frac{(x^2+7)dx}{(x^2+4)(x-1)}$	8.15	$\int \frac{dx}{x(x^2+3)}$
8.16	$\int \frac{(x^2+1)dx}{x(x^2+3)}$	8.17	$\int \frac{dx}{x^3+1}$	8.18	$\int \frac{dx}{x^3-8}$
8.19	$\int \frac{x^3dx}{x^4-1}$	8.20	$\int \frac{x^2dx}{(x^3+1)(x+1)}$	8.21	$\int \frac{(4x+1)dx}{x^2(x+3)}$
8.22	$\int \frac{(2x-7)dx}{(x-4)^3(x-5)}$	8.23	$\int \frac{(x+12)dx}{(x-3)^3(x+4)}$	8.24	$\int \frac{(2x+1)dx}{(x-2)^3(x+3)}$
8.25	$\int \frac{(3x-1)dx}{(x+2)^3(x-3)}$	8.26	$\int \frac{(x+1)dx}{(x+3)^2x}$	8.27	$\int \frac{(3x-7)dx}{(x+5)^5(x-4)}$
8.28	$\int \frac{(5x+1)dx}{x^3(x+3)}$	8.29	$\int \frac{(2x-1)dx}{(x+4)^2(x-3)}$	8.30	$\int \frac{(x-1)dx}{(x-3)^2(x+2)}$

Задание 9. Вычислить определенный интеграл.

9.1	$\int_{-1}^2 x^4 dx$	9.2	$\int_0^1 (\sqrt{x}-1)^3 dx$	9.3	$\int_3^{10} \sqrt[3]{x-2} dx$
9.4	$\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$	9.5	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$	9.6	$\int_{-\frac{\pi}{8}}^0 \frac{dx}{\cos^2 2x}$
9.7	$\int_0^1 \frac{x+2}{x+1} dx$	9.8	$\int_{0,5}^1 e^{-2x+1} dx$	9.9	$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$
9.10	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x)^2 dx$	9.11	$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$	9.12	$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2}$
9.13	$\int_{0,5}^1 \frac{dx}{(x+1)^2}$	9.14	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x)^2 dx$	9.15	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}$

9.16	$\int_0^{\pi} \left[ \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right]^2 dx$	9.17	$\int_{-1}^{-0,5} \frac{x^2 - 1}{x^4} dx$	9.18	$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$
9.19	$\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \sin^2 x dx$	9.20	$\int_0^7 \sqrt[3]{x+1} dx$	9.21	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x-1)^3}$
9.22	$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}}$	9.23	$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2 + 1}{x^4} dx$	9.24	$\int_0^{16} \sqrt[4]{x^5} dx$
9.25	$\int_{\pi}^{4\pi} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{4}}$	9.26	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} dx$	9.27	$\int_{0,5}^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}$
9.28	$\int_{0,25}^1 \frac{dx}{(4x+1)^3}$	9.29	$\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$	9.30	$\int_{\frac{1}{3}}^2 \frac{x^2 + 1}{x^4} dx$

Задание 10. Вычислить интегралы, используя указанную замену переменной.

10.1	$\int_0^2 x^3 \cdot e^{x^2} dx, (x^2 = t)$	10.2	$\int_0^{0,5} x^3 \cdot e^{-x^4} dx, (x^4 = t)$
10.3	$\int_1^{\sqrt{2}} x^3 \cdot e^{-x^2} dx, (x^2 = t)$	10.4	$\int_2^3 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x-1}}, (2x-1 = t^2)$
10.5	$\int_1^e \frac{dx}{x(\ln^2 x + 1)}, (\ln x = t)$	10.6	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + 2 \cos x}, (\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t)$
10.7	$\int_1^6 \frac{dx}{x + \sqrt{3x-2}}, (3x-2 = t^2)$	10.8	$\int_4^9 e^{-2\sqrt{x}} dx, (x = t^2)$
10.9	$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx, (t = 2 \sin x)$	10.10	$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx, (x = \frac{1}{\cos t})$

