Коммерциялық емес акционерлік қоғам

АЛМАТЫ ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС УНИВЕРСИТЕТІ

Математика және математикалық үлгілеу кафедрасы

МАТЕМАТИКА 1

5В070300 - Ақпараттық жүйелер мамандығы студенттеріне арналған есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар

Алматы 2018

ҚҰРАСТЫРУШЫЛАР: Абдулланова Ж.С., Есботаева Э.С. Математика 1. 5В070300 - Ақпараттық жүйелер мамандығы студенттеріне арналған есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар. - Алматы: АЭжБУ, 2018. - 45 б.

5В070300 - Ақпараттық жүйелер мамандығы студенттеріне арналған есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар «Математика 1» пәнінің «Векторлық және сызықтық алгебра», «Аналитикалық геометрия» және «Математикалық анализге кіріспе» тараулары бойынша №1, №2, №3 есептеу-сызба жұмыстарынан тұрады. Бағдарламаның теориялық сұрақтары енгізілген. Типтік нұсқаның шешімі келтірілген.

Рецензент: аға оқытушы Абдрахманов А.А.

«Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2018 ж. жоспары бойынша басылды

© «Алматы энергетика және байланыс университеті» КЕАҚ, 2018 ж.

№1 есептеу-сызба жұмысы. Векторлық және сызықтық алгебра

Теориялық сұрақтар.

1. Анықтауыштар, олардың қасиеттері және есептелуі.
2. Матрица, олардың қасиеттері және оларға амалдар қолдану.
3. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу тәсілдері (Крамер әдісі, матрицалық әдіс, Гаусс әдісі).
4. Кронекер-Капелли теоремасы. Фундаментальдық шешімдер жүйесі.
5. Біртекті сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі.
6. Векторлар және оларға сызықтық амалдар қолдану. Базис. Векторлардың сызықтық тәуелділігі. Коллинеар, компланар және ортогональ векторлар.
7. Векторлардың скаляр, векторлық және аралас көбейтіндісі, олардың қасиеттері.
8. Векторлар арасындағы бұрыш.

Тапсырмалар.

1-тапсырма. Үшінші ретті анықтауыш берілген.

а) a_{ij} элементінің M_{ij} минорын, A_{ij} алгебралық толықтауышын табыңыз;

ә) анықтауышты i-ші бағанның элементтеріне жіктеңіз және есептеңіз;

б) анықтауышты қандай да бір қатардың (бағанның) элементтерін нөлге айналдыру арқылы есептеңіз;

в) анықтауышты үшбұрыштар (яғни Сарриус) ережесі бойынша есептеңіз.

1.1 $\begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}, i=3, j=2$	1.2 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, i=1, j=3$	1.3 $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, i=2, j=3$
1.4 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}, i=1, j=1$	1.5 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}, i=1, j=3$	1.6 $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, i=2, j=3$
1.7 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix}, i=2, j=1$	1.8 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}, i=3, j=1$	1.9 $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix}, i=2, j=2$

1.10 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}, i=3,\ j=2$	1.11 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}, i=1,\ j=3$	1.12 $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}, i=3,\ j=2$
1.13 $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \\ -4 & 5 & 4 \end{vmatrix}, i=3,\ j=3$	1.14 $\begin{vmatrix} 5 & 6 & -4 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 9 \end{vmatrix}, i=2,\ j=3$	1.15 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}, i=3,\ j=1$
1.16 $\begin{vmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}, i=2,\ j=2$	1.17 $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, i=1,\ j=2$	1.18 $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}, i=2,\ j=3$
1.19 $\begin{vmatrix} 9 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}, i=3,\ j=1$	1.20 $\begin{vmatrix} -6 & 10 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -8 \end{vmatrix}, i=1,\ j=3$	1.21 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}, i=1,\ j=1$
1.22 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix}, i=2,\ j=1$	1.23 $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 9 \\ 1 & -9 & 7 \\ -3 & 1 & 12 \end{vmatrix}, i=2,\ j=3$	1.24 $\begin{vmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 10 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 6 \end{vmatrix}, i=1,\ j=2$
1.25 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, i=3,\ j=1$	1.26 $\begin{vmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}, i=1,\ j=2$	1.27 $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -11 \end{vmatrix}, i=3,\ j=2$
1.28 $\begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 8 \\ -7 & 4 & -1 \end{vmatrix}, i=3,\ j=1$	1.29 $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 9 & -2 & 9 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix}, i=2,\ j=1$	1.30 $\begin{vmatrix} 2 & 13 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}, i=1,\ j=3$

2-тапсырма. A, B, C матрицалары берілген. Табу керек:

а) AB, BC, BA матрицаларынын, егер олар бар болса. Егер бұл көбейтінділер болмаса, неліктен жоқ екендігін түсіндіріңіз;

ә) осы матрицалардың рангтерін;

б) A матрицаға кері A^{-1} матрицасын. Нәтижені тексеріңіз.

2.1	$A=\begin{pmatrix}9 & 2 & -1\\ 2 & -2 & 3\\ 4 & 1 & -4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 5 & 1\\ -3 & 7\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -6 & 1\end{pmatrix}$
2.2	$A=\begin{pmatrix}12 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 9\\ -4 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}10 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$
2.3	$A=\begin{pmatrix}-7 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 0\\ 3 & 2 & -8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -5\\ 0 & 9\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-7 & 1 & 10\end{pmatrix}$
2.4	$A=\begin{pmatrix}5 & 6 & -4\\ 1 & 1 & 8\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & 1 & -4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-9 & 1\\ 2 & 6\\ 1 & 3\end{pmatrix}$
2.5	$A=\begin{pmatrix}6 & 7 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ 3 & -3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6 & -8 & 2\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}9\\ 8\\ 1\end{pmatrix}$
2.6	$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ -1 & 4 & 11\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}7\\ -4\\ 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 9 & -2\\ 5 & 1 & 4\end{pmatrix}$
2.7	$A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 3 & 2 & -8\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}8 & 3\\ -4 & 2\\ 0 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 7\end{pmatrix}$
2.8	$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 4 & -8 & 11\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 9\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 4 & 9\\ 11 & 1 & -8 & 1\end{pmatrix}$

2.9	$A=\begin{pmatrix}-8 & 2 & 0\\ 4 & 3 & 2\\ 3 & 1 & -5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-6 & 7\\ 5 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & 8 & 0\end{pmatrix}$
2.10	$A=\begin{pmatrix}10 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}15 & 0 & -7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 9 & 16\\ 3 & 8\end{pmatrix}$
2.11	$A=\begin{pmatrix}14 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -4\\ 7 & 1 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & -7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0\\ -5\\ 4\end{pmatrix}$
2.12	$A=\begin{pmatrix}7 & 4 & -1\\ 8 & 1 & -11\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}9\\ 1\\ 16\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 10 & -2\\ -3 & 3 & 5\end{pmatrix}$
2.13	$A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 3\\ 5 & -2 & 0\\ 3 & -2 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -5 & 9\\ 1 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}6 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$
2.14	$A=\begin{pmatrix}7 & -2 & 4\\ 2 & -2 & 1\\ 3 & -4 & -4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 13\\ 4 & -6\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}5 & -11 & 10 & 0\\ -3 & 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$
2.15	$A=\begin{pmatrix}-6 & 1 & 6\\ 3 & 5 & -7\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 0 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}7 & 1 & -5\end{pmatrix}$
2.16	$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -5\\ 1 & -3 & 6\\ -4 & 1 & 8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}7 & 0 & 4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 6\\ 1 & -9\end{pmatrix}$
2.17	$A=\begin{pmatrix}0 & 6 & 7\\ 8 & -5 & 7\\ 4 & 2 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 1 & -8\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 5\end{pmatrix}$

2.18	$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 9\\ 10 & -3 & 1\\ 6 & 3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\ 12\\ -1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 2 & 5 & -5\end{pmatrix}$
2.19	$A=\begin{pmatrix}-10 & 1 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\\ 0 & 1\\ 2 & 8\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}$
2.20	$A=\begin{pmatrix}9 & 3 & -1\\ -4 & 1 & 2\\ 1 & 8 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -8 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1 & 1\\ 7 & 9 & 10 & -12\end{pmatrix}$
2.21	$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 4 & 7 & 3\\ -5 & 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ -2 & 5\\ 3 & 4\\ -6 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & 7 & -1\end{pmatrix}$
2.22	$A=\begin{pmatrix}-3 & 5 & 8\\ 0 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6 & -2 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix}$
2.23	$A=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 4 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & -4 & 1\\ 2 & 6 & -3\end{pmatrix},\ =\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 4\end{pmatrix}$
2.24	$A=\begin{pmatrix}4 & 4 & -4\\ 3 & 1 & 2\\ 3 & 5 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 4 & -3 & 0\end{pmatrix}$
2.25	$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ 1 & 1 & 5\\ 3 & 4 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & -7\\ 5 & 2\\ 3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 4 & 1\end{pmatrix}$
2.26	$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 7\\ 5 & 0 & -1\\ 1 & -3 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 3 & 7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3 & 5\\ -4 & 1 & 5 & 1\end{pmatrix}$

2.27	$A=\begin{pmatrix}8 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -6 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-7 & 0 & 4\end{pmatrix}$
2.28	$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3 & 7 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 1 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$
2.29	$A=\begin{pmatrix}-4 & 4 & 5\\ 3 & 1 & -2\\ 3 & -4 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 6\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2\\ -5\\ 3\end{pmatrix}$
2.30	$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 4 & 2 & -2\\ 1 & 7 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}6 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

3-тапсырма. Теңдеулер жүйесі берілген:
а) жүйені Крамер әдісімен шешіңіз;
ә) жүйені матрицалық әдіспен шешіңіз.
б) жүйені Гаусс әдісімен шешіңіз.

3.1 $\begin{cases}x-2z=1\\ 2x+y-z=0\\ x-2y+z=-2\end{cases}$	3.2 $\begin{cases}x+y-z=36\\ x+z-y=13\\ y+z-x=7\end{cases}$	3.3 $\begin{cases}x+2y+z=4\\ 3x-5y+3z=1\\ 2x+7y-z=8\end{cases}$
3.4 $\begin{cases}2x-4y+9z=28\\ 7x+3y-6z=-1\\ 7x+9y-9z=5\end{cases}$	3.5 $\begin{cases}2x+y=5\\ x+3z=16\\ 5y-z=10\end{cases}$	3.6 $\begin{cases}x+y+z=36\\ 2x-3z=-17\\ 6x-5z=7\end{cases}$
3.7 $\begin{cases}7x+2y+3z=15\\ 5x-3y+2z=15\\ 10x-11y+5z=36\end{cases}$	3.8 $\begin{cases}2x+y+z=2\\ 4x+2y+2z=4\\ 5x+y+3z=4\end{cases}$	3.9 $\begin{cases}2x+y=5\\ x+3z=16\\ 5y-z=10\end{cases}$
3.10 $\begin{cases}x+y-2z=6\\ 2x+3y-7y=16\\ 5x+2y+z=16\end{cases}$	3.11 $\begin{cases}2x-3y+z=2\\ x+5y-4z=-5\\ 4x+y-3z=-4\end{cases}$	3.12 $\begin{cases}x+y+z=1\\ 2x+y+2z=1\\ x+y+3z=2\end{cases}$

3.13 $\begin{cases} x-3y+4z=1 \\ 5x-2y=2 \\ -x+2z=-1 \end{cases}$	3.14 $\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$	3.15 $\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ x+2y+z=8 \\ x+y+2z=9 \end{cases}$
3.16 $\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 3x+y+2z=7 \\ 2x+3y+z=2 \end{cases}$	3.17 $\begin{cases} 4x+2z=2 \\ 2x-2y=-1 \\ 4x-2y+2z=-3 \end{cases}$	3.18 $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ 2x+y+3z=0 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}$
3.19 $\begin{cases} 3x+2z=1 \\ x-2y=-1 \\ 4x-2y+5z=-3 \end{cases}$	3.20 $\begin{cases} 3x+5z=1 \\ x+2y=2 \\ -3x-3y+5z=-1 \end{cases}$	3.21 $\begin{cases} 3x+y+z=-4 \\ -3x+5y+6z=-8 \\ x-4y-2z=-9 \end{cases}$
3.22 $\begin{cases} 3x+5z=-2 \\ x+2y=3 \\ 2x+5z=1 \end{cases}$	3.23 $\begin{cases} 3x+2y+z=4 \\ 2x+y+3z=0 \\ 2x+3y+z=1 \end{cases}$	3.24 $\begin{cases} 3x+4y-2z=12 \\ 2x-y-z=6 \\ 3x-2y+4z=-9 \end{cases}$
3.25 $\begin{cases} 2x-y+2z=8 \\ x+y+2z=11 \\ 4x+y+4z=22 \end{cases}$	3.26 $\begin{cases} 4x-2y+5z=-3 \\ x-2y=-1 \\ 3x+2z=1 \end{cases}$	3.27 $\begin{cases} 3x-2y-5z=5 \\ 2x+3y-7z=12 \\ x-2y+3z=-1 \end{cases}$
3.28 $\begin{cases} -3x-3y+5z=-1 \\ x+2y=2 \\ 3x+5z=1 \end{cases}$	3.29 $\begin{cases} 2x-3y+2z=5 \\ 3x+4y-7z=2 \\ 5x+y-5z=9 \end{cases}$	3.30 $\begin{cases} 3x-y+z=9 \\ 5x-y+2z=11 \\ x+2y+4z=19 \end{cases}$

4-тапсырма. Біртекті сызықты теңдеулер жүйесін шешу керек.

