Коммерциялық емес
акционерлік қоғам

АЛМАТЫ
ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ
БАЙЛАНЫС
УНИВЕРСИТЕТІ

Математика және математикалық
үлгілеу кафедрасы

МАТЕМАТИКА I

5В074600 «Ғарыштық техника және технологиялар»
мамандығы студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша
әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар
1 бөлім

Алматы 2019

ҚҰРАСТЫРУШЫЛАР: Б.Ж. Атабай, М.У. Зияханов. Математика І. 5В074600 «Ғарыштық техника және технологиялар» мамандығы студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар. 1 бөлім – Алматы: АЭжБУ, 2019. -30 б.

5В074600 «Ғарыштық техника және технологиялар» мамандығы студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар 1 бөлім Математика І курсының бағдарламасына сәйкес орындалған.

Жұмыста типтік есептердің шешу жолдары және оларды орындауға қажетті нұсқаулар келтірілген.

Сурет-1, кесте -7, қосымша -1, әдебиет көр. – 4 атау.

Пікір беруші: аға оқытушы А.А. Абдурахманов

«Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2019 ж. жоспары бойынша басылды

Кіріспе

№1 есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар Математика I бағдарламасына сай «Сызықтық алгебра және векторлар» және «Аналитикалық геометрия» бөлімдері бойынша орындалған.

Тапсырмалар 30 нұсқадан тұрады. Әрбір студенттің нұсқа реті топ тізімінің реттік нөмірі бойынша анықталады. Тапсырмалар кестесінің реттік нөмірінің екінші саны студенттің нұсқасының реті болады. Есептеу-сызба жұмысы оқушылар дәптеріне орындалады және жұмыстың соңында әдебиеттер тізімі келтірілуі керек.

1 Есептеу-сызба жұмыс №1. Сызықтық алгебра және векторлар. Аналитикалық геометрия

1.1 Теориялық сұрақтар

1. Матрицалар және оларға амалдар қолдану.
2. Екінші және үшінші ретті анықтауыштарды есептеу.
3. Кері матрица және матрица рангісі.
4. Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі.
5. Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешуі әдістері: Крамер ережесі; Гаусс әдісі; матрицалық есептеу әдісі.
6. Біртекті сызықтық теңдеулер жүйесін шешу.
7. Векторлар және оларға қолданатын сызықты амалдар.
8. Векторлардың скалярлық, векторлық және аралас көбейтінділері.
9. Түзу және оның негізгі теңдеулері.
10. Жазықтық және оның негізгі теңдеулері.
11. Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы.
12. Екінші ретті қисықтар: шеңбер, эллипс, гипербола және парабола.
13. Екінші ретті беттер, олардың канондық теңдеулері.

1.2 Есептік тапсырмалар

1 - тапсырма. Берілген матрицалардан мүмкін жағдайының барлығында екі матрицаның қосындысын және көбейтіндісін табыңыз.

1 кесте

№	Берілген матрицалар
1.1	$A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 5 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 3 & 2\\ -1 & 5\end{pmatrix}.$

1 кесте жалғасы

1.2	$A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 6\\ -2 & 1 & 5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -3 & 5\\ 4 & 1 & -2\end{pmatrix}$
1.3	$A=\begin{pmatrix}-1 & 5 & -2 & -4\\ 2 & 3 & 7 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 4 & -2\\ -1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}4 & 1 & -1 & 3\\ -5 & -3 & 2 & 2\end{pmatrix}$
1.4	$A=\begin{pmatrix}5\\ 1\\ 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 5 & 6 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2\\ -4\\ 3\end{pmatrix}$
1.5	$A=\begin{pmatrix}5 & -4\\ 3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -4\\ -2 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}$
1.6	$A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 2 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & -3 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & 4\\ 5 & -1\end{pmatrix}$
1.7	$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -2 & 4 & 0\\ -3 & 5 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$
1.8	$A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\\ 0 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 4 & -1 & 3\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$
1.9	$A=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 1 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 3\\ 6 & -1 & 4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$
1.10	$A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & -4\\ 2 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$
1.11	$A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 1 & -5 & 1\\ 4 & -2 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 2\\ 0 & -4 & -3\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$
1.12	$A=\begin{pmatrix}-2\\ 3\\ 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 5 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 3\\ 2 & 1 & -3\\ 4 & -2 & 0\end{pmatrix}$

1 кестенің жалғасы

1.13	$A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&1&3\\4&0&1\\1&2&-2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$
1.14	$A=\begin{pmatrix}4&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&-1&2\\1&3&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2\\3&-5\\4&1\end{pmatrix}$
1.15	$A=\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&-2&1\\1&3&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-4&3&1\\2&-5&-1\end{pmatrix}$
1.16	$A=\begin{pmatrix}7&-1\\-5&0\\2&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&-2&-1&-3\\5&4&1&2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2&2\\5&3\\3&-4\end{pmatrix}$
1.17	$A=\begin{pmatrix}-1&4&-3\\2&-1&-2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-5&-3\\3&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}4&-2\\2&3\\-5&-1\end{pmatrix}$
1.18	$A=\begin{pmatrix}3&-7\\4&5\\2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&2&1\\4&5&2\\-1&4&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&1\\5&-3\\1&5\end{pmatrix}$
1.19	$A=\begin{pmatrix}3&-1\\4&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&-1&2&0&1\\1&3&0&5&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}$
1.20	$A=\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5&0&2\\4&1&5\\3&1&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$
1.21	$A=\begin{pmatrix}5&-2\\-4&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&-5&3\\4&6&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1&0&-3\\2&1&-4\end{pmatrix}$
1.22	$A=\begin{pmatrix}-2&1\\-3&5\\1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3&1&3\\1&2&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}6&-1&1\\3&-2&4\end{pmatrix}$
1.23	$A=\begin{pmatrix}-2&-1&-3\\3&2&4\\1&0&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&-2\\-1&3\\1&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1&0\\4&2\\1&-3\end{pmatrix}$
1.24	$A=\begin{pmatrix}-1&-3\\2&-2\\4&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&4\\1&-3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}$

1 кестенің соңы

1.25	$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ 2 & 3 & 1\\ 5 & -3 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4\\ -5\\ 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -3\end{pmatrix}$
1.26	$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\ 4\\ -5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2\\ -4\\ 3\end{pmatrix}$
1.27	$A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -5 & 1\\ -1 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 4 & -2\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & -4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-4 & -1\\ 3 & 5\\ 2 & -5\end{pmatrix}$
1.28	$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 3 & -1\\ 4 & -1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 3 & -2\\ -1 & 2 & 4\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}5\\ 4\\ -3\end{pmatrix}$
1.29	$A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ 1 & 4 & -1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ -2 & 7 & 4\end{pmatrix}$
1.30	$A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & -3\\ -3 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

2 - тапсырма. Үшінші ретті A матрицасы берілген:

а) A матрицасының детерминантын Саррюс ережесі бойынша есептеңіз;

ә) A матрицасының кері A^{-1} матрицасын табыңыз;

б) A матрицасының детерминантын i-ші жатық жолы бойынша жіктеп есептеңіз;

в) A матрицасының детерминантын j-ші тік жол бойынша жіктеп есептеңіз.

2 кесте

№	A	i, j	№	A	i, j
2.1	$\begin{pmatrix}-2 & -1 & -3\\ 3 & 2 & 4\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$	$i=2,\ j=2$	2.2	$\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ -2 & 1 & 2\\ 4 & -1 & -3\end{pmatrix}$	$i=3,\ j=1$
2.3	$\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 1 & -2\\ -5 & -3 & 1\end{pmatrix}$	$i=1,\ j=2$	2.4	$\begin{pmatrix}7 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$	$i=2,\ j=1$

2 кестенің жалғасы

2.5	$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$	$i=3,\ \ j=2$	2.6	$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$i=3,\ \ j=3$
2.7	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$i=2,\ \ j=1$	2.8	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$i=1,\ \ j=3$
2.9	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$i=1,\ \ j=1$	2.10	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$i=2,\ \ j=3$
2.11	$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	$i=3,\ \ j=1$	2.12	$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$	$i=1,\ \ j=2$
2.13	$\begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$i=2,\ \ j=1$	2.14	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$i=2,\ \ j=2$
2.15	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$i=1,\ \ j=3$	2.16	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$i=1,\ \ j=1$
2.17	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$i=2,\ \ j=3$	2.18	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$i=3,\ \ j=1$
2.19	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$	$i=3,\ \ j=3$	2.20	$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	$i=1,\ \ j=3$
2.21	$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$i=2,\ \ j=1$	2.22	$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 3 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$i=3,\ \ j=2$
2.23	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$	$i=2,\ \ j=2$	2.24	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$i=3,\ \ j=1$
2.25	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$i=1,\ \ j=1$	2.26	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$i=2,\ \ j=1$

2 кестенің соңы

2.27	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$i=3,\ \ j=1$	2.28	$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	$i=1,\ \ j=3$
2.29	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$	$i=1,\ \ j=2$	2.30	$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$i=2,\ \ j=2$

3 - тапсырма. Теңдеулер жүйесін шешіңіз:
а) Крамер ережесі бойынша;
ә) матрицалық есептеу әдісімен;
б) Гаусс әдісімен.