10.11	$\int_{\ln 1}^{\frac{\ln 3}{2}} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}, (e^x = t)$	10.12	$\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5+4x}}, (5+4x = t^2)$
10.13	$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln^3 x}, (\ln x = t)$	10.14	$\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx, (x = 3 \sin t)$
10.15	$\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}, (\sqrt{x} = t)$	10.16	$\int_1^{\ln^2 2} e^{-\sqrt{x}} dx, (\sqrt{x} = t)$
10.17	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4+3\cos x}, (\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t)$	10.18	$\int_0^4 \sqrt{x} \cdot e^{-\sqrt{x}} dx, (\sqrt{x} = t)$
10.19	$\int_0^1 x^3 \cdot e^{x^2} dx, (x^2 = t)$	10.20	$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{x^4 + 2x^2 + 25}, (x^2 = t)$
10.21	$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}, (\frac{1}{x} = t)$	10.22	$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \sqrt{\ln^3 x}}, (\ln x = t)$
10.23	$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 1}}, (\frac{1}{x} = t)$	10.24	$\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x}}, (e^x = t)$
10.25	$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx, (x = \sin t)$	10.26	$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{x^4 + 12x^2 + 225}, (x^2 = t)$
10.27	$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 4}}, (\frac{1}{x} = t)$	10.28	$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \sqrt{\ln^5 x}}, (\ln x = t)$
10.29	$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \sqrt{\ln^5 x}}, (\ln x = t)$	10.30	$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}, (\frac{1}{x} = t)$

Задание 11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями (площадь области D).

11.1	$D: \begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq 4 \end{cases}$	11.2	$D: \begin{cases} y = \sqrt{x}, y = 0 \\ y = 1, x = 4 \end{cases}$	11.3	$D: \begin{cases} y = \frac{1}{x}, y = 0 \\ y = 1, x = 2 \end{cases}$
------	---	------	--	------	---

11.4	$D: \begin{cases} y = \frac{3}{x} \\ y + x = -4 \end{cases}$	11.5	$D: \begin{cases} y = e^{-x} \\ y = 1 \\ x = \ln 3 \end{cases}$	11.6	$D: \begin{cases} y = \cos x \\ y = 0 \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$
11.7	$D: \begin{cases} y = \sin^2 x \\ y = 0 \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$	11.8	$D: \begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases}$	11.9	$D: \begin{cases} y = x^2 \\ y = x^4 \end{cases}$
11.10	$D: \begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$	11.11	$D: \begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 \\ y = 1 \end{cases}$	11.12	$D: \begin{cases} y = \operatorname{tg} x \\ y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$
11.13	$D: \begin{cases} y = \operatorname{tg} 2x \\ y = 1, x = 0 \end{cases}$	11.14	$D: \begin{cases} y = \operatorname{ctg} x \\ y = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$	11.15	$D: \begin{cases} y = \operatorname{tg} x \\ y = -1 \\ y = 0 \end{cases}$
11.16	$D: \begin{cases} y = \operatorname{arctg} x \\ y = \frac{\pi}{4}, x = 0 \end{cases}$	11.17	$D: \begin{cases} y \leq \cos^2 x \\ y \geq 0 \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$	11.18	$D: \begin{cases} y = \operatorname{tg} x \\ y = \sqrt{3} \\ x = 0 \end{cases}$
11.19	$D: \begin{cases} y = \frac{5}{1+x^2} \\ y = 1 \end{cases}$	11.20	$D: \begin{cases} y = \cos^2 x \\ y = -\cos x \\  x  \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$	11.21	$D: \begin{cases} y = 9x \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$
11.22	$D: \begin{cases} y = x^3 \\ y = 2\sqrt{x} \end{cases}$	11.23	$D: \begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = x \end{cases}$	11.24	$D: \begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = x \end{cases}$
11.25	$D: \begin{cases} y = \ln x \\ y = -\ln x \\ x = e \end{cases}$	11.26	$D: \begin{cases} y \leq \cos^2 x \\ y \geq 0, x \geq 0 \\ x \leq \pi \end{cases}$	11.27	$D: \begin{cases} y = \cos^2 x \\ y = 0 \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$
11.28	$D: \begin{cases} y = \operatorname{ctg} x \\ y = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$	11.29	$D: \begin{cases} y = \operatorname{ctg} x \\ y = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$	11.30	$D: \begin{cases} y = \operatorname{arcsin} x, \\ y = \frac{\pi}{4}, x = 0 \end{cases}$

Задание 12. Вычислить несобственный интеграл (либо доказать его расходимость).

