Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра математики и математического моделирования

МАТЕМАТИКА 1

Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов специальностей 5В074600 – Космическая техника и технологии
Часть 1

Алматы 2019

СОСТАВИТЕЛИ: Б.Ж. Атабай, М.У. Зияханов. Математика 1. Методические указания и задания к расчетно–графических работ для студентов специальности 5В074600 – Космическая техника и технологии. Часть 1. - Алматы: АУЭС, 2019.- 31 с.

Поставлены методические указания и задания по выполнению расчетно-графические работы для студентов специальностей 5В074600 – Космическая техника и технологии. Представленный материал соответствует разделу «Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия» курса «Математика 1», предусмотренного учебными материалами для студентов специальности.

Таблицы – 7, рисунки - 2, библиография – 4 названия.

Рецензент: ст. преп. кафедры «ЭС и ЭЭС» А.А. Абдурахманов

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2019 г.

© НАО «Алматинский университет энергетики и связи», 2019 г.

Введение

Высшая математика является одним из важнейших элементов современного специалиста в сфере образования. При помощи средств одной лишь элементарной математики невозможно выполнить расчеты для всякого сколько-нибудь сложного сооружения (машина, мост, здание, самолет и т.д.). Математические методы стали основной частью любой технической деятельности. Это приводит к необходимости усиления прикладной направленности курса математики и повышения уровня фундаментальной математической подготовки. В данном методическом указании рассматриваются основные понятия линейной алгебры, векторной алгебры, аналитической геометрии на плоскости и в пространстве. Материал включает в себя практические упражнения и задания для самостоятельной работы.

Цель данной работы - изучение основных понятий, законов и методов высшей математики и их приложений, вооружение будущих специалистов современным математическим аппаратом, формирование у студентов знаний и умений, которые образуют теоретический фундамент, необходимый для корректной постановки и решения проблем при разработке математических и компьютерных моделей сложных технических систем.

Программа по курсу «Математика 1 семестр» структурирована в соответствии с действующими учебными планами АУЭС, укрупненных дидактических едениц с завершающим рубежным контролем. Все студенты изучают 3 модуля, что соответствует общему количеству кредитов, выделенных в учебных планах.

Вариант задания РГР для студентов определяется как остаток от деления номера зачетной книжки на 30. Например: номер зачетной книжки равен 080612. Это число представляется в виде: $080612=2687\cdot 30+2$. Следовательно, студент должен выполнить задания варианта №2. Если остаток равен нулю, то студент выполняет вариант №30.

В расчетно-графической работе решение задач должно быть кратким и, в то же время, достаточно объяснено ссылками на теорию и сопровождено необходимыми рисунками. Примером для оформления может служить решение типового варианта.

РГР выполняются в отдельной тонкой тетради, в номере каждого задания вторая цифра указывает на вариант.

Теоретические вопросы.

Модуль 1. Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия.

1. Определители второго и третьего порядков, их свойств.
2. Алгебраические дополнения и миноры.
3. Матрицы. Обратная матрица. Способы их вычисления.
4. Матричный способ решения систем линейных алгебраических уравнений.

5. Метод Камера решения систем линейных алгебраических уравнений.
6. Векторы, линейные операции над ними.
7. Разложение вектора по базису.
8. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов и их свойства. Длина вектора. Угол между векторами.
9. Условия коллинеарности и компланарности векторов.
10. Уравнение плоскости в R^3.
11. Уравнение прямой в R^2 (в общем виде, с угловым коэффициентом, в отрезках, проходящей через две заданные точки).
12. Уравнение прямой в R^3.
13. Общее уравнение кривых второго порядка.

1 Расчетно-графическая работа №1. Модуль 1. Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия

Расчётные задания.

Задание 1. Даны матрицы A, B, C. Вычислить сложение и произведение матриц. Объяснить почему, если невозможно.

Таблица 1

№	Даны матрицы
1.1	$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$
1.2	$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
1.3	$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 7 & -3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -2 \\ -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 3 \\ -5 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
1.4	$A = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$
1.5	$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$
1.6	$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$