3 кесте

№	Теңдеулер жүйесі	№	Теңдеулер жүйесі
3.1	$\begin{cases} x+3y+2z=8 \\ 3x+2y-z=3, \\ 4x+y+3z=11 \end{cases}$	3.2	$\begin{cases} 3x+y-2z=5 \\ 2x+3y-5z=9, \\ x+4y+2z=19 \end{cases}$
3.3	$\begin{cases} 2x-3y+z=-5 \\ -x+2y-3z=-4, \\ -3x-4y+2z=1 \end{cases}$	3.4	$\begin{cases} -3x+2y-4z=-18 \\ 4x+y-3z=0, \\ -2x+3y-4z=-18 \end{cases}$
3.5	$\begin{cases} 5x-y-z=0 \\ x+2y+3z=14, \\ 4x+3y+2z=16 \end{cases}$	3.6	$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 5x-y+3z=10, \\ 3x+2y-z=3 \end{cases}$
3.7	$\begin{cases} -2x+y-2z=-5 \\ 2x-3y-3z=-4, \\ 3x+4y-3z=-4 \end{cases}$	3.8	$\begin{cases} -4x+y-z=-7 \\ 2x-y+2z=4, \\ -x+3y-3z=1 \end{cases}$
3.9	$\begin{cases} x+3y-4z=5 \\ 4x-3y+z=7, \\ 2x+4y-10z=4 \end{cases}$	3.10	$\begin{cases} 2x-y-3z=3 \\ 3x+4y-5z=-8, \\ 2y+7z=17 \end{cases}$
3.11	$\begin{cases} x+3y-2z=-1 \\ -x+3y+4z=9, \\ -3x+y-2z=5 \end{cases}$	3.12	$\begin{cases} 2x+3y+2z=7 \\ 4x-3y+2z=3, \\ 3x+3y-4z=2 \end{cases}$
3.13	$\begin{cases} x+4y-2z=3 \\ 5x+2y+3z=18, \\ 2x-y+z=3 \end{cases}$	3.14	$\begin{cases} x-3y+z=7 \\ x+2y-3z=4, \\ 2x-3y+4z=7 \end{cases}$

3 кестенің соңы

3.15	$\begin{cases} x+3y+2z=13 \\ 2x-3y+z=-3, \\ 5x+y-z=4 \end{cases}$	3.16	$\begin{cases} x \quad + \quad 3z=5 \\ x+4y \quad =8, \\ x+2y-3z=1 \end{cases}$
3.17	$\begin{cases} 2x+3y-4z=-11 \\ x-4y-3z=9, \\ 3x-y-4z=4 \end{cases}$	3.18	$\begin{cases} -3x+y-2z=-7 \\ 3x-y-5z=0, \\ x+2y-4z=-7 \end{cases}$
3.19	$\begin{cases} x-y+3z=4 \\ 2x+y+4z=9, \\ x+2y-3z=1 \end{cases}$	3.20	$\begin{cases} x+5x-2y=4 \\ 2x+3y-4z=-6, \\ 7x+2y-z=1 \end{cases}$
3.21	$\begin{cases} -2x-3y+z=-11 \\ x-2y+3z=-5, \\ 2x-4y+z=0 \end{cases}$	3.22	$\begin{cases} x+3y-2z=1 \\ 3x-2y+z=2, \\ 2x+4y-5z=-5 \end{cases}$
3.23	$\begin{cases} -x+2y+3z=-3 \\ 4x-3y-5z=9, \\ -3x-3y+4z=4 \end{cases}$	3.24	$\begin{cases} 5x-2y-z=-11 \\ -3x-y+z=4, \\ 2x-y+3z=-8 \end{cases}$
3.25	$\begin{cases} 3x+4y-5z=-7 \\ x+3y-4z=-6, \\ 4x+2y-3z=-5 \end{cases}$	3.26	$\begin{cases} 2x+y-4z=0 \\ x+2y-3z=1, \\ -3x-4y+6z=-5 \end{cases}$
3.27	$\begin{cases} 6x-y-4z=0 \\ -3x+y-2z=3, \\ 2x-3y+3z=1 \end{cases}$	3.28	$\begin{cases} -2x+y-2z=10 \\ -x-y+4z=-3, \\ 4x+2y-3z=-5 \end{cases}$
3.29	$\begin{cases} 7x-2y+2z=7 \\ -3x+2y-3z=-4, \\ 2x-4y+3z=1 \end{cases}$	3.30	$\begin{cases} 3x-2y+z=10 \\ x+3y-4z=-3, \\ 2x+5y+2z=29 \end{cases}$

4 - тапсырма. $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$ және $C(x_3;y_3;z_3)$ нүктелері және , $\bar{c}=\left(c_x;\, c_y;\, c_z\right)$ векторы берілген. Табыңыз:

а) $\bar{a}=\overline{AB}$ және $\bar{в}=\overline{BC}$ векторларының координаталары мен модульдерін;

ә) AB кесіндісінің және BC кесіндісінің ортасының координаталарын;

б) векторлардың $\bar{a}\cdot\bar{в}$ скалярлық көбейтіндісін және $пр_{\bar{в}}\bar{a}$ проекциясын;

в) векторлардың $\bar{a}\cdot\bar{в}$ векторлық және $\bar{a}\bar{в}\bar{c}$ аралас көбейтінділерін;

г) төбелері $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$ және $C(x_3;y_3;z_3)$ нүктелері болатын параллелограмның және үшбұрыштың ауданын;

д) қабырғалары $\bar{a}$, $\bar{в}$ және $\bar{c}$ векторлары ретінде тұрғызылған пирамида көлемін.

4 кесте

№	$A(x_1;y_1;z_1),\ B(x_2;y_2;z_2),\ C(x_3;y_3;z_3)$	$\bar{c}=(c_x;\ c_y;\ c_z)$
4.1	A(1;1;1), B(2;3;4), C(4;3;-2)	$\bar{c}=(-1;\ -2;\ 3)$
4.2	A(2;2;2), B(4;0;3), C(0;1;0)	$\bar{c}=(2;\ -1;\ 0)$
4.3	A(0;0;1), B(2;3;5), C(0;2;3)	$\bar{c}=(3;\ 1;\ -1)$
4.4	A(1;2;0), B(3;0;-3), C(5;2;6)	$\bar{c}=(-3;\ -1;\ 2)$
4.5	A(1;-1;2), B(5;-6;2), C(1;3;-1)	$\bar{c}=(2;\ 1;\ -2)$
4.6	A(5;-4;3), B(1;-2;5), C(0;1;2)	$\bar{c}=(4;\ -1;\ 1)$
4.7	A(1;-1;3), B(4;-5;4), C(1;1;4)	$\bar{c}=(-2;\ 1;\ -2)$
4.8	A(2;5;1), B(0;3;-1), C(2;5;4)	$\bar{c}=(5;\ 0;\ 2)$
4.9	A(0;2;-1), B(5;2;3), C(1;3;2)	$\bar{c}=(2;\ -3;\ 1)$
4.10	A(1;3;1), B(0;3;-2), C(-1;2;5)	$\bar{c}=(3;\ -1;\ 3)$
4.11	A(4;3;2), B(1;1;1), C(2;3;4)	$\bar{c}=(2;\ -4;\ 1)$
4.12	A(4;3;-2), B(2;2;2), C(4;0;3)	$\bar{c}=(0;\ -1;\ 3)$
4.13	A(0;2;3), B(2;3;5), C(0;0;1)	$\bar{c}=(-3;\ 3;\ 0)$
4.14	A(3;0;-3), B(5;2;6), C(1;2;0)	$\bar{c}=(1;\ 4;\ -2)$
4.15	A(1;3;-1), B(1;-1;2), C(5;-6;2)	$\bar{c}=(2;\ 3;\ 1)$
4.16	A(1;3;2), B(5;2;3), C(0;2;-1)	$\bar{c}=(7;\ 1;\ 1)$
4.17	A(-1;2;5), B(1;3;1), C(0;3;-2)	$\bar{c}=(2;\ 6;\ -1)$
4.18	A(2;5;4), B(2;5;1), C(0;3;-1)	$\bar{c}=(3;\ -1;\ 1)$
4.19	A(1;1;4), B(1;-1;3), C(4;-5;4)	$\bar{c}=(2;\ 1;\ 3)$
4.20	A(0;1;2), B(5;-4;3), C(1;-2;5)	$\bar{c}=(-3;\ 4;\ 0)$
4.21	A(5;2;3), B(0;2;-1), C(1;3;2)	$\bar{c}=(4;\ -1;\ 2)$
4.22	A(4;3;0), B(3;2;1), C(1;5;2)	$\bar{c}=(-4;\ 0;\ 1)$
4.23	A(5;2;1), B(4;4;1), C(3;3;3)	$\bar{c}=(3;\ -1;\ -1)$
4.24	A(3;2;-4), B(5;4;4), C(2;4;6)	$\bar{c}=(5;\ -1;\ 2)$
4.25	A(2;1;4), B(4;1;2), C(4;3;4)	$\bar{c}=(-3;\ 1;\ 5)$
4.26	A(8;3;4), B(4;1;6), C(5;5;4)	$\bar{c}=(2;\ 1;\ 3)$
4.27	A(6;4;3), B(4;4;5), C(3;4;5)	$\bar{c}=(-1;\ 1;\ 4)$
4.28	A(5;1;4), B(1;2;5), C(5;2;7)	$\bar{c}=(-2;\ 3;\ 3)$
4.29	A(-1;3;4), B(2;1;2), C(0;5;2)	$\bar{c}=(6;\ -1;\ -1)$
4.30	A(3;4;0), B(5;4;2), C(1;6;0)	$\bar{c}=(5;\ 4;\ -3)$