4.1 a) $\begin{cases} 7x-5y=0 \\ x+6y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} -2x+18y=0 \\ -x+9y=0 \end{cases}$
4.2 a) $\begin{cases} -3x+4y=0 \\ -x+6y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} -3x+y=0 \\ 6x-2y=0 \end{cases}$
4.3 a) $\begin{cases} x-7y=0 \\ 3x+y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} -x+7y=0 \\ 2x-14y=0 \end{cases}$
4.4 a) $\begin{cases} -x-2y=0 \\ 3x+y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} 3x-y=0 \\ 6x-2y=0 \end{cases}$
4.5 a) $\begin{cases} 2x+5y=0 \\ -7x-4y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ -8x-12y=0 \end{cases}$

4.6 a) $\begin{cases} -x-2y=0 \\ 6x-5y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} -x+2y=0 \\ 3x+6y=0 \end{cases}$
4.7 a) $\begin{cases} 5x-y=0 \\ x+3y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} 2x-y=0 \\ 8x-4y=0 \end{cases}$
4.8 a) $\begin{cases} 5x+8y=0 \\ -x+y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} -3x+4y=0 \\ -6x+8y=0 \end{cases}$
4.9 a) $\begin{cases} x-y=0 \\ x+3y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} -x+3y=0 \\ -3x+9y=0 \end{cases}$
4.10 a) $\begin{cases} 4x-y=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} -5x-2y=0 \\ -10x-4y=0 \end{cases}$
4.11 a) $\begin{cases} x+5y=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} 8x-y=0 \\ 16x-y=0 \end{cases}$
4.12 a) $\begin{cases} 9x-y=0 \\ 2x-5y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} 9x+2y=0 \\ 18x+4y=0 \end{cases}$
4.13 a) $\begin{cases} 5x-y=0 \\ 7x+2y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} 2x+7y=0 \\ 4x+14y=0 \end{cases}$
4.14 a) $\begin{cases} 3x-y=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} x-3y=0 \\ x-6y=0 \end{cases}$
4.15 a) $\begin{cases} 8x-y=0 \\ 5x+3y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} 2x-5y=0 \\ 4x-10y=0 \end{cases}$
4.16 a) $\begin{cases} 8x-3y=0 \\ -x+5y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} 5x-y=0 \\ -5x+y=0 \end{cases}$
4.17 a) $\begin{cases} -x+2y=0 \\ 9x+y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} x-2y=0 \\ -4x+8y=0 \end{cases}$
4.18 a) $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ -x-4y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} -x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$
4.19 a) $\begin{cases} 8x-y=0 \\ 6x+y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} 2x+y=0 \\ -8x-4y=0 \end{cases}$
4.20 a) $\begin{cases} -3x+8y=0 \\ x-6y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} -x-2y=0 \\ 3x+6y=0 \end{cases}$

4.21 а) $\begin{cases} -x+7y=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} x-y=0 \\ 3x-3y=0 \end{cases}$
4.22 а) $\begin{cases} -x+9y=0 \\ -x-5y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} -3x+4y=0 \\ -6x+8y=0 \end{cases}$
4.23 а) $\begin{cases} 3x+y=0 \\ x-7y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} 5x-3y=0 \\ 10x-6y=0 \end{cases}$
4.24 а) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+6y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} -x+y=0 \\ -4x+4y=0 \end{cases}$
4.25 а) $\begin{cases} 5x-y=0 \\ x+3y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} 6x-y=0 \\ 12x-2y=0 \end{cases}$
4.26 а) $\begin{cases} 8x-3y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} -2x+y=0 \\ 6x+3y=0 \end{cases}$
4.27 а) $\begin{cases} 5x-2y=0 \\ 4x+3y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} x+5y=0 \\ 3x+15y=0 \end{cases}$
4.28 а) $\begin{cases} 9x-2y=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} 3x+5y=0 \\ 6x+10y=0 \end{cases}$
4.29 а) $\begin{cases} x-5y=0 \\ 3x+y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} x+3y=0 \\ x+6y=0 \end{cases}$
4.30 а) $\begin{cases} 6x-y=0 \\ -x+3y=0 \end{cases}$,	$b)$ $\begin{cases} 2x-9y=0 \\ 4x-18y=0 \end{cases}$

5-тапсырма. Біртекті сызықты теңдеулер жүйесін шешу керек. Нормаланған іргелі шешімдер жүйесін табу керек.

5.1 $\begin{cases} x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0 \\ 2x_1-3x_2-5x_3-6x_4+2x_5=0 \\ 4x_1+2x_2-8x_3-5x_4+x_5=0 \end{cases}$	5.2 $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+2x_4+x_5=0 \\ 2x_1+4x_2-5x_3-6x_4+2x_5=0 \\ 2x_1+6x_2-4x_3+4x_4+2x_5=0 \end{cases}$
5.3 $\begin{cases} 3x_1-7x_2-x_3+2x_4+3x_5=0 \\ x_1-3x_2+8x_3-6x_4+2x_5=0 \\ 5x_1+2x_2-x_3-x_4+x_5=0 \end{cases}$	5.4 $\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3+4x_4-x_5=0 \\ x_1-3x_2+x_3-6x_4+2x_5=0 \\ 4x_1-2x_2-6x_3+8x_4-2x_5=0 \end{cases}$

5.5 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 9x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$	5.6 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$
5.7 $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$	5.8 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$
5.9 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$	5.10 $\begin{cases} 8x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$
5.11 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$	5.12 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$
5.13 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$	5.14 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 8x_3 - 5x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$
5.15 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 9x_5 = 0 \\ 7x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$	5.16 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$
5.17 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 + 7x_4 + 8x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 7x_3 - 6x_4 + x_5 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$	5.18 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ 9x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$
5.19 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 9x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 7x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$	5.20 $\begin{cases} x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$
5.21 $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$	5.22 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

5.23 $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+2x_4+x_5=0 \\ 2x_1-x_2-x_3-6x_4+2x_5=0 \\ 5x_1+2x_2-x_3+2x_4+x_5=0 \end{cases}$	5.24 $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+2x_4+x_5=0 \\ 2x_1-3x_2-x_3+x_4+2x_5=0 \\ 5x_1+2x_2-x_3+4x_4+x_5=0 \end{cases}$
5.25 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4+x_5=0 \\ 2x_1-3x_2+x_3-x_4+2x_5=0 \\ x_1+2x_2+9x_3-5x_4+x_5=0 \end{cases}$	5.26 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4+x_5=0 \\ 2x_1-3x_2+x_3-6x_4+2x_5=0 \\ x_1-x_2+6x_3-2x_4+x_5=0 \end{cases}$
5.27 $\begin{cases} x_1+x_2-4x_3+2x_4+3x_5=0 \\ 2x_1-3x_2+x_3-x_4+2x_5=0 \\ 3x_1+5x_2-7x_3-x_4+x_5=0 \end{cases}$	5.28 $\begin{cases} x_1+4x_2-x_3+2x_4+x_5=0 \\ x_1-3x_2+x_3-6x_4+2x_5=0 \\ x_1+2x_2-5x_3-x_4+x_5=0 \end{cases}$
5.29 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+2x_4+5x_5=0 \\ 2x_1-x_2-5x_3+x_4+2x_5=0 \\ 9x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=0 \end{cases}$	5.30 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4+x_5=0 \\ 2x_1-7x_2-5x_3-x_4+x_5=0 \\ 4x_1+2x_2-2x_3+4x_4+2x_5=0 \end{cases}$

6-тапсырма. *A, B, C* нүктелері және $\vec{b}$ мен $\vec{c}$ векторлары берілген. Табу керек:

а) $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{AB}\right|$, AB кесіндісінің ортасын;

ә) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ скаляр көбейтіндісін;

б) $\vec{b}\times\vec{c}$ векторлық көбейтіндісін, $S_{\Delta ABC}$;

в) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ аралас көбейтіндісін, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларынан құрылған пирамиданың көлемін.

6.1	$A(6,1,3)$, $B(-4,5,0)$, $\bar{b}=(2,-5,8)$, $\bar{c}=(3,9,1)$	6.2	$A(4,6,-7)$, $B(9,7,-7)$, $\bar{b}(6,3,8)$, $\bar{c}=(6,3,6)$
6.3	$A(7,4,8)$, $B(1,6,-2)$, $\bar{b}(4,4,3)$, $\bar{c}=(2,3,9)$	6.4	$A(-9,8,9)$, $B(7,3,-2)$, $\bar{b}(7,2,4)$, $\bar{c}=(5,4,-1)$
6.5	$A(3,7,4)$, $B(4,-10,9)$, $\bar{b}(6,1,7)$, $\bar{c}=(4,5,3)$	6.6	$A(4,6,11)$, $B(9,3,-4)$, $\bar{b}(3,9,6)$, $\bar{c}=(6,4,2)$
6.7	$A(4,-4,5)$, $B(4,7,5)$, $\bar{b}(6,1,6)$, $\bar{c}=(0,7,3)$	6.8	$A(3,5,-7)$, $B(8,6,1)$, $\bar{b}(2,3,6)$, $\bar{c}=(5,4,6)$
6.9	$A(3,-3,5)$, $B(6,5,-6)$, $\bar{b}(7,8,3)$, $\bar{c}=(1,8,9)$	6.10	$A(5,6,-8)$, $B(6,8,7)$, $\bar{b}(1,3,4)$, $\bar{c}=(3,6,-2)$

6.11	$A(8,-6,2)$, $B(10,7,1)$, $\bar{b}(9,1,8)$, $\bar{c}=(6,9,1)$	6.12	$A(5,-3,1)$, $B(2,5,7)$, $\bar{b}(2,7,6)$, $\bar{c}=(7,1,4)$
6.13	$A(7,4,4)$, $B(-5,7,-7)$, $\bar{b}(6,1,5)$, $\bar{c}=(1,6,7)$	6.14	$A(3,-5,6)$, $B(6,3,9)$, $\bar{b}(7,3,4)$, $\bar{c}=(3,2,-4)$
6.15	$A(4,2,7)$, $B(-1,0,6)$, $\bar{b}(2,1,8)$, $\bar{c}=(5,9,9)$	6.16	$A(6,4,0)$, $B(1,-7,8)$, $\bar{b}(2,8,6)$, $\bar{c}=(0,6,3)$
6.17	$A(0,4,0)$, $B(5,3,-4)$, $\bar{b}(8,5,3)$, $\bar{c}=(9,6,9)$	6.18	$A(5,3,8)$, $B(-2,5,7)$, $\bar{b}(6,2,4)$, $\bar{c}=(7,2,-7)$
6.19	$A(-4,4,3)$, $B(8,7,-4)$, $\bar{b}(3,3,4)$, $\bar{c}=(5,3,6)$	6.20	$A(4,5,-1)$, $B(-6,4,2)$, $\bar{b}(1,9,6)$, $\bar{c}=(0,8,6)$
6.21	$A(3,2,7)$, $B(4,0,-5)$, $\bar{b}(7,2,6)$, $\bar{c}=(5,8,2)$	6.22	$A(2,-6,8)$, $B(5,4,8)$, $\bar{b}(8,3,6)$, $\bar{c}=(7,4,-4)$
6.23	$A(2,1,-8)$, $B(1,4,9)$, $\bar{b}(1,1,10)$, $\bar{c}=(5,-3,7)$	6.24	$A(3,1,5)$, $B(4,-3,7)$, $\bar{b}(9,3,2)$, $\bar{c}=(6,2,-3)$
6.25	$A(2,-1,9)$, $B(6,3,7)$, $\bar{b}(6,3,-6)$, $\bar{c}=(7,8,3)$	6.26	$A(2,-5,7)$, $B(3,4,8)$, $\bar{b}(2,4,2)$, $\bar{c}=(0,6,-2)$
6.27	$A(3,-4,5)$, $B(4,7,9)$, $\bar{b}(7,1,2)$, $\bar{c}=(5,-3,-3)$	6.28	$A(0,4,5)$, $B(3,-2,-2)$, $\bar{b}(8,4,4)$, $\bar{c}=(0,2,-2)$
6.29	$A(-5,1,0)$, $B(7,1,-5)$, $\bar{b}(7,1,6)$, $\bar{c}=(5,8,-5)$	6.30	$A(3,-4,5)$, $B(1,2,-6)$, $\bar{b}(0,1,8)$, $\bar{c}=(7,2,-1)$

Типтік нұсқаның шешуі.