1.7	$A=\begin{pmatrix}3&1\\4&2\\5&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&3&2\\-2&4&0\\-3&5&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\2&1\end{pmatrix}.$
1.8	$A=\begin{pmatrix}4&1\\2&3\\0&1\\2&-3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&1\\4&-1&3\\0&3&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\\3&1\end{pmatrix}.$
1.9	$A=\begin{pmatrix}4&5\\1&-2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&5&3\\6&-1&4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&1\\2&-3\\1&5\end{pmatrix}.$
1.10	$A=\begin{pmatrix}5&1\\3&-4\\2&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-3&2\\3&-4&1\\2&-5&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&5\\1&2\\1&3\end{pmatrix}.$
1.11	$A=\begin{pmatrix}-2&3&0\\1&-5&1\\4&-2&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2&3&2\\0&-4&-3\\1&-2&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0&1\\-1&3\\2&-2\end{pmatrix}.$
1.12	$A=\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&3&4\\5&2&1\\1&3&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1&3&3\\2&1&-3\\4&-2&0\end{pmatrix}.$
1.13	$A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&1&3\\4&0&1\\1&2&-2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}.$
1.4	$A=\begin{pmatrix}4&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&-1&2\\1&3&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2\\3&-5\\4&1\end{pmatrix}.$
1.15	$A=\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&-2&1\\1&3&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-4&3&1\\2&-5&-1\end{pmatrix}.$
1.16	$A=\begin{pmatrix}7&-1\\-5&0\\2&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&-2&-1&-3\\5&4&1&2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2&2\\5&3\\3&-4\end{pmatrix}.$
1.17	$A=\begin{pmatrix}-1&4&-3\\2&-1&-2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-5&-3\\3&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}4&-2\\2&3\\-5&-1\end{pmatrix}.$
1.18	$A=\begin{pmatrix}3&-7\\4&5\\2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&2&1\\4&5&2\\-1&4&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&1\\5&-3\\1&5\end{pmatrix}.$

1.19	$A=\begin{pmatrix}3&-1\\4&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&-1&2&0&1\\1&3&0&5&3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}.$
1.20	$A=\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5&0&2\\4&1&5\\3&1&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}.$
1.21	$A=\begin{pmatrix}5&-2\\-4&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&-5&3\\4&6&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1&0&-3\\2&1&-4\end{pmatrix}.$
1.22	$A=\begin{pmatrix}-2&1\\-3&5\\1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-3&1&3\\1&2&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}6&-1&1\\3&-2&4\end{pmatrix}.$
1.23	$A=\begin{pmatrix}-2&-1&-3\\3&2&4\\1&0&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&-2\\-1&3\\1&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1&0\\4&2\\1&-3\end{pmatrix}.$
1.24	$A=\begin{pmatrix}-1&-3\\2&-2\\4&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&4\\1&-3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}.$
1.25	$A=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\2&3&1\\5&-3&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4\\-5\\2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}.$
1.26	$A=\begin{pmatrix}3&-1&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\4\\-5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix}.$
1.27	$A=\begin{pmatrix}3&-2\\-5&1\\-1&-3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&4&-2\\1&-1&2\\0&3&-4\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-4&-1\\3&5\\2&-5\end{pmatrix}.$
1.28	$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&3&-1\\4&-1&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&3&-2\\-1&2&4\\-2&1&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix}.$
1.29	$A=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&4\\3&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-3&2&0\\1&4&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&3&-5\\-2&7&4\end{pmatrix}.$
1.30	$A=\begin{pmatrix}4&2\\1&-3\\-3&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&4&1\\3&-5&2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-2&-1\\3&4\\1&2\end{pmatrix}.$

Задание 2. Дан определитель третьего порядка. Найти:
а) определитель по правилу треугольника (правилу Саррюса);
б) матрицу A^{-1}, обратную матрице A;
в) определитель, разложив определитель по i-ой строке;
г) определитель, разложив определитель по j-ой строке.

Таблица 2

№	A	i, j	№	A	i, j
2.1	$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$i=2,\ j=2$	2.2	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$	$i=3,\ j=1$
2.3	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$	$i=1,\ j=2$	2.4	$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$i=2,\ j=1$
2.5	$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$	$i=3,\ j=2$	2.6	$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$i=3,\ j=3$
2.7	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$i=2,\ j=1$	2.8	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$i=1,\ j=3$
2.9	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$i=1,\ j=1$	2.10	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$i=2,\ j=3$
2.11	$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	$i=3,\ j=1$	2.12	$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$	$i=1,\ j=2$
2.13	$\begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$i=2,\ j=1$	2.14	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$i=2,\ j=2$
2.15	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$i=1,\ j=3$	2.16	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$i=1,\ j=1$
2.17	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$i=2,\ j=3$	2.18	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$i=3,\ j=1$

2.19	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$	$i=3,\quad j=3$	2.20	$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	$i=1,\quad j=3$
2.21	$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$i=2,\quad j=1$	2.22	$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 3 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$i=3,\quad j=2$
2.23	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$	$i=2,\quad j=2$	2.24	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$i=3,\quad j=1$
2.25	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$i=1,\quad j=1$	2.26	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$i=2,\quad j=1$
2.27	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$i=3,\quad j=1$	2.28	$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	$i=1,\quad j=3$
2.29	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$	$i=1,\quad j=2$	2.30	$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$i=2,\quad j=2$

Задание 3. Решить систему:
а) методом Крамера;
б) матричным методом (с помощью обратной матрицы);
а) методом Гаусса.