5 - тапсырма. Жазықтықта $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ нүктелері мен жалпы теңдеуімен $l_1:\ ax+вy+c=0$ түзуі берілген. Табыңыз:

а) A және B нүктелері арқылы өтетін l түзуінің жалпы теңдеуін;

ә) l түзуінің кесіндіде түзу теңдеуін;

б) l түзуінің бұрыштық коэффициентімен берілген теңдеуін;

в) l_1 түзуіне перпендикуляр A нүктесі арқылы өтетін l_2 түзуінің теңдеуін;

г) l және l_2 түзулерінің арасындағы бұрышты.

5 кесте

5.1	A(0;-1),B(4;2), $l_1: 3x+y-2=0$	5.2	A(2;-1),B(3;-1), $l_1: x+y-5=0$
5.3	A(3;2),B(-1;4), $l_1: x-2y+3=0$	5.4	A(0;3),B(-1;-3), $l_1: x+2y-1=0$
5.5	A(-2;1),B(1;-3), $l_1: x-y+3=0$	5.6	A(3;-2),B(1;2), $l_1: -2x+y+3=0$
5.7	A(1;6),B(4;2), $l_1: 3x-2y+1=0$	5.8	A(2;-1),B(0;3), $l_1: x-3y+3=0$
5.9	A(-4;2),B(3;5), $l_1: x-4y+3=0$	5.10	A(-1;1),B(2;-2), $l_1: 2x+y-3=0$
5.11	A(3;0),B(2;4), $l_1: 2x+3y-7=0$	5.12	A(0;0),B(2;4), $l_1: 3x+2y-5=0$
5.13	A(-3;-2),B(1;2), $l_1: x-y-1=0$	5.14	A(1;1),B(-3;3), $l_1: x-2y-1=0$
5.15	A(0;-4),B(3;2), $l_1: 4x-2y-1=0$	5.16	A(5;1),B(1;3), $l_1: x+y+1=0$
5.17	A(1;1),B(2;5), $l_1: 4x-y+1=0$	5.18	A(4;2),B(-3;3), $l_1: x+3y-4=0$
5.19	A(-1;3),B(2;5), $l_1: -2x+y+3=0$	5.20	A(-3;1),B(-1;2), $l_1: 2x-y-1=0$
5.21	A(-2;2),B(1;-2), $l_1: x-4y+1=0$	5.22	A(2;-1),B(4;1), $l_1: x+y-2=0$
5.23	A(5;-3),B(-1;0), $l_1: 3x+2y+1=0$	5.24	A(3;-1),B(0;-3), $l_1: x-2y+4=0$
5.25	A(2;1),B(-1;4), $l_1: 3x-y-1=0$	5.26	A(-1;1),B(2;2), $l_1: x+2y+1=0$
5.27	A(-2;4),B(4;5), $l_1: x+2y-4=0$	5.28	A(-1;2), B(3;0), $l_1: 2x+y+3=0$
5.29	A(-2;1),B(-1;3), $l_1: x-4y+2=0$	5.30	A(3;4), B(1;6), $l_1: x-y+2=0$

6 - тапсырма. $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$ және $C(x_3;y_3;z_3)$ нүктелері және $P_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ жазықтығы берілген. Табыңыз:

а) A, B және C нүктелері арқылы өтетін P_1 жазықтығының жалпы теңдеуін;

ә) P_1 жазықтығының кесіндіде теңдеуін;

б) A, B және C нүктелері арқылы өтетін L түзуінің канондық теңдеуін;

в) L түзуінің параметрлік түрдегі теңдеуін;

г) L түзуіне перпендикуляр A нүктесі арқылы өтетін P жазықтығының жалпы теңдеуін.

6 кесте

№	$A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$	$P_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$
6.1	A(1;1;1), B(2;3;4), C(4;3;-2)	$P_2: x+y+z=0$
6.2	A(2;2;2), B(4;0;3), C(0;1;0)	$P_2: x-2y+z+3=0$
6.3	A(0;0;1), B(2;3;5), C(0;2;3)	$P_2: x-y-z+2=0$
6.4	A(1;2;0), B(3;0;-3), C(5;2;6)	$P_2: 2x+y-z+3=0$
6.5	A(1;-1;2), B(5;-6;2), C(1;3;-1)	$P_2: 3x-2y-z+1=0$
6.6	A(5;-4;3), B(1;-2;5), C(0;1;2)	$P_2: 4x-3y+2z+3=0$

6 кесте соңы

6.7	A(1;-1;3), B(4;-5;4), C(1;1;4)	$P_2:\ x-4y+z+2=0$
6.8	A(2;5;1), B(0;3;-1), C(2;5;4)	$P_2:\ x+2y-z+3=0$
6.9	A(0;2;-1), B(5;2;3), C(1;3;2)	$P_2:\ -x+3y-4z+1=0$
6.10	A(1;3;1), B(0;3;-2), C(-1;2;5)	$P_2:\ x-4y-2z+6=0$
6.11	A(4;3;2), B(1;1;1), C(2;3;4)	$P_2: 2x-3y-z+4=0$
6.12	A(4;3;-2), B(2;2;2), C(4;0;3)	$P_2:\ x-3y-4z+1=0$
6.13	A(0;2;3), B(2;3;5), C(0;0;1)	$P_2:\ x+y+z+5=0$
6.14	A(3;0;-3), B(5;2;6), C(1;2;0)	$P_2:\ 3x+y-4z+1=0$
6.15	A(1;3;-1), B(1;-1;2), C(5;-6;2)	$P_2:\ x+3y-z+3=0$
6.16	A(1;3;2), B(5;2;3), C(0;2;-1)	$P_2:\ 3x+y-5z+1=0$
6.17	A(-1;2;5), B(1;3;1), C(0;3;-2)	$P_2: -2x+y+3z+2=0$
6.18	A(2;5;4), B(2;5;1), C(0;3;-1)	$P_2:\ 4x+y-6z=0$
6.19	A(1;1;4), B(1;-1;3), C(4;-5;4)	$P_2:\ x-y-z+3=0$
6.20	A(0;1;2), B(5;-4;3), C(1;-2;5)	$P_2:\ x+y+z+5=0$
6.21	A(5;2;3), B(0;2;-1), C(1;3;2)	$P_2: -2x+3y+3z-4=0$
6.22	A(4;3;0), B(3;2;1), C(1;5;2)	$P_2:\ x-4y-z+4=0$
6.23	A(5;2;1), B(4;4;1), C(3;3;3)	$P_2:\ 4x-y-z+1=0$
6.24	A(3;2;-4), B(5;4;4), C(2;4;6)	$P_2:\ 2x+2y+z-7=0$
6.25	A(2;1;4), B(4;1;2), C(4;3;4)	$P_2:\ x-3y+z-2=0$
6.26	A(8;3;4), B(4;1;6), C(5;5;4)	$P_2:\ 3x-3y+z+5=0$
6.27	A(6;4;3), B(4;4;5), C(3;4;5)	$P_2:\ x+2y-2z+1=0$
6.28	A(5;1;4), B(1;2;5), C(5;2;7)	$P_2:\ x-y+5z+3=0$
6.29	A(-1;3;4), B(2;1;2), C(0;5;2)	$P_2:\ 2x+3y+z-4=0$
6.30	A(3;4;0), B(5;4;2), C(1;6;0)	$P_2:\ -x-3y+6z+1=0$

7 - тапсырма. Жазықтықта A нүктесі, D түзуінің теңдеуі мен шеңбер радиусы R және екінші ретті қисықтардың $a, в$ параметрлері берілген. Табыңыз:

а) центрі A нүктесінде жатқан, радиусы R болатын шеңбердің теңдеуін (сұлбасын сызыңыз);

ә) жарты өстері a және $в$ болатын эллипстің канондық теңдеуін және оның параметрлерін: фокустарының координаталарын мен эксцентриситетін (сұлбасын сызыңыз);

б) нақты өсі a, жорамал өсі b болатын гиперболаның канондық теңдеуін және оның фокустарының координаталарын, эксцентриситетін мен асимптоталарын (сұлбасын сызыңыз);

в) директрисасы D түзуі болатын параболаның канондық теңдеуін және онын фокусының координатасын (сұлбасын сызыңыз).