1-тапсырма. Үшінші ретті анықтауыш берілген:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} \qquad i=3, \quad j=2.$$

а) a_{ij} элементінің M_{ij} минорын, A_{ij} алгебралық толықтауышын табыңыз;

ә) анықтауышты i-ші бағанның элементтеріне жіктеңіз және есептеңіз;

б) анықтауышты қандай да бір қатардың (бағанның) элементтерін нөлге айналдыру арқылы есептеңіз;

в) анықтауышты үшбұрыштар (яғни Сарриус) ережесі бойынша есептеңіз.

Шешуі:

а) a_{ij} элементінің миноры осы элемент тұрған қатар мен бағанды сызып тастағаннан пайда болған анықтауыш, сондықтан біз үшінші қатар мен екінші бағанды сызамыз:

$$M_{32}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ -2 & -5\end{vmatrix}=1\cdot(-5)-(-2)\cdot 4=-5+8=3.$$

Алгебралық толықтауышты мына формула бойынша табамыз:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}; \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot 3=-3;$$

ә) анықтауыштың мәні қандай да бір қатар (баған) элементтері мен олардың сәйкес алгебралық толықтауыштарының көбейтінділерінің қосындысына тең. Біздің жағдайда анықтауышты үшінші қатар элементтеріне жіктейміз, яғни

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 4\\ -2 & 1 & -5\\ 3 & 2 & 7\end{vmatrix}=3\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 1 & -5\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\ -2 & -5\end{vmatrix}+7\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot((-2)\cdot(-5)-1\cdot 4)-2\cdot(1\cdot(-5)-(-2)\cdot 4)+7(1\cdot 1-(-2)\cdot(-2))=$$

$$=3\cdot(10-4)-2\cdot(-5+8)+7\cdot(1-4)=3\cdot 6-2\cdot 3+7\cdot(-3)=-9;$$

б) қандай да бір қатар (баған) элементтеріне бірдей санға көбейтілген екінші қатардың (бағанның) сәйкес элементтерін қосқаннан анықтауыштың мәні өзгермейді. Осы қасиетті пайдаланып, қандай да бір қатардың бір элементінен басқасын нөлге айналдыруға болады. Осы алынған қатардың элементтеріне жіктесек, онда жалғыз ғана қосылғыш қалады, басқалары нөлге айналады:

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 4\\ -2 & 1 & -5\\ 3 & 2 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 8 & -5\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-3 & 3\\ 8 & -5\end{vmatrix}=15-24=-9.$$

Мұнда екінші қатар элементтеріне бірінші қатардың 2-ге көбейтілген сәйкес элементтерін қосып, нәтижені екінші қатарға жаздық; үшінші қатар элементтеріне бірінші қатардың -3-ке көбейтілген сәйкес элементтерін қосып, нәтижені үшінші қатарға жаздық;

в) үшінші ретті анықтауышты Сарриус ережесі бойынша есептейміз:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}-$$

$$a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33};$$

немесе мына сұлба бойынша есептейміз:

$$+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\quad-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 7 + (-2)\cdot(-5)\cdot 3 + (-2)\cdot 2\cdot 4 - 3\cdot 1\cdot 4 - 2\cdot(-5)\cdot 1 - (-2)\cdot(-2)\cdot 7 =$$

$$= 7 + 30 - 16 - 12 + 10 - 28 = -9;$$

2-тапсырма. A, B, C матрицалары берілген. Табу керек:

а) AB, BC, BA матрицаларынын, егер олар бар болса. Егер бұл көбейтінділер болмаса, неліктен жоқ екендігін түсіндіріңіз;

ә) осы матрицалардың рангтерін;

б) A матрицаға кері A^{-1} матрицасын. Нәтижені тексеріңіз.

Шешуі:

а) берілген матрицалардың өлшемдері: $A_{3\times 3}$, $B_{3\times 2}$, $C_{2\times 4}$. Екі матрицаның көбейтіндісін табу үшін мына шарт орындалуы қажет: $A_{m\times n}\cdot B_{n\times k} = D_{m\times k}$

$A_{3\times 3}\cdot B_{3\times 2} = D_{3\times 2}$, демек көбейтуге болады. D матрицасының d_{ij} элементтері A матрицасының i-ші қатарының элементтерін B матрицасының j-ші бағанының сәйкес элементтеріне көбейтінділерінің қосындысына тең:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 4 + 0\cdot(-3) + 2\cdot 1 & 3\cdot(-3) + 0\cdot 6 + 2\cdot 7 \\ 1\cdot 4 + (-1)\cdot(-3) + 3\cdot 1 & 1\cdot(-3) + (-1)\cdot 6 + 3\cdot 7 \\ 4\cdot 4 + (-1)\cdot(-3) + 6\cdot 1 & 4\cdot(-3) + (-1)\cdot 6 + 6\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 10 & 12 \\ 25 & 24 \end{pmatrix}$$

$B_{3\times 2}\cdot C_{2\times 4} = F_{3\times 4}$.

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4\cdot 2 + (-3)\cdot 4 & 4\cdot 3 + (-3)\cdot(-1) & 4\cdot(-7) + (-3)\cdot 3 & 4\cdot 1 + (-3)\cdot(-6) \\ (-3)\cdot 2 + 6\cdot 4 & (-3)\cdot 3 + 6\cdot(-1) & (-3)\cdot(-7) + 6\cdot 3 & (-3)\cdot 1 + 6\cdot(-6) \\ 1\cdot 2 + 7\cdot 4 & 1\cdot 3 + 7\cdot(-1) & 1\cdot(-7) + 7\cdot 3 & 1\cdot 1 + 7\cdot(-6) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 15 & -37 & 22 \\ 18 & -15 & 39 & -39 \\ 30 & -4 & 14 & -41 \end{pmatrix}.$$

B матрицасының бағандар саны A матрицасының қатарлар санына тең емес, демек $B_{3\times 2}\cdot A_{3\times 3}$ көбейтіндісі жоқ;

ә) нөлден өзгеше минордың ең үлкен реті матрицаның рангы деп аталады. $A_{3\times 3}$ матрицасының анықтауышын есептейміз:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -(9-6) = -3 \neq 0,$$ демек, $rangA = 3$.

$B=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ матрицасының $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$ миноры $15 \neq 0$ және оның реті 2. Демек, $rang\ B=2$. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=-14 \neq 0$ болғандықтан, $rang\, C=2$;

б) $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ квадрат матрицасы үшін $\det A \neq 0$, демек бұл матрица үшін $A \cdot A^{-1}=A^{-1} \cdot A=E$ теңдігін қанағаттандыратын A^{-1} кері матрицасы бар.

Кері матрицаны табу формуласы:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

мұндағы A_{ij} – алгебралық толықтауыштар.

$$\det A=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix}=-3 \neq 0,$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}=-3, \quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=6, \quad A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=3,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}=-2, \quad A_{22}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=10, \quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=3,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=2, \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-7, \quad A_{33}=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-3.$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 6 & 10 & -7 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Тексереміз:

$$A \cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 6 & 10 & -7 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}=-\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3-тапсырма. $\begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3=-1 \\ \quad -2x_2+x_3=1 \\ x_1+2x_2+x_3=2 \end{cases}$ теңдеулер жүйесі берілген:

а) жүйені үйлесімділікке зерттеңіз;
ә) жүйені Крамер әдісімен шешіңіз;
б) жүйені матрицалық әдіспен шешіңіз.

Шешуі:
а) жүйенің негізгі анықтауышын есептеңіз:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$ демек жүйе үйлесімді.

Жүйе үш белгісізді сызықтық біртекті емес үш теңдеуден тұрады, демек ол жалғыз шешімге ие болады;

ә) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$ жүйесі үшін

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Крамер формулалары: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$.

Біздің жағдайда:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 21; \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6; \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -15.$$

$\Delta = -3$ болғандықтан, $x_1 = -7$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$.

Жауабы: $(-7, 2, 5)$; .

б) берілген жүйе үшін мына матрицаларды енгіземіз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}; \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Жүйенің матрицалық түрде жазылуы $AX = B$, ал оның шешімі $X = A^{-1} \cdot B$.

Берілген жүйенің матрицалары: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

A матрицасының элементтерінің алгебралық толықтауыштарын табамыз:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-4,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}0 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1;\quad .$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}5 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=9,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-3,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-6.$$

Сонда $A^{-1}=-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-4 & -1 & 9\\ 1 & 1 & -3\\ 2 & -1 & -6\end{pmatrix}$; $X=-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-4 & -1 & 9\\ 1 & 1 & -3\\ 2 & -1 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}21\\ -6\\ -15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\ 2\\ 5\end{pmatrix}$.

Жауабы: $(-7,\ 2,\ 5)$.

4-тапсырма. Біртекті сызықты теңдеулер жүйесін шешу керек:

а) $\begin{cases}x_1-3x_2=0\\ 2x_1+5x_2=0\end{cases}$; ә) $\begin{cases}x_1+6x_2=0\\ -x_1-6x_2=0\end{cases}$.

Шешуі:

Белгісіздер саны теңдеулер санына тең болғандықтан, шешімдер саны туралы жүйенің анықтауышы Δ бойынша айтуға болады: егер $\Delta=0$, онда олай болса жүйенің шексіз шешімі болады, егер $\Delta\neq 0$, онда жүйенің жалғыз нөлдік шешімі болады:

а) $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=11\neq 0$, олай болса, онда жүйенің жалғыз нөлдік шешімі болады $x_1=0, x_2=0$;

ә) $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 6\\ -1 & -6\end{vmatrix}=0$, олай болса, онда жүйенің шексіз шешімі болады. $\Delta=0$ болғандықтан, жүйенің матрицаның рангы 1-ге тең және де жүйе, мысалы, $x_1+6x_2=0$ теңдеуіне мәндес. Бір белгісіз базисті, қалғаны бос белгісіз болады. x_2- бос белгісіз болсын. Базисті белгісізді бос белгісіз арқылы өрнектейік $x_1=-6x_2$. Бос белгісізге кез келген мән берсек $x_2=c$, онда $x_1=-6c$. Жүйенің жалпы шешімін аламыз $x_1=-6c$, $x_2=c$ немесе векторлы

түрде $(-6c, c)$. с-ға әртүрлі мәндер беру арқылы жалпыдан дербес шешімдерді алуға болады. Мысалы, с=1 болсын, онда $x_1 = -6$, $x_2 = 1$- дербес шешім.

