Коммерциялық емес акционерлік қоғам

АЛМАТЫ ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС УНИВЕРСИТЕТІ

Математика және математикалық үлгілеу кафедрасы

ДИСКРЕТТІ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ ҮЛГІЛЕРІ ЖӘНЕ ӘДІСТЕРІ

5В070300- Ақпараттық жүйелер мамандығы бойынша оқитын студенттер үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар

Алматы 2018

ҚҰРАСТЫРУШЫЛАР: Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Дискретті жүйелердің үлгілері және әдістері. 5В070300- Ақпараттық жүйелер мамандығы студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар. - Алматы: АЭжБУ, 2018. - 41 б.

5В070300- Ақпараттық жүйелер мамандығы студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар «Дискретті математика» пәнінің «Жиындар, қатынастар», және «Графтар теориясының элементтері» тараулары бойынша №1, №2 есептеу-сызба жұмыстарынан тұрады. Бағдарламаның теориялық сұрақтары енгізілген. Типтік нұсқаның шешімі келтірілген.

Пікір беруші: ММҮ кафедрасының аға оқытушысы Абдулланова Ж.С.

«Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2018 ж. жоспары бойынша басылды

© «Алматы энергетика және байланыс университеті» КЕАҚ, 2018 ж.

Кіріспе

«Дискретті жүйелердің үлгілері және әдістері» пәні заманауи комьютерлік бағдарламаларда қолданылатын математиканың бөлімі болып табылады. Ол ақырлы жиындар мен олардың әртүрлі құрылымдарын оқып-үйренетін математика саласына арналған. Ол кең салалы қолданысқа ие, әсіресе ақпараттық жүйелер мен компьютерлермен байланысты салаларда. Пәнді оқып-үйрену нәтижесінде студенттер пайымдауды қалыптастыру негізгі әдістерін меңгеру керек, модельдеу дағдыларын алу керек, оларды бағдарламалауда қолдану керек, жасанды интелект есептерін шығаруда, бағдарламалардың дұрыстығын дәлелдеу үшін, математикалық модельдер құру үшін қолдану керек.

1 Есептеу-сызба жұмыс №1. Жиындар, қатынастар

Мақсаты: жиындар және қатынастар ұғымдарын оқып үйрену. Олардың қасиеттері мен классификацияларымен таныстыру.

1.1 Теориялық сұрақтар

1 Жиындар, олардың берілу жолдары. Булеан және универсум.
2 Жиынның бөліктеуі мен бүркеуі. Жиындардың тура көбейтіндісі.
3 Қатынастар. Бинарлы қатынастардың берілу жолдары және түрлері.
4 Бинарлы қатынастың матрицаларының негізгі қасиеттері.
5 Эквивалентті қатынас. Эквиваленттілік кластары, фактор-жиын.
6 Реттік қатынас. Лексигографиктік реттілік.
7. Функционалдық қатынас.
8. Жиын қуаты туралы түсінік. Санамалы жиындар, қуаты континуум болатын жиын.

1.2 Есептік тапсырмалар

1. Берілген жиынды:
а) элементтерін тізу арқылы;
б) жалпы қасиеті бойынша жазу керек.

№	а)	б)
1.1	$\{x : x^3 - 3x^2 + 2x = 0, x \in N\}$	$\{2,4,6,\ldots,100\}$
1.2	$\{x : x = 5y, y \in N, y \le 4\}$	$\left\{-\frac{3}{2},+\frac{5}{4},-\frac{7}{6},\ldots\right\}$
1.3	$\{x : x = y - z,\ y,z \in \{1,2\}\}$	$\{4,8,12,16,\ldots\}$
1.4	$\{x : x = 3n + 2,\ n \in N, x < 20\}$	$\{2^2,3^2,4^2,\ldots\}$

1.5	$\{x : x = 2n+1,\ n \in N, x < 10\}$	$\left\{+\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, +\frac{1}{9}, \ldots\right\}$
1.6	$\{x : 3x = x + 8\}$	$\{-4, +5, -6, +7, -8, +9\}$
1.7	$\{x : 3x + 5 = 2(x+6)\}$	$\left\{\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{9}, \ldots\right\}$
1.8	$\{x : x = 5y + 2,\ 3 < y < 6, y \in Z\}$	$\{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots, 9^2\}$
1.9	$\{x : x^2 - 3x + 2 = 0, x \in R\}$	$\{-2, +4, -6, +8 \ldots\}$
1.10	$\{x : x = 4y, y \in N, y \le 5\}$	$\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{19}{20}\right\}$
1.11	$\{x : x = y - z,\ y, z \in \{5,2\}\}$	$\{4,8,12,16, \ldots, 60\}$
1.12	$\{x : x = n + 2,\ n \in N, x < 10\}$	$\{2^2, 3^2, 4^2, \ldots, 12^2\}$
1.13	$\{x : x = 2n - 1,\ n \in N, x < 15\}$	$\left\{\frac{2^2}{3}, \frac{3^2}{6}, \frac{4^2}{9}, \ldots\right\}$
1.14	$\{x : 2x = x + 6\}$	$\{4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3\}$
1.15	$\{x : x + 5 = 2(x+5)\}$	$\left\{\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{9}, \ldots, \pm\frac{1}{30}\right\}$
1.16	$\{x : x^3 \le 100, x \in Z\}$	$\{3,6,9,12, \ldots\}$
1.17	$\{x : x = 4n + 2,\ n \in N\}$	$\{0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots, \pm7\}$
1.18	$\{x : x = y + z,\ y, z \in \{1,2,3\}\}$	$\left\{\frac{3}{2^2}, \frac{5}{3^2}, \frac{7}{4^2}, \ldots\right\}$
1.19	$\{x : x^2 - 9x + 20 = 0, x \in C\}$	$\{1^2, 3^2, 5^2, 7^2 \ldots\}$
1.20	$\{x : x(x+3) = 0\}$	$\left\{\frac{2}{1^3}, \frac{4}{2^3}, \frac{6}{3^3}, \ldots\right\}$
1.21	$\{x : 5x + 10 = 30x + 15\}$	$\{3,6,9,12, \ldots, 30\}$
1.22	$\{x : -1 \le x \le 10, x \in N\}$	$\left\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{6}, \ldots\right\}$
1.23	$\{x : -1 \le x \le 10, x \in Z\}$	$\{2^3, 4^3, 6^3, \ldots\}$
1.24	$\{x : x \in Z, x^2 \le 50\}$	$\{3,6,9,12, \ldots, 99\}$
1.25	$\{x : x = 8n - 2,\ n \in N\}$	$\{2,4,8, \ldots, 32\}$
1.26	$\{x : x = y + z,\ y, z \in \{2,3,4\}\}$	$\left\{-\frac{2}{2^2}, +\frac{2}{3^2}, -\frac{2}{4^2}, \ldots\right\}$
1.27	$\{x : x^2 + 6x + 8 = 0, x \in N\}$	$\{2^2, 4^2, 6^2 \ldots\}$
1.28	$\{x : (x+4)(x-3) = 0\}$	$\left\{\frac{2}{1^3}, \frac{4}{2^3}, \frac{6}{3^3}, \frac{8}{4^3}, \frac{10}{5^3}\right\}$
1.29	$\{x : x + 9 = 3x + 15\}$	$\{0, \pm3, \pm6, \pm9, \ldots, \pm30\}$

1.30	$\{x: -1 \le x \le 8, x \in N\}$	$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{22}\right\}$

2. U={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} – универсалды жиын болсын. Берілген *A, B, C* жиындары үшін табу керек:

а) $A \cup C$;

б) $A \cap B$;

в) $A \setminus B$;

г) $A \oplus B$;

д) $\overline{A \cap B}$;

е) $\overline{A} \cap \overline{B}$;

ж) $(A \cup C) \setminus B$;

и) $(A \cap B) \cup C$.

№	*A*	*B*	*C*
2.1	{1,2,3,4,5,6,7}	{4,5,6,7,8,9,10}	{2,4,6,8,10}
2.2	{2,3,4,5,6,7,8}	{5,6,7,8,9,10}	{1,3,5,7,9}
2.3	{3,4,5,6,7,8,9}	{6,7,8,9,10}	{1,2,4,6,8,9}
2.4	{6,7,8,9,10}	{1,2,4,6,8,9}	{3,4,5,6,7,8,9}
2.5	{4,5,6,7,8,9,10}	{2,4,6,8,10}	{1,2,3,4,5,6,7}
2.6	{1,3,5,7,9}	{2,3,4,5,6,7,8}	{5,6,7,8,9,10}
2.7	{1,2,3,5,7,9,10}	{3,4,5,6,7,8}	{2,4,6,7,8,9}
2.8	{6,7,8,9,10}	{1,2,3,4,5,6,7}	{3,4,5,6,7,8}
2.9	{1,3,5,7,8,9}	{2,4,6,8,10}	{7,8,9,1,2,3}
2.10	{2,4,6,7,8,9}	{1,3,5,6,7,8}	{8,9,10,1,2,3}
2.11	{2,4,6,8,10}	{1,2,3,4,5,6,7}	{4,5,6,7,8,9,10}
2.12	{1,3,5,7,9}	{2,3,4,5,6,7,8}	{5,6,7,8,9,10}
2.13	{1,2,4,6,8,9}	{3,4,5,6,7,8,9}	{6,7,8,9,10}
2.14	{3,4,5,6,7,8,9}	{6,7,8,9,10}	{1,2,4,6,8,9}
2.15	{1,2,3,4,5,6,7}	{4,5,6,7,8,9,10}	{2,4,6,8,10}
2.16	{5,6,7,8,9,10}	{1,3,5,7,9}	{2,3,4,5,6,7,8}
2.17	{2,4,6,7,8,9}	{1,2,3,5,7,9,10}	{3,4,5,6,7,8}
2.18	{3,4,5,6,7,8}	{6,7,8,9,10}	{1,2,3,4,5,6,7}
2.19	{7,8,9,1,2,3}	{1,3,5,7,8,9}	{2,4,6,8,10}
2.20	{8,9,10,1,2,3}	{2,4,6,7,8,9}	{1,3,5,6,7,8}
2.21	{4,5,6,7,8,9,10}	{2,4,6,8,10}	{1,2,3,4,5,6,7}
2.22	{5,6,7,8,9,10}	{1,3,5,7,9}	{2,3,4,5,6,7,8}
2.23	{6,7,8,9,10}	{1,2,4,6,8,9}	{3,4,5,6,7,8,9}
2.24	{1,2,4,6,8,9}	{3,4,5,6,7,8,9}	{6,7,8,9,10}
2,25	{2,4,6,8,10}	{1,2,3,4,5,6,7}	{4,5,6,7,8,9,10}
2.26	{2,3,4,5,6,7,8}	{5,6,7,8,9,10}	{1,3,5,7,9}
2.27	{3,4,5,6,7,8}	{2,4,6,7,8,9}	{1,2,3,5,7,9,10}
2.28	{1,2,3,4,5,6,7}	{3,4,5,6,7,8}	{6,7,8,9,10}

2.29	{2,4,6,8,10}	{7,8,9,1,2,3}	{1,3,5,7,8,9}
2.30	{1,3,5,6,7,8}	{8,9,10,1,2,3}	{2,4,6,7,8,9}

3. U={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} – универсалды жиын болсын. Берілген A және B жиындары үшін табу керек:

а) $A \times B$;

б) $B \times A$;

в) A^2;

г) A жиынының булеанын (яғни ішкі жиындар жиынын);

д) A жиынының қандай да бір бүркеуін;

е) A жиынының қандай да бір бөліктеуін;

ж) ішкі жиындардың кез келген A жиынын (булеан да емес, бүркеу де емес, бөліктеу де емес).

№	A	B	№	A	B
3.1	{1,2,3}	{4,5}	3.2	{3,4,5}	{7,8}
3.3	{7,8,9}	{1,2,3}	3.4	{7,8,9}	{3,4,5}
3.5	{4,5,8}	{2,3,5}	3.6	{4,7,8}	{9,0}
3.7	{3,4,9}	{6,7,8}	3.8	{2,6,8}	{1,2,3}
3.9	{3,5,7}	{1,4,6}	3.10	{8,9,0}	{1,2,4}
3.11	{1,3,5}	{6,7,8}	3.12	{0,1,2}	{8,9}
3.13	{6,7,8}	{4,5}	3.14	{4,5,6}	{1,2}
3.15	{3,4,8}	{1,9}	3.16	{2,9,5}	{3,4}
3.17	{4,6,8}	{1,2,3}	3.18	{1,2,3}	{4,7,9}
3.19	{1,5,6}	{2,3}	3.20	{1,3,5}	{2,7,8}
3.21	{6,7,9}	{5,8}	3.22	{6,7,8}	{5,9}
3.23	{2,4,6}	{3,5}	3.24	{3,4,7}	{8,9}
3.25	{5,6,0}	{1,2}	3.26	{5,6,8}	{2,3,7}
3.27	{1,3,4}	{7,8}	3.28	{1,3,5}	{6,7}
3.29	{2,7,8}	{4,6,9}	3.30	{3,4,6}	{1,9}

4. Теңдікті Эйлер-Венн диаграммасы көмегімен дәлелдеу керек.

4.1	$A \setminus (B \cup C)=(A \setminus B)\cap(A \setminus C)$	4.2	$(A \cup B) \setminus (C \cap A)=(A \setminus C) \cup (B \setminus A)$
4.3	$A \setminus (B \cap C)=(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$	4.4	$(A \cup B) \setminus (C \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$
4.5	$(A \setminus B) \cap C=(A \cap C) \setminus (B \cap C)$	4.6	$(B \setminus C) \setminus (A \cup C) = (B \setminus A) \cap (B \setminus C)$
4.7	$(A \setminus B) \cup C=(A \cup C) \setminus (B \setminus C)$	4.8	$A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$
4.9	$A \cap (B \setminus C)=(A \cap B) \setminus (A \cap C)$	4.10	$(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
4.11	$(A \setminus B) \setminus C=(A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$	4.12	$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
4.13	$(A \setminus C) \cup (A \cap B)=A \setminus (C \setminus B)$	4.14	$B \setminus (A \cap C)=(B \setminus A) \cup (B \setminus C)$
4.15	$(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$	4.16	$(B \cap C) \setminus (A \cap C) = (C \setminus A) \cap (B \setminus A)$
4.17	$(A \cup C) \setminus (B \setminus A)=A \cup (C \setminus B)$	4.18	$(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
4.19	$(A \cap B) \setminus (A \cap C)= (A \cap B) \setminus C$	4.20	$(A \cap B) \setminus C=(A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

4.21	$(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$	4.22	$(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$
4.23	$A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$	4.24	$(C\setminus A)\cup(C\setminus B)=C\setminus(A\cap B)$
4.25	$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$	4.26	$(B\setminus A)\cup(B\setminus C)=B\setminus(A\cap C)$
4.27	$(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus B$	4.28	$(B\setminus C)\cup(A\cap B)=B\setminus(C\setminus A)$
4.29	$(A\setminus B)\cup(C\setminus B)=(A\cup C)\setminus B$	4.30	$(B\setminus A)\setminus C=(B\setminus C)\setminus(A\setminus C)$

5. $[P]$ және $[Q]$ қандай да бір бинарлық қатынастардың матрицалары болсын. Табу керек $[P\cup Q]$, $[P\cap Q]$, $[P\circ Q]$, $[P^{-1}]$, $[\overline{P}]$. $P\subseteq Q$ және $Q\subseteq P$ енулерін тексеру керек.