7 кесте

№	$A(x;y),\ R,\ a,\ в,\ D$	№	$A(x;y),\ R,\ a,\ в,\ D$
7.1	$A(0;-1),\ R=4\ a=3, в=2,\ D: x=2$	7.2	$A(2;-1), R=5, a=2, в=4, D: y=-4$
7.3	$A(3;2),\ R=3\ a=4, в=5,\ D: x=-3$	7.4	$A(0;3), R=2, a=7, в=2, D: x=4$
7.5	$A(-2;1),\ R=5,\ a=6, в=3,\ D: y=4$	7.6	$A(3;-2), R=8, a=5, в=4, D: x=-6$
7.7	$A(1;6),\ R=6,\ a=3, в=7,\ D: y=-3$	7.8	$A(2;-1), R=4, a=2, в=1, D: x=8$
7.9	$A(-4;2), R=3, a=2, в=7, D: x=-3$	7.10	$A(-1;1), R=5, a=8, в=3, D: y=-8$
7.11	$A(3;0), R=7, a=4, в=3, D: x=4$	7.12	$A(0;0), R=1, a=3, в=5, D: x=-5$
7.13	$A(-3;-2), R=8, a=4, в=6, D: y=1$	7.14	$A(1;1), R=9, a=7, в=4, D: x=3$
7.15	$A(0;4), R=2, a=5, в=3, D: y=-2$	7.16	$A(5;1), R=4, a=6, в=2, D: y=7$
7.17	$A(1;1), R=1, a=7, в=5, D: x=-4$	7.18	$A(4;2), R=5, a=4, в=8, D: y=-6$
7.19	$A(-1;)3, R=4, a=3, в=2, D: x=2$	7.20	$A(-3;1), R=3, a=5, в=2, D: x=-5$
7.21	$A(-2;2), R=5, a=5, в=3, D: y=3$	7.22	$A(2;-1), R=9, a=6, в=3, D: y=-8$
7.23	$A(5;-3), R=6, a=4, в=2, D: y=7$	7.24	$A(3;-1), R=2, a=7, в=1, D: x=9$
7.25	$A(2;1), R=3, a=5, в=4, D: x=-5$	7.26	$A(-1;5), R=2, a=3, в=8, D: y=-7$
7.27	$A(-4;2), R=2, a=7, в=8, D: x=5$	7.28	$A(-1;2), R=7, a=8, в=4, D: y=6$
7.29	$A(-2;1), R=4, a=6, в=3, D: y=-4$	7.30	$A(3;4), R=6, a=9, в=3, D: x=-8$

1.2 №1 есепеу-сызба жұмыстарына әдістемелік нұсқаулар

1 - тапсырмаға нұсқау.

Матрицаның m жатық және n тік жолдар саны оның өлшемін айқындайды. Екі $A=\lfloor a_{ij}\rfloor$ және $B=\lfloor в_{ij}\rfloor$ матрицаларын қосу тек бірдей $m\times n$ өлшемді болуында ғана сәйкес элементтерін қосу арқылы орындалады: $c_{ij}=a_{ij}+в_{ij}$. Яғни, олардың m жатық және n тік жолдар саны бірдей болуы тиіс.

Екі $A=\lfloor a_{ij}\rfloor$ және $B=\lfloor в_{ij}\rfloor$ матрицаларын көбейту үшін, олардың бірінші A көбейткіш матрицасының n тік жол саны мен екінші B матрицасының m жатық жол саны тең болуы керек. Олардың $C=A\cdot B$ көбейтіндісінің элементтері:

$$c_{ij}=\sum_{p=1}^{k}a_{ip}в_{pj},\ i=1,2,...,m;\ \ j=1,2,...,n.$$

Яғни, C матрицасының i жатық жолы мен j тік жолының қиылысындағы элементі A матрицасының i жатық жолының элементтерінің B матрицасының j тік жолының сәйкес элементеріне көбейтіндісінің қосындысына тең.

1 - тапсырмаға мысал. Берілген:

$$A=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & -3 & -2\\ -2 & 1 & -4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 5 & 4 & -2\end{pmatrix}$$

матрицалардың мүмкін жағдайының барлығында екі матрицаның қосындысын және көбейтіндісін табыңыз.

Шешуі. Матрица $A=|a_{ij}|$ өлшемі 3×2, ал, $B=|в_{ij}|$ және $C=|c_{ij}|$ матрицалары бірдей 2×3 өлшемді. Олай болса, матрицаларды қосу ережесі бойынша, тек $B+C$ қосындысын алуға болады. Ал, матрицаларды көбейту ережесі бойынша тек $A\cdot B$ және $A\cdot C$ көбейтінділерін алуға болады.

$$B+C=\begin{pmatrix}2 & 5 & -2\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 5 & 4 & -2\end{pmatrix}.=\begin{pmatrix}2+2 & 5+3 & -2+0\\ 3+5 & 1+4 & 2+(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 8 & -2\\ 8 & 5 & 0\end{pmatrix}.$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5 & -2\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\cdot 2+(-2)\cdot 3 & -4\cdot 5+(-2)\cdot 1 & -4\cdot(-2)-2\cdot 2\\ 3\cdot 2+1\cdot 3 & 3\cdot 5+1\cdot 1 & 3\cdot(-2)+1\cdot 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-14 & -22 & 4\\ 9 & 16 & -4\end{pmatrix};$$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 5 & 4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\cdot 2+(-2)\cdot 5 & -4\cdot 3+(-2)\cdot 4 & -4\cdot 0-2\cdot(-2)\\ 3\cdot 2+1\cdot 5 & 3\cdot 3+1\cdot 4 & 3\cdot 0+1\cdot(-2)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-18 & -20 & 4\\ 11 & 13 & -2\end{pmatrix}.$$

2 - тапсырмаға нұсқау.

Егер берілген $A=|a_{ij}|$ матрицасының m жатық жол саны мен n тік жол саны тең болса, онда ол квадраттық (шаршы) матрица деп аталады. Кез келген шаршы A матрицасы үшін оның детерминанты (анықтауышы) деп аталатын бір $\det A=|A|$ саны бар:

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & ..\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=|A|.$$

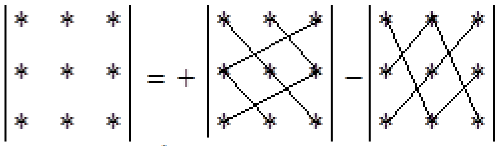
Екінші ретті анықтауышты есептеу:

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \qquad (1)$$

Үшінші ретті анықтауышты есептеудің Саррюс ережесі:

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{31}a_{23}a_{12}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}. \qquad (2)$$

Саррюс ережесінің орындалуы сұлбасы 1 суретте көрсетілген.



1 сурет

Шаршы n-ші ретті A матрицасының кез келген a_{ij} элементінің M_{ij} миноры деп A матрицасының i жатық жолы мен j тік жолын сызып тастағаннан түзілген $n-1$- ші ретті матрицасының анықтауышын айтады.

Шаршы n-ші ретті A матрицасының кез келген a_{ij} элементінің A_{ij} алгебралық толықтауышы деп A матрицасының $i+j$ қосындысы тақ болуында «-», ал, $i+j$ қосындысы жұп болуында «+» болатын минорын айтады: $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$.