Таблица 3

3.1	$\begin{cases} x+3y+2z=8 \\ 3x+2y-z=3, \\ 4x+y+3z=11 \end{cases}$	3.2	$\begin{cases} 3x+y-2z=5 \\ 2x+3y-5z=9, \\ x+4y+2z=19 \end{cases}$
3.3	$\begin{cases} 2x-3y+z=-5 \\ -x+2y-3z=-4, \\ -3x-4y+2z=1 \end{cases}$	3.4	$\begin{cases} -3x+2y-4z=-18 \\ 4x+y-3z=0, \\ -2x+3y-4z=-18 \end{cases}$
3.5	$\begin{cases} 5x-y-z=0 \\ x+2y+3z=14, \\ 4x+3y+2z=16 \end{cases}$	3.6	$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 5x-y+3z=10, \\ 3x+2y-z=3 \end{cases}$
3.7	$\begin{cases} -2x+y-2z=-5 \\ 2x-3y-3z=-4, \\ 3x+4y-3z=-4 \end{cases}$	3.8	$\begin{cases} -4x+y-z=-7 \\ 2x-y+2z=4, \\ -x+3y-3z=1 \end{cases}$

3.9	$\begin{cases} x+3y-4z=5\\ 4x-3y+z=7,\\ 2x+4y-10z=4 \end{cases}$	3.10	$\begin{cases} 2x-y-3z=3\\ 3x+4y-5z=-8,\\ 2y+7z=17 \end{cases}$
3.11	$\begin{cases} x+3y-2z=-1\\ -x+3y+4z=9,\\ -3x+y-2z=5 \end{cases}$	3.12	$\begin{cases} 2x+3y+2z=7\\ 4x-3y+2z=3,\\ 3x+3y-4z=2 \end{cases}$
3.13	$\begin{cases} x+4y-2z=3\\ 5x+2y+3z=18,\\ 2x-y+z=3 \end{cases}$	3.14	$\begin{cases} x-3y+z=7\\ x+2y-3z=4,\\ 2x-3y+4z=7 \end{cases}$
3.15	$\begin{cases} x+3y+2z=13\\ 2x-3y+z=-3,\\ 5x+y-z=4 \end{cases}$	3.16	$\begin{cases} x+3z=5\\ x+4y=8,\\ x+2y-3z=1 \end{cases}$
3.17	$\begin{cases} 2x+3y-4z=-11\\ x-4y-3z=9,\\ 3x-y-4z=4 \end{cases}$	3.18	$\begin{cases} -3x+y-2z=-7\\ 3x-y-5z=0,\\ x+2y-4z=-7 \end{cases}$
3.19	$\begin{cases} x-y+3z=4\\ 2x+y+4z=9,\\ x+2y-3z=1 \end{cases}$	3.20	$\begin{cases} x+5x-2y=4\\ 2x+3y-4z=-6,\\ 7x+2y-z=1 \end{cases}$
3.21	$\begin{cases} -2x-3y+z=-11\\ x-2y+3z=-5,\\ 2x-4y+z=0 \end{cases}$	3.22	$\begin{cases} x+3y-2z=1\\ 3x-2y+z=2,\\ 2x+4y-5z=-5 \end{cases}$
3.23	$\begin{cases} -x+2y+3z=-3\\ 4x-3y-5z=9,\\ -3x-3y+4z=4 \end{cases}$	3.24	$\begin{cases} 5x-2y-z=-11\\ -3x-y+z=4,\\ 2x-y+3z=-8 \end{cases}$
3.25	$\begin{cases} 3x+4y-5z=-7\\ x+3y-4z=-6,\\ 4x+2y-3z=-5 \end{cases}$	3.26	$\begin{cases} 2x+y-4z=0\\ x+2y-3z=1,\\ -3x-4y+6z=-5 \end{cases}$
3.27	$\begin{cases} 6x-y-4z=0\\ -3x+y-2z=3,\\ 2x-3y+3z=1 \end{cases}$	3.28	$\begin{cases} -2x+y-2z=10\\ -x-y+4z=-3,\\ 4x+2y-3z=-5 \end{cases}$
3.29	$\begin{cases} 7x-2y+2z=7\\ -3x+2y-3z=-4,\\ 2x-4y+3z=1 \end{cases}$	3.30	$\begin{cases} 3x-2y+z=10\\ x+3y-4z=-3.\\ 2x+5y+2z=29 \end{cases}$

Задание 4. Даны точки A, B, C и вектор $\vec{c}$. Найти:

