



AUES
Since 1975

**Коммерциялық емес
акционерлік қоғам**

**АЛМАТЫ
ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ
БАЙЛАНЫС
УНИВЕРСИТЕТІ**

Математика және математикалық
үлгілеу кафедрасы

МАТЕМАТИКА I

5B074600 «Ғарыштық техника және технологиялар»
мамандығы студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша
әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар
3 бөлім

Алматы 2019

ҚҰРАСТЫРУШЫЛАР: Б.Ж. Атабай. Математика I. 5B074600 «Ғарыштық техника және технологиялар» мамандығы студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар. 3 бөлім. – Алматы: АЭЖБУ, 2019. -26 б.

5B074600 «Ғарыштық техника және технологиялар» мамандығы студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар 3 бөлім Математика I курсының бағдарламасына сәйкес орындалған.

Жұмыста типтік есептердің шешу жолдары және оларды орындауға қажетті нұсқаулар келтірілген.

Сурет - 2, кесте - 12, әдебиет көр. – 4 атау.

Пікір беруші: аға оқытушы А.А. Абдурахманов

«Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2019 ж. жоспары бойынша басылды

© «Алматы энергетика және байланыс университеті» КЕАҚ, 2019 ж.

Кіріспе

Математики I бағдарламасына сай студенттердің № 3 есептеу-сызба жұмыстарын орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар «Бір айнымалы функцияның интегралдық есептелуі» бөлімі бойынша орындалған.

Әрбір студент үшін нұсқа реті топ тізімінің реттік нөмірі бойынша анықталады және барлық тапсырмалар 30 нұсқадан құралған. Тапсырмалар кестесінің реттік нөмірінің екінші саны әр бір студенттің нұсқасының реті болады. Есептеу-сызба жұмысы оқушылар дәптеріне орындалады және жұмыстың соңында әдебиеттер тізімі келтірілуі керек. Әдістемелік нұсқауларда тапсырмалардың шешу үлгілері мен қажетті формулалар да келтірілген.

1 Есептеу-сызба жұмыс №3. Бір айнымалы функцияның интегралдық есептелуі

1.1 Теориялық сұрақтар

1. Алғашқы функция. Анықталмаған интеграл, оның негізгі қасиеттері.
2. Анықталмаған интегралдардың негізгі кестесі.
3. Анықталмаған интегралды табудың негізгі әдістері: тура интегралдау, жаңа айнымалы енгізу және бөліктеп интегралдау.
4. Бөлшек-рационал және иррационал функцияларды интегралдау.
5. Тригонометриялық өрнектерді интегралдау.
6. Биномдық функцияларды интегралдау.
7. Анықталған интеграл, оның қасиеттері. Ньютон-Лейбниц формуласы.
8. Анықталған интегралды жаңа айнымалы енгізіп және бөліктеп интегралдап есептеу.
9. Меншіксіз интегралдар.
10. Анықталған интегралдар қолданысы (жазық фигура ауданы, қисық доғасының ұзындығы, айналу денесінің көлемі, айналу бетінің ауданы, айнымалы күш жұмысы).

1.2 Есептік тапсырмалар

1 - тапсырма. Анықталмаған интегралдарды тура интегралдау тәсілімен табыңыз.

1 кесте

№	Тапсырмалар	№	Тапсырмалар	№	Тапсырмалар
1	$\int \frac{3 - \sqrt{x^3} + 2x}{x^2} dx$	10	$\int \left(\frac{3}{e^{-x}} + \operatorname{tg} 2x \right) dx$	19	$\int \left(\frac{2}{\sqrt{1-9x}} + 3 \right) dx$

1 кесте соңы

2	$\int \left(\frac{2}{3x-5} + x^{-2} \right) dx$	11	$\int (2^x - 3^x)^2 dx$	20	$\int \sqrt{(3-5x)^3} dx$
3	$\int \left(\frac{2x^3-1}{x^3} + \frac{2}{3-5x} \right) dx$	12	$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} \right) dx$	21	$\int (\sqrt[3]{x^2} + 2\cos x) dx$
4	$\int (\sqrt[3]{x^2} - \sin 2x - 2^x) dx$	13	$\int \left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{x^4} + \frac{2}{\cos^2 x} \right) dx$	22	$\int \frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x}} dx$
5	$\int \frac{(1-4^x)e^x}{2^{x+1}} dx$	14	$\int \left(\frac{3}{\sqrt{2-5x}} - \frac{4}{2-x} \right) dx$	23	$\int \frac{(x-2)^3}{x^2} dx$
6	$\int \left(\frac{3}{\sqrt[4]{1-2x}} - \sin 2x \right) dx$	15	$\int \left(\frac{x}{4+x^2} + \frac{1}{3-4x} \right) dx$	24	$\int \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2+1} dx$
7	$\int \left(\frac{\sqrt[3]{x^2} - 2x \cdot \sqrt{x} - 3}{x^3} \right) dx$	16	$\int \left(\frac{3}{\sqrt{2+7x}} - \frac{1}{2-x} - 3 \right) dx$	25	$\int (e^x + 4^x)^2 dx$
8	$\int \left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} \right) dx$	17	$\int \left(\frac{4}{(3-4x)^3} + \sqrt[3]{2x-1} \right) dx$	26	$\int \frac{(x-1)^2}{x^{\frac{3}{2}}} dx$
9	$\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^2 dx$	18	$\int \frac{dx}{4x^2+25}$	27	$\int x(\sqrt[3]{x} + x^2) dx$
28	$\int (1 + \sqrt[3]{x} + \cos x) dx$	29	$\int (x - 3\sqrt{x})^2 dx$	30	$\int \frac{x^2 + \sqrt{x} - 1}{\sqrt[5]{x^3}} dx$

2 - тапсырма. Анықталмаған интегралдарды табыңыз.

2 кесте

№	Тапсырмалар	№	Тапсырмалар
1	$\int \frac{1}{e^x} (e^{x+1} + 4e^{-x}) dx$	14	$\int \pi^x \left(\frac{1}{2^x} - 3^{x+1} \right) dx$
2	$\int \frac{3^{-x} + 2^{x+3}}{2^{x+1}} dx$	15	$\int \left(3^{\frac{x}{2}} - 3^{-\frac{x}{2}} \right)^2 dx$
3	$\int 3^x (7 + 2^{-x}) dx$	16	$\int 5^x \cdot 3^{1-x} dx$
4	$\int (e^x - 5)^2 dx$	17	$\int e^x \sqrt{2^x} dx$
5	$\int \frac{1}{3^x} (e^{-x} + e^{x+1}) dx$	18	$\int \pi^x e^{x+1} dx$
6	$\int e^x (5^{x+1} - 6e^{3-x}) dx$	19	$\int (4e^x 5^x - \pi^{2x}) dx$