Детерминанты нөлден өзгеше кез келген A матрицасының элементтері матрицаның алгебралық толықтауыштары болатын кері A^{-1} матрицасы бар:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Лаплас теоремасы. Анықтауыш оның кез келген жатық жолы элементтері мен олардың алгебралық толықтауыштарының көбейтінділерінің қосындысына тең:

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \qquad i=1,2,\dots,n; \\ \Delta_n &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \qquad j=1,2,\dots,n. \end{aligned} \qquad (4)$$

2 - тапсырмаға мысал. Үшінші ретті A матрицасы берілген:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}, i=3, \ j=2.$$

а) A матрицасының детерминантын Саррюс ережесі бойынша есептеңіз;

ә) A матрицасының кері A^{-1} матрицасын табыңыз;

б) A матрицасының детерминантын i-ші жатық жолы бойынша жіктеп есептеңіз;

в) A матрицасының детерминантын j-ші тік жол бойынша жіктеп есептеңіз.

Шешуі:

а) A матрицасының детерминанты 3-ретті анықтауыш, оны есептеуде (2) Саррюс ережесін қолданамыз:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -1\cdot 2\cdot 6 + (-2)\cdot 1\cdot(-3) + 4\cdot(-5)\cdot 3 -$$

$$-4\cdot 2\cdot(-2) - (-1)\cdot 3\cdot(-3) - 6\cdot 1\cdot(-5) = -12 + 6 - 60 + 16 - 9 + 30 = -29;$$

ә) A матрицасының кері A^{-1} матрицасын (3) табуда, алдымен оның детерминантын есептейміз, ол нөлден өзгеше $(\det A = -29 \neq 0)$, яғни оның кері матрицасы бар. Алдымен A матрицасының барлық алгебралық толықтауыштарын есептейміз:

$$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - (-9) = 21; \qquad A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -(6 - 12) = 6;$$

$$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11; \qquad A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = = -(-30 - 6) = 36;$$

$$A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -6 - (-8) = 2; \qquad A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(3 - (-20)) = -23;$$

$$A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -15 - (-4) = -11; \quad A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(-3 - (-2)) = 1;$$

$$A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - (-5) = 3;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-29}\cdot\begin{pmatrix} 21 & 36 & -11 \\ 6 & 2 & 1 \\ -11 & -23 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{21}{29} & -\frac{36}{29} & \frac{11}{29} \\ -\frac{6}{29} & -\frac{2}{29} & -\frac{1}{29} \\ \frac{11}{29} & \frac{23}{29} & -\frac{3}{29} \end{pmatrix};$$

б) A матрицасының детерминантын $i = 3$ жатық жолы бойынша жіктеп есептеуді, (4) формула негізінде $|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$ түрінде орындалады:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 4\cdot A_{31} + (-3)\cdot A_{32} + 6\cdot A_{33} =$$

$$= 4\cdot\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-3)\cdot\left(-\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right) + 6\cdot\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot(-11) + 3\cdot(-1) + 6\cdot 3 = -29;$$

в) A матрицасының детерминантын $j=2$ тік жолы бойынша жіктеп есептеуді, (4) формула негізінде $|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$ түрінде орындалады:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -5 \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{22} + (-3) \cdot A_{32} =$$

$$= -5 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \right) + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \left(- \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = -5 \cdot 6 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -29.$$

3 - тапсырмаға нұсқау.

n белгісізді n сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_1 = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_1 = в_2, \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_1 = в_n. \end{cases} \tag{5}$$

(5) теңдеулер жүйесі матрицалық формада:

$$AX = B \tag{6}$$

түрінде жазылады. Мұнда:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} в_1 \\ в_2 \\ ... \\ в_n \end{pmatrix}. \tag{7}$$

(5) теңдеулер жүйесі үшін Крамер формуласы:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1,2, \dots, n, \tag{8}$$

мұнда $\Delta = \det A$ - жүйенің белгісіздерінің коэффициенттерінен түзілген анықтауышы;

Δ_j - негізгі матрицаның j бағанын жүйенің бос мүшелерімен алмастырудан алынатын белгісіздер үшін қосымша анықтауыштар.

Үш белгісізді үш сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі үшін (8) Крамер формуласы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \tag{9}$$

түрінде жазылады.

(5) жүйенің матрицалық формада жазылуында оның шешімін:

$$X = A^{-1}B \tag{10}$$

табу ыңғайлы.

(5) теңдеулер жүйесін Гаусс әдісімен шешуде қарапайым түрлендірулер негізінде біртіндеп айнымалыларын жою арқылы берілген жүйеге пара-пар кеңейтілген матрицасын үшбұрышты түрге келтіру арқылы орындалады.

3 - тапсырмаға мысал. Теңдеулер жүйесін шешіңіз:

$$\begin{cases} x - 3y - z = -4; \\ x - 4y - 5z = 1; \\ -4x + 3y + 2z = -7 \end{cases}$$

а) Крамер ережесі бойынша;

ә) матрицалық есептеу әдісімен;

б) Гаусс әдісімен.

Шешуі:

а) берілген теңдеулер жүйесі үшін (9) Крамер формуласын қолданамыз. Теңдеулер жүйесінің негізгі анықтауышы нөлден өзгеше:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -8 - 3 - 60 + 16 + 15 + 6 = -34 \neq 0.$$

Ал, белгісіздер үшін түзілген анықтауыштар:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \\ -7 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 32 - 3 - 105 + 28 - 60 + 6 = -102;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \\ -4 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 7 - 80 - 4 - 35 + 8 = -102;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \\ -4 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 28 - 12 + 12 + 64 - 21 - 3 = 68.$$

Сонымен, Крамер ережесі бойынша теңдеулер жүйесінің шешімі:

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-102}{-34}=3;\ y=\frac{\Delta_2}{\Delta}\frac{-102}{-34}=3;\ z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{68}{-34}=-2.$$

Жауабы: $x=3,\ y=3,\ z=-2.$

ә) берілген теңдеулер жүйесін матрицалық есептеу әдісімен шешеміз:

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B.$$

Мұнда кері матрица:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix},$$

ал, бос мүшелер матрицасы: $B=\begin{pmatrix}-4\\1\\-7\end{pmatrix}.$

Жүйенің негізгі матрицасының детерминанты нөлден өзгеше:

$$\det A=\left|\begin{pmatrix}1&-3&-1\\1&-4&-5\\-4&3&2\end{pmatrix}\right|=-34\neq 0,$$

яғни, кері A^{-1} матрицасы бар, оны табу үшін алдымен бүкіл алгебралық толықтауыштарын табамыз:

$$A_{11}=M_{11}=\begin{vmatrix}-4&-5\\3&2\end{vmatrix}=7;\quad A_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix}1&-5\\-4&2\end{vmatrix}=18;\quad A_{13}=M_{13}=\begin{vmatrix}1&-4\\-4&3\end{vmatrix}=-13;$$

$$A_{21}=-M_{21}=-\begin{vmatrix}-3&-1\\3&2\end{vmatrix}=3;\quad A_{22}=M_{22}=\begin{vmatrix}1&-1\\-4&2\end{vmatrix}=-2;\quad A_{23}=-M_{23}=-\begin{vmatrix}1&-3\\-4&3\end{vmatrix}=9;$$

$$A_{31}=M_{31}=\begin{vmatrix}-3&-1\\-4&-5\end{vmatrix}=11;\quad A_{32}=-M_{32}=-\begin{vmatrix}1&-1\\1&-5\end{vmatrix}=4;\quad A_{33}=M_{33}=\begin{vmatrix}1&-3\\1&-4\end{vmatrix}=-1.$$

Яғни, кері A^{-1} матрица:

$$A^{-1}=\frac{1}{-34}\cdot\begin{pmatrix}7&3&11\\18&-2&4\\-13&9&-1\end{pmatrix}.$$

Сонымен, теңдеулер жүйесінің шешімі:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{-34}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 3 & 11 \\ 18 & -2 & 4 \\ -13 & 9 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{-34}\cdot\begin{pmatrix} -28+3-77 \\ -72-2-28 \\ 52+9+7 \end{pmatrix} = \frac{1}{-34}\cdot\begin{pmatrix} -102 \\ -102 \\ 68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Жауабы: $x = 3,\ y = 3,\ z = -2;$

б) берілген теңдеулер жүйесін біртіндеп айнымалыларын жою үшін Гаусс әдісін қолданамыз. Теңдеулер жүйесінінің кеңейтілген матрицасын жазып, оның 1-ші жолының элементтерін «-1-ге» көбейтіп 2-ші жолына қосып, нәтижесін 2-жол ретінде жазамыз. 1-ші жолды «4-ке» көбейтіп 3 жолға қосып, нәтижесін 3-жол ретінде жазамыз. Енді 2-ші жолды «-9-ға» көбейтіп 3-ші жолға қосып нәтижесін 3-жол ретінде жазамыз:

$$\begin{cases} x-3y-z=-4 \\ x-4y-5z=1, \\ -4x+3y+2z=-7 \end{cases} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 1 & -4 & -5 & 1 \\ -4 & 3 & 2 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -4 & 5 \\ 0 & -9 & -2 & -23 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 34 & -68 \end{array}\right).$$

Мұндағы соңғы матрица келесі теңдеулер жүйесіне сәйкес:

$$\begin{cases} x-3y-z=-4 \\ -y-4z=5, \\ 34z=-68 \end{cases} \to \begin{cases} x=4+3y+z \\ y=-4z-5, \\ z=-2 \end{cases} \to \begin{cases} x=3 \\ y=3 \\ z=-2. \end{cases}$$

Жауабы: $x = 3,\ y = 3,\ z = -2.$

4 - тапсырмаға нұсқау.