12.1	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{3x^2 + 1}$	12.2	$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$	12.3	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}$
12.4	$\int_{-1}^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 9}$	12.5	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1 + \ln x)}$	12.6	$\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{x^4 + 2x^2 + 5}$
12.7	$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$	12.8	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{9x^2 + 1}$	12.9	$\int_0^{+\infty} x e^x dx$
12.10	$\int_{-\infty}^0 x e^x dx$	12.11	$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$	12.12	$\int_{-1}^{+\infty} x e^{-\frac{x}{2}} dx$

12.13	$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$	12.14	$\int_{-\infty}^0 x^2 e^{x^3} dx$	12.15	$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$
12.16	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 13}$	12.17	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{3x^2 + 1}}$	12.18	$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^2 + 2x + 2}$
12.19	$\int_{-\infty}^0 xe^{3x} dx$	12.20	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$	12.21	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 6x + 10}$
12.22	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{9x^2 + 2}} dx$	12.23	$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} dx$	12.24	$\int_{-\infty}^{-1} xe^{2x} dx$
12.25	$\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{4+x^2}} dx$	12.26	$\int_{-\infty}^0 xe^{3x} dx$	12.27	$\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$
12.28	$\int_2^{+\infty} x \ln x dx$	12.29	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x}$	12.30	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 13}$

Задание 13. Вычислить несобственный интеграл (или установить расходимость).

13.1	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$	13.2	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$	13.3	$\int_0^2 \frac{dx}{x^2}$
13.4	$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$	13.5	$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$	13.6	$\int_{-3}^1 \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$
13.7	$\int_0^1 \ln x dx$	13.8	$\int_0^{e/2} \ln 2x dx$	13.9	$\int_{-2}^0 \frac{dx}{3x+2}$
13.10	$\int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$	13.11	$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$	13.12	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$
13.13	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$	13.14	$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^4}}$	13.15	$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$
13.16	$\int_0^{0,5} x \ln x dx$	13.17	$\int_0^1 e^{-\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$	13.18	$\int_0^1 2^{-\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$
13.19	$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$	13.20	$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$	13.21	$\int_0^1 \frac{dx}{x^3}$
13.22	$\int_0^1 e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$	13.23	$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3}$	13.24	$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$
13.25	$\int_0^1 \frac{dx}{x^3 - 5x^2}$	13.26	$\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$	13.27	$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 2x}$
13.28	$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln x}$	13.29	$\int_0^{\pi/2} tg^2 x dx$	13.30	$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

### 3 Решение типового варианта

Задание 1. Даны комплексные числа

$$z_1 = 9 - 9i \text{ и } z_2 = 9 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Требуется найти:

- 1) Модуль комплексного числа  $z_1$ .
- 2) Аргумент комплексного числа  $z_1$ .
- 3) Представление комплексного числа  $z_1$  в тригонометрической и показательной формах.
- 4) Результат сложения комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$ .
- 5)  $z_2^5$ .
- 6) Произведение  $z_1 \cdot z_2$  в тригонометрической форме.
- 7) Все комплексные корни уравнения  $z^3 = z_2$  по формуле Муавра.

Решение:

1) Если комплексное число в алгебраической форме имеет вид:  $z = \alpha + i\beta = (\alpha, \beta) \Rightarrow z_1 = 9 - 9i = (9, -9)$ , где  $\alpha = 9, \beta = -9$ , то модуль комплексного числа  $z_1$  вычисляется по следующей формуле:

$$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \text{ т.е. } |z_1| = \sqrt{9^2 + (-9)^2} = 9\sqrt{2}.$$

2) Аргумент комплексного числа  $z_1$ :

$$\varphi = \arg(z) = \arctg \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \varphi_1 = \arg(z_1) = \arctg \frac{-9}{9} = -\arctg 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

3) В тригонометрической и показательной формах комплексное число имеет вид

$$z = \alpha + i\beta = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi} \Rightarrow z_1 = 9 - 9i = 9\sqrt{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = 9\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}.$$

4) Результат сложения комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$ :

$$z_2 = 9 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 9 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$
$$z_1 + z_2 = 9 - 9i + 9 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left( 9 + 9 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + i \left( -9 + 9 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \approx 15,36 - 2,63i.$$

5) Для вычисления  $z_2^5$  будем использовать формулу Муавра:

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = |z|^n e^{i\varphi n};$$
$$z_2^5 = (9\sqrt{2})^5 \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = (9\sqrt{2})^5 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

6) Произведение  $z_1 \cdot z_2$  в тригонометрической форме вычисляется следующим образом:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$
$$z_1 \cdot z_2 = 9\sqrt{2} \cdot 9 \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \right) = 81\sqrt{2}(\cos 0 + i \sin 0) = 81\sqrt{2}.$$



7) Все комплексные корни  $z = \sqrt[3]{z_2}$  уравнения  $z^3 = z_2$  по формуле Муавра

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{9\sqrt{2}} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right), k = 0, 1, 2.$$

Распишем полученные корни для заданных  $k$ :

$$k = 0: z_2 = \sqrt[3]{9\sqrt{2}} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{4}}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4}}{3} \right) = \sqrt[3]{9\sqrt{2}} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right);$$

$$k = 1: z_2 = \sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{9\sqrt{2}} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{9\sqrt{2}} \left( \cos \frac{9\pi}{12} + i \sin \frac{9\pi}{12} \right);$$

$$k = 2: \sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{9\sqrt{2}} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} \right)$$

$$= \sqrt[3]{9\sqrt{2}} \left( \cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right).$$

Задания 2, 3 решим с помощью непосредственного интегрирования, т.е. с использованием правил интегрирования, тождественных преобразований подынтегральных функций и таблицы основных интегралов.

Задание 2. а) найти неопределенный интеграл  $\int \frac{(a - \sqrt[3]{x})^2}{x^3} dx$ .

$$\text{Решение: } \int \frac{(a - \sqrt[3]{x})^2}{x^3} dx = \int \frac{a^2 - 2a\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{x^3} dx = \int \left( \frac{a^2}{x^3} - \frac{2a\sqrt[3]{x}}{x^3} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^3} \right) dx =$$

$$= \int \left( a^2 x^{-3} - 2a x^{-\frac{8}{3}} + x^{-\frac{7}{3}} \right) dx = a^2 \int x^{-3} dx - 2a \int x^{-\frac{8}{3}} dx + \int x^{-\frac{7}{3}} dx =$$

$$= -\frac{a^2 x^{-2}}{2} + \frac{6a x^{-\frac{5}{3}}}{5} - \frac{3x^{-\frac{4}{3}}}{4} + C;$$

б) найти неопределенный интеграл  $\int \frac{5^{2x-3x}}{5^x} dx$ .

$$\text{Решение: } \int \frac{5^{2x-3x}}{5^x} dx = \int \left( \frac{5^{2x}}{5^x} - \frac{3^x}{5^x} \right) dx = \int 5^x dx - \int \left( \frac{3}{5} \right)^x dx =$$

$$= \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{\left( \frac{3}{5} \right)^x}{\ln \frac{3}{5}} + C;$$

в) найти неопределенный интеграл  $\int \left( \frac{6}{x^2+9} + \frac{12}{x^2-9} \right) dx$ .

$$\text{Решение: } \int \left( \frac{6}{x^2+9} + \frac{12}{x^2-9} \right) dx =$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + 12 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{3-x}{3+x} \right| + C = 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + 2 \ln \left| \frac{3-x}{3+x} \right| + C.$$

Задание 3 решим, применяя формулу  $\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k}F(kx + b) + C$ , если  $\int f(x)dx = F(x) + C$ .

Найти неопределенный интеграл  $\int \cos(3x + 8) dx$ .

Решение:  $\int \cos(3x + 8) dx = \frac{1}{3} \sin(3x + 8) + C$ .

Задание 4 решим методом замены переменной.

Найти неопределенный интеграл  $\int e^{x^5} x^4 dx$ .

Решение: применим метод замены переменной (метод подстановки).

$$\int e^{x^5} x^4 dx = \left| \begin{array}{l} \text{Замена: } x^5 = t, \quad d(x^5) = dt, \\ 5x^4 dx = dt, \quad x^4 dx = \frac{dt}{5} \end{array} \right|$$
$$= \int e^t \frac{dt}{5} = \frac{1}{5} e^t + C = \frac{1}{5} e^{x^5} + C.$$

Задание 5. Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}$ .