2 кесте соңы

7	$\int 3^{-x}(4-5^{x+2})dx$	20	$\int (1+x^2)^3 dx$
8	$\int \frac{3\sin 2x-5\cos^2 x}{\cos x} dx$	21	$\int \frac{3^{-x}+2^{x+2}}{2^{x+1}} dx$
9	$\int \frac{1-4\cos^3 x}{\cos^2 x} dx$	22	$\int \pi^x e^{x+1} dx$
10	$\int (e^x+2^{-x})^2 dx$	23	$\int \frac{1}{(e^{-2x}+e^{3x})^{-2}} dx$
11	$\int (2^x-3^x)^3 dx$	24	$\int e^{-x}(2^x-e^{x+3})dx$
12	$\int (e^{-x}+e^x)^2 dx$	25	$\int (e^x+4^x)^2 dx$
13	$\int \frac{(1-4^x)e^x}{2^{x+1}} dx$	26	$\int \frac{\operatorname{tg}^2 x-3}{\sin^2 x} dx$
27	$\int (e^x+e^{2x})^3 dx$	28	$\int \frac{3^{1-x}+2}{2^x} dx$
29	$\int \left(\frac{3-5^{x+2}}{2^x}\right) dx$	30	$\int \frac{e^{-x}+e^{x+1}}{e^{-5x}} dx$

3 - тапсырма. Анықталмаған интегралдарды табыңыз.

3 кесте

№	Тапсырмалар	№	Тапсырмалар
1	$\int \left(\frac{5}{4+9x^2}-\frac{3}{16-x^2}\right) dx$	14	$\int \left(\frac{3}{3x^2+9}+\frac{1}{x^2-4}\right) dx$
2	$\int \left(\frac{1}{64x^2+1}-\sin 4x\right) dx$	15	$\int \left(\frac{5}{x^2-3}-\frac{7}{x^2+3}\right) dx$
3	$\int \frac{1}{49x^2+16} dx$	16	$\int \left(\frac{13}{5x^2-1}+\frac{3}{4^x}\right) dx$
4	$\int \left(\frac{1}{x^2-36}-\frac{4}{9x^2+16}\right) dx$	17	$\int \left(\frac{17}{3x^2-8}+\cos 2x\right) dx$
5	$\int \left(\sqrt{x}+\frac{2}{25x^2-1}\right) dx$	18	$\int \left(\frac{14}{1-7x^2}+\frac{3}{1-x}\right) dx$
6	$\int \left(\frac{1}{64x^2-1}-x\right) dx$	19	$\int \left(\frac{4}{3-x^2}-\frac{7}{5+x^2}\right) dx$
7	$\int \left(\frac{36}{9+x^2}+\frac{14}{25-x^2}\right) dx$	20	$\int \left(\frac{6}{16-27x^2}+\frac{1}{2x}\right) dx$

3 кесте соңы

8	$\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2 + 4} \right) dx$	21	$\int \left(\frac{3}{x^2 - 5} - \frac{2}{x^2 + 3} \right) dx$
9	$\int \left(\frac{8}{36x^2 - 25} - \sqrt{x+1} \right) dx$	22	$\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2 + 2} \right) dx$
10	$\int \left(\frac{5}{63 + 7x^2} + \frac{3}{\sqrt{2x-1}} \right) dx$	23	$\int \left(\frac{5}{2x^2 - 1} + 2x^3 \right) dx$
11	$\int \left(\frac{1}{25x^2 + 4} + 2 \right) dx$	24	$\int \left(1 - \frac{17}{3 + 4x^2} \right) dx$
12	$\int \left(\frac{7}{4 - x^2} - \frac{2}{16 + x^2} \right) dx$	25	$\int \left(\frac{3}{x^2 - 9} + \frac{5}{x^2 + 4} \right) dx$
13	$\int \left(\frac{11}{36x^2 + 81} + \sqrt{x} \right) dx$	26	$\int \left(\frac{5}{81 - x^2} + \frac{7}{x^2 + 25} \right) dx$
27	$\int \left(\frac{7}{1 + 9x^2} - \frac{3}{2 - 3x^2} \right) dx$	28	$\int \left(\frac{2}{1 - x^2} - \frac{7}{3x^2 + 5} \right) dx$
29	$\int \left(\frac{3}{x^2} - \frac{4}{16 + x^2} \right) dx$	30	$\int \left(\frac{5}{x^2 + 36} + \frac{3}{3x^2 - 9} \right) dx$

4 - тапсырма. Анықталмаған интегралдарды табыңыз.

4 кесте

№	Тапсырмалар	№	Тапсырмалар	№	Тапсырмалар
1	$\int \frac{x^2 - 4}{x + 4} dx$	11	$\int \frac{(1 + x^2)^2}{x + x^3} dx$	21	$\int \frac{3}{\sqrt{9x^2 - 1}} dx$
2	$\int \frac{2}{\sqrt{x^2 + 5}} dx$	12	$\int \frac{11}{\sqrt{9x^2 + 36}} dx$	22	$\int \frac{8}{\sqrt{x^2 - 5}} dx$
3	$\int \frac{3 + \sqrt{x^2 - 4}}{x^2 - 4} dx$	13	$\int \frac{12}{(x^2 - 64)^{\frac{1}{2}}} dx$	23	$\int \frac{12}{\sqrt{5x^2 - 1}} dx$
4	$\int \frac{1}{\sqrt{1 + 9x^2}} dx$	14	$\int \frac{5}{\sqrt{63 - 7x^2}} dx$	24	$\int \frac{7}{\sqrt{3x^2 - 27}} dx$
5	$\int \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{2x^2 + 6} dx$	15	$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 8}} dx$	25	$\int \frac{4}{\sqrt{3x^2 - 27}} dx$
6	$\int \frac{1}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx$	16	$\int \frac{17}{\sqrt{4 - x^2}} dx$	26	$\int \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{3x^2 - 9} dx$

4 кесте соңы

7	$\int \frac{3}{\sqrt{4-9x^2}} dx$	17	$\int \frac{2}{\sqrt{16-4x^2}} dx$	27	$\int \frac{6}{\sqrt{3x^2+1}} dx$
8	$\int \frac{1}{(4-5x^2)^{\frac{1}{2}}} dx$	18	$\int (x^2+25)^{\frac{1}{2}} dx$	28	$\int \frac{\sqrt{x^2+9}-1}{x^2+9} dx$
9	$\int 8(x^2+9)^{\frac{1}{2}} dx$	19	$\int 7(81x^2-1)^{\frac{1}{2}} dx$	29	$\int (9-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$
10	$\int (x^2+6)^{\frac{1}{2}} dx$	20	$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-4}} dx$	30	$\int \frac{\sqrt{x^2+1}-4}{\sqrt{x^2+1}} dx$

5 - тапсырма. Анықталмаған интегралдарды дифференциал астына енгізу тәсілімен табыңыз.