Бас нүктесі $A_1(x_1; y_1;\ z_1)$ соңғы нүктесі $A_2(x_2; y_2;\ z_2)$ болатын $\bar{a} = \overline{A_1A_2}$ векторының координатасы:

$$\bar{a} = \overline{A_1A_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$$

түрінде табылады. Ал, оның модулі (ұзындығы):

$$|\bar{a}| = \left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}.$$

Өзінің координаталарымен $\bar{a} = (x;\ y;\ z)$ берілген векторының модулі:

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Нүктелері $A_1(x_1; y_1; z_1)$ және $A_2(x_2; y_2; z_2)$ болатын A_1A_2 кесіндісінің дәл ортаңғы $A(x;\ y;\ z)$ нүктесінің координатасы:

$$A\left(\frac{x_2+x_1}{2};\ \frac{y_2+y_1}{2};\ \frac{z_2+z_1}{2}\right).$$

Координаталарымен $\bar{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\bar{в}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$ және $\bar{c}=(x_3;\ y_3;\ z_3)$ векторлары берілген делік.

1. Екі $\bar{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$ және $\bar{в}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$ векторларының скалярлық көбейтіндісі олардың аттас координаталарының көбейтінділерінің қосындысына тең скаляр:

$$\bar{a}\cdot\bar{в}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \tag{11}$$

2. Екі $\bar{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$ және $\bar{в}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$ векторларының векторлық көбейтіндісі бұл векторларға ортогональ болатын $\bar{c}=(x;\ y;\ z)$ векторы:

$$\bar{c}=\bar{a}\times\bar{в}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\bar{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\bar{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\cdot\bar{k}. \tag{12}$$

3.Үш $\bar{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\bar{в}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$ және $\bar{c}=(x_3;\ y_3;\ z_3)$ векторларының аралас көбейтіндісі, алғашқы екі вектордың векторлық көбейтіндісінің үшінші векторға скалярлық көбейтіндісіне тең:

$$\bar{a}\bar{в}\bar{c}=(\bar{a}\times\bar{в})\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}. \tag{13}$$

$\bar{a}$ векторының нөлдік емес $\bar{в}$ векторына ортогональдық проекциясы:

$$пр_{\bar{в}}\bar{a}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{в}}{|\bar{в}|}, \tag{14}$$

осы тәріздес $\bar{в}$ векторының нөлдік емес $\bar{a}$ векторына ортогональдық проекциясы:

$$пр_{\bar{a}}\bar{в}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{в}}{|\bar{a}|}.$$

Төбелері $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ және $C(x_3; y_3; z_3)$ нүктелері болатын параллелограмның және үшбұрыштың ауданы:

$$S_{паралл} = \left|\overline{a} \times \overline{в}\right|; \quad S_{\Delta ABC} = \frac{\left|\overline{a} \times \overline{в}\right|}{2}. \tag{15}$$

Қабырғалары $\overline{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\overline{в} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ және $\overline{c} = (x_3;\ y_3;\ z_3)$ векторлары ретінде тұрғызылған пирамида көлемі параллелипипед көлемінің $\frac{1}{6}$ бөлігіне тең:

$$V = \frac{\left|\overline{a}\overline{в}\overline{c}\right|}{6}.$$

4 - тапсырмаға мысал. $A(5;\ 2;\ -3)$, $B(1;\ 4;\ 2)$ және $C(6;\ 0;-1)$ нүктелері және, $\overline{c} = (-3;\ 4;\ 7)$ векторы берілген. Табыңыз:

а) $\overline{a} = \overline{AB}$ және $\overline{в} = \overline{BC}$ векторларының координаталары мен модульдерін;

ә) AB кесіндісінің және BC кесіндісінің ортасының координаталарын;

б) векторлардың $\overline{a} \cdot \overline{в}$ скалярлық көбейтіндісін және $пр_{\overline{в}}\overline{a}$ проекциясын;

в) векторлардың $\overline{a} \times \overline{в}$ векторлық және $\overline{a}\overline{в}\overline{c}$ аралас көбейтінділерін;

г) төбелері $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ және $C(x_3; y_3; z_3)$ нүктелері болатын параллелограмның және үшбұрыштың ауданын;

д) қабырғалары $\overline{a}$, $\overline{в}$ және $\overline{c}$ векторлары ретінде тұрғызылған пирамида көлемін.

Шешуі:

а) $\overline{a} = \overline{AB}$ және $\overline{в} = \overline{BC}$ векторларының координаталары мен модульдері:

$$\overline{a} = \overline{AB} = (1-5;\ 4-2;\ 2-(-3)) = (-4;\ 2;\ 5),\ \left|\overline{a}\right| = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{25} = 5;$$

$$\overline{в} = \overline{BC} = (6-1;\ 0-4;\ -1-2) = (5;\ -4;\ -3);$$

$$\left|\overline{в}\right| = \left|\overline{BC}\right| = \sqrt{5^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10};$$

ә) AB және BC кесінділерінің орталарын сәйкесінше $M(x;\ y;\ z)$, $N(x;\ y;\ z)$ нүктелері деп табалық:

$$M\left(\frac{5+1}{2};\ \frac{2+4}{2};\ \frac{-3+2}{2}\right) = M\left(3;\ 4;\ -\frac{1}{2}\right);\quad N\left(\frac{1+6}{2};\ \frac{4+0}{2};\ \frac{2-1}{2}\right) = N\left(\frac{7}{2};\ 2;\ -\frac{1}{2}\right);$$

б) векторлардың (11) $\overline{a} \cdot \overline{в}$ скалярлық көбейтіндісі және (14) $пр_{\overline{в}}\overline{a}$ проекциясы:

$$\overline{a} \cdot \overline{в} = -4 \cdot 5 + 2 \cdot (-4) + 5 \cdot (-3) = -43; \qquad пр_{\overline{в}}\overline{a} = \frac{\overline{a} \cdot \overline{в}}{\left|\overline{в}\right|} = -\frac{43}{2\sqrt{10}};$$

в) векторлардың (12) $\bar{a}\times\bar{в}$ векторлық және (13) $\bar{a}\bar{в}\bar{c}$ аралас көбейтінділері:

$$\bar{a}\times\bar{в}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -4 & 2 & 5\\ 5 & -4 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 5\\ -4 & -3\end{vmatrix}\cdot\bar{i}-\begin{vmatrix}-4 & 5\\ 5 & -3\end{vmatrix}\cdot\bar{j}+\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 5 & -4\end{vmatrix}\cdot\bar{k}=14\bar{i}+13\bar{j}+6\bar{k};$$

$$\bar{a}\bar{в}\bar{c}=\begin{vmatrix}-4 & 2 & 5\\ 5 & -4 & -3\\ -3 & 4 & 7\end{vmatrix}=112+80+18-60-48-70=52;$$

г) төбелері үш $A(5;\,2;\,-3),\ B(1;\ 4;\ 2)$ және $C(6;\,0;-1)$ нүктелерінде болатын параллелограмның және үшбұрыштың (15) ауданы сәйкесінше:

$$S_{паралл}=\left|\bar{a}\times\bar{в}\right|=\sqrt{14^2+13^2+6^2}=\sqrt{401};\quad S_{\Delta ABC}=\frac{\left|\bar{a}\times\bar{в}\right|}{2}=\frac{\sqrt{401}}{2};$$

д) қабырғалары $\bar{a},\ \bar{в}$ және $\bar{c}$ векторлары ретінде тұрғызылған үшбұрышты пирамиданың көлемі:

$$V=\frac{\left|\bar{a}\bar{в}\bar{c}\right|}{6}=\frac{1}{6}\cdot 52=\frac{26}{3}.$$

5 - тапсырмаға нұсқау.