№	$[P]$	$[Q]$	№	$[P]$	$[Q]$
5.1	$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	5.2	$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$
5.3	$\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	5.4	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$
5.5	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$	5.6	$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$
5.7	$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	5.8	$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$
5.9	$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$	5.10	$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$
5.11	$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	5.12	$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$
5.13	$\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	5.14	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$
5.15	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$	5.16	$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$
5.17	$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	5.18	$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$
5.19	$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$	5.20	$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$
5.21	$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$	5.22	$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$
5.23	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$	5.24	$\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

5.25	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	5.26	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$
5.27	$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$	5.28	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
5.29	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	5.30	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

6. $A=\{a,b,c\}$ және $B=\{1,2,3,4\}$ жиындары мен $P_1 \subseteq A\times B$, $P_2 \subseteq B^2$ қатынастары үшін:

а) $[P_1]$ және $[P_2]$ қатынастарының матрицасын құру керек;

б) қатынастарды графиктік түрде кескіндеу керек;

в) табу керек $P_1^{-1}, \overline{P_1}, P_1 \circ P_2$;

г) P_2 қатынасы үшін рефлексивтік, симметриялық, антисимметриялық, транзитивтілік қасиеттері орындалатынын тексеру керек.

№	P_1	P_2
6.1	$\{(a,1),(a,2),(b,3),(c,2),(c,3),(c,4)\}$	$\{(1,1),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(4,4)\}$
6.2	$\{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(b,3),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
6.3	$\{(a,1),(a,2),(a,4),(c,2),(c,3),(c,4)\}$	$\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,3)\}$
6.4	$\{(a,1),(a,2),(b,2),(b,4),(c,3),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,2),(2,2),(4,3),(3,3),(4,4)\}$
6.5	$\{(a,1),(a,4),(b,2),(b,3),(c,1),(c,4)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,1),(4,3),(3,4),(4,1)\}$
6.6	$\{(a,1),(a,2),(a,4),(b,1),(b,4),(c,3)\}$	$\{(1,1),(2,4),(2,1),(3,3),(4,1),(4,2)\}$
6.7	$\{(a,1),(b,1),(b,3),(b,4),(c,3),(c,2)\}$	$\{(1,3),(1,4),(2,2),(4,3),(3,3),(4,4)\}$
6.8	$\{(a,1),(b,3),(c,1),(c,3),(c,2),(c,4)\}$	$\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),$ $(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3),(4,4)\}$
6.9	$\{(a,1),(a,2),(a,4),(b,3),(c,1),(c,4)\}$	$\{(1,3),(1,2),(2,3),(3,2),(3,4),(4,1)\}$
6.10	$\{(a,2),(a,3),(b,2),(b,3),(c,1),(c,4)\}$	$\{(1,1),(1,2),(2,2),(4,1),(3,3),(4,4)\}$
6.11	$\{(a,2),(a,4),(b,3),(c,1),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,3),(2,4),(3,1),(3,4),(4,2),(4,3)\}$
6.12	$\{(b,1),(b,3),(c,1),(c,3),(c,2),(c,4)\}$	$\{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),$ $(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$
6.13	$\{(a,1),(a,2),(a,4),(b,2),(b,4),(c,3)\}$	$\{(1,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4),(4,2)\}$
6.14	$\{(a,2),(a,3),(a,4),(c,1),(c,4),(c,3)\}$	$\{(1,4),(2,3),(2,1),(3,4),(4,2)\}$
6.15	$\{(a,1),(a,2),(b,3),(b,4),(c,3),(c,4)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3)\}$
6.16	$\{(a,2),(a,3),(a,4),(b,1),(b,2),(b,4)\}$	$\{(1,1),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(3,2),(4,3),(4,4)\}$
6.17	$\{(a,3),(b,4),(b,3),(b,1),(b,2),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,3),(2,4),(3,3),(3,1),(4,2)\}$
6.18	$\{(a,3),(b,4),(b,3),(c,1),(c,2),(c,4)\}$	$\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(4,3),(4,2)\}$

6.19	$\{(a,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,3),(c,4)\}$	$\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,1),(4,4)\}$
6.20	$\{(a,2),(a,3),(a,4),(c,1),(c,2),(b,3)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,3),(4,1),(4,3),(4,4),(3,3)\}$
6.21	$\{(a,2),(a,4),(b,1),(b,2),(b,4),$ $(c,2),(c,4)\}$	$\{(1,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4),(4,1),(3,2),(1,3)\}$
6.22	$\{(a,3),(a,4),(b,1),(b,4),(c,2),(c,4)\}$	$\{(1,1),(2,2),(2,4),(2,3),(4,4),(4,2),(3,3),(3,4)\}$
6.23	$\{(a,2),(a,3),(a,4),(b,1),(c,4),$ $(c,2),(c,3)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,2),(3,3),$ $(3,4),(4,3),(4,4)\}$
6.24	$\{(a,3),(b,2),(b,1),(b,4),(c,1),$ $(c,2),(c,4)\}$	$\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(3,2),(3,4),(4,4)\}$
6.25	$\{(a,2),(a,3),(a,4),(b,3),(c,4),(c,1)\}$	$\{(1,1),(2,2),(2,3),(1,4),(3,4),(4,2),(2,4)\}$
6.26	$\{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(b,3),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
6.27	$\{(a,1),(a,2),(a,4),(c,3),(c,2),(c,4)\}$	$\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$
6.28	$\{(a,1),(a,2),(b,2),(b,4),(c,3),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,2),(2,2),(4,3),(3,3),(4,4)\}$
6.29	$\{(a,1),(a,4),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,1),(4,3),(3,4),(4,1)\}$
6.30	$\{(a,1),(a,2),(a,4),(b,1),(b,4),(c,2)\}$	$\{(1,1),(2,4),(2,1),(3,3),(4,1),(4,3)\}$

7. A={a,d,c,d,e} немесе A={a,d,c,d} жиынында P қатынасының реттік қатынас ($P=\prec$) болатындығын дәлелдеу керек. Бұл қандай реттілік (бөліктеп қатаң емес, қатаң, сызықты)? Реттелген $(A,\prec)$ жиыны үшін Хассе диаграммасын құру керек.

№	P	№	P
7.1	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(b,c)}	7.2	{(a,c),(b,c),(b,d),(c,d),(a,d)}
7.3	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(b,c),(c,d), (a,d),(b,d)}	7.4	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(a,c), (a,e), (d,b),(e,b)}
7.5	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(a,c),(b,c), (b,d),(c,d),(a,d)}	7.6	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(c,a),(c,b), (c,e),(d,a),(d,b),(d,e),(e,a),(e,b)}
7.7	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(d,a),(d,b), (d,c),(e,a),(e,b),(e,c),(e,d)}	7.8	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(a,c), (e,d), (e,c)}
7.9	{(a,b),(c,a),(c,b,),(d,a),(d,b),(e,a),(e,b)}	7.10	{(a,b),(a,c),(b,c),(b,d),(c,d),(a,d)}
7.11	{(a,b),(c,b),(d,a),(d,b),(d,c),(d,e)}	7.12	{(c,a),(c,b),(c,e),(d,a),(d,b),(d,e),(e,a), (e,b)}
7.13	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(c,b), (d,a),(d,b),(d,c),(d,e)}	7.14	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(c,a), (c,b), (d,a),(d,b),(e,a),(e,b)}
7.15	{(a,b),(a,c),(a,e),(d,b),(e,b)}	7.16	{(a,b),(c,b),(a,c),(e,d,),(e,c),(e,b)}
7.17	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(b,c)}	7.18	{(a,c),(b,c),(b,d),(c,d),(a,d)}
7.19	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(b,c),(c,d), (a,d),(b,d)}	7.20	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(a,c), (a,e), (d,b),(e,b)}
7.21	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(a,c),(b,c), (b,d),(c,d),(a,d)}	7.22	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(c,a),(c,b), (c,e),(d,a),(d,b),(d,e),(e,a),(e,b)}
7.23	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(d,a),(d,b), (d,c),(e,a),(e,b),(e,c),(e,d)}	7.24	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(a,c), (e,d), (e,c)}
7.25	{(a,b),(c,a),(c,b,),(d,a),(d,b),(e,a),(e,b)}	7.26	{(a,b),(a,c),(b,c),(b,d),(c,d),(a,d)}
7.27	{(a,b),(c,b),(d,a),(d,b),(d,c),(d,e)}	7.28	{(c,a),(c,b),(c,e),(d,a),(d,b),(d,e),(e,a),

			(e,b)}
7.29	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(c,b), (d,a),(d,b),(d,c),(d,e)}	7.30	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(c,a), (c,b),(d,a),(d,b),(e,a),(e,b)}

8. $A=\{1,2,3,4\}$ жиынында P қатынасының эквиваленттік қатынас болатындығын дәлелдеу керек. Эквиваленттік кластарын және фактор-жиынды құру керек.

№	P	№	P
8.1	$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	8.2	$\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$
8.3	$\{(1,1),(4,2),(2,4),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	8.4	$\{(1,1),(2,3),(3,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
8.5	$\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	8.6	$\{(1,1),(4,3),(3,4),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
8.7	$\{(1,1),(1,4),(4,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	8.8	$\{(1,1),(3,2),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
8.9	$\{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,4),(3,3),(4,2),(4,3),(4,4)\}$	8.10	$\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$
8.11	$\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,2),(4,4)\}$	8.12	$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
8.13	$\{(1,1),(2,3),(3,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	8.14	$\{(1,1),(4,2),(2,4),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
8.15	$\{(1,1),(4,3),(3,4),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	8.16	$\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
8.17	$\{(1,1),(3,2),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(4,1),(4,4)\}$	8.18	$\{(1,1),(1,4),(4,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
8.19	$\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,2),(4,4)\}$	8.20	$\{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,4),(3,3),(4,2),(4,3),(4,4)\}$
8.21	$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	8.22	$\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$
8.23	$\{(1,1),(4,2),(2,4),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	8.24	$\{(1,1),(2,3),(3,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
8.25	$\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	8.26	$\{(1,1),(4,3),(3,4),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
8.27	$\{(1,1),(1,4),(4,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	8.28	$\{(1,1),(3,2),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
8.29	$\{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,4),(3,3),(4,2),(4,3),(4,4)\}$	8.30	$\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,2),(4,4)\}$

9. A={1,2,3,4,5,6} жиынының бөліктеуі үшін сәйкес эквиваленттілік қатынасын құру керек. Ол неге эквиваленттілік қатынасы болады? Эквиваленттілік кластар мен фактор – жиындарды жазу керек.

№	$\mathcal{A}$	№	$\mathcal{A}$
9.1	{{1,2},{3,4},{5,6}}	9.2	{{1},{2},{3},{4,5},{6}}
9.3	{{1},{2,3},{4,5,6}}	9.4	{{1},{2,3,4},{5,6}}
9.5	{{1,2,3},{4},{5,6}}	9.6	{{1},{2,3},{4},{5,6}}
9.7	{{1},{2},{3,4},{5,6}}	9.8	{{1,2},{3},{4,5},{6}}
9.9	{{1,2,3,4},{5},{6}}	9.10	{{1,2,3,4},{5,6}}
9.11	{{1,2},{3},{4},{5,6}}	9.12	{{1},{2,3,4,5},{6}}

9.13	{{1},{2,3,4},{5},{6}}	9.14	{{1},{2},{3},{4},{5,6}}
9.15	{{1,2},{3,4}{5},{6}}	9.16	{{1},{2},{3,4},{5},{6}}
9.17	{{1},{2},{3},{4,5,6}}	9.18	{{1},{2},{3},{4},{5},{6}}
9.19	{{1},{2},{3,4,5},{6}}	9.20	{{1},{2},{3,4,5,6}}
9.21	{{1,2,3,4,5},{6}}	9.22	{{1,2,3},{4},{5},{6}}
9.23	{{1,2,3},{4,5,6}}	9.24	{{1},{2,3},{4,5},{6}}
9.25	{{1,2},{3,4,5,6}}	9.26	{{1},{2,3,4,5,6}}
9.27	{{1,2},{3},{4},{5},{6}}	9.28	{{2},{1,3,4,5},{6}}
9.29	{{1,2,3},{4,5},{6}}	9.30	{{3},{1,2,4,5},{6}}

10. P және Q қатынастары берілген. Бұл қатынастардың функция болатындығын дәлелдеу керек. $P \circ Q$, $Q \circ P$ композицияларын табу керек. Бұл қатынастарға инъективтілік, сюръективтілік, биективтілік қасиеттерінің орындалуын тексеру керек.

10.1	$P=\{(x,x^2+1)/\,x\in R\}$ $Q=\{(x,x+3)/\,x\in R\}$	10.2	$P=\{(x,\sqrt{x^2+2})/\,x\in R\}$ $Q=\{(x,x^2+3)/\,x\in R\}$
10.3	$P=\{(x,e^x)/\,x\in R\}$ $Q=\{(x,3x-2)/\,x\in R\}$	10.4	$P=\{(x,3x^2+4)/\,x\in R\}$ $Q=\{(x,x-6)/\,x\in R\}$
10.5	$P=\{(x,e^x)/\,x\in R\}$ $Q=\{(x,2x+1)/\,x\in R\}$	10.6	$P=\{(x,\sin x)/\,x\in R\}$ $Q=\{(x,3x)/\,x\in R\}$
10.7	$P=\{(x,\sqrt[3]{x})/\,x\in R\}$ $Q=\{(x,x^2-6)/\,x\in R\}$	10.8	$P=\{(x,\cos x)/\,x\in R\}$ $Q=\{(x,1-x)/\,x\in R\}$
10.9	$P=\{(x,x^2+3)/\,x\in R\}$ $Q=\{(x,7x-2)/\,x\in R\}$	10.10	$P=\{(x,x^3)/\,x\in R\}$ $Q=\{(x,6x+2)/\,x\in R\}$
10.11	$P=\{(x,x^2+4)/\,x\in R\}$ $Q=\{(x,8x)/\,x\in R\}$	10.12	$P=\{(x,x^2+4)/\,x\in R\}$ $Q=\{(x,6x+2)/\,x\in R\}$
10.13	$P=\{(x,x^4)/\,x\in R\}$ $Q=\{(x,3x+5)/\,x\in R\}$	10.14	$P=\{(x,x^2+7)/\,x\in R\}$ $Q=\{(x,x-3)/\,x\in R\}$
10.15	$P=\{(x,x^2+6)/\,x\in R\}$ $Q=\{(x,4x+3)/\,x\in R\}$	10.16	$P=\{(x,x^2+4)/\,x\in R\}$ $Q=\{(x,2x-8)/\,x\in R\}$
10.17	$P=\{(x,\sin x)/\,x\in R\}$ $Q=\{(x,5x+3)/\,x\in R\}$	10.18	$P=\{(x,x^2-5)/\,x\in R\}$ $Q=\{(x,7x+1)/\,x\in R\}$
10.19	$P=\{(x,x^2+6)/\,x\in R\}$ $Q=\{(x,x+1)/\,x\in R\}$	10.20	$P=\{(x,e^x)/\,x\in R\}$ $Q=\{(x,5x+2)/\,x\in R\}$
10.21	$P=\{(x,x^2+8)/\,x\in R\}$ $Q=\{(x,2x-5)/\,x\in R\}$	10.22	$P=\{(x,e^x)/\,x\in R\}$ $Q=\{(x,2x+1)/\,x\in R\}$
10.23	$P=\{(x,x^2-4)/\,x\in R\}$ $Q=\{(x,5x+6)/\,x\in R\}$	10.24	$P=\{(x,x^3)/\,x\in R\}$ $Q=\{(x,7x+8)/\,x\in R\}$

10.25	$P=\{(x,x^2+4)/x\in R\}$ $Q=\{(x,2x-8)/x\in R\}$	10.26	$P=\{(x,\cos x)/x\in R\}$ $Q=\{(x,5x+1)/x\in R\}$
10.27	$P=\{(x,x^2+7)/x\in R\}$ $Q=\{(x,\frac{x+9}{4})/x\in R\}$	10.28	$P=\{(x,x^2+3)/x\in R\}$ $Q=\{(x,7x-2)/x\in R\}$
10.29	$P=\{(x,x^4)/x\in R\}$ $Q=\{(x,3x+5)/x\in R\}$	10.30	$P=\{(x,e^x)/x\in R\}$ $Q=\{(x,3x-2)/x\in R\}$

1.3 Типтік варианттың шешуі

1. а) $A=\{x:-3<x<4,x\in N\}$ жиынын элементтерін тізу арқылы жазу керек.