а) длину векторов $\left|\vec{a}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$, $\left|\vec{b}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$, координаты середины отрезка AB, AC;

б) скалярное произведение $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, проекцию вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$, векторное произведение $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$, смешанное произведение $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$;

в) площадь треугольника и параллелограмма, полученного из векторов $\bar{a}, \bar{b}$;

г) объем пирамиды, построенной из векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Таблица 4

№	$A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$	$\bar{c} = (c_x; c_y; c_z)$
4.1	A(1;1;1), B(2;3;4), C(4;3;-2)	$\bar{c} = (-1; -2; 3)$
4.2	A(2;2;2), B(4;0;3), C(0;1;0)	$\bar{c} = (2; -1; 0)$
4.3	A(0;0;1), B(2;3;5), C(0;2;3)	$\bar{c} = (3; 1; -1)$
4.4	A(1;2;0), B(3;0;-3), C(5;2;6)	$\bar{c} = (-3; -1; 2)$
4.5	A(1;-1;2), B(5;-6;2), C(1;3;-1)	$\bar{c} = (2; 1; -2)$
4.6	A(5;-4;3), B(1;-2;5), C(0;1;2)	$\bar{c} = (4; -1; 1)$
4.7	A(1;-1;3), B(4;-5;4), C(1;1;4)	$\bar{c} = (-2; 1; -2)$
4.8	A(2;5;1), B(0;3;-1), C(2;5;4)	$\bar{c} = (5; 0; 2)$
4.9	A(0;2;-1), B(5;2;3), C(1;3;2)	$\bar{c} = (2; -3; 1)$
4.10	A(1;3;1), B(0;3;-2), C(-1;2;5)	$\bar{c} = (3; -1; 3)$
4.11	A(4;3;2), B(1;1;1), C(2;3;4)	$\bar{c} = (2; -4; 1)$
4.12	A(4;3;-2), B(2;2;2), C(4;0;3)	$\bar{c} = (0; -1; 3)$
4.13	A(0;2;3), B(2;3;5), C(0;0;1)	$\bar{c} = (-3; 3; 0)$
4.14	A(3;0;-3), B(5;2;6), C(1;2;0)	$\bar{c} = (1; 4; -2)$
4.15	A(1;3;-1), B(1;-1;2), C(5;-6;2)	$\bar{c} = (2; 3; 1)$
4.16	A(1;3;2), B(5;2;3), C(0;2;-1)	$\bar{c} = (7; 1; 1)$
4.17	A(-1;2;5), B(1;3;1), C(0;3;-2)	$\bar{c} = (2; 6; -1)$
4.18	A(2;5;4), B(2;5;1), C(0;3;-1)	$\bar{c} = (3; -1; 1)$
4.19	A(1;1;4), B(1;-1;3), C(4;-5;4)	$\bar{c} = (2; 1; 3)$
4.20	A(0;1;2), B(5;-4;3), C(1;-2;5)	$\bar{c} = (-3; 4; 0)$
4.21	A(5;2;3), B(0;2;-1), C(1;3;2)	$\bar{c} = (4; -1; 2)$
4.22	A(4;3;0), B(3;2;1), C(1;5;2)	$\bar{c} = (-4; 0; 1)$
4.23	A(5;2;1), B(4;4;1), C(3;3;3)	$\bar{c} = (3; -1; -1)$
4.24	A(3;2;-4), B(5;4;4), C(2;4;6)	$\bar{c} = (5; -1; 2)$

4.25	A(2;1;4), B(4;1;2), C(4;3;4)	$\bar{c} = (-3;1;5)$
4.26	A(8;3;4), B(4;1;6), C(5;5;4)	$\bar{c} = (2;1;3)$
4.27	A(6;4;3), B(4;4;5), C(3;4;5)	$\bar{c} = (-1;1;4)$
4.28	A(5;1;4), B(1;2;5), C(5;2;7)	$\bar{c} = (-2;3;3)$
4.29	A(-1;3;4), B(2;1;2), C(0;5;2)	$\bar{c} = (6;-1;-1)$
4.30	A(3;4;0), B(5;4;2), C(1;6;0)	$\bar{c} = (5;4;-3)$

Задание 5. Даны точки A, B на плоскости и уравнение прямой l_1.
Записать уравнение прямой:
а) $l = (AB)$ - проходящей через заданные точки;
б) l - в виде уравнения прямой в отрезках;
в) l - с угловым коэффициентом;
г) l_2 - проходящей через точку A и перпендикулярную прямой l_1;
е) l_2 и l, и угол между ними.