Решение: интегрирование квадратного трехчлена. Выделяя полный квадрат из квадратного трехчлена, приведем данный интеграл к табличному интегралу:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 10} = \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 9} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{3} + C.$$

Задание 6.  $\int (2x - 7) \sin 5x dx$ .

Решение: применим способ интегрирования по частям.

$$\int (2x - 7) \sin 5x dx = \left| \begin{array}{l} \text{По формуле интегрирования по частям} \\ u dv = uv - \int v du, \quad \text{где } u = 2x - 7, \\ du = 2 dx, \quad dv = \sin 5x dx, \quad v = -\frac{1}{5} \cos 5x \end{array} \right| =$$
$$= -\frac{1}{5} (2x - 7) \cos 5x + \frac{2}{5} \int \cos 5x dx = -\frac{1}{5} (2x - 7) \cos 5x + \frac{2}{25} \sin 5x + C.$$

Задание 7. Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2x - 3} dx$ .

Решение: так как подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью, то делением числителя на знаменатель представим ее в виде суммы многочлена и правильной дроби. Затем в правильной дроби знаменатель разложим на множители:

$$\frac{x^2 + 3}{x^2 + 2x - 3} = 1 + \frac{-2x + 6}{x^2 + 2x - 3} = 1 + \frac{-2x + 6}{(x - 1)(x + 3)}.$$

Теперь правильную дробь с разложенным знаменателем представим в виде простейших дробей:

$$\frac{-2x + 6}{x^2 + 2x - 3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3}.$$

Приведа равенство к общему знаменателю и приравняв числители, получим тождество  $-2x + 6 = A(x + 3) + B(x - 1)$ , верное при любых числовых значениях  $x$ . Придавая  $x$  значения, совпадающие с корнями знаменателя, получим уравнения с одним неизвестным коэффициентом  $A$  или  $B$ :

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \mid 4A = 4 \\ x = -3 \mid -4B = 12 \end{array} \right\}, \text{откуда } A = 1, B = -3.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2x - 3} dx &= \int \left( 1 + \frac{1}{x - 1} - \frac{3}{x + 3} \right) dx = \\ &= x + \ln|x - 1| - 3 \ln|x + 3| + C = x + \ln \left| \frac{x - 1}{(x + 3)^3} \right| + C. \end{aligned}$$

Задание 8. Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{(x-5)dx}{x^2(x+3)}$ .

Решение: подынтегральную функцию, которая является правильной рациональной дробью, разложим на сумму простейших дробей:

$$\frac{x-5}{x^2(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+3}.$$

Приведа равенство к общему знаменателю и приравняв числители, получим тождество  $x - 5 = Ax(x + 3) + B(x + 3) + Cx^2$ , верное при любых числовых значениях  $x$ . Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в обеих частях полученного равенства, имеем:

$$\left. \begin{array}{l} A + C = 0 \\ 3A + B = 1 \\ 3B = -5 \end{array} \right\}, \text{откуда } A = \frac{8}{9}, B = -\frac{5}{3}, C = -\frac{8}{9}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-5)dx}{x^2(x+3)} &= \int \left( \frac{8}{9x} - \frac{5}{3x^2} - \frac{8}{9(x+3)} \right) dx = \\ &= \frac{8}{9} \ln|x| - \frac{5}{3} \cdot \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{8}{9} \ln|x + 3| + C = \frac{8}{9} \ln \frac{x}{x + 3} + \frac{5}{3x} + C. \end{aligned}$$

Задание 9. Вычислить определенный интеграл  $\int_{-1}^2 \frac{dx}{(x+3)^3}$ .

Решение:

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{(x+3)^3} = \int_{-1}^2 \frac{d(x+3)}{(x+3)^3} = \int_{-1}^2 (x+3)^{-3} d(x+3) = \left. \frac{(x+3)^{-2}}{-2} \right|_{-1}^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}[(2+3)^{-2} - (-1+3)^{-2}] = -\frac{1}{2}[5^{-2} - 2^{-2}] = \frac{21}{200}.$$

Задание 10. Вычислить интеграл  $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$ , используя замену переменной  $x = 2 \cos t$ .