Шешуі: N={1,2,3,4,…} болғандықтан A={1,2,3}.

б) $A=\left\{+\frac{2}{1},-\frac{4}{3},+\frac{6}{5},-\frac{8}{7}\right\}$ жиынын жалпы қасиеті бойынша арқылы жазу керек.

Шешуі:

$$A=\left\{x:x=(-1)^{n+1}\frac{2n}{2n-1},\ n\in N,\ n\le 4\right\}.$$

2. U={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} – универсал жиыны берілген болсын. Берілген A={1,2,3,8,9,10}, B={1,3,5,6,7,8}, C={2,4,6,7,8,9} жиындары үшін табу керек:

а) $A\cup C$;

б) $A\cap B$;

в) $A\setminus B$;

г) $A\oplus B$;

д) $\overline{A\cap B}$;

е) $\overline{A}\cap\overline{B}$;

ж) $(A\cup C)\setminus B$;

и) $(A\cap B)\cup C$.

Шешуі:

а) $A\cup C=\{1,2,3,4,6,7,8,9,10\}$;

б) $A\cap B=\{1,3,8\}$;

в) $A\setminus B=\{2,9,10\}$;

г) $A\oplus B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=\{2,9,10\}\cup\{5,6,7\}=\{2,5,6,7,9,10\}$;

д) $\overline{A\cap B}=U\setminus(A\cap B)=\{2,4,5,6,7,9,10\}$;

е) $\overline{A}\cap\overline{B}=\{4,5,6,7\}\cap\{2,4,9,10\}=\{4\}$;

ж) $(A\cup C)\setminus B=\{2,4,9,10\}$;

и) $(A\cap B)\cup C=\{1,2,3,4,6,7,8,9\}$.

3. U={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} – универсал жиыны берілген болсын. Берілген A={3,4,5} және B={6,7,9} жиындары үшін:

а) $A\times B$;

б) $B \times A$;

в) A^2;

г) A жиынының булеанын (яғни ішкі жиындар жиынын);

д) A жиынының қандай да бір бүркеуін;

е) A жиынының қандай да бір бөліктеуін;

ж) ішкі жиындардың кез келген A жиынын (булеан да емес, бүркеу де емес, бөліктеу де емес).

Шешуі:

а) $A \times B = \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\} =$

$= \{(3,6),(3,7),(3,9),(4,6),(4,7),(4,9),(5,6),(5,7),(5,9)\}$;

б) $B \times A = \{(6,3),(6,4),(6,5),(7,3),(7,4),(7,5),(9,3),(9,4),(9,5)\}$;

в) $A^2 = A \times A = \{(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(4,4),(4,5),(5,3),(5,4),(5,5)\}$;

г) A жиыны үш элементтен тұрғандықтан, оның $\mathscr{P}(A)$ булеаны $2^3 = 8$ элементтен тұрады: $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, A, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}\}$;

д) мысалы, $A_1 = \{\{3,4\}, \{4,5\}, \{5\}\}$ - A-ның бүркеуі;

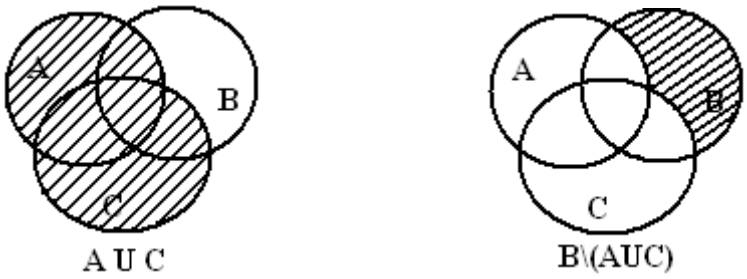
е) мысалы, $A_2 = \{\{3\}, \{4,5\}\}$- A-ның бөліктеуі;

ж) мысалы, $A_3 = \{\{4\}, \{5\}\}$ - булеан да емес, бөліктеу де емес, бүркеу де емес.

4. $B \setminus (A \cup C) = (B \setminus A) \cap (B \setminus C)$ теңдігін Эйлер-Венн диаграммасы көмегімен дәлелдеу керек.

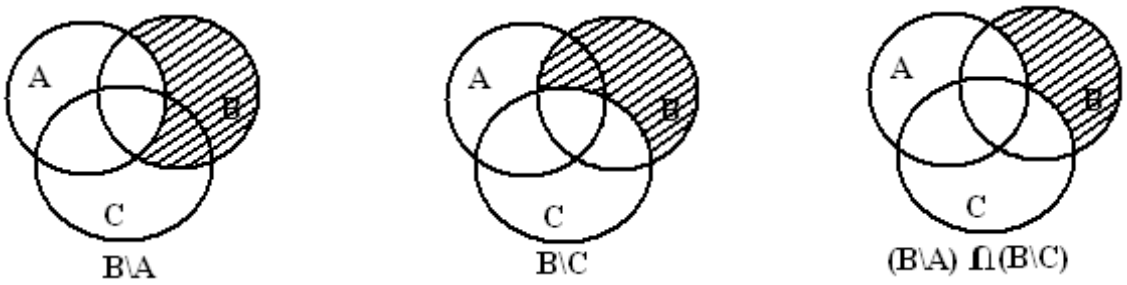
Шешуі: теңдіктің сол және оң жақтарын Эйлер-Венн диаграммасында бейнелейміз.

Сол жағы.



1 сурет - Эйлер –Венн диаграммасы

Оң жағы.



2 сурет- Эйлер –Венн диаграммасы

Сол және оң жақтарды бейнелейтін суреттерде жиындардың бірдей бөліктері белгіленген, бұл теңдікті дәлелдейді.

5. [P] =$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ және [Q] = $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ матрицалары қандай да бір бинарлық қатынастың матрицалары болсын. Табу керек [P$\cup$Q], [P$\cap$Q], [P$\circ$Q], [P^{-1}], [$\overline{P}$]. P$\subseteq$Q және Q$\subseteq$ P енулерінің орындалуын тексеру керек.

Шешуі: егер [P] = (p_{ij}), [Q] = (q_{ij}), онда [P$\cup$Q] =$(p_{ij}+q_{ij})$= [P]+[Q], мұндағы матрицалардың элементтері келесі ережелермен қосылады: 0+0=0, 1+0 = 0+1 = 1+1 =1; [P$\cap$Q] = =$(p_{ij}\cdot q_{ij})$= [P]*[Q], яғни сәйкес элементтер кәдімгі ереже бойынша көбейтіледі: $0\cdot 0= 0\cdot 1= 1\cdot 0= 0$, $1\cdot 1= 1$; [P$\circ$Q]=$[P]\cdot[Q]$ - матрицалар кәдімгідей көбейтіледі, бірақ [P] және [Q] матрицаларының элементтері жоғарыда келтірілген ереже бойынша қосылып, көбейтіледі; [P^{-1}]=[P]^T, мұндағы P^{-1} қатынасы P қатынасына кері қатынас; $\overline{P}$ - P қатынасының толықтауышы және оның [$\overline{P}$] матрицасы P қатынасының матрицасына тең, тек нөлдер бірмен, ал бірлер нөлдермен алмастырылған; егер P$\subseteq$Q, онда $p_{ij}\le q_{ij}\ \forall i,j$.

Біздің жағдайда:

$$[P\cup Q]=\begin{pmatrix}1+0 & 0+1\\ 1+1 & 0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix};$$

$$[P\cap Q]=\begin{pmatrix}1\cdot 0 & 0\cdot 1\\ 1\cdot 1 & 0\cdot 0\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix};$$

$$[P\circ Q]=\begin{pmatrix}1\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot 0\\ 1\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$[P^{-1}]=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix};$$

$[\overline{P}]=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $\left.\begin{array}{ll} p_{11}=1; & q_{11}=0\\ p_{12}=0; & q_{12}=1\\ p_{21}=1; & q_{21}=1\\ p_{22}=0; & q_{22}=0\end{array}\right\}\rightarrow$ мысалы, p_{11} элементінің мәні q_{11} элементінің мәнінен кіші не тең емес болғандықтан, $P \subseteq Q$ енуі орынды емес.

q_{12} элементінің мәні p_{12} элементінің мәнінен кіші не тең емес болғандықтан, $Q \subseteq P$ енуі де орынды емес.

6. A={a,b,c,d} және B={1,2,3,4} жиындары мен $P_1=\{(a,1),(a,2),(c,1),(c,2),(c,4),(d,4)\}$ және $P_2=\{(1,1),(2,1),(2,4),(3,3),(4,1),(4,3)\}$ $P_1 \subseteq A\times B$, $P_2 \subseteq B^2$ қатынастары үшін:

а) $[P_1]$ және $[P_2]$ қатынастарының матрицасын құру керек;

б) қатынастарды сызба түрде кескіндеу керек;

в) табу керек $P_1^{-1}, \overline{P_1}, P_1 \circ P_2$;

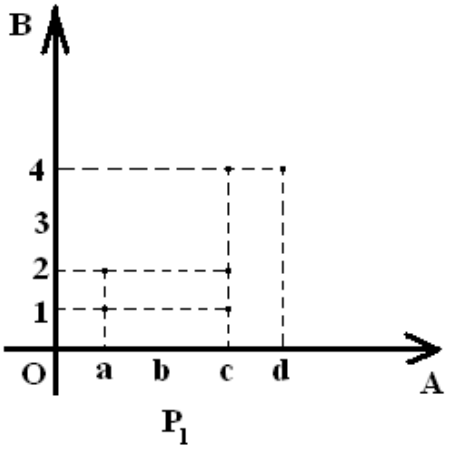
г) P_2 қатынасы үшін рефлексивтік, симметриялық, антисимметриялық транзитивтілік қасиеттері орындалатынын тексеру керек.

Шешуі:

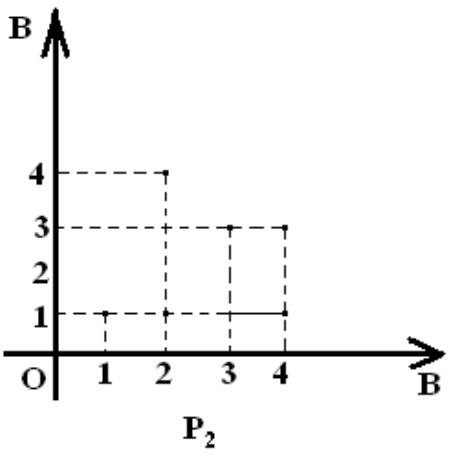
а) егер $p_{ij}=\begin{cases}1, (a_i,b_j)\in P\\ 0, (a_i,b_j)\notin P\end{cases}, i=1,2,...,m, j=1,2,...n$ болса, онда анықтама бойынша $[P]=(p_{ij})$ - P қатынасының матрицасы.

Сонымен, $[P_1]=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $[P_2]=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$;

б) P_1 және P_2 қатынастарының графиктік түрде кескінделуі 3 және 4 суреттерінде көрсетілген.



3 сурет - P_1 сызбасы



4 сурет - P_2 сызбасы

в) $P^{-1}=\{(b,a)/(a,b)\in P\}$ болғандықтан, онда $P_1^{-1}=\{(1,a),(2,a),(1,c),(2,c),\ (4,c),(4,d)\}$, $P_1^{-1}\subseteq B\times A$.

$\overline{P}=\{(a,b)/(a,b)\notin P\}$, $\overline{P}\subseteq A\times B$ және

$A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(b,1),(b,1),(b,2),(b,3),(b,4)(c,1),(c,2),(c,3),(c,4),(d,1),(d,2),(d,3),(d,4)\}$ ескерсек, онда P_1 -дің толықтауышы

$\overline{P_1}=\{(a,3),(a,4),(b,1),(b,1),(b,2),(b,3),(b,4),(c,3),(d,1),(d,2),(d,3)\}$ болады.

Анықтама бойынша $P_1\circ P_2$ = {(a,c)| $a\in A$, $c\in C$ және $\exists b\in B$: (a,b)$\in$ P_1 және (b,c)$\in P_2$}, мұндағы $P_1\subseteq A\times B$, $P_2\subseteq B\times C$ онда

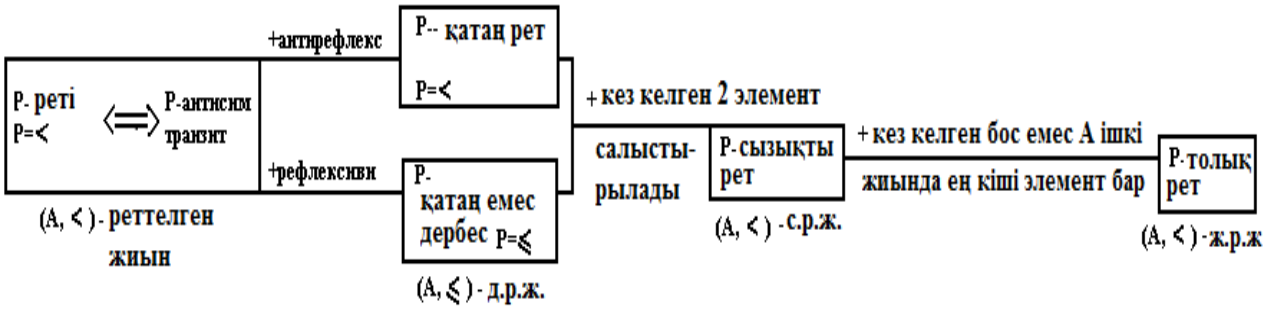
$P_1\circ P_2=\{(a,1),(a,4),(c,1),(c,4),(c,3),(d,1),(d,3)\}$;

г) P_2 қатынасының қасиеттерін оның матрицасы арқылы анықтаған қолайлы $[P_2]=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}$.

Бұл матрицаның бас диагоналінде тек бірлер ғана емес болғандықтан, P_2 қатынасы рефлексивті емес; $[P_2]\neq[P_2]^T$ болғандықтан, ол симметриялы емес. $[P_2]*[P_2]^T$ матрицасының бас диагоналден басқа элементтердің бәрі нөлдер болғандықтан, P_2 қатынасы антисимметриялы; мысалы, $(2,4)\in P_2,(4,3)\in P_2$, бірақ $(2,3)\notin P_2$, онда P_2 транзитивті емес.

7. A={a,d,c,d,e} жиынында $P=\{(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,e),(c,e)\}$ қатынасының реттік қатынас ($P=\prec$) болатындығын дәлелдеу керек. Бұл қандай реттілік (бөліктеп қатаң емес, қатаң, сызықты)? Реттелген $(A,\prec)$ жиыны үшін Хассе диаграммасын құру керек.