Таблица 5

5.1	A(0;-1),B(4;2), $l_1: 3x+y-2=0$	5.2	A(2;-1),B(3;-1), $l_1: x+y-5=0$
5.3	A(3;2),B(-1;4), $l_1: x-2y+3=0$	5.4	A(0;3),B(-1;-3), $l_1: x+2y-1=0$
5.5	A(-2;1),B(1;-3), $l_1: x-y+3=0$	5.6	A(3;-2),B(1;2), $l_1: -2x+y+3=0$
5.7	A(1;6),B(4;2), $l_1: 3x-2y+1=0$	5.8	A(2;-1),B(0;3), $l_1: x-3y+3=0$
5.9	A(-4;2),B(3;5), $l_1: x-4y+3=0$	5.10	A(-1;1),B(2;-2), $l_1: 2x+y-3=0$
5.11	A(3;0),B(2;4), $l_1: 2x+3y-7=0$	5.12	A(0;0),B(2;4), $l_1: 3x+2y-5=0$
5.13	A(-3;-2),B(1;2), $l_1: x-y-1=0$	5.14	A(1;1),B(-3;3), $l_1: x-2y-1=0$
5.15	A(0;-4),B(3;2), $l_1: 4x-2y-1=0$	5.16	A(5;1),B(1;3), $l_1: x+y+1=0$
5.17	A(1;1),B(2;5), $l_1: 4x-y+1=0$	5.18	A(4;2),B(-3;3), $l_1: x+3y-4=0$
5.19	A(-1;3),B(2;5), $l_1: -2x+y+3=0$	5.20	A(-3;1),B(-1;2), $l_1: 2x-y-1=0$
5.21	A(-2;2),B(1;-2), $l_1: x-4y+1=0$	5.22	A(2;-1),B(4;1), $l_1: x+y-2=0$
5.23	A(5;-3),B(-1;0), $l_1: 3x+2y+1=0$	5.24	A(3;-1),B(0;-3), $l_1: x-2y+4=0$
5.25	A(2;1),B(-1;4), $l_1: 3x-y-1=0$	5.26	A(-1;1),B(2;2), $l_1: x+2y+1=0$
5.27	A(-2;4),B(4;5), $l_1: x+2y-4=0$	5.28	A(-1;2), B(3;0), $l_1: 2x+y+3=0$
5.29	A(-2;1),B(-1;3), $l_1: x-4y+2=0$	5.30	A(3;4), B(1;6), $l_1: x-y+2=0$

Задание 6. Даны точки A, B, C и уравнение плоскости P_2. Найти:
а) уравнение плоскости $P_1 = (ABC)$;
б) P_1 в виде уравнения плоскости в отрезках;
в) каноническое уравнение прямой $L_1 = (BC)$;
г) параметрическое уравнение прямой L_1;

д) уравнение плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярно плоскостям P_1 и P_2.

Таблица 6

№	$A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$	$P_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$
6.1	A(1;1;1), B(2;3;4), C(4;3;-2)	$P_2: x+y+z=0$
6.2	A(2;2;2), B(4;0;3), C(0;1;0)	$P_2: x-2y+z+3=0$
6.3	A(0;0;1), B(2;3;5), C(0;2;3)	$P_2: x-y-z+2=0$
6.4	A(1;2;0), B(3;0;-3), C(5;2;6)	$P_2: 2x+y-z+3=0$
6.5	A(1;-1;2), B(5;-6;2), C(1;3;-1)	$P_2: 3x-2y-z+1=0$
6.6	A(5;-4;3), B(1;-2;5), C(0;1;2)	$P_2: 4x-3y+2z+3=0$
6.7	A(1;-1;3), B(4;-5;4), C(1;1;4)	$P_2: x-4y+z+2=0$
6.8	A(2;5;1), B(0;3;-1), C(2;5;4)	$P_2: x+2y-z+3=0$
6.9	A(0;2;-1), B(5;2;3), C(1;3;2)	$P_2: -x+3y-4z+1=0$
6.10	A(1;3;1), B(0;3;-2), C(-1;2;5)	$P_2: x-4y-2z+6=0$
6.11	A(4;3;2), B(1;1;1), C(2;3;4)	$P_2: 2x-3y-z+4=0$
6.12	A(4;3;-2), B(2;2;2), C(4;0;3)	$P_2: x-3y-4z+1=0$
6.13	A(0;2;3), B(2;3;5), C(0;0;1)	$P_2: x+y+z+5=0$
6.14	A(3;0;-3), B(5;2;6), C(1;2;0)	$P_2: 3x+y-4z+1=0$
6.15	A(1;3;-1), B(1;-1;2), C(5;-6;2)	$P_2: x+3y-z+3=0$
6.16	A(1;3;2), B(5;2;3), C(0;2;-1)	$P_2: 3x+y-5z+1=0$
6.17	A(-1;2;5), B(1;3;1), C(0;3;-2)	$P_2: -2x+y+3z+2=0$
6.18	A(2;5;4), B(2;5;1), C(0;3;-1)	$P_2: 4x+y-6z=0$
6.19	A(1;1;4), B(1;-1;3), C(4;-5;4)	$P_2: x-y-z+3=0$
6.20	A(0;1;2), B(5;-4;3), C(1;-2;5)	$P_2: x+y+z+5=0$
6.21	A(5;2;3), B(0;2;-1), C(1;3;2)	$P_2: -2x+3y+3z-4=0$
6.22	A(4;3;0), B(3;2;1), C(1;5;2)	$P_2: x-4y-z+4=0$
6.23	A(5;2;1), B(4;4;1), C(3;3;3)	$P_2: 4x-y-z+1=0$
6.24	A(3;2;-4), B(5;4;4), C(2;4;6)	$P_2: 2x+2y+z-7=0$
6.25	A(2;1;4), B(4;1;2), C(4;3;4)	$P_2: x-3y+z-2=0$
6.26	A(8;3;4), B(4;1;6), C(5;5;4)	$P_2: 3x-3y+z+5=0$
6.27	A(6;4;3), B(4;4;5), C(3;4;5)	$P_2: x+2y-2z+1=0$
6.28	A(5;1;4), B(1;2;5), C(5;2;7)	$P_2: x-y+5z+3=0$
6.29	A(-1;3;4), B(2;1;2), C(0;5;2)	$P_2: 2x+3y+z-4=0$
6.30	A(3;4;0), B(5;4;2), C(1;6;0)	$P_2: -x-3y+6z+1=0$