5-тапсырма. Біртекті сызықты теңдеулер жүйесін шешу керек:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases};$$

шешімдердің нормаланған іргелі жүйесін табу керек.

Шешуі:

Жүйенің матрицасын жазып алып сатылы түрге келтіреміз, ол үшін жолдарына қарапайым түрлендірулер жүргіземіз:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 21 & 15 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -11 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$r_A = 2$, n=4: $r < n$, олай болса жүйенің шексіз шешімі болады. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$- базисті минор, x_2, x_3- базисті белгісіздер, x_1, x_4- бос белгісіздер. Соңғы матрица бойынша жүйе құрамыз, содан соң базисті белгісіздерді бос белгісіздер арқылы өрнектейміз: $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 7x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{7}x_4 \\ x_3 = -\frac{5}{7}x_4 \end{cases}$ - жалпы шешім.

Шешімдер кеңістігінің өлшемі n-r = 4-2 = 2, сондықтан шешімдердің іргелі жүйесі екі вектордан тұрады.

Бос белгісіздерге $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ анықтауыштың жолына тең мәндер бере бастаймыз, шешімдердің іргелі жүйесін құрайтын екі шешім аламыз:

а) $x_1 = 1, x_4 = 0$, онда жалпы шешімнен $x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 0$. $E_1 = \left(1, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$- іргелі жүйенің бірінші векторы;

ә) $x_1 = 0, x_4 = 1$, онда $x_2 = -\frac{1}{7}, x_3 = -\frac{5}{7}$. $E_2 = \left(0, -\frac{1}{7}, -\frac{5}{7}, 1\right)$- іргелі жүйенің екінші векторы.

Іргелі жүйе біртекті сызықты теңдеулер жүйесінің шешімінің кеңістігінің базисі болғандықтан, бұл жүйенің кез келген шешімі іргелі жүйенің векторларының сызықты комбинациясы болады, яғни $X = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2$ (α_1, α_2- кез-келген сандар). $X = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2$ жүйенің жалпы шешімі формуласымен беріледі. Дербес шешімдерді алу үшін α_1 және α_2-ге кез келген мәндер береміз, мысалы, α_1=2, α_2=7 болса, онда $X_1 = 2\left(1, \frac{1}{2}, 0, 0\right) + 7\left(0, -\frac{1}{7}, -\frac{5}{7}, 1\right) = \ = (2, 0, -5, 7)$- дербес шешімдері.

6-тапсырма. *A, B, C* нүктелері және $\vec{b}$ мен $\vec{c}$ векторлары берілген. Табу керек:

а) $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{AB}\right|$, ABкесіндісінің ортасын;

ә) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ скаляр көбейтіндісін, $\vec{b} \times \vec{c}$ векторлық көбейтіндісін, $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ аралас көбейтіндісін;

б) $S_{\Delta ABC}$;

в) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторларынан құрылған пирамиданың көлемін.

$A(-2, 7, 0)$, $B(-6, 3, -1)$, $C(1, 0, 1)$, $\vec{b} = (-3, 4, 1)$, $\vec{c} = (9, -1, 0)$.

Шешуі:

а) егер $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ болса, онда $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Егер $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ болса, онда $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

С $-AB$ кесіндісінің ортасы: $C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

Біздің жағдайда: $\vec{a} = \vec{AB} = ((-6) - (-2), 3 - 7, -1 - 0) = (-4, -4, -1)$;

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{33};$$

$$C\left(\frac{-2-6}{2};\ \frac{7+3}{2};\ \frac{0-1}{2}\right)=\left(-4;\ 5;\ -\frac{1}{2}\right);$$

ә) егер $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ болса, онда

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z=(-4)\cdot(-3)+(-4)\cdot 4+(-1)\cdot 1=12-16-1=-5.$$

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_t\\ b_x & b_y & b_t\end{vmatrix};$$

$$\left[\vec{b},\vec{c}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 4 & 1\\ 9 & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 9 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 9 & -1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+9\vec{j}-33\vec{k}=(1,\ 9,\ -33);$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix},\ \text{демек}\quad \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}-4 & -4 & -1\\ -3 & 4 & 1\\ 9 & -1 & 0\end{vmatrix}=-7;$$

б) $S_{\Delta ABC}=\dfrac{\left|\left[\vec{AB};\vec{AC}\right]\right|}{2}$.

Біздің жағдайда: $\vec{AB}=(-4,\ -4,\ -1)$, $\vec{AC}=(3,\ -7,\ 1)$.

$$\left[\vec{AB},\ \vec{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & -4 & -1\\ 3 & -7 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4 & -1\\ -7 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-4 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-4 & -4\\ 3 & -7\end{vmatrix}\vec{k}=-11\vec{i}+\vec{j}+40\vec{k}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{(-11)^2+1^2+40^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1722}\ (\text{кв.б.});$$

в) $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ векторларынан құрылған пирамиданың көлемін мына формула бойынша табамыз: $V=\dfrac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)\right|$.

$$\begin{vmatrix} -4 & -4 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 9 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-4)\cdot 4\cdot 0 + (-4)\cdot 1\cdot 9 + (-3)\cdot(-1)\cdot(-1) - (-1)\cdot 4\cdot 9 - (-1)\cdot 1\cdot(-4) - (-4)\cdot(-3)\cdot 0 =$$

$$= 0 - 36 - 3 + 36 - 4 - 0 = -7;$$

Сонымен, пирамиданың көлемі $V = \frac{1}{6}\cdot|-7| = 1\frac{1}{6}$ (*куб.бірл.*).

№2 есептеу-сызба жұмысы. Аналитикалық геометрия

Теориялық сұрақтар.

1. Жазықтықтағы түзу.Түзулердің арасындағы бұрыш.
2. Жазықтықтағы түзу теңдеулері.
3. Жазықтықтар. Жазықтық теңдеулері.
4. Жазықтықтар арасындағы бұрыш. Жазықтықтардың параллельдік және перпендикулярлық белгілері.
5. Кеңістіктегі түзу. Олардың канондық, параметрлік және жалпы теңдеулері.
6. Кеңістіктегі түзудің жалпы теңдеуінен оның канондық теңдеуіне өту.
7. Екінші ретті қисықтартардың жалпы теңдеуі.
8. Эллипстің, гиперболаның, параболаның канондық теңдеулері.
9. Екінші ретті беттер.
10. Екінші ретті беттердің канондық теңдеулері
11. Беттерді қима әдісімен зерттеу.

Тапсырмалар.

1-тапсырма. A, B нүктелері және L_1 түзуі берілген.

а) A және B нүктелері арқылы өтетін L_2 түзудің теңдеуін жазыңыз;

ә) L_2 түзуінің жалпы теңдеуін, бұрыштық коэффициентімен берілген теңдеуін, кесіндідегі теңдеуін, параметрлік теңдеуін жазыңыз;

б) L_1 және L_2 түзулері арасындағы бұрыштың косинусын табыңыз;

в) A нүктесі арқылы L_2 түзуіне перпендикуляр L_3 түзудің теңдеуін жазыңыз;

г) B нүктесі арқылы L_1 түзуіне параллель L_4 түзудің теңдеуін жазыңыз.

1.1	$A_1(-1,6)$, $A_2(-1,7)$, $L_1: 7x-4y-1=0$	1.2	$A_1(5,1)$, $A_2(1,-3)$, $L_1: x+6y+3=0$
1.3	$A_1(10,2)$, $A_2(-1,5)$, $L_1: x+2y-8=0$	1.4	$A_1(-6,3)$, $A_2(1,-7)$, $L_1: 5x-7y+9=0$

1.5	$A_1(2,4),\ A_2(-2,3),$ $L_1: 4x-4y+1=0$	1.6	$A_1(-4,1),\ A_2(8,-1),$ $L_1: 8x-y+6=0$
1.7	$A_1(-1,7),\ A_2(-2,4),$ $L_1: 2x-3y+2=0$	1.8	$A_1(4,1),\ A_2(7,-1),$ $L_1: 3x-5y+4=0$
1.9	$A_1(2,1),\ A_2(-1,-4),$ $L_1: 6x-8y+5=0$	1.10	$A_1(-7,1),\ A_2(1,-6),$ $L_1: 9x-9y+7=0$
1.11	$A_1(6,5),\ A_2(-5,1),$ $L_1: 2x-2y-10=0$	1.12	$A_1(-3,3),\ A_2(8,-2),$ $L_1: x-3y+3=0$
1.13	$A_1(-4,7),\ A_2(3,1),$ $L_1: 6x-7y-1=0$	1.14	$A_1(5,2),\ A_2(6,-2),$ $L_1: 8x-y+5=0$
1.15	$A_1(-1,8),\ A_2(-6,-4),$ $L_1: 4x-6y-2=0$	1.16	$A_1(4,8),\ A_2(4,-1),$ $L_1: 7x-9y+4=0$
1.17	$A_1(9,1),\ A_2(-1,2),$ $L_1: 3x+4y+8=0$	1.18	$A_1(-8,1),\ A_2(1,-3),$ $L_1: 5x-5y+7=0$
1.19	$A_1(6,1),\ A_2(-3,2),$ $L_1: 9x-8y+6=0$	1.20	$A_1(-4,4),\ A_2(3,-3),$ $L_1: 3x-5y+2=0$
1.21	$A_1(-4,1),\ A_2(5,1),$ $L_1: 7x-2y+5=0$	1.22	$A_1(7,1),\ A_2(5,-2),$ $L_1: x-9y+8=0$
1.23	$A_1(-2,2),\ A_2(-7,3),$ $L_1: 4x-7y-6=0$	1.24	$A_1(-1,6),\ A_2(4,-1),$ $L_1: 5x-y+9=0$
1.25	$A_1(7,2),\ A_2(-1,3),$ $L_1: 2x+8y-3=0$	1.26	$A_1(3,1),\ A_2(6,-2),$ $L_1: 8x-3y+1=0$
1.27	$A_1(5,2),\ A_2(-4,1),$ $L_1: 6x-4y-4=0$	1.28	$A_1(-3,6),\ A_2(3,-14),$ $L_1: x-6y+5=0$
1.29	$A_1(-4,2),\ A_2(5,3),$ $L_1: 5x-5y-5=0$	1.30	$A_1(5,1),\ A_2(4,-1),$ $L_1: 3x-7y+7=0$

2-тапсырма. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 нүктелері берілген.

а) A_1, A_2, A_3 нүктелері арқылы өтетін P жазықтықтың теңдеуін жазыңыз;

ә) P жазықтықтың жалпы теңдеуін, кесіндідегі теңдеуін жазыңыз;

б) P жазықтығының нормаль векторын табыңыз;

в) A_4, A_5 нүктелері арқылы өтетін L түзуінің канондық және параметрлік теңдеулерін жазыңыз;

г) P жазықтығы мен L түзуінің арасындағы бұрыштың синусын табыңыз.