Жазықтықта екі $A_1(x_1,y_1)$ және $A_2(x_2,y_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзу теңдеуі:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \tag{16}$$

Түзудің (16) теңдеуінен оның жалпы теңдеуі алынады:

$$Ax+By+C=0. \tag{17}$$

Түзуге перпендикуляр $\bar{n}=(A;\,B)$ векторы оның қалыпты векторы деп аталады. Берілген түзудің жалпы (17) теңдеуінен оның кесіндідегі теңдеуін аламыз:

$$Ax+By+C=0\ \rightarrow Ax+By=-C\ \rightarrow\ \frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{\frac{C}{b}}=1, \tag{18}$$

мұнда $a=-\frac{C}{A}, в=-\frac{C}{B}$ түзудің сәйкесінше Ох және Oy өстерін қандай кесіндіде қиып өтетіндігін көрсетеді. Түзудің бұрыштық коэффициентімен берілген теңдеуін оның (17) жалпы теңдеуінен аламыз:

$$Ax+By+C=0 \;\rightarrow y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},\; y=kx+в, \tag{19}$$

мұндағы $k=-\frac{A}{B}$ - бұрыштық коэффициент;

$в=-\frac{C}{B}$ - Oy өсін кесіп өту бірлігі.

Берілген нүкте арқылы өтетін бұрыштық коэффициентімен берілген түзу теңдеуі:

$$y-y_0=k(x-x_0). \tag{20}$$

Егер екі түзу теңдеуі (19) бұрыштық коэффиицентерімен берілсе, онда олардың арасындағы бұрыш:

$$tg\left(l_1\hat{,}l_2\right)=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \tag{21}$$

5 - тапсырмаға мысал. Жазықтықта $A(-6;\,2),\, B(-1;\,5)$ нүктелері мен жалпы теңдеуімен $l_1:\; x-y+1=0$ түзуі берілген. Табыңыз:

а) A және B нүктелері арқылы өтетін l түзуінің жалпы теңдеуін;

ә) l түзуінің кесіндіде түзу теңдеуін;

б) l түзуінің бұрыштық коэффициентімен берілген теңдеуін;

в) l_1 түзуіне перпендикуляр A нүктесі арқылы өтетін l_2 түзуінің теңдеуін;

г) l және l_2 түзулерінің арасындағы бұрышты.

Шешуі:

а) $A(-6;\,2)$ және $B(-1;\,5)$ нүктелері арқылы өтетін l түзуінің жалпы теңдеуі:

$$l:\;\; \frac{x+6}{-1+6}=\frac{y-2}{5-2} \quad\rightarrow\quad \frac{x+6}{5}=\frac{y-2}{3} \rightarrow\; 3(x+6)=5(y-2) \;\rightarrow\; 3x-5y+30=0.$$

ә) l түзуінің кесіндіде түзу теңдеуін оның жалпы теңдеуінен аламыз:

$$3x-5y+30=0 \rightarrow 3x-5y=-30 \rightarrow \frac{3x}{-30}-\frac{5y}{-30}=1 \rightarrow \frac{x}{-10}+\frac{y}{6}=1;$$

Яғни, түзу Ox өсін минус 10 бірлікте, ал Oy өсін 6 бірлікте кесіп өтеді;

б) l түзуінің бұрыштық коэффициентімен берілген теңдеуін оның жалпы теңдеуінен аламыз:

$$3x-5y+30=0 \;\rightarrow\; 5y=3x+30 \;\rightarrow\; y=\frac{3}{5}x+6.$$

Яғни, l түзуінің бұрыштық коэффициенті $k=\frac{3}{5}$, ал, $в=6$ түзудің Oy өсін 6 бірлікте кесіп өтетіндігін көрсетеді;

в) $l_1:\ x-4y+1=0$ түзуіне перпендикуляр A нүктесі арқылы өтетін l_2 түзуінің теңдеуін табу үшін, алдымен l_1 түзуінің бұрыштық коэффиенттін табамыз:

$$L_1:\ x-4y+1=0 \;\rightarrow\; k_1=-\frac{A}{B}=-\frac{1}{-4}=\frac{1}{4}.$$

Екі түзудің перпендикулярлық шарты негізінде l_2 түзуінің бұрыштық коэффициені: $k_2=-4$. Сонымен, $A(-6;\,2)$ нүктесі арқылы өтетін l_2 түзуінің теңдеуі (20) формула бойынша:

$$l_2:\ y-2=-4(x+6) \;\rightarrow\; y-2=-4x-24 \;\rightarrow\; 4x+y+22=0;$$

г) l және l_2 түзулерінің бұрыштық коэффициенттері сәйкесінше:

$$l:\ k=\frac{3}{5};\quad l_2:\ k_2=-4.$$

Сондықтан, олардың арасындағы бұрыш (21) формула бойынша:

$$tg\varphi=\frac{-4-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}\cdot(-4)}\approx 3{,}286,\ \ \varphi\approx 73^0.$$

6 - тапсырмаға нұсқау.

Үш $A(x_1;\,y_1;\,z_1)$, $B(x_2;\,y_2;\,z_2)$ және $C(x_3;\,y_3;\,z_3)$ нүктелері арқылы бір жазықтық жүргізуге болады, оның теңдеуі:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (22)$$

Жазықтықтың жалпы теңдеуі: $P:\ Ax+By+Cz+D=0$, оның қалыпты $\overline{N}=(A;\,B;\,C)$ векторы жазықтыққа перпендикуляр: $\overline{N}\perp P$.

Жазықтықтың жалпы теңдеуінен оның кесіндідегі теңдеуін аламыз:

$$Ax+By+Cz+D=0 \to Ax+By+Cz=-D \to \frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1,$$

мұндағы $a=-\frac{D}{A}$, $в=-\frac{D}{B}$, $c=-\frac{D}{C}$, жазықтық координата өстерін a, $в$, c кесіп өтіп, сәйкесінше $M_1(a;\ 0;\ 0)$, $M_2(0;\ в;\ 0)$, $M_3(0;\ 0;\ c)$ нүктелері арқылы өтеді.

Сонымен жазықтықтың кесіндідегі теңдеуі:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{в}+\frac{z}{c}=1. \tag{23}$$

Кеңістікте екі $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ және $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нүкте арқылы өтетін түзу теңдеуі:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{24}$$

Кеңістікте түзуінің параметрлік түрдегі теңдеуі:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t, \quad \begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt \end{cases} \tag{25}$$

мұнда $\bar{s}=(m;\ n;\ p)$ түзуге параллель, бағыттауыш векторы.

Қалыпты $\overline{N}=(A;\ B;\ C)$ векторымен берілген $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтық теңдеуі:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{26}$$

6 - тапсырмаға мысал. $A(4;\ -3;\ 0)$, $B(1;\ -1;\ 2)$ және $C(3;\ 2;\ 1)$ нүктелері және $P_2:\ x+y+z-5=0$ жазықтығы берілген. Табыңыз:

а) A, B және C нүктелері арқылы өтетін P_1 жазықтығының жалпы теңдеуін;

ә) P_1 жазықтығының кесіндіде теңдеуін;

б) B және C нүктелері арқылы өтетін L түзуінің канондық теңдеуін;

в) L түзуінің параметрлік түрдегі теңдеуін.

г) L түзуіне перпендикуляр A нүктесі арқылы өтетін P жазықтығының жалпы теңдеуін;

Шешуі:

а) $A(4;\,-3;\,0)$, $B(1;\,-1;\,2)$ және $C(3;\,2;\,1)$ нүктелері арқылы өтетін P_1 жазықтығының жалпы теңдеуін (22) формула бойынша табамыз:

$$P_2:\ \begin{vmatrix} x-4 & y+3 & z-0 \\ 1-4 & -1+3 & 2-0 \\ 3-4 & 2+3 & 1-0 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \begin{vmatrix} x-4 & y+3 & z-0 \\ -3 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}\cdot(x-4)-\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\cdot(y+3)+\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}\cdot z=0 \rightarrow\ -8(x-4)+(y+3)-13z=0.$$

Сонымен, P_1 жазықтығының жалпы теңдеуі: $7x-y+13z-35=0;$

ә) P_1 жазықтығының кесіндіде теңдеуін оның жалпы теңдеуінен (23) формуласы бойынша аламыз:

$$P_1:\quad 7x-y+13z-35=0 \rightarrow 7x-y+13z=35 \rightarrow \frac{x}{5}-\frac{y}{35}+\frac{z}{\frac{35}{13}}=1;$$

б) $B(1;\,-1;\,2)$ және $C(3;\,2;\,1)$ нүктелері арқылы өтетін L түзуінің канондық теңдеуі (24) формуласы бойынша:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y+1}{2+1}=\frac{z-2}{1-2} \rightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{-1};$$

в) L түзуінің параметрлік түрдегі теңдеуі:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{-1}=t \rightarrow \begin{cases} x-1=2t \\ y+1=3t, \\ z-2=-t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2t+1 \\ y=3t-1 \\ z=2-t \end{cases};$$

г) L түзуінің бағыттауыш $\bar{s}=(2;\,3;\,1)$ векторы $A(4;\,-3;\,0)$ нүктесі арқылы өтетін P жазықтығының қалыпты векторы болып табылады: $\bar{s}\perp P$. Олай болса, P жазықтығының жалпы теңдеуін (26) формуласынан аламыз:

$$2(x-4)+3(y+3)+1\cdot(z-0)=0 \rightarrow 2x+3y+z+1=0.$$

7 - тапсырмаға нұсқаулар мен сұлбалары А қосымшасында берілген.