Решение:

$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = 2 \cos t, \quad dx = -2 \sin t dt, \\ x = 0 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \\ x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4-4\cos^2 t} (-2 \sin t) dt = -4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin t)^2 dt = -4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt =$$

$$= -2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 2t) dt = -2 \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -2 \left( \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} - \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi \right) \right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задание 11. Вычислить площадь фигуры  $D$ , ограниченной указанными линиями  $D: \begin{cases} \cos x, \\ -2 \cos x, \end{cases} -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

Решение: построим фигуру  $D$  (рисунок 1).

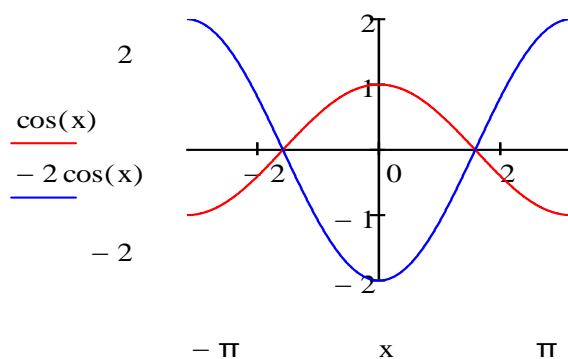


Рисунок 1

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos x - (-2 \cos x)] dx = 3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 3 \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 3 \left( \sin \frac{\pi}{2} - \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = 3 \left( \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \right) = 6 \sin \frac{\pi}{2} = 6.$$

Задание 12. Вычислить несобственный интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+8x+17}$  (или установить его расходимость).

Решение:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+8x+17} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+4)^2+1} = \\ &= \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^C \frac{dx}{(x+4)^2+1} + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_C^A \frac{dx}{(x+4)^2+1} = \\ &= \lim_{B \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}(x+4) \Big|_B^C + \lim_{A \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(x+4) \Big|_C^A = \operatorname{arctg} C - \lim_{B \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} B + \\ &+ \lim_{A \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} C = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

Задание 13. Вычислить несобственный интеграл  $\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$  (либо доказать его расходимость).

Решение:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} &= \left| \begin{array}{l} x=1 - \text{точка разрыва 2-го рода подынтегральной функции,} \\ \text{лежащая внутри отрезка интегрирования} \end{array} \right| = \\ &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = 3 \lim_{\alpha \rightarrow 1-0} (x-1)^{\frac{1}{3}} \Big|_{-1}^{\alpha} + 3 \lim_{\beta \rightarrow 1+0} (x-1)^{\frac{1}{3}} \Big|_{\beta}^2 = \\ &= 3 \lim_{\alpha \rightarrow 1-0} \left[ (\alpha-1)^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}} \right] + 3 \lim_{\beta \rightarrow 1+0} \left[ 1^{\frac{1}{3}} - (\beta-1)^{\frac{1}{3}} \right] = 3\sqrt[3]{2} + 3 = 3(\sqrt[3]{2} + 1). \end{aligned}$$

## Список литературы

- 1 Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. – М.: Высшая школа, 2003. – Ч.1,2. – 352 с.
- 2 Индивидуальные задания по высшей математике: Ч. 2 Комплексные числа. Неопределенный и определенный интегралы. Функции нескольких переменных Обыкновенные дифференциальные уравнения /под ред. А.П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 2007. – 396 с.
- 3 Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). – М.: Высшая школа, 2015. – 176 с.
- 4 Писменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Ч.1,2. – М.: Айрис Пресс, 2011.

## Содержание

Введение .....	3
Расчётно-графическая работа №3. Интегральное исчисление функции одной переменной .....	3
1 Теоретические вопросы .....	3
2 Задания расчетно-графической работы .....	4
3 Решение типового варианта .....	16
Список литературы .....	22

Василина Гулмира Кажымуратовна  
Сарсенбаева Айгуль Жорабековна

МАТЕМАТИКА

Методические указания и задания  
по выполнению расчетно-графических работ  
для студентов специальности  
5В070400 – Вычислительная техника и программное обеспечение  
Часть 3

Редактор Л.Т. Сластихина  
Специалист по стандартизации Н.К. Молдабекова

Подписано в печать \_\_\_\_\_  
Тираж 30 экз.  
Объем 1,5 уч. изд. лист

Формат 60x84 1/16  
Бумага типографическая №1  
Заказ \_\_\_\_\_ Цена 725 тг.

Копировально-множительное бюро  
некоммерческое акционерное общество  
«Алматинский университет энергетики и связи»  
050013, Алматы, Байтурсынова, 126