№	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
2.1	$(9,-5,6)$	$(3,2,-7)$	$(-5,1,-2)$	$(3,-7,8)$	$(4,-3,-6)$
2.2	$(-3,1,7)$	$(8,5,-1)$	$(2,-3,2)$	$(0,-9,5)$	$(2,7,6)$
2.3	$(4,7,1)$	$(1,6,-3)$	$(8,4,0)$	$(4,2,7)$	$(2,5,-2)$
2.4	$(0,8,-5)$	$(2,5,6)$	$(3,-2,4)$	$(1,9,-1)$	$(2,6,1)$
2.5	$(3,-5,1)$	$(9,1,5)$	$(4,-7,8)$	$(5,2,-2)$	$(-6,2,3)$
2.6	$(-4,4,-2)$	$(8,5,1)$	$(4,-3,1)$	$(2,8,5)$	$(2,4,1)$
2.7	$(1,8,-3)$	$(6,0,3)$	$(4,2,7)$	$(1,9,-1)$	$(8,4,-3)$
2.8	$(1,9,5)$	$(4,-7,8)$	$(5,2,-2)$	$(3,1,-7)$	$(4,5,2)$
2.9	$(3,4,5)$	$(1,-9,3)$	$(4,5,7)$	$(-1,4,5)$	$(3,1,-1)$
2.10	$(2,7,6)$	$(1,-4,5)$	$(3,7,5)$	$(3,-9,2)$	$(1,5,7)$
2.11	$(4,3,-6)$	$(2,-8,1)$	$(1,8,-3)$	$(4,-2,-5)$	$(1,0,-2)$
2.12	$(8,4,1)$	$(7,3,0)$	$(9,1,-1)$	$(-3,1,7)$	$(8,5,1)$
2.13	$(2,5,1)$	$(3,8,-7)$	$(5,3,-2)$	$(9,-5,6)$	$(-5,1,-3)$
2.14	$(1,8,3)$	$(1,-4,1)$	$(-4,3,7)$	$(1,8,-1)$	$(4,6,-1)$
2.15	$(8,7,-5)$	$(1,8,7)$	$(5,0,-3)$	$(2,6,1)$	$(2,5,-7)$
2.16	$(3,4,-5)$	$(5,2,1)$	$(9,-5,6)$	$(2,3,-6)$	$(3,9,0)$
2.17	$(1,7,0)$	$(0,1,-3)$	$(4,-3,2)$	$(5,3,-2)$	$(2,-6,1)$
2.18	$(1,7,3)$	$(3,-2,4)$	$(2,-1,5)$	$(8,1,-3)$	$(2,0,4)$
2.19	$(2,-3,1)$	$(8,-3,1)$	$(6,1,4)$	$(13,1,-1)$	$(-3,11,0)$
2.20	$(4,-1,3)$	$(1,7,2)$	$(2,1,0)$	$(5,-6,2)$	$(6,1,6)$
2.21	$(1,8,-3)$	$(7,5,0)$	$(6,1,6)$	$(0,1,-1)$	$(2,-7,3)$
2.22	$(3,8,1)$	$(9,1,-10)$	$(11,7,0)$	$(2,1,5)$	$(7,6,-1)$
2.23	$(0,-1,3)$	$(1,8,-1)$	$(2,-3,6)$	$(3,0,-4)$	$(5,2,-5)$
2.24	$(1,2,5)$	$(7,-9,1)$	$(3,-2,1)$	$(1,1,2)$	$(4,2,0)$
2.25	$(5,6,4)$	$(0,1,0)$	$(2,1,-1)$	$(3,0,-1)$	$(-4,2,5)$
2.26	$(1,4,-1)$	$(1,2,-4)$	$(0,3,4)$	$(1,2,-4)$	$(7,-8,9)$
2.27	$(0,8,2)$	$(1,3,-1)$	$(4,2,-3)$	$(3,7,5)$	$(6,4,-6)$
2.28	$(1,-2,5)$	$(3,-6,2)$	$(7,8,1)$	$(3,9,-2)$	$(2,4,7)$
2.29	$(8,5,-1)$	$(3,-2,0)$	$(9,12,1)$	$(1,-4,5)$	$(1,-1,2)$
2.30	$(3,-4,0)$	$(0,1,4)$	$(4,5,7)$	$(3,7,-1)$	$(-3,1,2)$

3-тапсырма. A нүктесі және қисықтың a, b жартыөстері, D түзуінің теңдеуі берілген.

а) диаметрі OA кесіндісі болатын шеңбердің теңдеуін жазыңыз. Сызбасын сызыңыз;

ә) жарты өстері a және b болатын эллипстің канондық теңдеуін жазыңыз. Оның фокустарын, эксцентриситетін табыңыз. Сызбасын сызыңыз;

б) нақты өсі a және жорамал өсі b болатын гиперболаның канондық теңдеуін жазыңыз. Оның фокустарын, эксцентриситетін, асимптоталарын табыңыз. Сызбасын сызыңыз;

в) нақты өсі b және жорамал өсі a болатын гиперболаның канондық теңдеуін жазыңыз. Оның фокустарын, эксцентриситетін, асимптоталарын табыңыз. Сызбасын сызыңыз;

д) директрисасы D, төбесі координаталар басында жатқан параболаның канондық теңдеуін жазыңыз. Оның фокустарын, эксцентриситетін табыңыз. Сызбасын сызыңыз.

№	A	a	b	D	№	A	a	b	D
3.1	$(5,-2)$	8	1	$x=7$	3.16	$(7,4)$	3	7	$y=-5$
3.2	$(5,3)$	2	6	$y=-5$	3.17	$(-9,0)$	6	4	$x=-7$
3.3	$(-4,7)$	4	2	$x=4$	3.18	$(8,12)$	5	2	$y=5$
3.4	$(1,9)$	1	8	$y=3$	3.19	$(1,4)$	2	4	$x=4$
3.5	$(-1,5)$	3	2	$x=-1$	3.20	$(-3,0)$	8	6	$y=-7$
3.6	$(0,4)$	6	7	$y=1$	3.21	$(4,1)$	5	1	$x=-9$
3.7	$(8,3)$	5	6	$x=8$	3.22	$(2,6)$	1	8	$y=8$
3.8	$(-9,2)$	4	1	$y=-9$	3.23	$(-4,8)$	7	9	$x=1$
3.9	$(3,4)$	2	3	$x=-6$	3.24	$(-2,-5)$	1	4	$y=-10$
3.10	$(6,-3)$	7	8	$y=9$	3.25	$(2,-9)$	3	5	$x=8$
3.11	$(1,0)$	9	2	$x=2$	3.26	$(3,1)$	2	4	$y=7$
3.12	$(5,-4)$	1	7	$y=-12$	3.27	$(2,6)$	6	1	$x=-4$
3.13	$(2,5)$	6	1	$x=-3$	3.28	$(10,0)$	2	7	$y=-8$
3.14	$(1,3)$	7	5	$y=4$	3.29	$(1,1)$	9	1	$x=3$
3.15	$(-2,5)$	8	3	$x=8$	3.30	$(-2,3)$	2	7	$y=3$

4-тапсырма. Екінші ретті беттің түрін анықтаңыз және сызбасын сызыңыз.

4.1	$-\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1$	4.2	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=z$
4.3	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$	4.4	$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=-z$
4.5	$x^2+y^2+z^2=1$	4.6	$-\frac{z^2}{6}=4y$
4.7	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{1}=1$	4.8	$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{4}=2y$
4.9	$x^2+z^2=4$	4.10	$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{1}=1$

4.11	$-\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=-1$	4.12	$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{1}=1$
4.13	$x^2+\frac{y^2}{2}+z^2=1$	4.14	$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{5}=1$
4.15	$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=z$	4.16	$-x^2+y^2+z^2=-1$
4.17	$\frac{x^2}{3}+\frac{z^2}{4}=y$	4.18	$\frac{x^2}{3}-\frac{z^2}{6}=1$
4.19	$x^2+y^2+z^2=16$	4.20	$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{2}=1$
4.21	$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=2z$	4.22	$-\frac{z^2}{6}=4y$
4.23	$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{1}=1$	4.24	$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$
4.25	$\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$	4.26	$x^2+z^2=5$
4.27	$\frac{x^2}{3}=3z$	4.28	$x^2+z^2=4y$
4.29	$y^2+\frac{z^2}{9}=6x$	4.30	$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1$

5-тапсырма. Екінші ретті қисықтың теңдеуін канондық түрге келтіріп, сызбасын сызыңыз.

5.1	$-16-4x-64y-64=0$	5.2	$x^2+y^2+8x-12y+20=0$
5.3	$x^2-y^2-4y-4=0$	5.4	$-y^2+12x-2y-25=0$
5.5	$-3y^2+2x-12y+30=0$	5.6	$9x^2-16y^2-36x-64y-127=0$
5.7	$9x^2-y^2-18x-6y-10=0$	5.8	$-y^2+8x-2y-9=0$
5.9	$4y^2+8x+16y+30=0$	5.10	$5x^2+9y^2+30x+18y+9=0$
5.11	$x^2+y^2-2x+8y+9=0$	5.12	$y^2-8x+8y+32=0$
5.13	$x^2-4y^2-2x-24y-64=0$	5.14	$4x^2+8x+2y+30=0$
5.15	$4y^2+8x+12y+10=0$	5.16	$y^2+4x+8y+16=0$
5.17	$x^2+6x-2y+30=0$	5.18	$3x^2-4y^2+18x+20=0$
5.19	$9x^2+10y^2+40y-50=0$	5.20	$4y^2-2x+8y+28=0$
5.21	$16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$	5.22	$x^2+9y^2-40x+36y+100=0$
5.23	$x^2+6x-2y+5=0$	5.24	$4x^2+8x-6y+28=0$

5.25	$-5y^2+x+20y-6=0$	5.26	$x^2+2y^2-2x+8y+7=0$
5.27	$2x^2-2y^2+2x=0$	5.28	$x^2+8x-2y-16=0$
5.29	$9x^2+4y^2-54x-32y+109=0$	5.30	$x^2+8x+2y+20=0$

Типтік нұсқаның шешуі.

1-тапсырма. $A(2,-1)$, $B(-3,2)$ нүктелері және $L_1: x-3y+2=0$ түзуі берілген.

а) A және B нүктелері арқылы өтетін L_2 түзудің теңдеуін жазыңыз;

ә) L_2 түзуінің жалпы теңдеуін, бұрыштық коэффициентімен берілген теңдеуін, кесіндідегі теңдеуін, параметрлік теңдеуін жазыңыз;

б) L_1 және L_2 түзулері арасындағы бұрыштың косинусын табыңыз;

в) A нүктесі арқылы L_2 түзуіне перпендикуляр L_3 түзудің теңдеуін жазыңыз;

г) B нүктесі арқылы L_1 түзуіне параллель L_4 түзудің теңдеуін жазыңыз.

Шешуі:

а) берілген (x_1, y_1), (x_2, y_2) нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуі: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, сондықтан $\frac{x-2}{-3-2}=\frac{y-(-1)}{2-(-1)} \Rightarrow \quad L_2: \frac{x-2}{-5}=\frac{y+1}{3}$;

ә) түзудің жалпы теңдеуі: $Ax+By+C=0$.

$\frac{x-2}{-5}=\frac{y+1}{3}$, $3(x-2)=5(y+1)$, $3x-6=-5y-5$, $3x+5y-1=0$.

Түзудің бұрыштық коэффициентімен берілген теңдеуі: $y=kx+b$.

$3x+5y-1=0$, $5y=-3x+1$, $y=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}$.

Түзудің кесіндідегі теңдеуі: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

$3x+5y-1=0 \Rightarrow 3x+5y=1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{3}}+\frac{y}{\frac{1}{5}}=1$.

Түзудің параметрлік түрдегі теңдеуі: $x=mt+x_0$; $y=nt+y_0$.

$\frac{x-2}{-5}=\frac{y+1}{3} \Rightarrow \frac{x-2}{-5}=t, \quad \frac{y+1}{3}=t \Rightarrow x=-5t+2, \quad y=3t-1$;

б) $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ түзулері арасындағы бұрыштың косинусы:

$$\cos(L_1 \hat{} L_2)=\frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}; \quad L_1: x-3y+2=0; \quad L_2: 3x+5y-1=0;$$

$$\cos\left(L_1 \hat{\ } L_2\right) = \frac{1\cdot 3 + (-3)\cdot 5}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}\cdot\sqrt{3^2 + 5^2}} = \frac{-12}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{34}} = -\frac{12}{\sqrt{340}} = -0{,}651;$$

в) $(x_0,\ y_0)$ нүктесі арқылы берілген $y = kx + b$ түзуіне перпендикуляр түзудің теңдеуі: $y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)$.

$L_2 : y = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$, сондықтан $L_3 : y - (-1) = -\frac{1}{-\frac{3}{5}}(x - 2)$, $y + 1 = \frac{5}{3}(x - 2)$,

$3y + 3 = 5x - 10 \Rightarrow \quad 5x - 3y - 13 = 0;$

г) $(x_0,\ y_0)$ нүктесі арқылы берілген $y = kx + b$ түзуіне параллель түзудің теңдеуі: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$L_1 : x - 3y + 2 = 0,\ \ 3y = -x - 2,\ \ y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3},$

$L_4 : y - 2 = -\frac{1}{3}(x - (-3)),\ \ 3y - 6 = -x - 3,\ \ x + 3y - 3 = 0$.