5 кесте

№	Тапсырмалар	
1	a) $\int 2 \sin x e^{\cos x} dx$	б) $\int \frac{\cos \sqrt{x} - x \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
2	a) $\int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+7}$	б) $\int \frac{x^3+1}{x^4+4x-3} dx$
3	a) $\int \frac{3xdx}{\sqrt{4-2x^2}}$	б) $\int \frac{5-\ln x}{x \ln^3 x} dx$
4	a) $\int \frac{(2+\ln x) dx}{2x}$	б) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x} dx$
5	a) $\int \frac{5}{(\arccos x)^2 \sqrt{1-x^2}} dx$	б) $\int \frac{x^2+3}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}} dx$
6	a) $\int \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$	б) $\int \frac{dx}{x(\ln x+2)}$
7	a) $\int \frac{3x}{\sqrt{2-3x^2}} dx$	б) $\int \sqrt[3]{1+3\sin x} \cos x dx$
8	a) $\int \frac{dx}{x \ln x}$	б) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}$
9	a) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2+5x^3}}$	б) $\int \frac{1+\ln x}{1+x \ln x} dx$
10	a) $\int (1-3x)^{17} dx$	б) $\int \frac{4-e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

5 кесте жалгасы

11	a) $\int \frac{xdx}{\sqrt{5+x^2}}$	б) $\int \frac{\cos x - \operatorname{ctg} x}{\sin x} dx$
12	a) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx$	б) $\int (\sin x \cdot \sqrt[3]{\cos x}) dx$
13	a) $\int x^4 \cdot \sqrt[4]{1-3x^5} dx$	б) $\int \frac{\cos x \sin^3 x - \sqrt{\operatorname{ctg} x}}{2 \sin^2 x} dx$
14	a) $\int \frac{dx}{(x^2+1) \operatorname{arctg} x}$	б) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sin \frac{1}{x^2}}{x} dx$
15	a) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{(2x-1)^3}} dx$	б) $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx$
16	a) $\int \frac{\sin x}{\cos x+1} dx$	б) $\int (\cos x \cdot \sqrt[3]{\sin x}) dx$
17	a) $\int \frac{(2-\ln x) dx}{x}$	б) $\int \frac{\ln(x+1)-1}{x+1} dx$
18	a) $\int x\sqrt{x^2-2} dx$	б) $\int \frac{4x^3 dx}{\sqrt{1-3x^4}}$
19	a) $\int \frac{3 \sin x}{\cos^2 x+1} dx$	б) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx$
20	a) $\int (x+1,3)^{26} dx$	б) $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
21	a) $\int \frac{\operatorname{arctg} 3x dx}{1+9x^2}$	б) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$
22	a) $\int x \cdot \sqrt[4]{1-x^2} dx$	б) $\int \frac{2^x}{4^x+1} dx$
23	a) $\int \frac{dx}{x \ln^3 x}$	б) $\int \frac{3-\ln(x-1)}{x-1} dx$
24	a) $\int \frac{3x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$	б) $\int \left(2^{-x} + \frac{1+\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \right) dx$
25	a) $\int \left(\log_2 x + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx$	б) $\int \left(\frac{\operatorname{tg} x + 1}{x^2+1} + \frac{2}{\sin^2 x} \right) dx$
26	a) $\int \cos x \sqrt[3]{\sin^2 x} dx$	б) $\int \frac{(2+\ln^2 x) dx}{x}$
27	a) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$	б) $\int \frac{1-\operatorname{ctg} \sqrt{x}}{\sin^2 \sqrt{x}} dx$

5 кесте соңы

28	a) $\int \frac{\arctg x + 1}{x^2 + 1} dx$	б) $\int \frac{1 - x^2 + \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$
29	a) $\int \frac{4 dx}{3\sqrt{x} \cdot \cos^2 \sqrt{x}}$	б) $\int \frac{\ln \sqrt{x+4} + 3}{\sqrt{x+4}} dx$
30	a) $\int \frac{2 \cos x}{1 - \sin^2 x} dx$	б) $\int \frac{x^2 - 3}{x^3 - 9x + 1} dx$

6 - тапсырма. Анықталмаған интегралдарды бөліктеп интегралдау әдісімен табыңыз.

6 кесте

№	Тапсырмалар	
1	a) $\int (1 - 2x) \ln x dx$	б) $\int \arctg(2x + 1) dx$
2	a) $\int x \sin \frac{x}{2} dx$	б) $\int e^{x+1} \sin x dx$
3	a) $\int \arctg(1 - x) dx$	б) $\int x^2 e^{2x+1} dx$
4	a) $\int \arcsin x dx$	б) $\int \ln \sqrt{x^2 + 1} dx$
5	a) $\int x \ln x dx$	б) $\int e^x \cos x dx$
6	a) $\int (1 - x) \sin x dx$	б) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$
7	a) $\int (1 - 2x) \cos x dx$	б) $\int \ln^2 x dx$
8	a) $\int x 3^x dx$	б) $\int \ln \cos x dx$
9	a) $\int (x + 2) \cos(2 - x) dx$	б) $\int \sin(\ln x) dx$
10	a) $\int \ln(1 - 3x) dx$	б) $\int 2^x \sin x dx$
11	a) $\int x \ln(1 - x) dx$	б) $\int (x^2 - 4) \cos 3x dx$
12	a) $\int x e^{-x} dx$	б) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$
13	a) $\int x \sin 3x dx$	б) $\int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx$
14	a) $\int x \cos 2x dx$	б) $\int \ln(4x^2 + 1) dx$
15	a) $\int \cos(\ln x) dx$	б) $\int \frac{x^3}{e^x} dx$
16	a) $\int \arccos x dx$	б) $\int x^2 \sqrt{2^x} dx$
17	a) $\int x \sqrt{3^x} dx$	б) $\int \ln \sin x dx$

6 кесте соңы

18	a) $\int \arcsin \sqrt{x} dx$	б) $\int \ln \sin x dx$
19	a) $\int x \ln 3x dx$	б) $\int x^2 \ln(x-1) dx$
20	a) $\int x \sin(3-x) dx$	б) $\int x \ln^2 x dx$
21	a) $\int (1-x) \ln(3-x) dx$	б) $\int (x+2) \ln x dx$
22	a) $\int x e^{\frac{2x}{3}} dx$	б) $\int \ln x^2 dx$
23	a) $\int \arctg \frac{x}{2} dx$	б) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$
24	a) $\int x^2 \ln x dx$	б) $\int \cos(\ln x) dx$
25	a) $\int \ln(2x-1) dx$	б) $\int \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$
26	a) $\int x e^{\frac{x}{2}} dx$	б) $\int (1-x^2) \sin 2x dx$
27	a) $\int \frac{x}{e^{3x}} dx$	б) $\int x \sqrt{2^{1-x}} dx$
28	a) $\int (x+3) 5^x dx$	б) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$
29	a) $\int \arctg \sqrt{x} dx$	б) $\int \frac{\ln x}{x} dx$
30	a) $\int (2x-1) \sin(1-x) dx$	б) $\int (1-x^2) \cos 2x dx$

7 - тапсырма. Квадрат үшмүшелік өрнегінің анықталмаған интегралдарын табыңыз.