Шешуі: қатынас ретінің терминологиясы мен классификациясы әр оқулықта әртүрлі екенін айта кетелік. Біз төменде келтірілген сұлбаны ұстанамыз. 5 суретте $P\subseteq A^2$ қатынасы қарастырылған. Д,р,ж,, с.р.ж., ж.р.ж қысқартулары дербес, сызықты, жақсы реттелген жиындарды белгілеу үшін қолданылды. Сонымен қатар, егер A ақырлы жиын болса, онда сызықты реттелген жиын жақсы реттелген жиын да болады.



5 сурет

Біздің қатынас үшін рефлексивті, симметриялы, антисимметриялы және транзитивті қасиеттерінің орындалуын тексереміз. Оны қатынастың матрица - сы арқылы тексерген қолайлы.

$$[P]=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ – берілген қатынастың матрицасы.

Бұл матрицаның бас диагоналінде тек бірлер емес болғандықтан, P қатынасы рефлексивті емес; $[P]^T=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&1&1&0&0\end{pmatrix}\neq[P]$, яғни P симметриялы емес; $[P]*[P]^T=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$, матрицасының бас диагоналден басқа элементтердің бәрі нөлдер болғандықтан, P қатынасы антисимметриялы; P қатынастың транзитивті болуы үшін, $P\circ P\subseteq P$ енуі немесе егер $[P\circ P]=(a_{ij})$, $[P]=(p_{ij})$, онда $a_{ij}\le p_{ij}$. Ол үшін $[P\circ P]=$

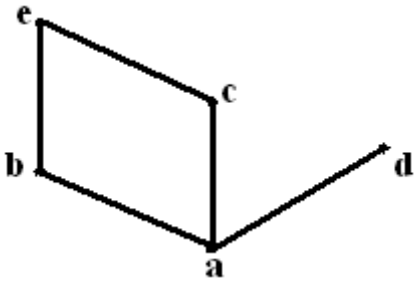
$$=[P]\cdot[P]=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Бұдан $a_{ij}\le p_{ij}\ \ \forall i,j$, бұл P-ның транзитивтілігіне көз жеткізеді.

Сонымен, P рефлексивті емес, антисимметриялы және транзитивті, сондықтан бұл қатынас қатаң ретті болады. b және c, c және d, b және d элементтері салыстырылмайтын болғандықтан, P сызықты ретті емес. Егер ақырлы жиында анықталған реттілік сызықты болмаса, онда ол толық емес.

$(A,\prec)$- реттелген жиын болсын. Егер А ақырлы болса, онда $(A,\prec)$ жиынын сұлба ретінде (Хассе диаграммасы) бейнелеуге болады. Егер $x\prec y$ болса, онда x және y нүктелермен бейнеленеді, егер x элементі y-тен төмен болса, сызықпен қосылады.

Хассе диаграммасын құрайық. Реттік қатынастың транзитивтілігін ескерсек, мысалы, a және e элементтерін сызықпен қосудың қажеті жоқ, себебі егер $a \prec b$ және $b \prec e$, онда $a \prec e$.



6 сурет

P рефлексивті болған жағдайда, яғни P дербес ретті немесе қатаң емес ретті болса, Хассе диаграммасында әрбір төбеде тұзақ пайда болады.

8. $A=\{1,2,3,4\}$ жиынында $P=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$ қатынасының эквиваленттік қатынас болатындығын дәлелдеу керек. Эквиваленттік кластарын және фактор-жиынды құру керек.

Шешуі: егер E қатынасы рефлексивті, симметриялы, транзитивті болса, онда ол эквивалентті болады. P қатынасының матрицасын құрып, ол бойынша қасиеттерін анықтаймыз.

$$[P]=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

Бұл матрицаның бас диагоналінде тек бірлер болғандықтан, P қатынасы рефлексивті; $[P]=[P]^T$ болғандықтан, ол симметриялы.

$$[P\circ P]=[P]\cdot[P]=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

Сонымен, $[P\circ P]=[P]$, бұл P-ның транзитивтілігін дәлелдейді.

P – рефлексивті, симметриялы, транзитивті, сондықтан ол эквивалентті қатынас болады.

$a\in A$ элементінің эквивалентті класы деп $[a]_E=[a]=\{x:(x,a)\in E\}$ жиыны айтылады. Барлық эквиваленттік кластар жиыны $A/E=\{[a]_E:a\in A\}$ A жиынының E-ге қатысты фактор-жиыны деп аталады.

A/E жиыны A жиынының бөліктеуі болып табылады.

$A=\{1,2,3,4\}$ жиынының әрбір элементі үшін эквивалентті кластары:

$[1]=\{x:(x,1)\in P\}=\{1;2\}$;

$[2]=\{x:(x,2)\in P\}=\{1;2\}$;

$[3]=\{x:(x,3)\in P\}=\{3;4\}$;

$[4]=\{x:(x,4)\in P\}=\{3;4\}$.

Сонымен, $[1]=[2], [3]=[4]$.

A жиынының P-ге қатысты фактор-жиыны: $A/_P=\{\{1,2\},\{3,4\}\}$.

9. A={1,2,3,4,5,6} жиынының {{1,3},{2,4,5},{6}} бөліктеуі үшін сәйкес эквиваленттілік қатынасын құру керек. Ол неге эквиваленттілік қатынасы болады? Эквиваленттілік кластар мен фактор – жиындарды жазу керек.

Шешуі: A=$\{A_1,A_2,...,A_n\}$ – A жиынының бөліктеуі болсын, мұндағы $A_i\,(i=1,2,...,n)$ – A жиынының ішкі жиындары. Сонда $E=\{(x,y):x,y\in A_i,i=1,2,...,n\}$ – осы бөліктеуге сәйкес эквиваленттік қатынасы.

Сонымен, біздің жағдайда E ={(1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(2,2)(2,4),(2,5), (4,2), (4,4), (4,5),(5,2),(5,4),(5,5),(6,6)} – берілген бөліктеуге сәйкес эквиваленттік қатынасы. Бұл эквиваленттік қатынас екендігіне көз жеткізу үшін, оның матрицасын табамыз:

$$[E]=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&1&0\\1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&1&0\\0&1&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Матрица бойынша E рефлексивті екендігін анықтаймыз (бас диагоналда бәрі нөлдер), симметриялы ($[E]=[E]^T$), транзитивті ($[E\circ E]=[E]$). Сондықтан, E – эквиваленттік қатынас. Эквиваленттік кластары: [1]=[3]={1,3}, [2]=[4]=[5]={2,4,5}, [6]={6}. A жиынының E-ге қатысты фактор-жиыны берілген бөліктеу A/E = ={{1,3},{2,4,5},{6}} болып табылады.

10. $P=\{(x,x^2+4):x\in R\}$ және $Q=\{(x,x^3+6):x\in R\}$ қатынастары берілген.

а) бұл қатынастардың функция болатындығын дәлелдеу керек;

б) $P\circ Q,\ \ Q\circ P$ композицияларын табу керек;

в) бұл қатынастарға инъективті, сюръективті, биективті қасиеттерінің орындалуын тексеру керек.

Шешуі:

а) егер $[(x,y_1)\in P,(x,y_2)\in P]\Rightarrow y_1=y_2$ немесе кез келген $x\in A$ үшін $(x,y)\in P$ орындалатындай y жалғыз табылатын болса, $P\subseteq A\times B$ қатынасы функция болады.

Біздің жағдайда P және Q функциялар болады, себебі кез келген нақты x саны үшін, (x^2+4) және (x^3+6) сандары табылып, олар жалғыз болады;

б) $P\circ Q=\{(x,(x^2+4)^3+6):x\in R\}$, $Q\circ P=\{(x,(x^3+6)^2+4):x\in R\}$;

в) берілген функцияларды инъективтілікке тексереміз. Егер $[(x_1, y) \in P, (x_2, y) \in P] \Rightarrow x_1 = x_2$ немесе $x_1 \neq x_2 \Rightarrow y(x_1) \neq y(x_2)$ болса, онда P функциясы инъективті деп аталады.

$P = \{(x, x^2 + 4) : x \in R\}$ функциясы үшін инъективтілік шарттары орындалмайды себебі x-тің екі мәніне $(x_1 \neq x_2)$ y-тің жалғыз мәні сәйкес келеді. Мысалы, $x_1 = 1,\ x_2 = -1\ (x_1 \neq x_2)$, бірақ $y(1) = (1)^2 + 4 = 5$ және $y(-1) = (-1)^2 + 4 = 5$, яғни $y(1) = y(-1)$.

$Q = \{(x, x^3 + 6) : x \in R\}$ инъективті, себебі кез келген нақты x_1, x_2 $(x_1 \neq x_2)$ саны үшін $(x_1^3 + 6) \neq (x_2^3 + 6)$ орындалады.

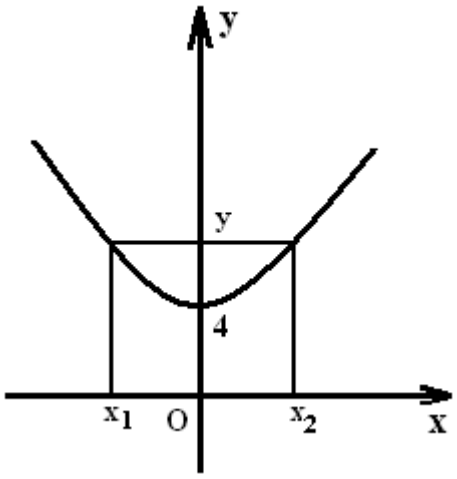
Функцияны сюръективтілікке тексереміз. Егер кез келген $y \in B$ үшін $(x, y) \in P$ орындалатындай $x \in A$ табылса, онда $P \subseteq A \times B$ функциясы сюръективті деп аталады немесе P қатынасының мәндерінің жиыны B $(E_p = B)$ жиынымен беттеседі.

$P = \{(x, x^2 + 4) : x \in R\}$, $P \subseteq R \times R$ функциясы сюръективті емес, себебі мәндерінің жиыны $E_p = [4; +\infty) \neq R$.

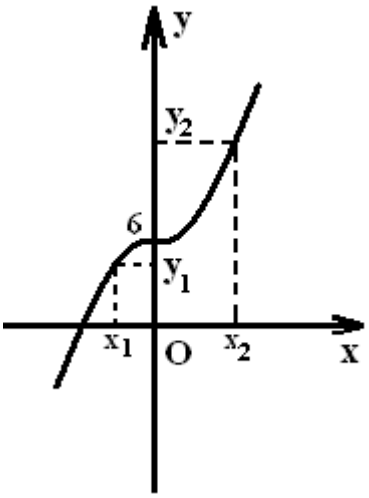
$Q = \{(x, x^3 + 6) : x \in R\}$, $Q \subseteq R \times R$ функциясы сюръективті, себебі $E_Q = R$

Егер функция әрі инъективті, әрі сюръективті болса, онда ол биективті деп аталады. Сондықтан $P-$ биективті емес функция, Q – биективті.

Инъективті, сюръективті және биективті қасиеттерді функцияның графигі бойынша анықтауға болады. Берілген функционалдық қатынастарды кәдімгі функция етіп жазамыз: $P : y = x^2 + 4$; $Q : y = x^3 + 6$. Бұл функциялардың графиктері 9 және 10 суреттерде кескінделген.



8 сурет - P графигі



9 сурет- Q графигі

2 Есептік-сызбалық жұмыс №2. Графтар теориясының элементтері

Мақсаты: графтар теориясының негізгі ұғымдарымен таныстыру, графтардың кейбір қолдануларын қарастыру.

2.1 Теориялық сұрақтар

1. Графтар теориясының негізгі ұғымдары мен анықтамалары.
2. Графтардың берілу жолдары.
3. Графтарға қолданылатын амалдар. Графтардың бөлігі.
4. Маршруттар, шынжыр, жолдар, циклдар, контурлар.
5. Байланыстылық. Байланыстылық компоненталары. Графтағы ара қашықтық
6. Өлшенген графтар. Салмақ матрицасы.
7. Ең қысқа жол туралы есеп.
8. Ағаштар, орман. Діңгекті ағаштар. Діңгек граф.
9. Цикломатикалық сан. Коранг. Графтағы діңгекті ағаштар саны.
10. Ең аз салмақты діңгек ағашты анықтау.
11. Транспорттық желілер. Транспорттық желілердегі ағын. Қима.
12. Максималды ағынды құру үшін Форд-Фалкерсон алгоритмі.

2.2 Есептік тапсырмалар

Бағытталмаған *G* графы (н-граф) графиктік түрде берілген.

1. Осы *G* графын:

а) екі жиынмен: *V* төбелер және *E* қабырғалар;

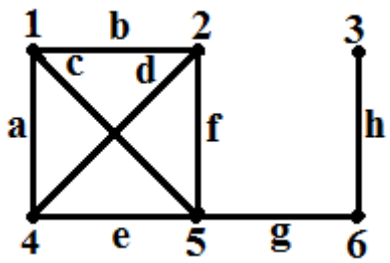
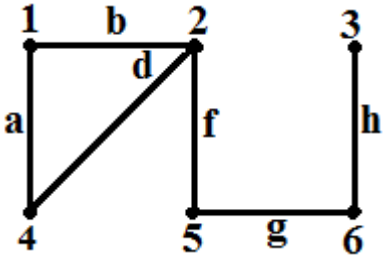
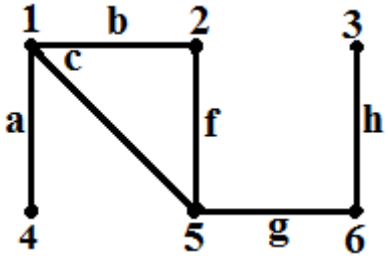
б) қабырғалар тізімімен;