2-тапсырма. $A_1(4, -3, 2)$, $A_2(9, -5, 6)$, $A_3(1, -2, 7)$, $A_4(-5, 1, 0)$, $A_5(2, 6, 1)$ нүктелері берілген.

а) A_1, A_2, A_3 нүктелері арқылы өтетін P жазықтықтың теңдеуін жазыңыз;

ә) P жазықтықтың жалпы теңдеуін, кесіндідегі теңдеуін жазыңыз;

б) P жазықтығының нормаль векторын табыңыз;

в) A_4, A_5 нүктелері арқылы өтетін L түзуінің канондық және параметрлік теңдеулерін жазыңыз;

г) P жазықтығы мен L түзуінің арасындағы бұрыштың синусын табыңыз.

Шешуі:

а) $(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $(x_3;\ y_3;\ z_3)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтық теңдеуі:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Біздің жағдайда P: $\begin{vmatrix} x - 4 & y + 3 & z - 2 \\ 5 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$;

ә) осы анықтауышты бірінші қатардың элементтеріне жіктеу арқылы есептейміз:

$$(x - 4)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - (y + 3)\cdot\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + (z - 2)\cdot\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-14(x-4)-37(y+3)-(z-2)=0.$$

Жазықтықтың теңдеуін $Ax+By+Cz+D=0$, мұндағы A, B, C – нормаль вектордың координаталары, жалпы түрде жазамыз:

$$14x+37y+z+53=0.$$

P жазықтығының кесіндідегі теңдеуін жазамыз:

$$\frac{14x}{-53}+\frac{37y}{-53}+\frac{z}{-53}=1; \qquad -\frac{x}{\frac{53}{14}}-\frac{y}{\frac{53}{37}}-\frac{z}{-53}=1;$$

б) P жазықтығының жалпы теңдеуінен нормаль вектордың координаталарын анықтаймыз: $\overline{n}=(14,\ 37,\ 1)$;

в) $(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің канондық теңдеуі: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$. Демек, $L:\frac{x+5}{7}=\frac{y-1}{5}=\frac{z}{1}$.

Түзудің параметрлік теңдеуі: $L:\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \\ z=pt+z_0 \end{cases}$. Демек, $L:\begin{cases} x=7t-5 \\ y=5t+1 \\ z=t \end{cases}$;

г) $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ түзуі мен $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтығы арасындағы бұрыштың синусы: $\sin(L,\hat{}\ P)=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$,

демек, $\sin(L,\hat{}\ P)=\frac{14\cdot 7+37\cdot 5+1\cdot 1}{\sqrt{14^2+37^2+1^2}\cdot\sqrt{7^2+5^2+1^2}}=\frac{284}{\sqrt{117450}}\approx 0{,}8287$.

3-тапсырма. $A(-4,6)$ нүктесі, қисықтың $a=3, b=7$ жарты өстері және $D: y=-5$ түзуі берілген.

а) диаметрі OA кесіндісі болатын шеңбердің теңдеуін жазыңыз. Сызбасын сызыңыз;

ә) жарты өстері a және b болатын эллипстің канондық теңдеуін жазыңыз. Оның фокустарын, эксцентриситетін табыңыз. Сызбасын сызыңыз;

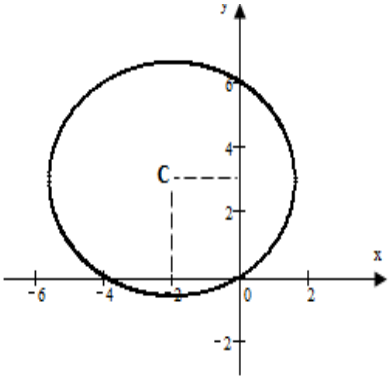
б) нақты өсі a және жорамал өсі b болатын гиперболаның канондық теңдеуін жазыңыз. Оның фокустарын, эксцентриситетін, асимптоталарын табыңыз. Сызбасын сызыңыз;

в) нақты өсі b және жорамал өсі a болатын гиперболаның канондық теңдеуін жазыңыз. Оның фокустарын, эксцентриситетін, асимптоталарын табыңыз. Сызбасын сызыңыз;

д) директрисасы D, төбесі координаталар басында жатқан параболаның канондық теңдеуін жазыңыз. Оның фокустарын, эксцентриситетін табыңыз. Сызбасын сызыңыз.

Шешуі:

а) OA – диаметр, демек шеңбердің центрі OA кесіндісінің ортасы: $C(-2,3)$, шеңбердің радиусы $|OC|$, яғни $R=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$. Центрі (x_0,y_0) нүктеде, радиусы R шеңбердің теңдеуі $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$. Демек, $(x+2)^2+(y-3)^2=13$. $(x+2)^2+(y-3)^2=13$ функциясының графигі 1-суретте көрсетілген;



1 сурет

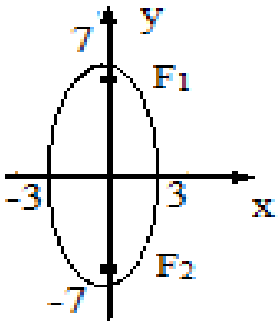
б) эллипстің канондық теңдеуі: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Демек, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$.

$b \succ a$ жағдайда: $F_1(0;c)$; $F_2(0;-c)$; $c=\sqrt{b^2-a^2}$; $\varepsilon=\frac{c}{b}$.

Демек, $c=\sqrt{49-9}=\sqrt{40}$, $F_1(0;\sqrt{40})$, $F_2(0;-\sqrt{40})$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{40}}{7}\prec 1$.

$a \succ b$ жағдайда $c=\sqrt{a^2-b^2}$, $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$, $\varepsilon=\frac{c}{a}$.

Сызбасы 2- суретте келтірілген;



2 сурет

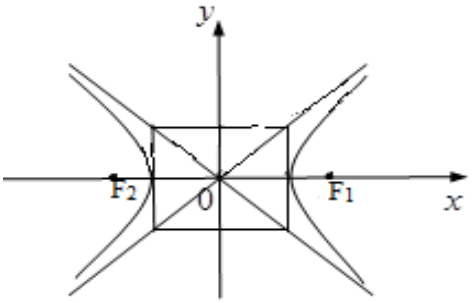
в) нақты өсі a, жорамал өсі b гиперболаның канондық теңдеуі:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; $c=\sqrt{a^2+b^2}$; $F_1(c;0)$; $F_2(-c;0)$; $\varepsilon=\frac{c}{a}$; $y=\pm\frac{b}{a}x$ – асимптоталары.

Демек: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{49}=1;\ c=\sqrt{9+49}=\sqrt{58};$

$F_1\left(\sqrt{58};0\right); F_2\left(-\sqrt{58};0\right); \varepsilon=\frac{\sqrt{58}}{3}\succ 1;\ y=\pm\frac{7}{3}x.$

Гипербола сызу үшін қабырғалары $x=\pm a$, $y=\pm b$ $(x=\pm 3,\ y=\pm 7)$ тік төртбұрыш сызамыз. Гиперболаның төбелері осы тіктөртбұрыштың Ox өсімен (гиперболаның нақты өсі) қиылысу нүктелерінде, ал асимптоталары – тіктөртбұрыштың диагональдары. Сызбасы 3- суретте келтірілген;



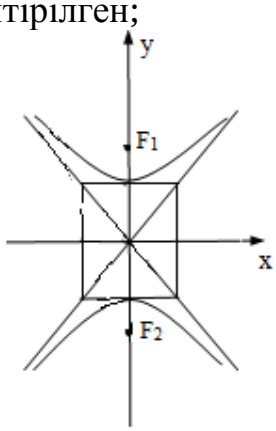
3 сурет

г) нақты өсі b, жорамал өсі a гиперболаның канондық теңдеуі:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1;\ c=\sqrt{a^2+b^2};\ F_1(0;c);\ F_2(0;-c);\ \varepsilon=\frac{c}{b}$; $y=\pm\frac{b}{a}x-$ асимптоталары;

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{49}=-1,\ c=\sqrt{9+49}=\sqrt{58},\ F_1\left(0;\sqrt{58}\right),\ F_2\left(0;-\sqrt{58}\right),\ \varepsilon=\frac{\sqrt{58}}{7}\succ 1,\ y=\pm\frac{7}{3}x.$

Сызбасы 4- суретте келтірілген;

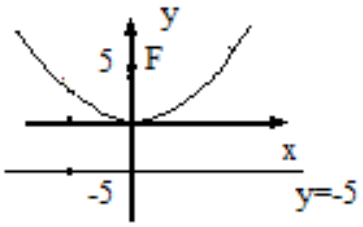


4 сурет

д) егер директриса теңдеуі $y=-\frac{p}{2}$ болса, онда Ox параболаның симметрия өсі болады және теңдеуі $x^2=2py$, фокусы $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$. Егер

директриса теңдеуі $x=-\frac{p}{2}$ болса, онда Oy параболаның симметрия өсі болады және теңдеуі $y^2=2px$, фокусы $F\left(\frac{p}{2};0\right)$.

$D: y=-5$, сондықтан $-\frac{p}{2}=-5,\ p=10$, парабол теңдеуі $x^2=2\cdot 10y,\ x^2=20y,\ F(0;5)$, $\varepsilon=1$.Сызбасы 5- суретте келтірілген;



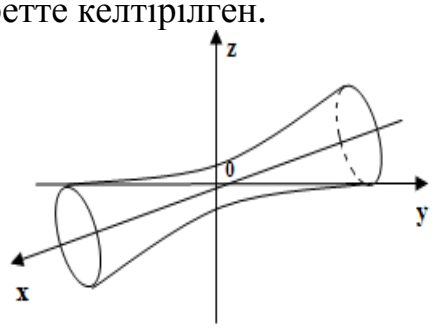
5 сурет

4-тапсырма. Екінші ретті беттің түрін анықтаңыз және сызбасын сызыңыз:

а) $-\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1$; ә) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{4}=0$.

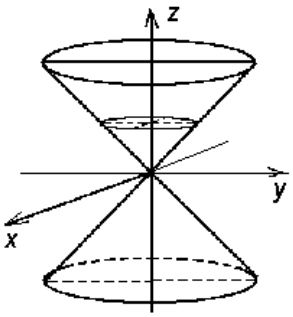
Шешуі:

а) $-\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1$ – бірқуысты гиперболоид, симметрия өсі Ox. Оның сұлбалық сызбасы 6- суретте келтірілген.



6 сурет

ә) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{4}=0$ –конустың канондық теңдеуі, симметрия өсі Oz. Оның сұлбалық сызбасы 7- суретте келтірілген.



7 сурет

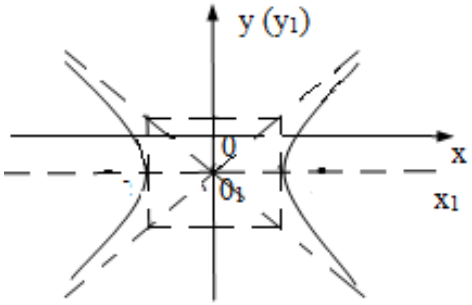
5-тапсырма. Екінші ретті қисықтың теңдеуін канондық түрге келтіріп, сызбасын сызыңыз: $x^2 - 2y^2 - 4y - 6 = 0$.

Шешуі:

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ – симметрия центрі (x_0, y_0) нүктесі болатын эллипс. $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1$ – симметрия центрі (x_0, y_0) нүктесі болатын гипербола. $(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$, $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)^2$ – төбесі (x_0, y_0) нүктеде жатқан парабола. Қисықты канондық түрге келтіру үшін толық квадратын ажыратамыз:

$x^2 - 2(y^2 + 2y + 1 - 1) - 6 = 0,\quad x^2 - 2(y+1)^2 - 2\cdot(-1) - 6 = 0,\quad x^2 - 2(y+1)^2 = 4$

$\frac{x^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{2} = 1$, симметрия центрі $(0, -1)$ нүктесі, жарты өстері $a = 2$, $b = \sqrt{2}$ болатын гипербола. Осьтерді параллель көшіреміз: $x = x_1$, $y + 1 = y_1$, сонда теңдеу $\frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{2} = 1$ түрге келеді. График 8- суретте келтірілген.