Задание 7. Даны точка *A*, радиус окружности *R*; полуоси кривых - *a*,*b*; уравнение прямой – *D*. Найти:

а) уравнение окружности с центром в точке *A* и радиусом *R*;

б) каноническое уравнение эллипса с полуосями a и b, координаты его фокусов и эксцентриситет;

в) каноническое уравнение гиперболы с действительной полуосью a и мнимой b, координаты его фокусов, эксцентриситет и уравнения асимптот;

г) каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат, если D ее директриса, координаты его фокуса и эксцентриситет;

д) схематический чертеж эллипса, гиперболы и параболы.

Таблица 7

7.1	$A(0;-1),\ R = 4\ \ a = 3, в = 2,\ D : x = 2$	7.2	$A(2;-1), R = 5, a = 2, в = 4, D : y = -4$
7.3	$A(3;2),\ R = 3\ \ a = 4, в = 5,\ D : x = -3$	7.4	$A(0;3), R = 2, a = 7, в = 2, D : x = 4$
7.5	$A(-2;1),\ R = 5,\ a = 6, в = 3,\ D : y = 4$	7.6	$A(3;-2), R = 8, a = 5, в = 4, D : x = -6$
7.7	$A(1;6),\ R = 6,\ \ a = 3, в = 7,\ D : y = -3$	7.8	$A(2;-1), R = 4, a = 2, в = 1, D : x = 8$
7.9	$A(-4;2), R = 3, a = 2, в = 7, D : x = -3$	7.10	$A(-1;1), R = 5, a = 8, в = 3, D : y = -8$
7.11	$A(3;0), R = 7, a = 4, в = 3, D : x = 4$	7.12	$A(0;0), R = 1, a = 3, в = 5, D : x = -5$
7.13	$A(-3;-2), R = 8, a = 4, в = 6, D : y = 1$	7.14	$A(1;1), R = 9, a = 7, в = 4, D : x = 3$
7.15	$A(0;4), R = 2, a = 5, в = 3, D : y = -2$	7.16	$A(5;1), R = 4, a = 6, в = 2, D : y = 7$
7.17	$A(1;1), R = 1, a = 7, в = 5, D : x = -4$	7.18	$A(4;2), R = 5, a = 4, в = 8, D : y = -6$
7.19	$A(-1;)3, R = 4, a = 3, в = 2, D : x = 2$	7.20	$A(-3;1), R = 3, a = 5, в = 2, D : x = -5$
7.21	$A(-2;2), R = 5, a = 5, в = 3, D : y = 3$	7.22	$A(2;-1), R = 9, a = 6, в = 3, D : y = -8$
7.23	$A(5;-3), R = 6, a = 4, в = 2, D : y = 7$	7.24	$A(3;-1), R = 2, a = 7, в = 1, D : x = 9$
7.25	$A(2;1), R = 3, a = 5, в = 4, D : x = -5$	7.26	$A(-1;5), R = 2, a = 3, в = 8, D : y = -7$
7.27	$A(-4;2), R = 2, a = 7, в = 8, D : x = 5$	7.28	$A(-1;2), R = 7, a = 8, в = 4, D : y = 6$
7.29	$A(-2;1), R = 4, a = 6, в = 3, D : y = -4$	7.30	$A(3;4), R = 6, a = 9, в = 3, D : x = -8$

2 Решение типового варианта

Задание 1. Даны матрицы А, В, С. Вычислить сложение и произведение матриц. Объяснить почему, если невозможно.

Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & 7 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Сложение матриц это арифметическая операция, в результате которой должна получаться матрица D , каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов складываемых матриц B и C :

$$D_{ij} = B_{ij} + C_{ij},$$

где $i = 1,.., m$; $j = 1,.., n$.

При сумме или разности будет получаться матрица D такой же размерности, как и слагаемые (вычитаемые) матрицы B и C, складывать и вычитать матрицы можно только одинаковой размерности:

$$D = B + C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 & -3+2 & 1+(-3) \\ -3+2 & 6+1 & 7+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пусть даны матрицы $A = a_{ij}$ размеров $m \times p$ и $B = b_{ij}$ размеров $p \times n$. Матрицу D размеров $m \times n$, элементы d_{ij}, которой вычисляются по формуле:

$$d_{i,j} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{ip} \cdot b_{pj}; \qquad i = 1,.., m; \; j = 1,.., n$$

называют произведением матриц A и B и обозначают $D = AB$. Операция умножения определена только для согласованных матриц A и B, у которых число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B:

$$D_{m\times n} = A_{m\times p} \cdot B_{p\times n}.$$

Размерности данных матриц: $A_{2\times 2}$, $B_{2\times 3}$, $C_{2\times 3}$. По условию задачи имеем $A_{2\times 2} \cdot B_{2\times 3} = D_{2\times 3}$. Элемент d_{ij} матрицы D равен сумме произведений i-ой строки матрицы A на j-ый столбец матрицы B:

$$D = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 4 + (-2)\cdot(-3) & 3\cdot(-3) + (-2)\cdot 6 & 3\cdot 1 + (-2)\cdot 7 \\ 1\cdot 4 + 3\cdot(-3) & 1\cdot(-3) + 3\cdot 6 & 1\cdot 1 + 3\cdot 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 18 & -21 & -11 \\ -5 & 15 & 22 \end{pmatrix}.$$

Аналогично $A_{2\times 2} \cdot C_{2\times 3} = D1_{2\times 3}$, то есть:

$$D1 = A \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 3 + (-2)\cdot 2 & 3\cdot 2 + (-2)\cdot 1 & 3\cdot(-3) + (-2)\cdot(-4) \\ 1\cdot 3 + 3\cdot 2 & 1\cdot 2 + 3\cdot 1 & 1\cdot(-3) + 3\cdot(-4) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 9 & 5 & -15 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Дана матрица третьего порядка:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, i = 2, j = 3.$$

Найти:

а) определитель по правилу треугольника (правилу Саррюса);

б) матрицу A^{-1}, обратную матрице A;

в) определитель, разложив определитель по i-ой строке;

г) определитель, разложив определитель по j-ой строке.

Решение:

а) определитель второго порядка вычисляется по формуле:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель матрицы A третьего порядка и вычисляется по образцу (рисунок 1).

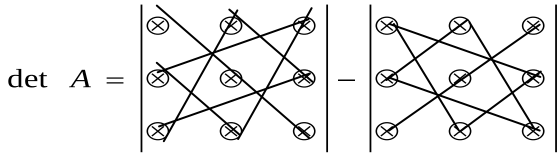

Рисунок 1

Или по формуле:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{23}a_{12} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Поэтому

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot(-2) + 4\cdot 8\cdot 1 + 0\cdot 2\cdot(-1) - 1\cdot 2\cdot(-1) - 2\cdot 8\cdot 3 - 0\cdot 4\cdot(-2) = -26;$$

б) если для квадратной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

её $detA \neq 0$, то существует обратная матрица A^{-1} такая, что:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Формула нахождения обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} - алгебраическое дополнения элемента a_{ij} .

Детерминант заданной матрицы равен:

$$\det\ A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -26 \neq 0.$$

Находим алгебраические дополнения всех ее элементов:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -20; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 34; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -24; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

Таким образом, обратная матрица:

$$A^{-1} = -\frac{1}{26}\begin{pmatrix} -20 & 6 & 34 \\ 8 & -5 & -24 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{26}\right) \cdot \begin{pmatrix} -20 & 6 & 34 \\ 8 & -5 & -24 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{26} \cdot \begin{pmatrix} -26 & 0 & 0 \\ 0 & -26 & 0 \\ 0 & 0 & -26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{26} \cdot \begin{pmatrix} -20 & 6 & 34 \\ 8 & -5 & -24 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{26} \cdot \begin{pmatrix} -26 & 0 & 0 \\ 0 & -26 & 0 \\ 0 & 0 & -26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