7 - тапсырмаға мысал. Жазықтықта $A(-7;\,3)$ нүктесі, $D:\ x=-7$ түзуі мен шеңбер радиусы $R=8$ және екінші ретті қисықтардың $a=9,\ в=3$ параметрлері берілген. Табыңыз:

а) центрі A нүктесінде жатқан, радиусы R болатын шеңбердің теңдеуін (сұлбасын сызыңыз);

ә) жарты өсьтері a және $в$ болатын эллипстің канондық теңдеуін және оның параметрлерін: фокустарының координаталарын мен эксцентриситетін (сұлбасын сызыңыз);

б) нақты өсі a, жорамал өсі b болатын гиперболанын канондық теңдеуін және оның фокустарының координаталарын, эксцентриситетін мен асимптоталарын (сұлбасын сызыңыз);

в) директрисасы D түзуі болатын параболаның канондық теңдеуін және онын фокусының координатасын (сұлбасын сызыңыз).

Шешуі:

а) центрі $A(-7;\ 3)$ нүктесінде жатқан, радиусы $R=8$ болатын шеңбердің теңдеуі: $(x+7)^2+(y-3)=64;$

ә) жарты өсьтері $a=9$ және $в=3$ болатын эллипс үшін:

- эллипстің канондың теңдеуі: $\frac{x}{81}+\frac{y}{9}=1;$

- эллипстің фокустарының координаталары: $F_1\left(-6\sqrt{2};\ 0\right)$, $F_2\left(6\sqrt{2};\ 0\right)$,

мұнда $c=\sqrt{81-9}=\sqrt{72}=6\sqrt{2};$

- эллипстің эксцентриситеті: $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{6\sqrt{2}}{9}=\frac{2\sqrt{2}}{3};$

б) нақты өсі $a=9$, жорамал өсі $в=3$ болатын гипербола үшін:

- гиперболаның канондың теңдеуі: $\frac{x}{81}-\frac{y}{9}=1;$

мұнда $c=\sqrt{81+9}=\sqrt{90}=3\sqrt{10};$

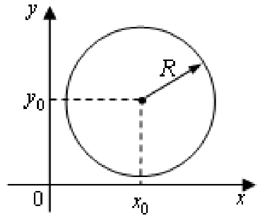
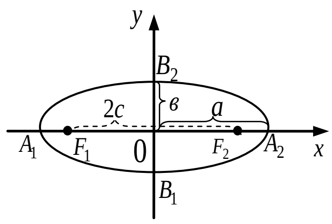
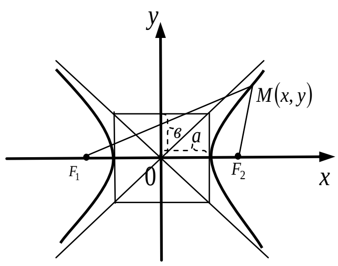
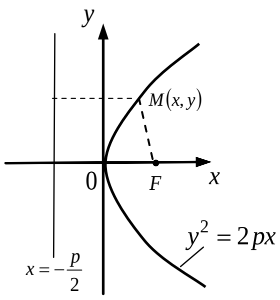
- гиперболаның фокустарының координаталары: $F_1\left(-3\sqrt{10};\ 0\right)$, $F_2\left(3\sqrt{10};\ 0\right)$;

- гиперболаның эксцентриситеті: $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3\sqrt{10}}{9}=\frac{\sqrt{10}}{3};$

в) директрисасы $D:\ x=-7$ түзуі болатын параболаның параметрін $x=-\frac{p}{2}$ теңдігінен табамыз: $p=14$. Оның теңдеуі: $y^2=2px$.

Сонымен, параболаның канондық теңдеуі мен онын фокусының координатасы: $y^2=28x$; $F(7;\ 0)$.

А қосымшасы

Екінші ретті қисықтар		
$M_0(x_0;\, y_0)$– шеңбер центрі болсын ; R - шеңбердің радиусы: $R=\left\lvert\overline{M_0M}\right\rvert=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ Бұдан $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ - шеңбер теңдеуі.		$x^2+y^2=R^2$ - центрі координата өсінің бас нүктесі болатын шеңбер теңдеуі.
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1$ эллипс a - үлкен жарты ось, $в$ - кіші жарты ось		$(2a>2c)$. $\varepsilon=\frac{c}{a}<1$ - эксцентриситет, $F_1(-c;\,0)$, $F_2(c;\,0)$- фокустары, $\lvert F_1F_2\rvert=2c$, мұнда $c=\sqrt{a^2-в^2}$; $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ - директрисалар. $r_1=a+\varepsilon x,\ r_2=a-\varepsilon x$ - фокальдық радиустер; Егер $a<в$, онда $\varepsilon=\frac{c}{в},\quad c=\sqrt{в^2-a^2}$
1. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{в^2}=1$ - гипербола; a - нақты жарты ось, $в$ - жорамал жарты ось. 2. $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1$ - гипербола; $в$ - нақты жарты ось, a - жорамал жарты ось,		$(2a<2c)$. $\varepsilon=\frac{c}{a}>1$ - эксцентриситет, $F_1(-c;\,0)$, $F_2(c;\,0)$- фокустары, мұнда $c=\sqrt{в^2+a^2}$; $\lvert F_1F_2\rvert=2c$. $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ - директрисалар; $x=\pm\frac{в}{a}$ - асимптоталары; фокальдық радиустер: $r_1=\varepsilon x+a,\ r_2=\varepsilon x-a$ - оң жақ тармақта; $r_1=-\varepsilon x-a,\ r_2=-\varepsilon x+a$ - сол жақ тармақта;
Парабола теңдеулері: 1. $y^2=2px$ 2. $y^2=-2px$ 3. $x^2=2py$ 4. $x^2=-2py$ мұнда $p>0$ - параметрі.	$y^2=2px$ параболасының сұлбасы 	1. $F\left(\frac{p}{2};\,0\right)$- фокусы, $x=-\frac{p}{2}$ - директриса. 2. $F\left(-\frac{p}{2};\,0\right)$- фокусы, $x=\frac{p}{2}$ - директриса. 3. $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$- фокусы, $y=-\frac{p}{2}$ - директриса. 4. $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$- фокусы, $y=\frac{p}{2}$ - директриса.

Әдебиеттер тізімі

1 Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. ч.2. –М.: ОНИКС 21 век, Мир и образ., 2008. - 489 с.

2 Байбазаров М.Б., Атабай Б.Ж. Жоғары математика. Есептер жинағы. 1- бөлім. -Алматы, АЭжБУ, 2019. - 239 б.

3 Мұстахишев К.М., Атабай. Б.Ж. Математика (жалпы және арнаулы курс). 1 бөлім: жоғары техникалық оқу орындары студенттеріне арналған оқулық. – Алматы: «Эверо» баспасы, 2015. - 304 б.

4 Хасеинов К.А. Задачи и упражнения по инженерной математике (с индивидуальными заданиями). Часть 2. –Алматы, 2009. - 631 с.

Мазмұны

Жиынтық жоспар 2019 ж., бап. 163

Атабай Бегімбет Жұмабайұлы
Зияханов Мухтар Умирзакович

МАТЕМАТИКА I

5В074600 «Ғарыштық техника және технологиялар»
мамандығы студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша
әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар
1 бөлім

Редакторы Ж.Н. Изтелеуова
Стандарттау бойынша маман Г.И. Мухаметсариева

Басуға « ___» ____2019 ж. қол қойылды.   Пішімі 60х84 1/16
Таралымы 25 дана.   Баспаханалық қағаз №1
Көлемі 1,9 оқу-бас. ә.   Тапсырыс №___ Бағасы 937 тг.

«Алматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірмелі-көбейткіш бюросы
050013, Алматы, Байтұрсынұлы көшесі, 126/1