7 кесте

№	Тапсырмалар	№	Тапсырмалар
1	$\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$	14	$\int \frac{dx}{x^2-x+5}$
2	$\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$	15	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$
3	$\int \frac{dx}{x^2+8x+6}$	16	$\int \frac{dx}{3+2x-x^2}$
4	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}}$	17	$\int \frac{dx}{3x^2+x-1}$
5	$\int \frac{dx}{2x^2+x+3}$	18	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

7 кесте соңы

6	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x - 3}}$	19	$\int \frac{dx}{3 + 3x - x^2}$
7	$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$	20	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 4x - 1}}$
8	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3x + 3}}$	21	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}$
9	$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 4x + 3}}$	22	$\int \frac{dx}{1 - 5x - x^2}$
10	$\int \frac{dx}{x^2 - x + 3}$	23	$\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 11}$
11	$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 5x - x^2}}$	24	$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + x + 1}}$
12	$\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 3x - x^2}}$	25	$\int \frac{dx}{4x^2 + 4x - 3}$
13	$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$	26	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 1}}$
27	$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x - x^2}}$	28	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9x + 5}}$
29	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x - 1}}$	30	$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$

8 - тапсырма. Анықталмаған интегралдарды есептеңіз.

8 кесте

№	Тапсырмалар	
1	a) $\int \frac{x^2 + x - 4}{(x-2)(x+1)(x+4)} dx$	б) $\int \frac{2x^3 + x - 1}{(x+2)^2(x^2 - 5)^2} dx$
2	a) $\int \frac{x^2 - 7x + 5}{(x+1)(x^2 - 6x + 9)} dx$	б) $\int \frac{3x - 1}{x(x^2 - x + 3)} dx$
3	a) $\int \frac{x^2 - 3}{(x-1)(x^2 + 2x + 1)} dx$	б) $\int \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x+1)(x^2 + 2x + 3)} dx$
4	a) $\int \frac{3dx}{x^2(x-1)}$	б) $\int \frac{x^2 - 7x + 5}{(x-1)(x^2 - 2x + 2)} dx$
5	a) $\int \frac{x + 2}{x(x-2)(x+1)} dx$	б) $\int \frac{3x^2 - 2x - 2}{x^3 + 1} dx$

8 кесте жалгасы

6	a) $\int \frac{x^2 + 4x + 6}{(x+3)^3} dx$	б) $\int \frac{3x^2 - 2x - 2}{x^3 + 4x + x + 4} dx$
7	a) $\int \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x} dx$	б) $\int \frac{x^2 - 5}{x(x^2 + 4x + 5)} dx$
8	a) $\int \frac{2x^2 - 5}{x(x-2)(x+3)} dx$	б) $\int \frac{x^2 + 3x - 2}{1 + x^3} dx$
9	a) $\int \frac{3x - 1}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx$	б) $\int \frac{2x^2 + x + 2}{(x+1)^2(x^2 + 4)} dx$
10	a) $\int \frac{2x^2 + 3x + 9}{(x+3)^3} dx$	б) $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$
11	a) $\int \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2(x+2)} dx$	б) $\int \frac{2dx}{(x+1)^2(x^2 + 1)}$
12	a) $\int \frac{x^2 - 5}{x(x^2 + 4x - 5)} dx$	б) $\int \frac{x^2 + x + 6}{x^2(x^2 + 4)} dx$
13	a) $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x+2)^3} dx$	б) $\int \frac{x^2 + 2}{x^3 - 1} dx$
14	a) $\int \frac{2x + 1}{x(x^2 - 1)} dx$	б) $\int \frac{x^2 - 2x + 5}{(x^2 + 1)(x-3)} dx$
15	a) $\int \frac{-2x^2 + x + 5}{(x+4)(x^2 - 2x - 3)} dx$	б) $\int \frac{x^3 + x - 1}{x^4 - 1} dx$
16	a) $\int \frac{x^2 - 7x + 52}{(x-3)(x^2 - 3x - 10)} dx$	б) $\int \frac{x}{x^3 + 1} dx$
17	a) $\int \frac{x^2 - x + 1}{x(x-1)(x+1)^2} dx$	б) $\int \frac{x^2}{(x+1)(x^2 + 1)^2} dx$
18	a) $\int \frac{x^2 + 2x + 2}{(x+1)(x+2)^2} dx$	б) $\int \frac{x^2 - x + 4}{x^3 - 3x^2 + x - 3} dx$
19	a) $\int \frac{3 + 5x - x^2}{(x+2)(x^2 - x - 2)} dx$	б) $\int \frac{x^3 - x - 3}{x^4 - x^3 + x^2 - x} dx$
20	a) $\int \frac{x^2 - 7x + 5}{(x-2)(x^2 - 6x + 9)} dx$	б) $\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x(x^2 + 1)^2} dx$
21	a) $\int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx$	б) $\int \frac{x^3 + 3x + 1}{x^2(x^2 + 2)} dx$
22	a) $\int \frac{x^2 + x + 2}{x^3(x+2)} dx$	б) $\int \frac{x^2 + 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} dx$

8 кесте соңы

23	a) $\int \frac{x^4 dx}{(x+2)(x^2-1)}$	б) $\int \frac{x^2-3x+3}{(x+1)(x^2+x+1)} dx$
24	a) $\int \frac{x+2}{x(x^2-x-2)} dx$	б) $\int \frac{2x^3-x+1}{x^2(x^2+9)} dx$
25	a) $\int \frac{x+4}{(x-1)^2(x+2)} dx$	б) $\int \frac{x^3+x-1}{(x-2)^2(x^2+1)} dx$
26	a) $\int \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2(x+3)} dx$	б) $\int \frac{16+8x-x^4}{x^3(x^2+4)} dx$
27	a) $\int \frac{1-2x}{(x-2)(x-1)^2 x} dx$	б) $\int \frac{x^2-4x-5}{x^2(x^2+2x-5)} dx$
28	a) $\int \frac{1+x^2}{x(x^2-4x+3)} dx$	б) $\int \frac{x^2+3}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$
29	a) $\int \frac{x^3+4x-1}{x^3(x+3)^2} dx$	б) $\int \frac{2x^3-x^2+x}{(x^2+2)^2(x^2+3)^2} dx$
30	a) $\int \frac{3x^2+2}{x(x+1)^2(x+2)^2} dx$	б) $\int \frac{x^2+3x-6}{(x+2)(x^2+x+1)^2} dx$

9 - тапсырма. Анықталмаған интегралдарды есептеңіз.