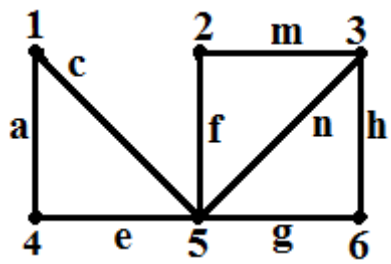
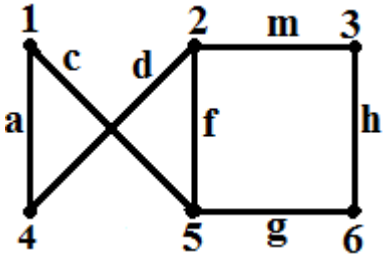
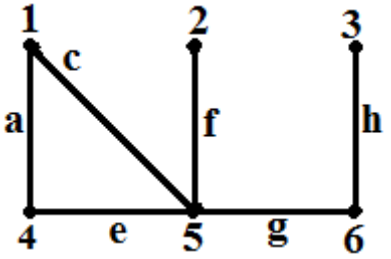
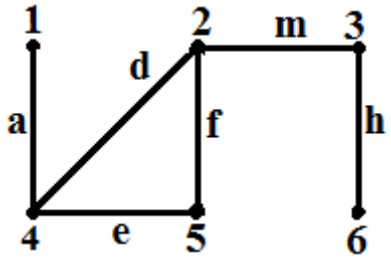
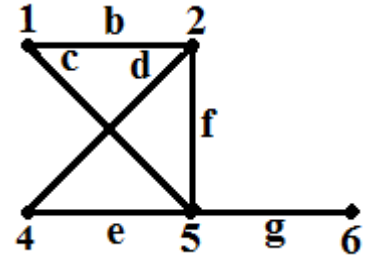
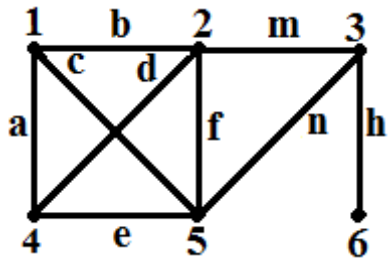
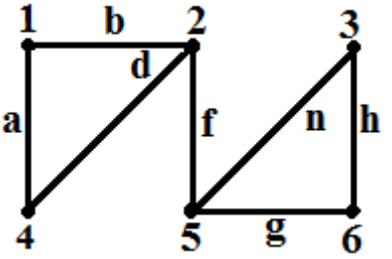
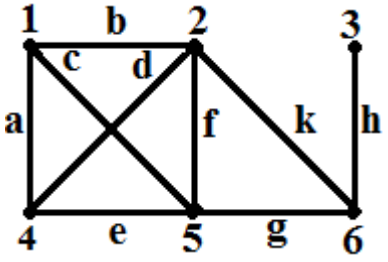
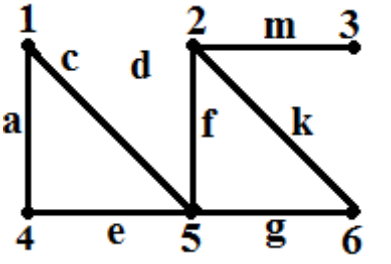
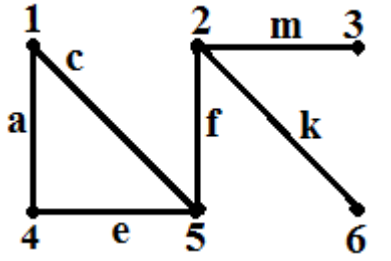
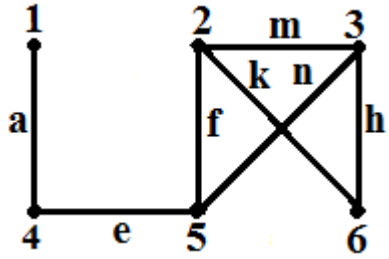
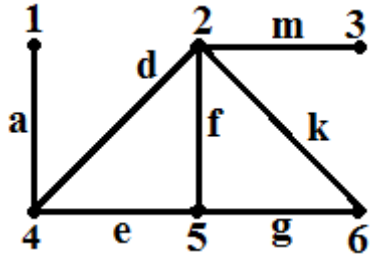
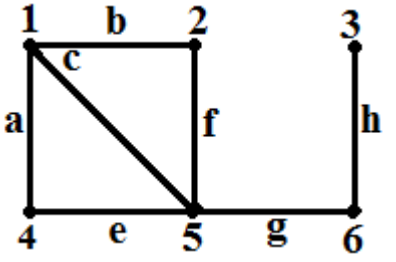
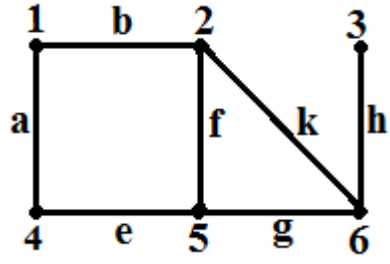
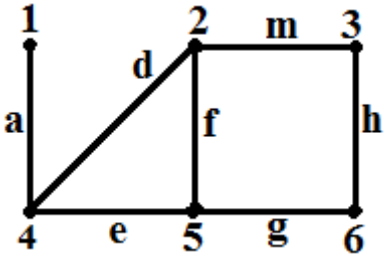
в) сыбайластық матрицасы көмегімен;

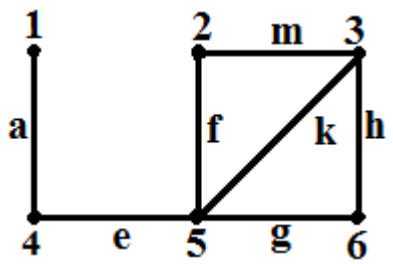
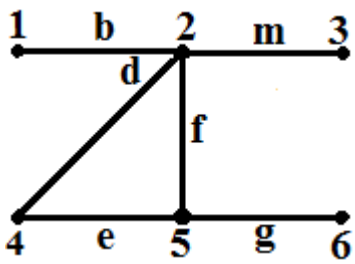
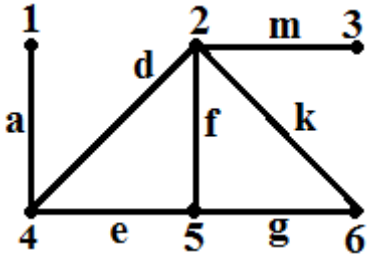
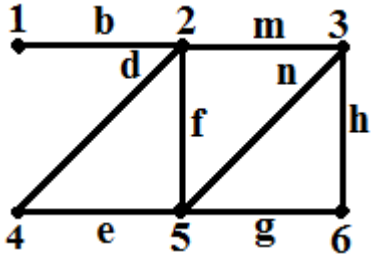
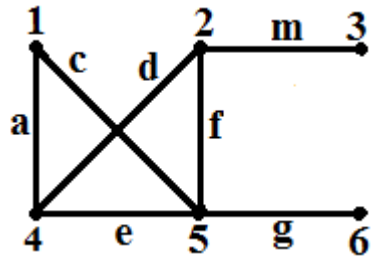
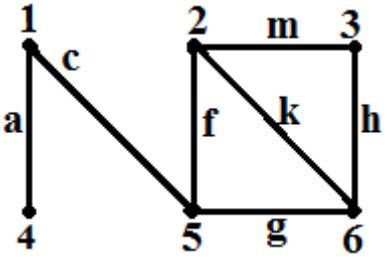
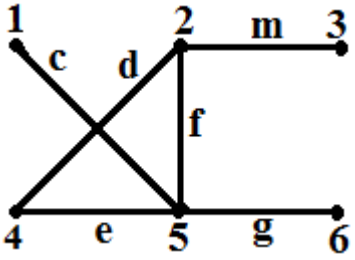
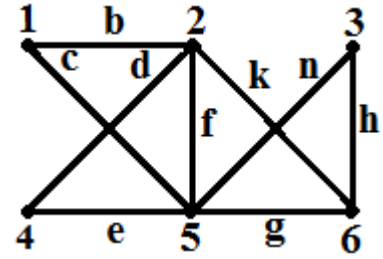
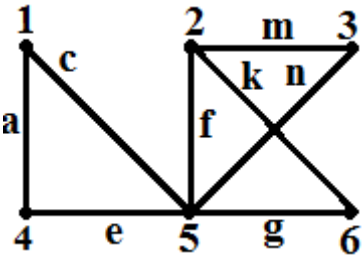
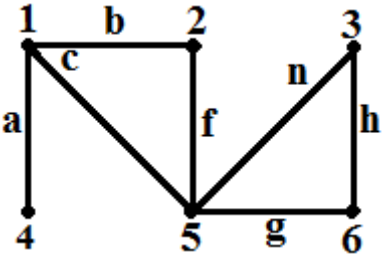
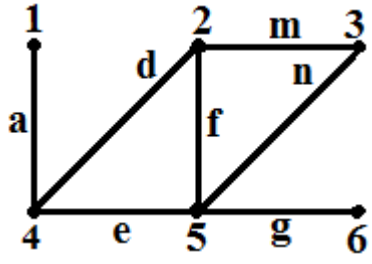
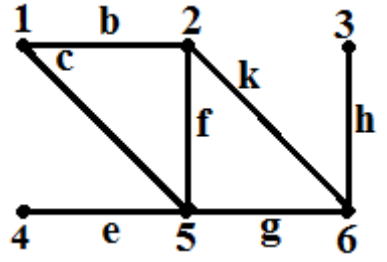
г) инциденттік матрицасы көмегімен беру керек.

2. Графтың ара қашықтық матрицасын, төбелерінің эксцентриситтерін, диаметрін және радиусын табу керек.

3. 1 төбесінен ұзындығы 2-ге тең барлық маршруттарды табу керек.

G	*G*	*G*
1 	2 	3 

4 	5 	6 
7 	8 	9 
10 	11 	12 
13 	14 	15 
16 	17 	18 

19 	20 	21 
22 	23 	24 
25 	26 	27 
28 	29 	30 

V={*1,2,3,4*} төбелері мен *E*={*a,b,c,d,e,f,k,l*} доғалар жиынынан тұратын бағытталған *G*=(*V,E*) графы берілген. Доғалар бастапқы және соңғы төбелерімен анықталған.

4. Осы графты салыңыз:

а) графиктік жолмен;

ә) сыбайластық матрицасы көмегімен;

б) инциденттік матрицасы көмегімен;

в) доғаларының тізімімен;

5. Графтың төбелерінің кіру және шығу дәрежесін, сонымен қатар сәйкес н-графтың төбелерінің дәрежесін табу. Графтың төбелерінің дәрежесі мен қабырғалар санының байланысын өрнектейтін теңдеуді жазыңыз.

6. Графқа сәйкес бинарлы қатынасты анықтаңыз. Берілген қатынас қандай қасиеттерге ие болады (рефлексивтік, симметриялық және т.б.)?

7. Егер бар болса, екі қолжетерлік және екі қолжетпейтін төбелерге мысалдар келтіру керек.

№	*E*	№	*E*
1	{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,3)}	2	{(1,1),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)}
3	{(1,1),(1,2),(2,2),(3,2),(3,4),(3,3),(4,1),(4,2)}	4	{(1,4),),(2,1),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,4)}
5	{(1,2),(2,1),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,3),(4,4)}	6	{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(3,2),(4,3)}
7	{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(4,3),(4,4)}	8	{(1,1),(2,1),(2,2),(2,3),(1,4),(3,4),(3,3),(2,4)}
9	{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(3,1),(3,4),(4,1),(4,3)}	10	{(1,1),(1,4),(2,3),(2,2),(3,2),(3,3),(4,1),(4,4)}
11	{(1,1),(2,4),(2,1),(3,3),(4,1),(4,2),(1,3),(2,3)}	12	{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,2),(3,1),(4,4)}
13	{(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3),(4,3),(4,4)}	14	{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,3),(4,4)}
15	{(1,1),(1,4),(2,1),(2,3),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3)}	16	{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)}
17	{(1,3),(1,2),(2,2),(2,3),(3,2),(1,1),(4,1),(4,2)}	18	{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,2),(4,3),(4,2),(4,4)}
19	{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(3,2),(4,1),(4,4)}	20	{(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,1),(4,4)}
21	{(1,1),(1,3),(2,4),(4,4),(3,3),(3,1),(4,2),(4,3)}	22	{(1,1),(1,4),(2,3),(4,1),(2,2),(4,3),(3,4),(3,3)}
23	{(1,1),(2,4),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3)}	24	{(1,1),(2,2),(1,2),(3,3),(4,4),(4,1),)3,2),(1,3)}
25	{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4),(4,2)}	26	{(1,1),(2,2),(2,4),(2,3),(4,4),(4,2),(3,3),(3,4)}
27	{(1,4),(2,2),(2,3),(2,1),(3,3),(3,4),(4,3),(4,1)}	28	{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,3),(3,1),(4,2),(4,3)}
29	{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,1)}	30	{(1,1),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(3,2),(4,3),(4,4)}

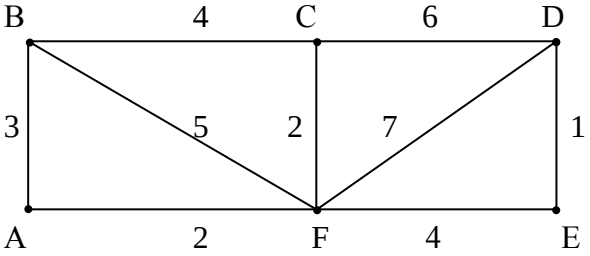
Өлшенген граф суретте кескінделген.

8. Оның салмақ матрицасын, А төбесінен қалған төбелерге дейінгі ең қысқа маршрутты;

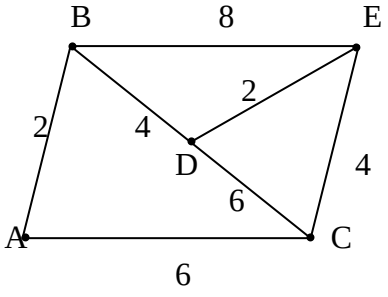
9. Цикломатикалық санды, корангты, графтағы діңгек ағаштар санын;

10. Ең аз салмақты ағашты және оның салмағын табу керек.

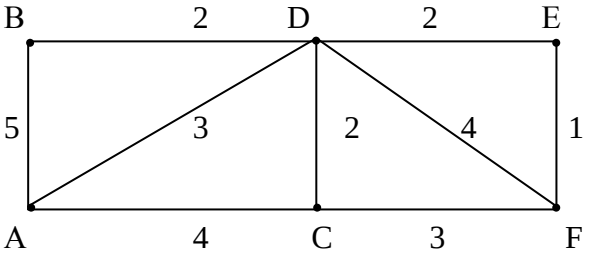
1.



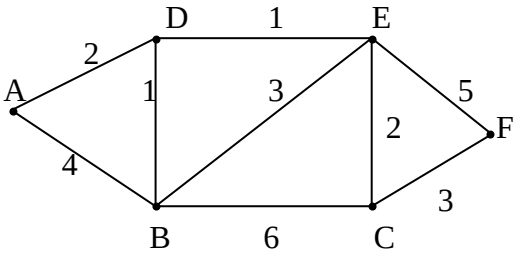
2.



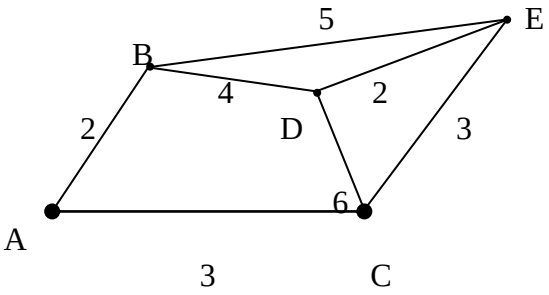
3.



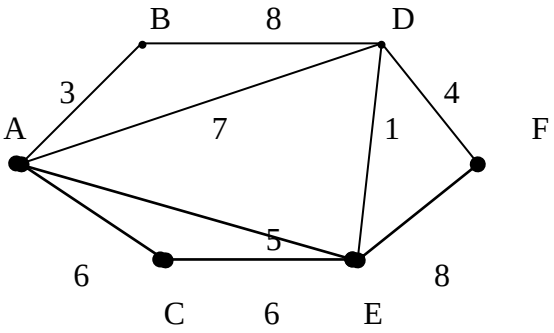
4.



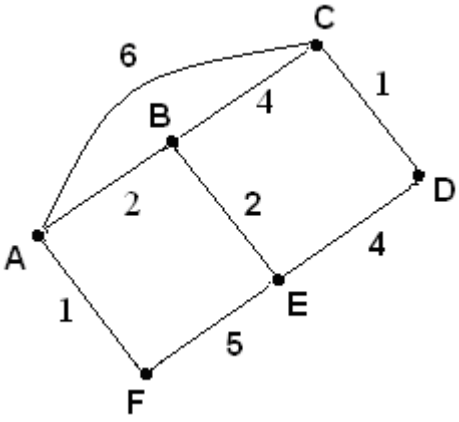
5.