8 сурет

№3 есептеу-сызба жұмысы. Математикалық анализге кіріспе

Теориялық сұрақтар.

1. Жиындар. Оларға жасалатын амалдар.
2. Контрапозиция заңы.
3. Функция. Элементар функциялар.
4. Монотонды; периодты функциялар.
5. Күрделі функция, параметрлік түрде берілген функция.
6. Функцияның нүктедегі шегі, біржақты шектер.
7. Ақырсыз үлкен және ақырсыз аз функциялар.
8. Эквивалентті функцияларжәне оларды функциялардың шегін табуға қолдану.
9. Функцияның үзіліссіздігі. Үзіліс нүктелері және оның түрлері.
10. Тамаша шектер.

Тапсырмалар.

1-тапсырма. Шекті табыңыз.

1.1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}$	1.2 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+4x-21}$	1.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+10x^2+24x}{2x^3+6x^2+4}$
1.4 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-15x-42}{x^2-4}$	1.5 $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{2x^2+9x-5}{8x^2-6x+1}$	1.6 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{6x-8-x^2}{x^2+2x-24}$
1.7 $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2-5x-2}{6x^2-x-1}$	1.8 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-7x+10}$	1.9 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-6x-7}{-x^2+18x+17}$
1.10 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^3-27}$	1.11 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x+3}$	1.12 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x-1}$
1.13 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{x+2}$	1.14 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-14x+6}{x-3}$	1.15 $\lim\limits_{x\to -1/2}\dfrac{6x^2+x-1}{x+1/2}$
1.16 $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{6x^2-x-1}{x-1/2}$	1.17 $\lim\limits_{x\to -1/3}\dfrac{9x^2-1}{x+1/3}$	1.18 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x-2}$
1.19 $\lim\limits_{x\to -1/3}\dfrac{3x^2-2x-1}{x+1/3}$	1.20 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+8x+1}{x+1}$	1.21 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$
1.22 $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x-1/2}$	1.23 $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{6x^2-5x+1}{x-1/3}$	1.24 $\lim\limits_{x\to -7/5}\dfrac{10x^2+9x-7}{x+7/5}$
1.25 $\lim\limits_{x\to -7/2}\dfrac{2x^2+13x+21}{2x+7}$	1.26 $\lim\limits_{x\to 5/2}\dfrac{2x^2-9x+10}{2x-5}$	1.27 $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{6x^2+x-1}{x-1/3}$

1.28 $\lim\limits_{x\to -1/2}\dfrac{6x^2-75x-39}{x+1/2}$	1.29 $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{2x^2+15x+7}{x+7}$	1.30 $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{2x^2-13x-24}{x-8}$

2- тапсырма. Шекті табыңыз.

2.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^5-7x^2+2}{3x^5+2x^2-6x}$	2.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x+2}{x^2-3x^2+1}$	2.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+3x-5}{x^6-2x^2+4}$
2.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^7-9x}{9x^5-4x^2-5}$	2.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-x-12}{x^3-x-7}$	2.6 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^5-7x-7}{2x^7+2x-2}$
2.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-6x^2-4}{x^3-2x^3+1}$	2.8 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9x^7-2x-6}{3x^7+3x-3}$	2.9 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^6-5x+2}{x^2-2x+2}$
2.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-2x^2-3x}{12x^3-5}$	2.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x+4x^6}{5x^2-6x+7}$	2.12 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+4x+7}{x^4+4x^2-10}$
2.11 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5-4x^2+28x}{5x^5+3x^2-1}$	2.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+7x-1}{7x^4+2x+5}$	2.15 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-2x^2-2x}{3x^2+3x}$
2.16 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^2+12x+16}{4x^2+5x+6}$	2.17 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^3-x^2+2}{8x^4+x-4}$	2.18 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-x-14}{6x^2+9x-11}$
2.19 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^6+x^2+x}{9x^6+3x-2}$	2.20 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4-8x^2-2}{2x^2-7x-5}$	2.21 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2+8x+2}{x^4+6x^2-9}$
2.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+12x+6}{4x^2-8x+4}$	2.23 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^8+x^6+x^4}{5x^4+13x^2-6x}$	2.24 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{11x^2+2x+2}{3x^3-3x+4}$
2.25 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^4+3x^3+x^2}{-x^2-x-15}$	2.26 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^4+6x^3-x}{x+x^2-x^3}$	2.27 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^8-3x^3+2x}{x^3+8x^2+17}$
2.28 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+5x^5-1}{-8x^7-6x^5+x^3}$	2.29 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+12x^2-9}{21x^2+3x+18}$	2.30 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-6x-6}{2x^5+13x^3-7}$

3-тапсырма. Шекті табыңыз.

3.1 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+2x-24}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$	3.2 $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{3x^2+6x-24}$	3.3 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$
3.4 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$	3.5 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{4+x}}{3x^2-4x+1}$	3.6 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-15x+10}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$
3.7 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$	3.8 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$	3.9 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$
3.10 $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$	3.11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$	3.12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x}$

3.13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$	3.14 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$	3.15 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$
3.16 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$	3.17 $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$	3.18 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$
3.19 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$	3.20 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$	3.21 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$
3.22 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$	3.23 $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$	3.24 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$
3.25 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$	3.26 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$	3.27 $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}$
3.28 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+8}-3}$	3.29 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{3x^2+3x}$	3.30 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$

4-тапсырма. Шекті табыңыз.

4.1 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^x$	4.2 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin 2x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{1}{x}}$	4.3 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{9x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x}\right)^{3x}$
4.4 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{tg3x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{5x}$	4.5 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+8x)^{\frac{4}{x}}$	4.6 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg9x}{18x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$
4.7 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12x}{\sin 4x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{6/x}$	4.8 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\sin 4x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-11x)^{\frac{8}{x}}$	4.9 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x^2}{1-\cos 3x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{3x}$
4.10 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{6x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{4x}$	4.11 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{14x^2}{1-\cos x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{8x}$	4.12 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{tg7x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-6}{x}\right)^{6x}$
4.13 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x}{\sin 3x}$,	4.14 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{tg4x}$,	4.15 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{18x}{tg6x}$,

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{11}{x}\right)^{4x}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{x}\right)^{6x}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x/10}$
4.16 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{arctg\,9x}{6x}$, б) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{5x}{4}\right)^{2/x}$	4.17 а) $\lim\limits_{x\to0} x\,ctg\,9x$, б) $\lim\limits_{x\to0}(1-13x)^{3/x}$	4.18 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 9x}{\sin 4x}$, б) $\lim\limits_{x\to0}(1-9x)^{\frac{9}{x}}$
4.19 а) $\lim\limits_{x\to0}\sin 7x\,ctg\,7x$, б) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{5/x}$	4.20 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 5x}{10x}$, б) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{8/x}$	4.21 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 7x}{\sin 14x}$, б) $\lim\limits_{x\to0}(1+9x)^{\frac{10}{x}}$
4.22 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{8x}{arctg\,4x}$, б) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{3x}{7}\right)^{\frac{1}{x}}$	4.23 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 9x}{2x}$, б) $\lim\limits_{x\to0}(1-4x)^{4/x}$	4.24 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{tg\,6x}$, б) $\lim\limits_{x\to0}(1+8x)^{\frac{3}{x}}$
4.25 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{\sin 7x}$, б) $\lim\limits_{x\to0}(1-6x)^{2/x}$	4.26 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{4x}{tg\,9x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{7x/2}$	4.27 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{5x}{\sin 8x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{9x}$
4.28 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{4x}{\sin 6x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{9}{x}\right)^{3x}$	4.29 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{tg\,8x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}$	4.30 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{9x}{tg\,2x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{3x}\right)^{6x}$

5-тапсырма. Функцияны үзіліссіздікке зерттеңіз.

5.1 а) $f(x)=3^{\frac{1}{x+4}}$, б) $g(x)=\frac{9}{4+x}$	5.2 а) $f(x)=2^{\frac{1}{x-1}}$, б) $g(x)=\frac{1}{8-x}$	5.3 а) $f(x)=6^{\frac{1}{x+3}}$, б) $g(x)=\frac{1}{x-10}$
5.4 а) $f(x)=9^{\frac{1}{x-5}}$, б) $g(x)=\frac{1}{x-13}$	5.5 а) $f(x)=5^{\frac{1}{9-x}}$, б) $g(x)=\frac{4}{x-3}$	5.6 а) $f(x)=4^{\frac{1}{x+7}}$, б) $g(x)=\frac{7}{x+21}$
5.7 а) $f(x)=7^{\frac{1}{3-2x}}$,	5.8 а) $f(x)=8^{\frac{1}{3x-2}}$,	5.9 а) $f(x)=2^{\frac{1}{5-2x}}$,

б) $g(x)=\dfrac{2}{3x+4}$	б) $g(x)=\dfrac{6}{7-3x}$	б) $g(x)=\dfrac{5}{2x+9}$
5.10 а) $f(x)=12^{\frac{1}{x+4}}$, б) $g(x)=\dfrac{7}{7-2x}$	5.11 а) $f(x)=6^{\frac{1}{3-4x}}$, б) $g(x)=\dfrac{6}{x+5}$	5.12 а) $f(x)=11^{\frac{1}{x+6}}$, б) $g(x)=\dfrac{13}{20+4x}$
5.13 а) $f(x)=9^{\frac{2}{x}}$, б) $g(x)=\dfrac{6}{5+2x}$	5.14 а) $f(x)=10^{\frac{1}{x+5}}$, б) $g(x)=\dfrac{1}{9-3x}$	5.15 а) $f(x)=4^{\frac{1}{4+x}}$, б) $g(x)=\dfrac{2}{7+x}$
5.16 а) $f(x)=3^{\frac{1}{5x+3}}$, б) $g(x)=\dfrac{4}{8+9x}$	5.17 а) $f(x)=5^{\frac{1}{5+x}}$, б) $g(x)=\dfrac{13}{2x-1}$	5.18 а) $f(x)=16^{\frac{7}{2x}}$, б) $g(x)=\dfrac{9}{9+18x}$
5.19 а) $f(x)=16^{\frac{1}{9-x}}$, б) $g(x)=\dfrac{14}{6x-3}$	5.20 а) $f(x)=17^{\frac{1}{5+20x}}$, б) $g(x)=\dfrac{3}{6-4x}$	5.21 а) $f(x)=14^{\frac{1}{6-x}}$, б) $g(x)=\dfrac{3}{2+x}$
5.22 а) $f(x)=15^{\frac{3}{4-x}}$, б) $g(x)=\dfrac{1}{6-2x}$	5.23 а) $f(x)=5^{\frac{1}{8-x}}$, б) $g(x)=\dfrac{10}{x-3}$	5.24 а) $f(x)=7^{\frac{4}{2+x}}$, б) $g(x)=\dfrac{5}{8-x}$
5.25 а) $f(x)=13^{\frac{1}{7-x}}$, б) $g(x)=\dfrac{3}{8-x}$	5.26 а) $f(x)=4^{\frac{9}{4+x}}$, б) $g(x)=\dfrac{14}{x+7}$	5.27 а) $f(x)=12^{\frac{1}{1-x}}$, б) $g(x)=\dfrac{7}{12-6x}$
5.28 а) $f(x)=9^{\frac{9}{9-x}}$, б) $g(x)=\dfrac{1}{3x+5}$	5.29 а) $f(x)=6^{\frac{1}{x+11}}$, б) $g(x)=\dfrac{4}{4-x}$	5.30 а) $f(x)=7^{\frac{2}{4x-5}}$, б) $g(x)=\dfrac{19}{x+11}$

6-тапсырма. Шекті табыңыз.