9 кесте

№	Тапсырмалар	№	Тапсырмалар
1	$\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^6 x}$	16	$\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{1+\sin 3x}} dx$
2	$\int \operatorname{ctg}^6 x dx$	17	$\int \sin^3 x \cos^2 x dx$
3	$\int \frac{dx}{\sin x(2\cos^2 x-1)}$	18	$\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 2x} dx}{\cos^2 2x}$
4	$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$	19	$\int \cos^3 x \sin^4 x dx$
5	$\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 1}$	20	$\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{2+3\cos x}} dx$
6	$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin x} dx$	21	$\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^3 3x} dx}{\sin^2 3x}$
7	$\int \frac{dx}{2\sin^2 x + \cos^2 x}$	22	$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$
8	$\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx$	23	$\int \frac{\sin^2 x}{\sqrt{4+\cos^2 x}} dx$

9 кесте соңы

9	$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx$	24	$\int \sqrt{\sin^3 2x} \cos 2x dx$
10	$\int \sin 3x \sin 2x dx$	25	$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4 + \cos 2x}} dx$
11	$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 3 \sin x + 2} dx$	26	$\int \frac{dx}{4 + \sin^2 x}$
12	$\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$	27	$\int \frac{dx}{5 \sin^2 x + 6 \cos^2 x}$
13	$\int \frac{dx}{5 - 2 \cos x}$	28	$\int \frac{dx}{2 \sin^2 x - 3 \cos^2 x}$
14	$\int \frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{2 \sin^2 2x - 5}} dx$	29	$\int \frac{dx}{\sin x(2 + \cos x - 2 \sin x)}$
15	$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$	30	$\int \frac{dx}{3 - 2 \sin x + 5 \cos x}$

10 - тапсырма Анықталған интегралдарды есептеңіз.

10 кесте

№	Тапсырмалар	№	Тапсырмалар	№	Тапсырмалар
1	$\int_1^3 \frac{2x^3 - 3x^2 + 5}{x} dx$	10	$\int_{-1}^0 \frac{\sqrt{2x^3 - 3x}}{x} dx$	18	$\int_0^3 \frac{x}{x+1} dx$
2	$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$	11	$\int_1^8 \frac{dx}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$	19	$\int_1^4 \left(2x - \frac{5}{x^2}\right) dx$
3	$\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{dx}{x^2}$	12	$\int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$	20	$\int_{-1}^0 e^{3x} dx$
4	$\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$	13	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$	21	$\int_1^3 (2^x + 1) dx$
5	$\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^e \frac{dx}{x}$	14	$\int_0^3 (\cos x - 5^x) dx$	22	$\int_0^{\frac{\ln 3}{2}} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$
6	$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}$	15	$\int_1^1 (2^x + x^2) dx$	23	$\int_1^2 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} dx$
7	$\int_0^1 (\sqrt{x} - 1)^2 dx$	16	$\int_1^{16} \sqrt[4]{x^5} dx$	24	$\int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x^4} dx$
8	$\int_0^{\ln 5} x e^{-x} dx$	17	$\int_2^3 \sqrt[3]{x^2} dx$	25	$\int_0^1 x e^{x^2} dx$

10 кесте соңы

9	$\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2 - 9}$	26	$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} \frac{2}{x^4} dx$	27	$\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x}}$
28	$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin \frac{x}{2}}$	29	$\int_1^8 \frac{dx}{x^3 \sqrt{x}}$	30	$\int_0^{36} \sqrt{x} dx$

11 - тапсырма. Берілген сызықтармен шектелген D жазық фигурасының ауданын табыңыз.

11 кесте

№	Тапсырмалар	№	Тапсырмалар	№	Тапсырмалар
1	D: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$	11	D: $\begin{cases} y = \cos x \\ y = 0, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$	21	D: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^3 \end{cases}$
2	D: $\begin{cases} y = ctgx \\ y = 0, x = 0 \end{cases}$	12	D: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$	22	D: $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = 2 \end{cases}$
3	D: $\begin{cases} y = tgx \\ y = -1, x = 0 \end{cases}$	13	D: $\begin{cases} y = \cos x \\ y = -\cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$	23	D: $\begin{cases} x = 4y \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$
4	D: $\begin{cases} y = \frac{1}{1+x^2} \\ y = 1, x = 1 \end{cases}$	14	D: $\begin{cases} y = tgx \\ y = \sqrt{3}, x = 0 \end{cases}$	24	D: $\begin{cases} y = arctgx \\ y = \frac{\pi}{4}, x = 0 \end{cases}$
5	D: $\begin{cases} y = x^3 \\ y = 2\sqrt{x} \end{cases}$	15	D: $\begin{cases} y = 3x \\ y = 9, x = -2 \end{cases}$	25	D: $\begin{cases} y = tg 2x \\ y = 1, x = 0 \end{cases}$
6	D: $\begin{cases} y = \arcsin x \\ y = \frac{\pi}{4}, x = 0 \end{cases}$	16	D: $\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = 1 \end{cases}$	26	D: $\begin{cases} y = \ln x \\ y = -\ln x, x = e \end{cases}$
7	D: $\begin{cases} y = \frac{x}{4} \\ y = -4 - x, y = 0 \end{cases}$	17	D: $\begin{cases} y = \frac{3}{x} \\ x + y = -4 \end{cases}$	27	D: $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 0, x = 4 \end{cases}$
8	D: $\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = 1, x = 2 \end{cases}$	18	D: $\begin{cases} 4y = x^2 \\ 4x = y^2 \end{cases}$	28	D: $\begin{cases} y^2 = x^3 \\ x = 2 \end{cases}$

11 кесте соңы

9	D: $\begin{cases} y = \cos x \\ y = 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$	19	D: $\begin{cases} y = \sin x \\ y = 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \end{cases}$	29	D: $\begin{cases} y = \frac{x}{3} \\ y = 3 - x, x = 0 \end{cases}$
10	D: $\begin{cases} 4y = -x \\ x + y = 3, x = -4 \end{cases}$	20	D: $\begin{cases} y = e^{-x} \\ y = 1, x = \ln 3 \end{cases}$	30	D: $\begin{cases} y = \operatorname{ctg} x \\ y = 1, x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

12 - тапсырма. 1-текті меншіксіз интегралдарды есептеңіз немесе оның жинақсыздығын дәлелдеңіз.