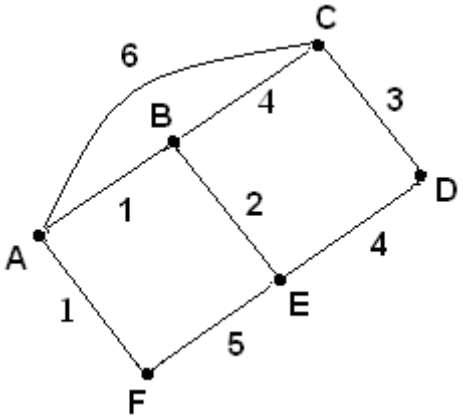
6.



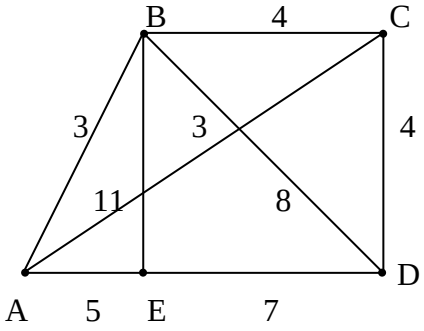
7.



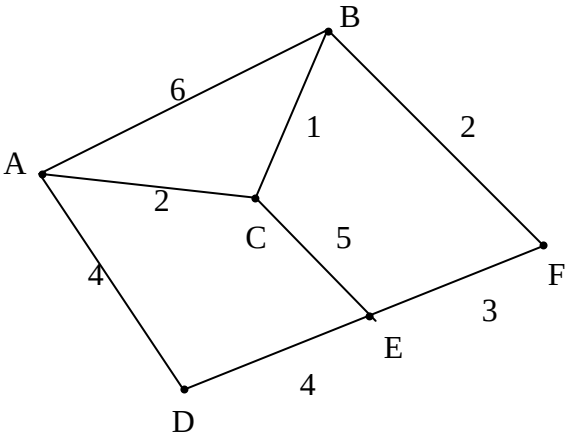
8.



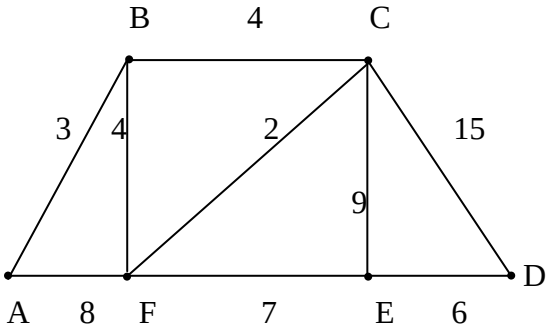
9.



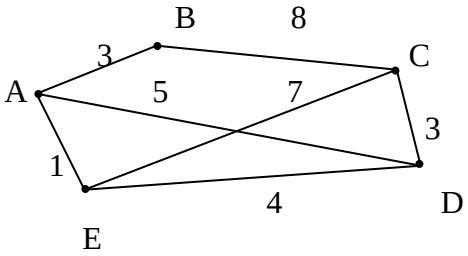
10.



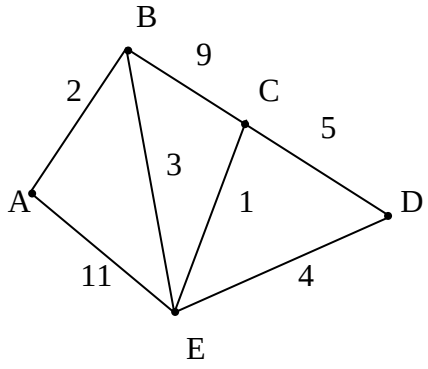
11.



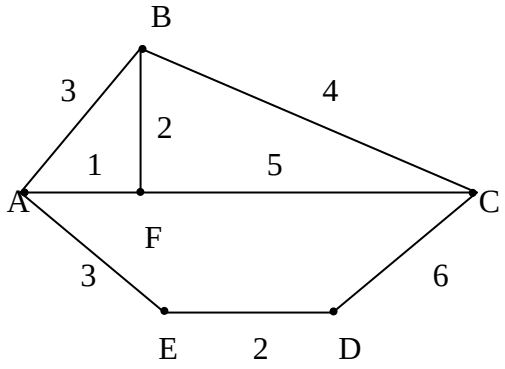
12.



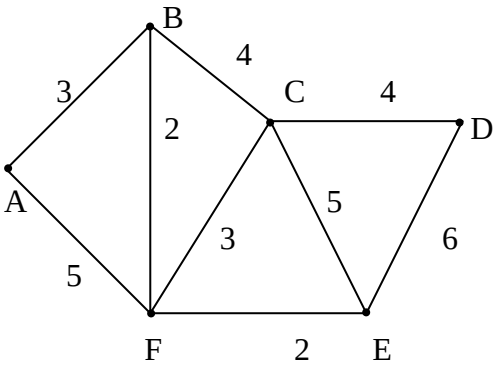
13.



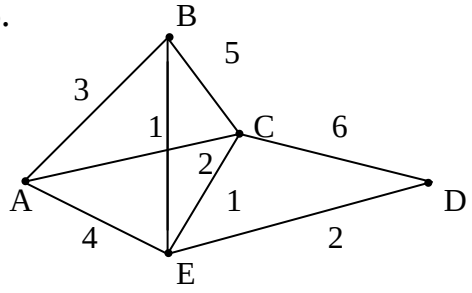
14.



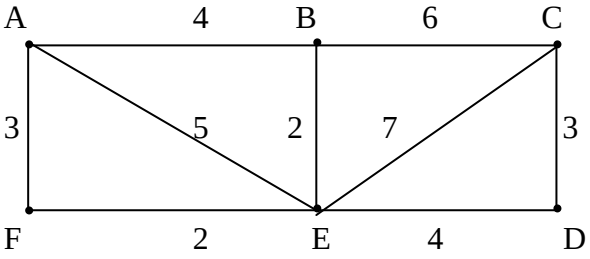
15.



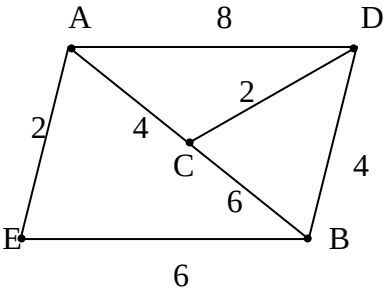
16.



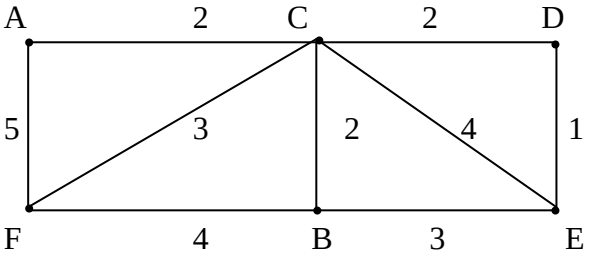
17.



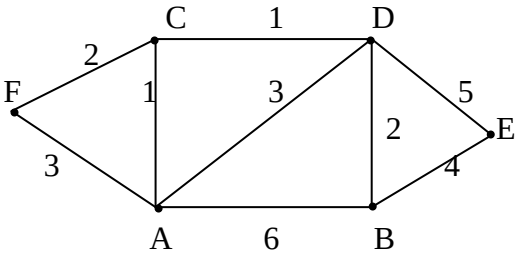
18.



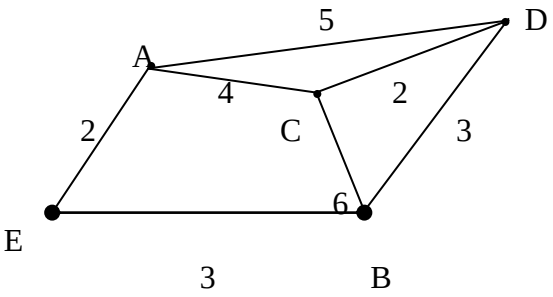
19.



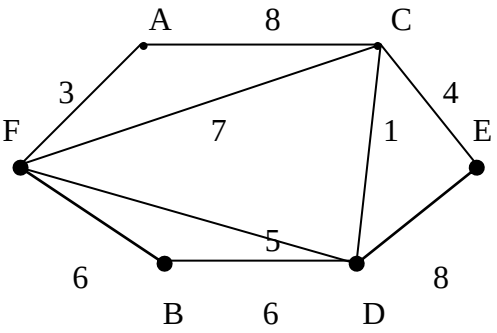
20.



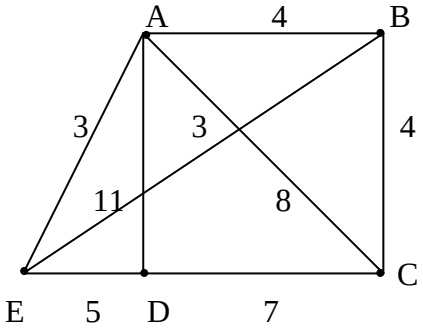
21.



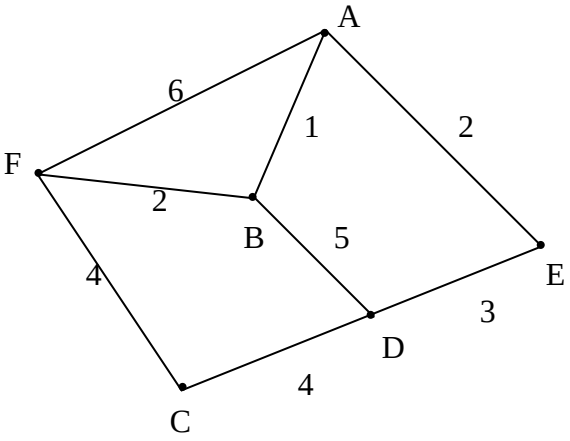
22.



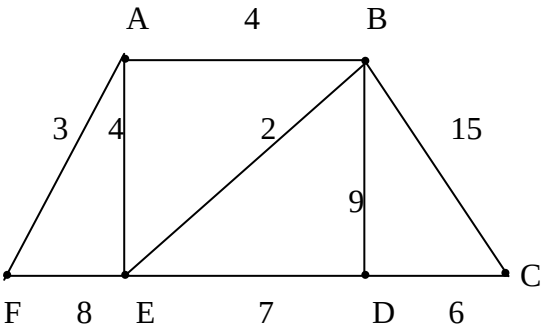
23.



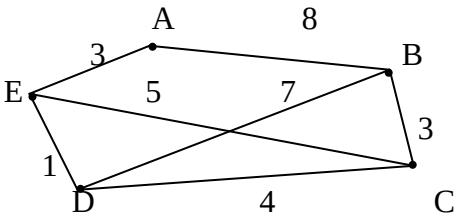
24.



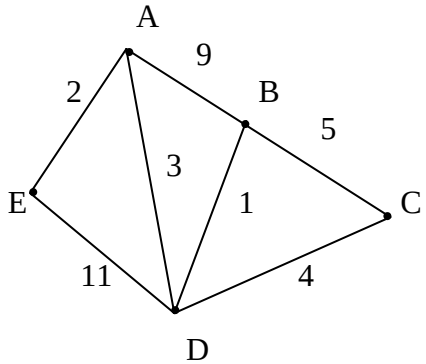
25.



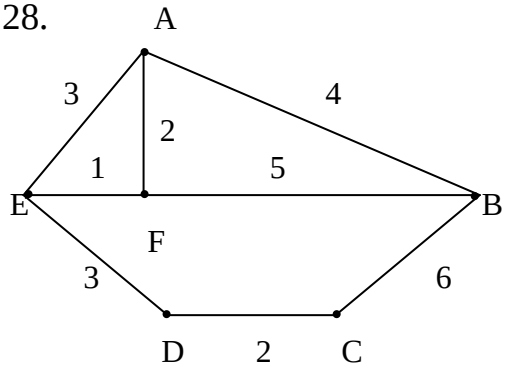
26.



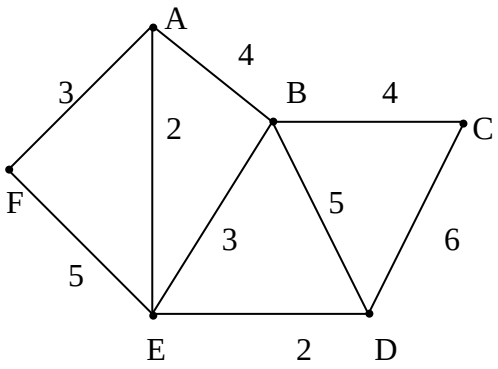
27.



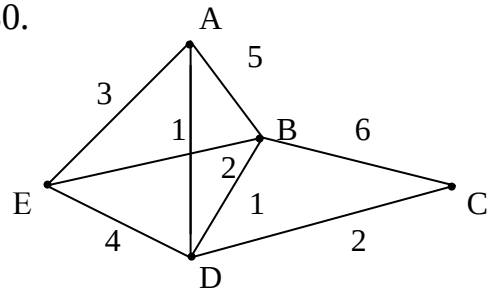
28.



29.



30.



11. $G(V,E)$ графының өткізу қабілеті матрицасы бойынша, s төбесінен t төбесіне өтетін максималды ағынды табу керек, минималды қиманы көрсету керек. Мұндағы $V=\{s, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, t\}$.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 18 & 16 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 11 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 & 11 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 8 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 & 15 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 & 9 & 0 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 12 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 12 & 10 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 0 & 12 & 14 & 0 & 11 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 17 & 17 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 12 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 18 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 11 & 15 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 14 & 10 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 11 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 17 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 10 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 0 & 12 & 9 & 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 10 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 15 & 6 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 12 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 11 & 20 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 8 & 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 14 & 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 8 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 12 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 15 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 13 & 19 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 9 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 0 & 15 & 17 & 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 20 & 0 & 33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 15 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 19 \\ 0 & 17 & 0 & 12 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 11 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 0 & 9 & 11 & 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 10 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 0 & 17 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 8 & 12 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 12 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 11 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 18 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 0 & 18 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 14 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 19 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 0 & 13 & 0 & 0 & 21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 12 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 12 & 11 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 & 10 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 13 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

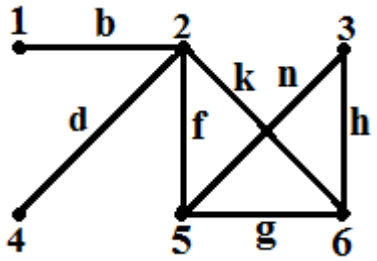
24. $\begin{pmatrix} 0 & 20 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 15 & 0 & 21 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 & 11 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 17 & 13 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & 16 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 26. $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 10 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 27. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 & 12 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 12 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 15 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 16 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 29. $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 13 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 13 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 13 \\ 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 30. $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 11 & 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.3 Типтік варианттың шешуі

$G(V,E)$ бағытталмаған графы (н-граф) сызбалық түрде берілген.



9 сурет - G

1. G графын:

а) V төбелер және E қабырғалар жиындарымен беру керек;

б) қабырғалар тізімімен беру керек;

в) сыбайластық матрицасы көмегімен беру керек;

г) инциденттік матрицасы көмегімен беру керек.

2. Графтың ара қашықтық матрицасын, төбелерінің эксцентриситетін, диаметрін, радиусын табу керек.

3. 6 төбесінен шығатын ұзындығы 2 болатын барлық маршруттарды табу керек.