6.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$	6.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$	6.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{3x}$	6.4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-1}{4x+1}\right)^{3x-1}$
6.5	6.6	6.7	6.8

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)^{2x+1}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{5x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{4x}$
6.9 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+3}{2x-4}\right)^{x+2}$	6.10 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^{x-1}$	6.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-3}{x+4}\right)^{x+3}$	6.12 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{7x+4}\right)^{x}$
6.13 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-5}{3x+4}\right)^{2x}$	6.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{4x-5}\right)^{2x}$	6.15 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{3x+1}\right)^{5x}$	6.16 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-4}{x+6}\right)^{x-1}$
6.17 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{3x+10}\right)^{3x}$	6.18 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{x+4}\right)^{6x+1}$	6.19 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+3}{3x-1}\right)^{2x}$	6.20 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x+5}{x-10}\right)^{5x}$
6.21 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+7}{x+4}\right)^{4x}$	6.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{4x+5}\right)^{3x}$	6.23 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5x-7}{x+6}\right)^{2x}$	6.24 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-4x}{2-x}\right)^{6x}$
6.25 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-2x}{3-x}\right)^{-x}$	6.26 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4+3x}{5+x}\right)^{7x}$	6.27 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-1}{2x+5}\right)^{3x}$	6.28 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{2-10x}\right)^{5x}$
6.29 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{9x-4}\right)^{2x}$	6.30 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+5}{4x-2}\right)^{3x}$		

7-тапсырма. Функцияны үзіліссіздікке зерттеп, графигін салыңыз.

7.1 $f(x)=\begin{cases} x+4, & x\prec -1, \\ x^2+2, & -1\le x\le 1, \\ 2x, & x\succ 1. \end{cases}$	7.2 $f(x)=\begin{cases} x+4, & x\le 0, \\ (x+1)^2, & 0\prec x\le 2, \\ -x+4, & x\succ 2. \end{cases}$	7.3 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1, \\ x^2+1, & -1\prec x\le 1, \\ -x+3, & x\succ 1. \end{cases}$
7.4 $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0, \\ -(x-1)^2, & 0\prec x\prec 2, \\ x-3, & x\ge 2. \end{cases}$	7.5 $f(x)=\begin{cases} -2(x+1), & x\le -1, \\ (x+1)^2, & -1\prec x\prec 0, \\ x, & x\ge 0. \end{cases}$	7.6 $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0, \\ x^2, & 0\prec x\le 2, \\ x+1, & x\succ 2. \end{cases}$
7.7	7.8	7.9

$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1,\\ 2x, & 1\prec x\le 3,\\ x+2, & x\succ 3.\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases} x-3, & x\prec 0,\\ x+1, & 0\le x\le 4,\\ x+3, & x\succ 4.\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}, & x\le 0,\\ 0, & 0\prec x\le 2,\\ x-2, & x\succ 2.\end{cases}$
7.10 $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & x\le 0,\\ x, & 0\prec x\le 1,\\ x+2, & x\succ 1.\end{cases}$	7.11 $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\prec 0,\\ x, & 0\le x\le 2,\\ 0, & x\succ 2.\end{cases}$	7.12 $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le \pi/2,\\ 0, & \pi/2\prec x\prec \pi,\\ 2, & x\ge \pi.\end{cases}$
7.13 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 0,\\ x^2, & 0\prec x\prec 2,\\ 2x, & x\ge 2.\end{cases}$	7.14 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\prec 0,\\ x^2-1, & 0\le x\prec 1,\\ -x, & x\ge 1.\end{cases}$	7.15 $f(x)=\begin{cases} -x, & x\prec 0,\\ x^2+1, & 0\le x\prec 2,\\ 1+x, & x\ge 2.\end{cases}$
7.16 $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 0,\\ 1, & 0\prec x\le 2,\\ x^2-2, & x\succ 2.\end{cases}$	7.17 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\prec 0,\\ \sin x, & 0\le x\prec \pi,\\ 3, & x\ge \pi.\end{cases}$	7.18 $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x\prec -1,\\ x^2+1, & -1\le x\le 2,\\ 2x, & x\succ 2.\end{cases}$
7.19 $f(x)=\begin{cases} 1, & x\le 0,\\ 2^x, & 0\prec x\le 2,\\ x+3, & x\succ 2.\end{cases}$	7.20 $f(x)=\begin{cases} -x+2, & x\le -2,\\ x^3, & -2\prec x\le 1,\\ 2, & x\succ 1.\end{cases}$	7.21 $f(x)=\begin{cases} 3x+4, & x\le -1,\\ x^2-2, & -1\prec x\prec 2,\\ x, & x\ge 2.\end{cases}$
7.22 $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1,\\ (x-2)^2, & 1\prec x\prec 3,\\ -x+6, & x\ge 3.\end{cases}$	7.23 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\prec 1,\\ x^2+2, & 1\le x\le 2,\\ -2x, & x\succ 2.\end{cases}$	7.24 $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\prec -1,\\ x-1, & -1\le x\le 3,\\ -x+5, & x\succ 3.\end{cases}$
7.25 $f(x)=\begin{cases} x, & x\le -2,\\ -x+1, & -2\prec x\le 1,\\ x^2-1, & x\succ 1.\end{cases}$	7.26 $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 0,\\ -x^2+4, & 0\prec x\prec 2,\\ x-2, & x\ge 2.\end{cases}$	7.27 $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1,\\ x^2-1, & -1\prec x\le 2,\\ 2x, & x\succ 2.\end{cases}$
7.28 $f(x)=\begin{cases} -1, & x\prec 0,\\ \cos x, & 0\le x\le \pi,\\ 1-x, & x\succ \pi.\end{cases}$	7.29 $f(x)=\begin{cases} 2, & x\prec -1,\\ 1-x, & -1\le x\le 1,\\ \ln x, & x\succ 1.\end{cases}$	7.30 $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0,\\ x^3, & 0\prec x\le 2,\\ x+4, & x\succ 2.\end{cases}$

Типтік нұсқаның шешуі.

1-тапсырма. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$.

Шешуі:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+2)(5x+3)}{(x+2)(3x-4)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x+3}{3x-4}=\frac{7}{10}=0{,}7.$$

2-тапсырма. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}$.

Шешуі:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}.=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5\left(2+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^4}\right)}{x^2\left(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(2+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^4}\right)}{3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{-\infty}{3}=-\infty.$$

3-тапсырма. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}$.

Шешуі:

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{21+x}-5\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}{\left(x^3-64\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\lim_{x\to4}\frac{21+x-25}{\left(x^3-64\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)\left(x^2+4x+16\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\lim_{x\to4}\frac{1}{\left(x^2+4x+16\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\frac{1}{480}.$$

4-тапсырма. Шекті табыңыз:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg9x}{8x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3x}\right)^{5x}$.

Шешуі:

а) бірінші тамаша шекті қолданамыз:

$$\lim_{x\to0}\frac{tg9x}{8x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 9x}{\cos 9x}}{8x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 9x}{8x}\cdot\frac{1}{\cos 9x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 9x}{9x}\cdot\frac{9}{8\cos 9x}=$$

$$=1\cdot\frac{9}{8}=\frac{9}{8};$$

б) екінші тамаша шекті қолданамыз:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{5x}=\left|1^{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x}{2x-3}-1\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-2x+3}{2x-3}\right)^{5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{3}{2x-3}\cdot 5x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3}{2x-3}\cdot 5x}=e^{\frac{15}{2}}.$$

5-тапсырма. Функцияны үзіліссіздікке зерттеңіз:

а) $f(x)=9^{\frac{5}{8-x}}$; б) $f(x)=\dfrac{4}{5+3x}$.

Шешуі:

а) $f(x)=9^{\frac{5}{8-x}}$ функциясы $x\in(-\infty;8)\cup(8;+\infty)$ аралықтарында анықталған, сондықтан үзіліс $x_0=8$ болуы мүмкін. Функцияның осы нүктедегі біржақты шектерін анықтаймыз:

$$f(8-0)=\lim_{x\to 8-0}9^{\frac{5}{8-x}}=9^{\frac{5}{8-(8-0)}}=9^{\frac{5}{+0}}=9^{+\infty}=+\infty;$$

$$f(8+0)=\lim_{x\to 8+0}9^{\frac{5}{8-x}}=9^{\frac{5}{8-(8+0)}}=9^{\frac{5}{-0}}=9^{-\infty}=\frac{1}{9^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0,$$

демек $x_0=8$ – II текті үзіліс нүктесі;

б) $f(x)=\dfrac{4}{5+3x}$ функциясы $x\in(-\infty;-\frac{5}{3})\cup\left(-\frac{5}{3};+\infty\right)$ аралықтарында анықталған, сондықтан үзіліс $x_0=-\frac{5}{3}$ болуы мүмкін. Функцияның осы нүктедегі біржақты шектерін анықтаймыз:

$$f(-\frac{5}{3}-0)=\lim_{x\to-\frac{5}{3}-0}\frac{4}{5+3x}=\frac{4}{5+3\cdot\left(-\frac{5}{3}-0\right)}=\frac{4}{-0}=-\infty;$$

$$f(-\frac{5}{3}+0)=\lim_{x\to-\frac{5}{3}+0}\frac{4}{5+3x}=\frac{4}{5+3\cdot\left(-\frac{5}{3}+0\right)}=\frac{4}{+0}=+\infty,$$

демек $x_0=-\dfrac{5}{3}$ – II текті үзіліс нүктесі.

6-тапсырма. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$.

Шешуі:

$x=\infty$ үшін $\left|\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right|$ түріндегі анықталмағандықты аламыз. Негізіндегі анықталмағандықты айқындау үшін шексіз үлкендердің эквиваленттігін қолданамыз, ал одан кейін көрсеткіштік функцияның

$$a^{\infty}=\begin{cases}0, \text{ егер } a<1 \text{ болса},\\ \infty, \text{ егер } a>1 \text{ болса}\end{cases}$$ қасиетін пайдаланамыз:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}=\left|\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{5x}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}=\left(\frac{2}{5}\right)^{\infty}=\left|\frac{2}{5}<1\right|=0.$$

Әдебиеттер тізімі

1 Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И. Е. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Выш. Шк., 2000. – 303 с.

2 Дүйсек А.К., Қасымбеков С.Қ. Жоғары математика – Алматы: ҚБТУ, 2004. – 440 б.

3 Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Алгебра және геометрия. 5В070400 – Есептеу техникасы және бағдарламалық қамтамасыз ету, 5В070300 – Ақпараттар жүйесі мамандығы бойынша оқитын студенттер үшін. Дәрістер жинағы. - Алматы: АЭжБИ, 2010.

4 Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч.1– М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и Образование, 2003.

5 Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Математикалық талдау. 5В070400 – Есептеу техникасы және бағд.қамт.ету мамандығы б-ша оқитын барлық бөлім студенттері үшін есептеу- граф. жұм.орынд.арн. әдіс. нұсқ..мен тапсырм. -1 бөлім.-Алматы: АЭжБИ, 2009. -34 б.

6 Апатенок Р.Ф., Маркина А.М. Сборник задач по линейной алгебре.- Мн.: Выш. Школа, 2011. – 192 с.

Мазмұны

№1 есептеу-сызба жұмысы. Теориялық сұрақтар..... 3
Тапсырмалар..... 3
Типтік нұсқаның шешуі 14
№2 есептеу-сызба жұмысы. Теориялық сұрақтар 23
Тапсырмалар..... 23
Типтік нұсқаның шешуі..... 28
№3 есептеу-сызба жұмысы. Теориялық сұрақтар..... 35
Тапсырмалар..... 35
Типтік нұсқаның шешуі..... 42
Әдебиеттер..... 45

2018 ж. жиынтық жоспары, реті 168

Абдулланова Жанар Советқалиқызы
Есботаева Эльмира Сұлтанмуратқызы

МАТЕМАТИКА 1

5В070300 - Ақпараттық жүйелер мамандығы студенттеріне арналған есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар

Редактор Ж.Н. Изтелеуова
Стандарттау бойынша маман Н.Қ. Молдабекова

Басуға_____ қол қойылды Пішімі 60х84 1/16
Таралымы 30 дана Баспаханалық қағаз №1
Көлемі 2,8 баспа табақ Тапсырыс Бағасы 1630 тг.

«Алматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірме-көбейткіш бюросы
050013, Алматы, Байтұрсынұлы көшесі, 126