12 кесте

№	Тапсырмалар	№	Тапсырмалар	№	Тапсырмалар
1	$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$	11	$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x - 1)^2}$	21	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$
2	$\int_0^{\infty} \frac{xdx}{9x^4 + 1}$	12	$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4 + 1}}$	22	$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx$
3	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x+1}$	13	$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$	23	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}$
4	$\int_2^{\infty} \frac{dx}{(1 + 4x^2) \operatorname{arctg} 2x}$	14	$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1 + 4x^2} dx$	24	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2}$
5	$\int_0^{\infty} \frac{3 - x^2}{x^2 + 4} dx$	15	$\int_0^{\infty} \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{x^2 + 4x + 1}}$	25	$\int_0^{\infty} \frac{(x+1)dx}{4x^2 + 4x + 5}$
6	$\int_0^{\infty} \frac{(x+1)dx}{x^2 + 2x + 7}$	16	$\int_4^{\infty} \frac{(x-2)dx}{\sqrt[4]{x^2 - 4x + 1}}$	26	$\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{(x^2 + 16)^5}}$
7	$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3 + 8)^4}}$	17	$\int_0^{\infty} x \sin x dx$	27	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}$
8	$\int_0^{\infty} \left(\frac{x^2}{x^3 - 1} - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx$	18	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x}$	28	$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{actg} x}{x^2 + 1} dx$
9	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{3x^2 + 1}$	19	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$	29	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{2e^{3x}}$
10	$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$	20	$\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$	30	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x}$

1.3 Типтік нұсқаның шешуі

1 - 4 тапсырмаларға нұсқау.

Бұл тапсырмалар тура интегралдау (А қосымшасы), яғни кейбір қарапайым түрлендірулер мен анықталмаған интегралдар қасиеттерін және оның кестесін қолдану арқылы орындалады.

Анықталмаған интегралдар қасиеттері:

- 1) $(\int f(x)dx)' = f(x)$.
- 2) $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.
- 3) $\int dF(x) = F(x) + C$.
- 4) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$.
- 5) $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

Анықталмаған интегралдар кестесі:

- 1) $\int 0 \cdot dx = C$.
- 2) $\int dx = x + C$.
- 3) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.
- 4) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
- 5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.
- 6) $\int e^x dx = e^x + C$.
- 7) $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$.
- 8) $\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$.
- 9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
- 10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.
- 11) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.
- 12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$.
- 13) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$.
- 14) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$.
- 15) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$.

1 - 4 тапсырмаларына мысалдар.

1. Интегралды табыңыз: $\int \frac{(2 + \sqrt{x})^2}{x^3} dx$.

Шешуі:

$$\int \frac{(2 + \sqrt{x})^2}{x^3} dx = \int \frac{4 + 4 \cdot \sqrt{x} + x}{x^3} dx = \int \left(4x^{-3} + 4x^{-\frac{5}{2}} + x^{-2} \right) dx =$$

$$= 4 \int x^{-3} dx + 4 \int x^{-\frac{5}{2}} dx + \int x^{-2} dx = 4 \cdot \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + 4 \cdot \frac{x^{-\frac{5}{2}+1}}{-\frac{5}{2}+1} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{2}{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x^3}} - \frac{1}{x} + C.$$

Жауабы: $C - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x^3}} - \frac{1}{x}$.

2. Интегралды табыңыз: $\int \frac{5^{2x} - 3^x}{5^x} dx$.

Шешуі:

$$\int \frac{5^{2x} - 3^x}{5^x} dx = \int 5^x dx - \int \left(\frac{3}{5}\right)^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\ln \frac{3}{5}} + C.$$

Жауабы: $\frac{5^x}{\ln 5} - \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\ln \frac{3}{5}} + C$.

3. Интегралды табыңыз: $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx$.

Шешуі:

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx &= \int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx = \int \frac{1 + \cos^2 x}{2 \cos^2 x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{1}{2} \int dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} x + C. \end{aligned}$$

Жауабы: $\frac{1}{2} \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} x + C$.

4. Интегралды табыңыз: $\int \left(\frac{6}{2x^2 + 9} + \frac{12}{2x^2 - 9} \right) dx$.

Шешуі:

$$\int \left(\frac{6}{2x^2 + 9} + \frac{12}{2x^2 - 9} \right) dx = \frac{6}{2} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{9}{2}} + \frac{12}{2} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{9}{2}} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{2}}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{\frac{9}{2}}} +$$

$$+ 6 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{9}{2}}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{9}{2}} - x}{\sqrt{\frac{9}{2}} + x} \right| + C = \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}x}{3} + \sqrt{2} \ln \left| \frac{3 - \sqrt{2}x}{3 + \sqrt{2}x} \right| + C.$$

Жауабы: $\frac{2\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}x}{3} + \sqrt{2} \ln \left| \frac{3 - \sqrt{2}x}{3 + \sqrt{2}x} \right| + C$.

5. Интегралды табыңыз: $\int \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{2x^2 + 10} dx$.

Шешуі:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+5}}{2x^2+10} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}} = \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+5}) + C.$$

$$\text{Жауабы: } \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+5}) + C.$$

5 тапсырмаларға нұсқау.

Бұл тапсырмада анықталмаған интегралда дифференциал астына енгізу ережесі қолданылады:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C.$$

5 тапсырмаларға мысал.

а) Интегралды табыңыз: $\int \frac{xdx}{x^2+7}$.

Шешуі: тапсырманы функцияны дифференциал астына енгізу тәсілімен орындаймыз.

$$\int \frac{xdx}{x^2+7} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+7)}{x^2+7} = \frac{1}{2} \ln|x^2+7| + C.$$

$$\text{Жауабы: } \frac{1}{2} \ln|x^2+7| + C.$$

б) Интегралды табыңыз: $\int e^{x^5} x^4 dx$.

Шешуі:

$$\int e^{x^5} x^4 dx = \int e^{x^5} d\left(\frac{1}{5}x^5\right) = \frac{1}{5} \int e^{x^5} d(x^5) = \frac{1}{5} e^{x^5} + C.$$

$$\text{Жауабы: } \frac{1}{5} e^{x^5} + C.$$

6 тапсырмаларға нұсқау.

Анықталмаған интегралда бөліктеп интегралдау формуласы:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Анықталмаған интегралдардың $\int p(x)f(x)dx$ түрлерінде, мұнда $p(x)$ - көпмүшелік; ал, $f(x)$ функциясы e^{ax} , $\cos ax$, $\sin ax$, $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$ функциялардың бірі болуында, соның ішінде $f(x)$ логарифмдік немесе кері тригонометриялық функциялар болса, онда бөліктеп интегралдау формуласының қолданылуында олар міндетті түрде u арқылы, қалғандары dv арқылы белгіленеді. Басқа жағдайында $p(x)$ көпмүшелігі u арқылы белгіленеді.

Тек анықтамаған интегралдың $\int e^{ax} \sin vx dx$, $\int e^{ax} \cos vx dx$ түрлерінде интегралданушы функцияның көбейтікшітерінің қайсысын болса да бірін u арқылы белгілеуге болады, мүдда бұл формуланы екі рет қолданыс табады.

6 тапсырмаларға мысал. Интегралды табыңыз: $\int (2x - 7) \sin 5x dx$.

Шешуі: анықталмаған интегралдарда бөліктеп интегралдау әдісін қолданамыз.

$$\int (2x - 7) \sin 5x dx = \left| \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du, \quad u = 2x - 7, \quad du = 2dx, \\ dv = \sin 5x dx, \quad v = -\frac{1}{5} \cos 5x \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{5}(2x - 7) \cos 5x + \frac{2}{5} \int \cos 5x dx = -\frac{1}{5}(2x - 7) \cos 5x + \frac{2}{25} \sin 5x + C.$$

Жауабы: $-\frac{1}{5}(2x - 7) \cos 5x + \frac{2}{25} \sin 5x + C.$

7 тапсырмаларға нұсқау.