Шешуі:

1. а) $G(V,E)$ графының екі жиынмен берілуі: $V=\{1,2,3,4,5,6\}$ төбелер жиыны және $E=\{b, d, f, g, h, k, n\} = \{(1,2),(2,4),(2,5),(5,6),(3,6),(2,6),(3,5)\}$ қабырғалар жиындары;

б) қабырғалар тізімі:

Қабырғалар	*b*	*d*	*f*	*g*	*h*	*k*	*n*
Төбелер	1,2	2,4	2,5	5,6	3,6	2,6	3,5

Ескерту. Әрі қарай түсініктемелерде келесі белгіленілер қолданылады: $V=\{v_1,v_2,...,v_i,...\}$ - графтың төбелер жиыны, $E=\{e_1,e_2,...,e_i,...\}$- графтың қабырғалар немесе доғалар жиыны;

в) *m* төбелі және *n* қабырғалы орграф үшін сыбайластық матрицасы келесі түрде жазылады $A=\underset{m\times m}{(a_{ij})}$ мұндағы

$$a_{ij}=\begin{cases}1, \textit{ егер } v_i, v_j \textit{ төбелері сыбайлас болса}\\ 0, \textit{ қарсы жағдайда}\end{cases}.$$

Сонымен, $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&0&1&1&1\\0&0&0&0&1&1\\0&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&1\\0&1&1&0&1&0\end{pmatrix}$;

г) *m* төбелі және *n* қабырғалы н-граф үшін инциденттік матрицасы келесі түрде жазылады $B=\underset{m\times n}{(b_{ij})}$, мұндағы

$$b_{ij}=\begin{cases}1, \textit{ егер } v_i \textit{ төбесі } e_j \textit{ қабырғасына инцидентті болса}\\ 0, \textit{ қарсы жағдайда}\end{cases}$$

Сонымен, $B=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\1&1&1&0&0&1&0\\0&0&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&1\\0&0&0&1&1&1&0\end{pmatrix}$.

2. $D=(d_{ij})$ – ара қашықтық матрицасы, мұндағы $d_{ij}=d(v_i,v_j)$ – v_i және v_j төбелерінің арасындығы ара қашықтық, яғни ұштары v_i және v_j болатын жай шынжырдың ұзындығы.

Сонымен, $D=\begin{pmatrix}0&1&3&2&2&2\\1&0&2&1&1&1\\3&2&0&3&1&1\\2&1&3&0&2&2\\2&1&1&2&0&1\\2&1&1&2&1&0\end{pmatrix}$ - біздің графтың ара қашықтық матрицасы.

v_i төбесінің эксцентриситеті (белгіленуі $e(v_i)$) – бұл осы төбеден ең алшақ орналасқан төбеге дейінгі ара қашықтық болғандықтан, $e(v_i)$ ара қашықтық матрицасындағы і-ші жолда тұрған ең үлкен санға тең. Сонымен, $e(1)=3$, $e(2)=2$, $e(3)=3$, $e(4)=3$, $e(5)=2$, $e(6)=2$. Графтың диаметрі – $d(G)=\max\{e(v)|v\in V\}=3$; радиусы – $r(G)=\min\{e(v)|v\in V\}=2$;

б) егер v_i төбесі үшін $e(v_i)=d(G)$ орындалса, онда алшақ орналасқан деп, ал $e(v_i)=r(G)$ болса, онда орталық төбе деп аталады. Сонымен, 1, 3, 4 төбелері – алшақ орналасқан, 2, 5, 6 – орталық.

3. Тек 1 төбесінен ұзындығы екіге тең маршрутты табу керек болғандықтан, A^2 матрицасының тек бірінші жолын қарастырамыз, тек 2 төбесінен – екінші, т.с.с.; 6 төбесінен шығатын ұзындығы 2 болатын барлық маршруттарды табу үшін A^2 матрицасын таптық. Осы матрицаның соңғы жолы бойынша келесі деректерді анықтаймыз: $a_{61}^2=a_{62}^2=a_{63}^2=a_{64}^2=1$ болғандықтан, 6 төбесінен 1, 2, 3, 4 төбелеріне дейін ұзындығы 2 болатын бір ғана маршруттан бар; $a_{65}{}^2=2$ болғандықтан, 6 төбесінен 5 төбесіне дейін ұзындығы 2 болатын екі маршрут бар; 6 төбесінен 6 төбесіне дейін ұзындығы 2 болатын үш маршрут бар . Әрбір маршрут қай қабырғалар арқылы өтетінін анықтау үшін қосымша матрица құрамыз $A'=\begin{pmatrix}0&b&0&0&0&0\\b&0&0&d&f&k\\0&0&0&0&n&h\\0&d&0&0&0&0\\0&f&n&0&0&g\\0&k&h&0&g&0\end{pmatrix}$. Бұл матрицаны сыбайлас A матрицасындағы әрбір бірді сәйкес қабырғаға айырбастау арқылы алдық. Содан соң A'^2 анықтаймыз:

$$A'^2=\begin{pmatrix}0&b&0&0&0&0\\b&0&0&d&f&k\\0&0&0&0&n&h\\0&d&0&0&0&0\\0&f&n&0&0&g\\0&k&h&0&g&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&b&0&0&0&0\\b&0&0&d&f&k\\0&0&0&0&n&h\\0&d&0&0&0&0\\0&f&n&0&0&g\\0&k&h&0&g&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.\\.kb&gf&gn.&kd&kf+hn.&kk+hh+gg\end{pmatrix}.$$

$a'^{2}_{61} = kb$ болғандықтан, 6 төбесінен 1 төбесіне дейін ұзындығы 2 болатын бір маршрут бар: (6,*k*,2,*b*,1);

$a'^{2}_{62} = gf$ болғандықтан, 6 төбесінен 2 төбесіне дейін ұзындығы 2 болатын бір маршрут бар: (6,*g*,5,*f*,2);

$a'^{2}_{63} = gn$ болғандықтан, 6 төбесінен 3 төбесіне дейін ұзындығы 2 болатын бір маршрут бар: (6,*g*,5,*n*,3);

$a'^{2}_{64} = kd$ болғандықтан, 6 төбесінен 4 төбесіне дейін ұзындығы 2 болатын бір маршрут бар: (6,*k*,2,*d*,4);

$a'^{2}_{65} = kf + hn$, болғандықтан, 6 төбесінен 5 төбесіне дейін ұзындығы 2 болатын екі маршрут бар: (6,*k*,2,*f*,5) и (6,*h*,3,*n*,5);

$a'^{2}_{66} = kk + hh + gg$ болғандықтан, 6 төбесінен 6 төбесіне дейін ұзындығы 2 болатын үш маршрут бар: (6,*k*,2,*k*,6), (6,*h*,3,*h*,6) және (6,*g*,5,*g*,6) .

V= {1,2,3,4} төбелері мен $E=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}=\{(1,2),(1,4),(2,3),(3,2),(4,5),(4,6)\}$ доғалар жиынынан тұратын G=(V,E) графы берілген. Доғалар бастапқы және соңғы төбелерімен анықталған.

4. Осы *G* графын салыңыз:

а) графиктік жолмен;

ә) сыбайластық матрицасы көмегімен;

б) инциденттік матрицасы көмегімен;

в) доғаларының тізімімен.

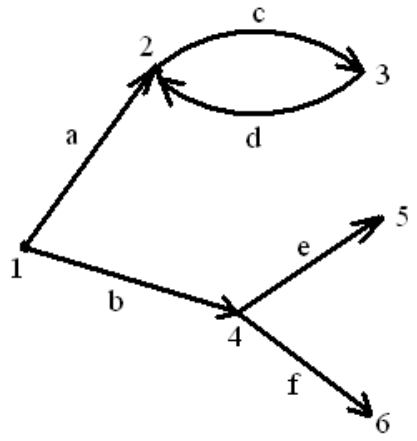
5. Графтың төбелерінің кіру және шығу дәрежесін, сонымен қатар сәйкес н-графтың төбелерінің дәрежесін табу. Графтың төбелерінің дәрежесі мен қабырғалар санының байланысын өрнектейтін теңдеуді жазыңыз

6. Графқа сәйкес бинарлы қатынасты анықтаңыз. Берілген қатынас қандай қасиеттерге ие болады (рефлексивтік, симметриялық және т.б.)?

7. Егер бар болса, екі қолжертерлік және екі қолжертерлік емес төбелерге мысал келтір. Берілген граф байланысты бола ма? Мықты байланысты бола ма? Мықты байланыстылықтың компоненттерін табу керек.

Шешуі:

а) *G* графының сызбалық кескінделуі:



10 сурет - G графы

б) m төбелі сыбайластық матрицасы келесі түрде жазылады $A=\underset{m\times m}{(a_{ij})}$, мұндағы

$$a_{ij}=\begin{cases}1, \textit{егер басы } v_i \textit{ тғбесінде сосы } v_j \textit{ тғбесінде болатын доға бар болса}\\ 0, \textit{ќарсы жаєдайда}\end{cases}.$$

Сонымен, $A=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

в) m төбелі және n доғалы орграф үшін инциденттік матрицасы келесі түрде жазылады $B=\underset{m\times n}{(b_{ij})}$,

мұндағы $b_{ij}=\begin{cases}1, \textit{егер } e_j \textit{ доєасы } v_i \textit{ тғбесінен шыќса}\\ -1, \textit{егер } e_j \textit{ доєасы } v_i \textit{ тғбесіне кірсе}\\ 2, \textit{егер } e_j - v_i \textit{ тғбесіне инцидентті тўзаќ болса}\\ 0, \textit{ќарсы жаєдайда}\end{cases}$.

Сонымен, $B=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0\\-1&0&1&-1&0&0\\0&0&-1&1&0&0\\0&-1&0&0&1&1\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&-1\end{pmatrix}$;

г) G-дің доғалар тізімі:

Доғалар	a	b	c	d	e	f
Төбелер	1,2	1,4	2,3	3,2	4,5	4,6

5. ρ(v)- v төбесінің дәрежесі, ол v төбесіне инцидентті қабырғалар санына тең. $\sum_{v\in G}\rho(v)=2n$, n - қабырғалар саны. Орграф үшін $\rho_1(v)$- v төбесінің шығу дәрежесі, ол басы v төбесінде болатын доғалар санына тең; $\rho_2(v)$- кіру дәрежесі, соңы v төбесінде болатын доғалар санына тең. $\rho(v)=\rho_1(v)+\rho_2(v)$, $\sum_{v\in G}\rho_1(v)=\sum_{v\in G}\rho_2(v)=n$.

Көрнекілік үшін есептеу нәтижелерін кестеге енгіземіз:

Төбелер	$\rho_1(v)$	$\rho_2(v)$	$\rho(v)=\rho_1(v)+\rho_2(v)$
1	2	0	2
2	1	2	3
3	1	1	2
4	2	1	3
5	0	1	1
6	0	1	1
Σ	6	6	12

Графтың төбелер дәрежесі мен қабырғалар санын байланыстыратын теңдіктер: $\sum_{v\in G}\rho_1(v)+\sum_{v\in G}\rho_2(v)=\sum_{v\in G}\rho(v)=2\cdot 6=12$.

6. Біздің графқа сәйкес бинарлық қатынас келесі түрде болады P= $\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 4,6\rangle\}$, оның матрицасы графтың сыбайлас матрицасына тең $[P]=B=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

$[P]$ матрицасының бас диагоналында бірліктер болмағандықтан, P қатынасы рефлексивті емес. Ал $[P]\neq[P]^T$, сондықтан P симметриялы емес. Мысалы, $(1,2)\in P$, $(2,3)\in P$, бірақ $(1,3)\notin P$, бұдан P транзитивті емес.

7. Егер басы u және соңы v болатын жол бар болса, онда v төбесі u төбесінен жетерлік болады. Сонымен біздің графта 2 және 3 төбелері өзара жетерлік; 3, 5, 6 төбелері 1 төбесінен қолжетерлік; 1 төбесі ешқандай төбеден жетерлік емес.

Сәйкес н-граф байланысқан болғандықтан (яғни оның кез келген төбесі өзара жетерлік), берілген орграф та байланысқан болады. Бірақ мықты байланысқан болмайды, себебі бұл орграфта кез келген екі төбесі өзара қолжетерлік емес. Мықты байланыстылығының компонентасын анықтау үшін үш матрица құраймыз:

а) жетерлік матрицасы $C=(c_{ij})_{m\times m}$, мұндағы

c_{ij} = $\begin{cases}1, \text{ егер } j \text{ төбесі } i \text{ -ші төбеден қолжетерлік болса}\\0, \text{ қарсы жағдайда;}\end{cases}$

б) жетерлік емес матрицасын $(q_{ij}) = Q = C^T$;

в) $(s_{ij}) = S = C * Q$ матрицасын, мұндағы $s_{ij} = c_{ij} \cdot q_{ij}$. S матрицасының бірінші жолының бірлері V_1 мықты байланыстылығының компонентасына енетін төбелерге сәйкес келеді. Ойша осы төбеге сәйкес келетін элемент тұрған жол мен бағанды сызып тастаймыз. Қалған матрицадағы бірінші жолдағы бірлер V_2 екінші мықты байланыстылығының компонентасына енетін төбелерге сәйкес келеді, т.с.с. $K(G)$ - графтың саны. Егер $K(G)$=1, онда орграф мықты байланысқан, егер $K(G)$>1, онда мықты байланыспаған. Мықты байланыстылық компоненталарының төбелер жиыны граф төбелерінің жиынының бөлікшесін құрайды: $V = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$.

Біздің граф үшін аталған матрицаларды құрайық.

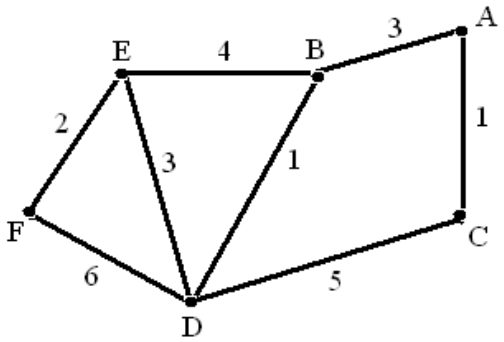
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{ жетерлік матрицасы.}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{жетерлік емес матрицсы.}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

S матрицасының бірінші жолында жалғыз бір бар, ол 1 төбесіне сәйкес келеді. Сонымен, $V_1 = \{1\}$ мықты байланыстылығының бірінші компонентасы. Бірінші жол мен бірінші бағанды сызып тастағаннан кейін қалған бірінші жолда 2 және 3 төбелеріне сәйкес келетін екі бір бар, яғни $V_2 = \{2,3\}$ – мықты байланыстылығының екінші компонентасы. Ойымызды осылай жалғастырсақ, тағы да үш мықты байланыстылығының компонентасын аламыз $V_3 = \{4\}$, $V_4 = \{5\}$, $V_5 = \{6\}$. Мықты байланыстық компонентасының саны $K(G)$=5. Граф төбелерінің жиынының бөлікшелері $V = \{\{1\}, \{2,3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$.

Өлшенген граф суретте кескінделген.



11 сурет – Өлшенген граф

8. Оның салмақ матрицасын, A төбесінен қалған төбелерге дейінгі ең қысқа маршрутты;

9. Цикломатикалық санды, корангты, графтағы діңгек ағаштар санын;

10. Ең аз салмақты ағашты және оның салмағын табу керек.