Бұл тапсырмада көбейткіштерге жіктелмейтін көпмүшеліктің толық квадратын бөліп шығару формуласы:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = \left| \begin{array}{l} x + \frac{p}{2} = t \\ q - \frac{p^2}{4} = a^2 \end{array} \right| = t^2 + a^2$$

қолданылады.

7 тапсырмаларға мысал. Интегралды табыңыз: $\int \frac{dx}{4x^2 + x + 7}$.

Шешуі: интегралданушы бөлшек дұрыс рационал бөлшек. Бөліміндегі квадрат үшмүшеліктің толық квадратын бөліп шығарамыз:

$$4x^2 + x + 7 = 4\left(x^2 + \frac{x}{4} + \frac{7}{4}\right) = 4\left[\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{7}{4} - \frac{1}{64}\right)\right] = 4\left[\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{47}{64}\right].$$

Сонымен, анықталмаған интеграл кестесінің (15) формуласы бойынша:

$$\int \frac{dx}{4x^2 + x + 7} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{47}{64}} = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{d\left(x + \frac{1}{8}\right)}{\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{47}}{8}\right)^2} = \left| \begin{array}{l} x + \frac{1}{8} = t \\ dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{47}}{8}\right)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{47}}{8}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\frac{\sqrt{47}}{8}} + C = \frac{2}{\sqrt{47}} \operatorname{arctg} \frac{8t}{\sqrt{47}} + C = \frac{2}{\sqrt{47}} \operatorname{arctg} \frac{8x+1}{\sqrt{47}} + C.$$

8 тапсырмаларға нұсқау.

Егер интегралданушы бөлшек бұрыс рационал бөлшек болса, онда оның аламын бөліміне бөлу арқылы бүтін бөлігін бөліп шығарамыз, яғни оны бүтін бөлігі мен дұрыс бөлшегі қосындысы түрінде жазамыз. Ал, дұрыс $\frac{P(x)}{Q(x)}$ бөлшекті қарапайым бөлшектер қосындысы түріне жіктейміз.

8 тапсырмаларға мысал. Интегралды табыңыз: $\int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 5}{x^2(x-1)^2(x^2+x+1)^2} dx$.

Шешуі: интегралданушы бөлшек дұрыс рационал бөлшек. Бөліміндегі квадрат үшмүшелік түбірі нақты сандар емес. Рационал бөлшекті қарапайым бөлшектерге жіктейміз:

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - 2x^2 + x + 5}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}; \\ x^3 - 2x^2 + x + 5 &= Ax(x-1)(x^2+x+1) + B(x-1)(x^2+x+1) + \\ &+ Cx^2(x^2+x+1) + (Mx+N)x^2(x-1); \\ x^3 - 2x^2 + x + 5 &= x^4(A+C+M) + x^3(B+C-M+N) + x^2(C-N) - Ax - B = \\ &= x^3 - 2x^2 + x + 5. \end{aligned}$$

Теңдіктің екі жағынан да бірдей дәрежелі x айнымалысының коэффициенттерін теңестіріп, коэффициенттері бойынша сызықтық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} A + C + M = 0, \\ B + C - M + N = 1, \\ C - N = -2, \\ -A = 1, \\ -B = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1; \\ B = -5; \\ C = \frac{5}{3}; \\ M = -\frac{2}{3}; \\ N = \frac{11}{3}. \end{cases}$$

Сонымен, рационал бөлшектің қарапайым бөлшектер қосындысына жіктелуі:

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - 2x^2 + x + 5}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} &= -\frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{5}{3(x-1)} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2x-11}{x^2+x+1}. \\ \int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 5}{x^2(x-1)^2(x^2+x+1)^2} dx &= \int \left(-\frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2x-11}{x^2+x+1} \right) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\int \frac{dx}{x} - 5 \int \frac{dx}{x^2} + \frac{5}{3} \cdot \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \int \frac{(2x+1-12)}{x^2+x+1} dx = \\
&= -\ln|x| + \frac{5}{x} + \frac{5}{3} \cdot \ln|x-1| - \frac{1}{3} \cdot \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \frac{12}{3} \cdot \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \\
&= -\ln|x| + \frac{5}{x} + \frac{5}{3} \cdot \ln|x-1| - \frac{1}{3} \cdot \ln|x^2+x+1| + \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \\
&= \frac{5}{x} + \ln \frac{\sqrt[5]{(x-1)^3}}{x^3 \sqrt{x^2+x+1}} + \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C .
\end{aligned}$$

Жауабы: $\frac{5}{x} + \ln \frac{\sqrt[5]{(x-1)^3}}{x^3 \sqrt{x^2+x+1}} + \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C .$

9 тапсырмаларға нұсқау.

Анықталмаған интегралдың $\int R(\sin x, \cos x) dx$ түрінде универсал $tg \frac{x}{2} = t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ қойылым қолданылады. Мұнда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Жеке жағдайларда:

а) егер интегралданушы функция $\sin x$ функцияларына қарағанда жұп болса: $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, онда қойылым $tg x = t$;

б) егер интегралданушы функция $\sin x, \cos x$ функциясына қарағанда тақ болса: $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, онда қойылым $\cos x = t$;

в) егер интегралданушы функция $\cos x$ функциясына қарағанда тақ болса: $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ болса, онда қойылым $\sin x = t$.

Интегралданушы функция тригонометриялық функциялар көбейтіндісі түрінде болса, онда оны олардың қосындысы немесе айырымы түрінде келесі формулалар арқылы келтіріліп интегралданады:

$$\begin{aligned}
\sin ax \sin bx &= \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x], \quad \cos ax \cos bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]; \\
\sin ax \cos bx &= \frac{1}{2} [\sin(a-b)x + \sin(a+b)x].
\end{aligned}$$

Интегралдың $\int \sin^m x \cos^n x dx$ (m, n - бүтін сандар) түрінде:

а) егер m - тақ оң сан болса, онда қойылым: $\cos x = t$;

б) егер n - тақ оң сан болса, онда қойылым: $\sin x = t$;

в) егер $m+n$ - жұп теріс сан болса, онда қойылым: $tg x = t$ ($ctg x = t$);

с) егер m және n - жұп теріс емес сандар, онда:

$$\operatorname{tg} x = t, \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x);$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

формулалары қолданылады.

9 тапсырмаларға мысал. Анықталмаған интегралдарды есептеңіз:

$$1) \int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

$$2) \int \frac{3dx}{\cos^4 x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = dt, \\ \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + t^2 \end{array} \right| = 3 \int (t^2 + 1) dt = t^3 + 3t + C = \operatorname{tg}^3 x + 3 \operatorname{tg} x + C.$$

$$3) \int \frac{dx}{5 + 4 \cos x + 3 \sin x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{1}{5 + 4 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{6t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{5 + 5t^2 + 4 - 4t^2 + 6t} = 2 \int \frac{dt}{(t+3)^2} = -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3} + C.$$

10 тапсырмаларға нұсқау.

Анықталған интегралды есептеуде Ньютон-Лейбниц формуласын қолданамыз:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Анықталған интегралда бөліктеп есептеу формуласы:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

10 тапсырмаларға мысалдар. Анықталған интегралдарды есептеңіз:

$$1) \int_{-1}^2 \frac{dx}{(x+3)^3}.$$

Шешуі:

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{(x+3)^3} = \int_{-1}^2 \frac{d(x+3)}{(x+3)^3} = \int_{-1}^2 (x+3)^{-3} d(x+3) = \frac{(x+3)^{-3+1}}{-2} \Big|_{-1}^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}[(2+3)^{-2} - (-1+3)^{-2}] = -\frac{1}{2}(5^{-2} - 2^{-2}) = \frac{21}{200}.$$

Жауабы: $\frac{21}{200}$.

2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx.$

Шешуі: анықталмаған интегралда бөліктеп интегралдау формуласын қолданамыз:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx &= \left. \begin{array}{l} x = u, \quad \cos 2x dx = dv, \\ dx = du, \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = \frac{1}{2} x \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \sin 2x dx = \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} (\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0) = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

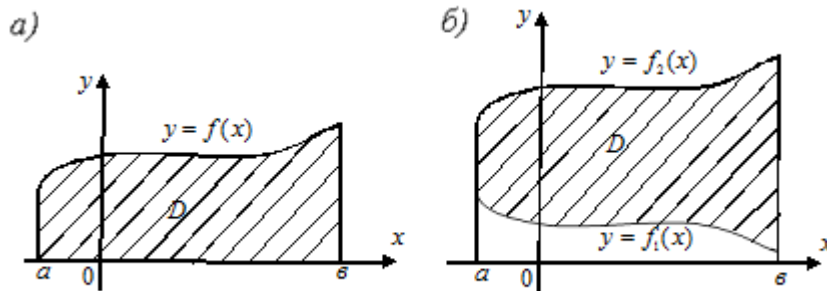
Жауабы: $\frac{\pi}{8}$.

11 тапсырмаларға нұсқау.

1. Тік бұрышты координата жүйесінде жазық фигура ауданы (1 сурет):

a) $S = \int_a^b f(x) dx;$

б) $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$



1 сурет

2. $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ параметрлік түрде берілген фигура ауданы: $S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t) dt.$

3. $r = r(\varphi)$ полярлық координата фигура ауданы: $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi.$

11 тапсырмаларға мысал. Берілген сызықтармен шектелген D фигурасының ауданын есептеңіз:

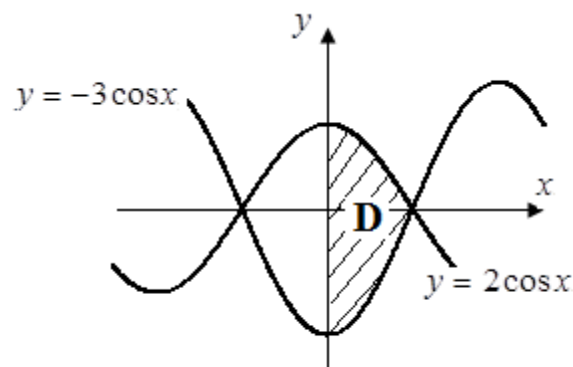
$$D: y = 2 \cos x; y = -3 \cos x; -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Шешуі: D фигурасын тұрғызамыз (2 сурет).

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [y_2 - y_1] dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [2 \cos x - (-3 \cos x)] dx =$$

$$= 5 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 5 \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 10.$$

Жауабы: 6.



2 сурет

12 тапсырмаларға нұсқау.

Жоғарығы шегі шексіздік меншіксіз интегралы үшін:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \int_a^{\theta} f(x) dx$$

шегі бар болса, онда меншіксіз интеграл жинақты. Егер шек жоқ болса, онда меншіксіз интеграл жинақсыз.

Осы тәріздес төменгі шегі шексіздік және екі шегі де шексіздік меншіксіз интегралдары сәйкесінше анықталады:

$$\int_{-\infty}^{\theta} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{\theta} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{\theta \rightarrow \infty} \int_c^{\theta} f(x) dx,$$

мұнда $-\infty < c < +\infty$.

12 тапсырмаларға мысал. Меншіксіз интегралды есептеңіз (немесе жинақсыздығын дәлелдеңіз):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 8x + 17} dx.$$

Шешуі: жоғарығы шегі шексіздік меншіксіз интегралы берілген.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^3} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \int_0^{\theta} \frac{dx}{(x+1)^3} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2(x+1)^2} \Big|_0^{\theta} \right) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2(\theta+1)^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Интеграл жинақты.

Жауабы: $\frac{1}{2}$.

Әдебиеттер тізімі

- 1 Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. ч.2. –М.: ОНИКС 21 век, Мир и образ., 2008. - 489 с.
- 2 Байбазаров М.Б., Атабай Б.Ж. Жоғары математика. Есептер жинағы. 1- бөлім. -Алматы, АЭЖБУ, 2019. - 239 б.
- 3 Мұстахишев К.М., Атабай. Б.Ж. Математика (жалпы және арнаулы курс). 1 бөлім: жоғары техникалық оқу орындары студенттеріне арналған оқулық. – Алматы: «Эверо» баспасы, 2015. - 304 б.
- 4 Хасеинов К.А. Задачи и упражнения по инженерной математике (с индивидуальными заданиями). Часть 2. – Алматы, 2009. - 631 с.

Мазмұны

1 Есептеу-сызба жұмыс №3. Бір айнымалы функцияның интегралдық есептелуі.....	3
1.1 Теориялық сұрақтар.....	3
1.2 Есептік тапсырмалар.....	3
1.3 Типтік нұсқаның шешуі.....	17
Әдебиеттер тізімі.....	26

Атабай Бегімбет Жұмабайұлы

МАТЕМАТИКА I

5B074600 «Ғарыштық техника және технологиялар»
мамандығы студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша
әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар
3 бөлім

Редакторы Ж.Н. Изтелеуова
Стандарттау бойынша маман Г.И. Мухаметсариева

Басуға « ___ » ____ 2019 ж. қол қойылды.
Таралымы 25 дана.
Көлемі 1,6 оқу-бас. ә.

Пішімі 60x84 1/16
Баспаханалық қағаз №1
Тапсырыс №__ Бағасы 812 тг.

«Алматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірмелі-көбейткіш бюросы
050013, Алматы, Байтұрсынұлы көшесі, 126/1