Шешуі:

8. $W=(w_{ij})$- салмақ матрицасы, мұндағы w_{ij} - (v_i, v_j) доғасының салмағы. Егер мұндай доға болмаса сәйкес салмақ орнына 0 немесе ∞ қоямыз (егер төбелер сыбайлас болмаса, онда ∞). Берілген граф үшін салмақ матрицасы:

$$W=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ 3 & 0 & \infty & 1 & 4 & \infty \\ 1 & \infty & 0 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 5 & 0 & 3 & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

А төбесінен басқа төбелерге ең қысқа маршрут І Дейкстра алгоритмін осы мысалда көрсетеміз:

1 қадам. A - бастамасы, $T_1=V-\{A\}=\{B,C,D,E,F\}$, салмақ матрицасынан A төбесіне сәйкес келетін жолды жазып алып, былай белгілейміз: $D^{(1)}=(0,\hat{3},\hat{1},\hat{\infty},\hat{\infty}.\hat{\infty})$;

2 қадам. $D^{(1)}$-де ^ таңбасымен белгіленген элементтердің ішінен (яғни бастамасына сәйкес келетін элементтен басқалары) ең кішісін іздейміз және оның астын сызып қоямыз. T_1-ден асты сызылған элементке сәйкес келетін төбені алып тастаймыз (бұл С төбесі).

$T_2=T_1-\{C\}=\{B,D,E,F\}$ саламыз. $D^{(2)}$-ні анықтау үшін қосымша жазу жүргіземіз: W матрицасынан С-ға сәйкес жолды жазамыз, сосын оның барлық элементтеріне (бірінші мен үшіншіден басқа) таңбаланған 1 санын қосамыз:

$C \to \begin{array}{c} 1\ \infty\ 0\ 5\ \infty\ \infty \\ \hline 1\ \ 1\ 1\ 1 \\ \infty\ \ 6\ \infty\ \infty \end{array}$. Қосу келесі ережемен жүргізіледі $a+\infty=\infty$, $\infty+\infty=\infty$, $\min(a,\infty)=a$, $\min(\infty,\infty)=\infty$. Алынған сандарды $D^{(1)}$-мен салыстырамыз және $D^{(2)}$-де сәйкес орындарға ең аздарын қоямыз: $D^{(2)}=(0,\hat{\underline{3}},1,\hat{6},\hat{\infty}.\hat{\infty})$;

3 қадам. $T_3=T_2-\{B\}=\{D,E,F\}$, $B \to \begin{array}{c} 3\ 0\ \infty\ 1\ 4\ \infty \\ \hline 3\ \ 3\ \ 3 \\ 4\ \ 7\ \ \infty \end{array}$, $D^{(3)}=(0,3,1,\hat{\underline{4}},\hat{7}.\hat{\infty})$;

4 қадам. $T_4=T_3-\{D\}=\{E,F\}$, $D \to \begin{array}{c} \infty\ 1\ 5\ 0\ 3\ 6 \\ \hline 4\ \ 4 \\ 7\ \ 10 \end{array}$, $D^{(4)}=\left(0,3,1,4,\underline{7},10\right)$;

5 қадам. $T_5=T_4-\{E\}=\{F\}$, $E \to \begin{array}{c} \infty\ 4\ \infty\ 3\ 0\ 2 \\ \hline 7 \\ 9 \end{array}$, $D^{(5)}=\left(0,3,1,4,7,9\right)$.

n=6, n-1=5, яғни бұл соңғы қадам. $D^{(5)}$ түріне қарап, A төбесінен қалған төбелерге дейінгі салмақты ара қашықтықтарды білуге болады $d_w(A,A)=0$, $d_w(A,B)=3$, $d_w(A,C)=1$, $d_w(A,D)=4$, $d_w(A,E)=7$, $d_w(A,F)=9$.

9. $\nu(G)=m-n+k$ саны цикломатикалық сан (немесе цикломатикалық рангы) деп аталынады, мұндағы m – қабырғалар саны, n – төбелер саны, k – байланысты компоненталар саны. Ол діңгек алу үшін қанша қабырға алып тастау керектігін анықтайды. $\nu^*(G)=n-k$ саны коранг деп аталынады және діңгектегі қабырғалар санын анықтайды. Біздің жағдайда $\nu(G)=8-6+1=3$, $\nu^*(G)=6-1=5$. Графтағы діңгек ағаштар санын Кирхгоф матрицасының көмегімен анықтауға болады. Оны келесі жолмен табамыз: $K=(k_{ij})$, мұндағы

$$k_{ij}=\begin{cases} -1, \textit{егер } v_i \textit{ және } v_j \textit{ сыбайлас} \\ 0, \textit{егер } v_i \textit{ және } v_j \textit{ сыбайлас емес} \\ \rho(v_i), \textit{мұндағы } \rho(v_i) - v_i \textit{ дәрежесі}, i=j \end{cases}.$$

Кирхгоф теоремасы бойынша n төбелі ($n\geq 2$) байланысқан графтағы діңгек ағаштар саны Кирхгоф матрицасындағы кез келген элементтің алгебралық толықтауышына тең.

Берілшен графтың төбелерінің дәрежесін табамыз: $\rho(A)=\rho(C)=\rho(F)=2$, $\rho(D)=4$,

$\rho(B)=\rho(E)=3$. $K=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ - Кирхгоф матрицасы; мысалы k_{11} элементінің алгебралық толықтауышын табамыз:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\ldots=29.$$

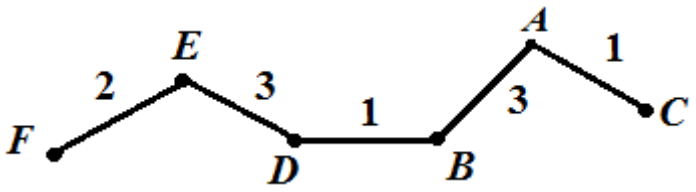
Сонымен, бұл графтың 29 діңгек ағаштары бар.

10. Ең аз салмақты діңгек ағашты табу үшін Краскаль алгоритмін қолданамыз: $G(V,E)$ графы берілген. V төбелер жиынынан және e_1 қабырғасынан тұратын T_1 графын құрамыз. Оның салмағы ең аз (яғни $T_1=(V,E_1)$, мұндағы $E_1=\{e_1\}$). Егер T_i графы құрылып қойылған болса және $i<\nu^*=n-k$, онда T_i қабырға жиынына аз салмақты T_i-де жоқ, T_i-дегі қыбырғалармен цикл құрмайтын e_{i+1} қабырғасын қосып, T_{i+1} графын құрамыз (яғни $T_{i+1}=(V,E_{i+1})$, мұндағы $E_{i+1}=E_i\cup\{e_{i+1}\}$). Егер $i=\nu^*=n-k$ болса, алгоритм аяқталды және $T_{n-k}=(V,E_{n-k})$ - аз салмақты діңгек ағаш, оның салмағы барлық қыбырғалардың қосындысына тең.

Берілген граф үшін Краскаль алгоритмі: $V=\{A,B,C,D,E,F\}$;

1) $T_1=(V,E_1)$, $E_1=\{\{A,C\}\}$.
2) $T_2=(V,E_2)$, $E_2=E_1\cup\{\{B,D\}\}$.
3) $T_3=(V,E_3)$, $E_3=E_2\cup\{\{E,F\}\}$.
4) $T_4=(V,E_4)$, $E_4=E_3\cup\{\{D,E\}\}$.
5) $T_5=(V,E_5)$, $E_5=E_4\cup\{\{A,B\}\}$, $n-k=6-1=5$, алгоритм аяқталды.

T_5 - аз салмақты діңгек ағаш, оның салмағы 1+3+1+3+2=10. Айта кетелік, аз салмақты діңгек ағашты құруды әр қадамда бір қабырғаны қосып, T_1, T_2 және т.с.с. қатар жүргізу керек.

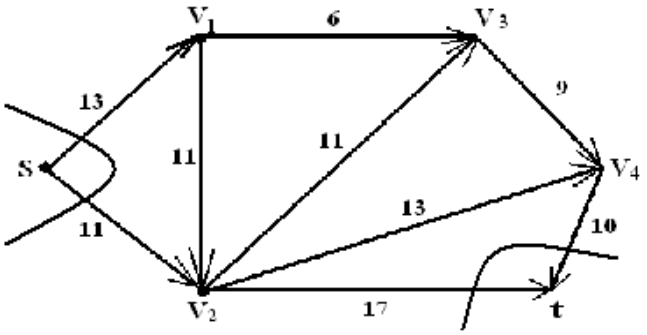


12 сурет - аз салмақты діңгек ағаш

11. $G(V,E)$ графы берілген, мұндағы $V=\{s, v_1, v_2, v_3, v_4, t\}$. $G(V,E)$ графының өткізу қабілеті матрицасы $C = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 13 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ s төбесінен t төбесіне өтетін максималды ағынды табу керек, минималды қиманы көрсету керек.

Шешуі:

Графтың өткізу қабілеті матрицасы бойынша сурет саламыз.



13 сурет - G графы

s-тен t-ге дейін барлық жолдарды қарастырамыз. Стрелкалар үстіне осы доға арқылы өтетін ағынды және өткізу қабілетін жақшаға жазамыз. Стрелкалар астына дәл сол мәліметті, тек ағынның Δ-ға үлкейтілген мәнін қосып жазамыз. Басында барлық доғалар арқылы өтетін ағын нөл деп есептейміз:

1) $s \underset{11(11)}{\overset{0(11)}{\rightarrow}} v_2 \underset{11(17)}{\overset{0(17)}{\rightarrow}} t$; $\Delta = \min(11,17)=11$.

2) $s \underset{10(13)}{\overset{0(13)}{\rightarrow}} v_1 \underset{10(11)}{\overset{0(11)}{\rightarrow}} v_2 \underset{10(13)}{\overset{0(13)}{\rightarrow}} v_4 \underset{10(10)}{\overset{0(10)}{\rightarrow}} t$; $\Delta = \min(13,11,13,10)=10$.

3) $s \underset{11(13)}{\overset{10(13)}{\rightarrow}} v_1 \underset{11(11)}{\overset{10(11)}{\rightarrow}} v_2 \underset{12(17)}{\overset{11(17)}{\rightarrow}} t$; $\Delta = \min(13\text{-}10,11\text{-}10,17\text{-}11)=1$.

s-тен t-ге дейін басқа қанықкан доға жоқ. s-тен t-ге дейін тура және кері доғалары бар маршруттарды қарастырамыз:

$s \underset{13(13)}{\overset{11(13)}{\rightarrow}} v_1 \underset{2(6)}{\overset{0(6)}{\rightarrow}} v_3 \underset{-2(11)}{\overset{0(11)}{\leftarrow}} v_2 \underset{14(17)}{\overset{12(17)}{\rightarrow}} t$; $\min(13\text{-}11,6,11,17\text{-}12)=2$.

Бастаудан шыққан екі доға да қанықкан болды. Алгоритм аяқталды. Максималды ағын $f_{\max} = f(s,v_1) + f(s,v_2) = 13+11 = 24$ немесе $f_{\max} = f(v_4,t) + f(v_2,t) = 10+14 = 24$. Минималды қима $P=(S,T)$, мұндағы $S=\{s\}$, $T=\{v_1,v_2,v_3,v_4,t\}$ немесе $S=\{s,v_1,v_2,v_3,v_4\}$, $T=\{t\}$.

Әдебиеттер тізімі

1 Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Элементы дискретной математики. – М.: ИНФРА-М, Новосибирск: изд-во НГТУ, 2002.

2 Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. Учебник для вузов. 2-е изд. – СПб.: Питер, 2004. – 364 с.: ил. (серия «Учебник для вузов»).

3 Андерсон Д. Дискретная математика и комбинаторика.: Пер. с англ. – М.: Издатель- ский дом «Вильямс», 2004. – 960 с.: ил.–Парал. тит. англ.

4 Шапорев С.Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006.

5 Палий И.А. Дискретная математика. Курс лекций. – М.: Эксмо, 2008. – 352. (Техническое образование).

6 Жетпісов Қ. Математикалық логика және дискретті математика. - Алматы, 2011.

7 Галушкина Ю.И., Марьямов А.Н. Конспект лекций по дискретной математике. – М.: Айрис – пресс, 2007. – 176 с. (Высшее образование).

8 Досанбай П.Т. Математикалық логика. Оқулық. - Алматы, 2011.

9 Байсалова М.Ж. Дискрет математика: оқу құралы. – Алматы, АЭжБИ. 2007. - 76 бет.

10 Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Дискрет математика. 5В070300 – Ақпараттық жүйелер мамандығы студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықлар мен тапсырмалар. - Алматы: АЭжБУ, 2017.- 40 б.

Мазмұны

1 Есептеу-сызба жұмыс №1. Жиындар, қатынастар..... 3
1.1 Теориялық сұрақтар ……. 3
1.2 Есептік тапсырмалар …… 3
1.3 Типтік варианттың шешуі …… 12
2 Есептеу-сызба жұмыс №2. Графтар теориясының элементтері 21
2.1 Теориялық сұрақтар …… 21
2.2 Есептік тапсырмалар …… 21
2.2 Типтік варианттың шешуі …… 30
Әдебиеттер тізімі……... 41

Әдебиеттер тізімі

1 Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Элементы дискретной математики. – М.: ИНФРА-М, Новосибирск: изд-во НГТУ, 2002.

2 Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. Учебник для вузов. 2-е изд. – СПб.: Питер, 2004. – 364 с.: ил. (серия «Учебник для вузов»).

3 Андерсон Д. Дискретная математика и комбинаторика.: Пер. с англ. – М.: Издатель- ский дом «Вильямс», 2004. – 960 с.: ил.–Парал. тит. англ.

4 Шапорев С.Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006.

5 Палий И.А. Дискретная математика. Курс лекций. – М.: Эксмо, 2008. – 352. (Техническое образование).

6 Жетпісов Қ. Математикалық логика және дискретті математика. - Алматы, 2011.

7 Галушкина Ю.И., Марьямов А.Н. Конспект лекций по дискретной математике. – М.: Айрис – пресс, 2007. – 176 с. (Высшее образование).

8 Досанбай П.Т. Математикалық логика. Оқулық. - Алматы, 2011.

9 Байсалова М.Ж. Дискрет математика: оқу құралы. – Алматы, АЭжБИ. 2007. - 76 бет.

10 Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Дискрет математика. 5В070300 – Ақпараттық жүйелер мамандығы студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықлар мен тапсырмалар. - Алматы: АЭжБУ, 2017.- 40 б.

Мазмұны

1 Есептеу-сызба жұмыс №1. Жиындар, қатынастар..... 3
1.1 Теориялық сұрақтар ……. 3
1.2 Есептік тапсырмалар …… 3
1.3 Типтік варианттың шешуі …… 12
2 Есептеу-сызба жұмыс №2. Графтар теориясының элементтері 21
2.1 Теориялық сұрақтар …… 21
2.2 Есептік тапсырмалар …… 21
2.2 Типтік варианттың шешуі …… 30
Әдебиеттер тізімі……... 41

2018 ж. жиынтық жоспары, реті 156

Астраханцева Людмила Николаевна
Байсалова Мәншүк Жұмамұратқызы

ДИСКРЕТТІ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ ҮЛГІЛЕРІ ЖӘНЕ ӘДІСТЕРІ

5В070300- Ақпараттық жүйелер мамандығы бойынша оқитын студенттер үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар

Редактор Ж.Изтелеуова
Стандарттау бойынша маман Н.Қ.Молдабекова

Басуға_____ қол қойылды
Таралымы 20 дана
Көлемі 2,6 баспа табақ

Пішімі 60х84 1/16
Баспаханалық қағаз №1
Тапсырыс Бағасы 1300 тг.

«Алматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірме-көбейткіш бюросы
050013, Алматы, Байтұрсынұлы көшесі, 126