в) пусть A - квадратная матрица порядка n, тогда её определитель можно представить в виде:

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \cdot A_{ki} = a_{k1}A_{k1} + ... a_{kn} \cdot A_{kn}$$

(разложение определителя по к-ой строке), формула разложения по второй строке имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23};$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (0) \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (8) \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -26;$$

г) или (разложение определителя по m –му столбцу):

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{n} a_{im} \cdot A_{im} = a_{1m} A_{1m} + ... \; a_{nm} \cdot A_{nm}$$

формула разложения по третьему столбцу имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13} A_{13} + a_{23} A_{23} + a_{33} A_{33} .$$

Таким образом,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 8 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -26 .$$

Задание 3. Решить систему:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 31; \\ 5x + y + 2z = 29; \\ 3x - y + z = 10 \end{cases}$$

а) методом Крамера;

б) матричным методом (с помощью обратной матрицы);

в) методом Гаусса.

Решение:

а) метод Крамера. Если $\Delta A \neq 0,$ то решение квадратной системы $(Ax = B)$ можно найти по формулам:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \; i = 1,2,.., n,$$

где $\Delta = \Delta A,$ а Δ_i- определители порядка n, отличающиеся от Δ *i*- ым столбцом, на месте которого стоит столбец свободных членов. Принято называть Δ главным определителем, а Δ_i вспомогательными определителями.

Метод Крамера:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 31 \\ 29 \\ 10 \end{pmatrix}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 12 - 20 - 12 + 2 - 10 = -27 ;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 31 & 2 & 4 \\ 29 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 31 - 116 + 40 - 40 + 62 - 58 = -81;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 31 & 4 \\ 5 & 29 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 29 + 200 + 186 - 348 - 20 - 155 = -108 ;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 31 \\ 5 & 1 & 29 \\ 3 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 10 - 155 + 174 - 93 + 29 - 100 = -135;$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-81}{-27} = 3; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-108}{-27} = 4; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-135}{-27} = 5.$$

Ответ: $x = 3;\quad y = 4;\quad z = 5;$

б) с помощью обратной матрицы: Предполагаем, что матрица A - невырожденная, то существует обратная матрица A^{-1}. Умножим обе части равенства $Ax = B$ слева на матрицу A^{-1}. Получим $(A^{-1}A)x = A^{-1}B$. В соответствии с одним из свойств произведения матриц последнее преобразуется к виду $Ex = A^{-1}B$ или, окончательно, $x = A^{-1}B$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix};$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(2 + 4) = -6;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(5 - 6) = 1; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 12 = -11;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 3 = -8; \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 6) = 7;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 20) = 18;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 10 = -9;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-27}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & -11 & 18 \\ -8 & 7 & -9 \end{pmatrix};$$

$x = A^{-1}B$;

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{-27}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & -11 & 18 \\ -8 & 7 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 31 \\ 29 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{-27}\begin{pmatrix} 93 - 174 \\ 31 - 319 + 180 \\ -248 + 203 - 90 \end{pmatrix} = \frac{1}{-27}\begin{pmatrix} -81 \\ -108 \\ -135 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 3; \quad y = 4; \quad z = 5;$

в) суть метода Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных и состоит из двух этапов.

Прямой метод Гаусса (пошагово):

1) Выбирается одно из уравнений (оно объявляется ведущим). В этом уравнении выбирается ведущая переменная, в качестве которой может быть выбрана любая переменная с ненулевым коэффициентом.

2) С помощью равносильных преобразований эта переменная исключается из других уравнений системы.

3) Выбирается другое уравнение, которое объявляется следующим ведущим и т.д:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} I \cdot 5 \\ I - II \end{pmatrix} \begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ 9y + 18z = 126 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} I \cdot 3 \\ I - III \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ 9y + 18z = 126 \\ -7y + 11z = 83 \end{cases} \Rightarrow (II \div 9) \begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ y + 2z = 14 \\ 7y + 11z = 83 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} II \cdot 7 \\ II - III \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ y + 2z = 14 \\ 3z = 15 \end{cases} \Rightarrow (III \div 3) \begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ y + 2z = 14 \\ z = 15 \end{cases} \Rightarrow;$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ y = 14 - 2z \\ z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ y = 14 - 10 \\ z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4. \\ z = 5 \end{cases}$$

Ответ: $x = 3; \quad y = 4; \quad z = 5.$

Задание 4. Даны точки A, B, C : $A(-2,7,0)$, $B(-6,3,-1)$, $C(-3,4,1)$ и вектор $\vec{c}$: $\vec{c} = (-9,-1,0)$. Найти:

а) длину векторов $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{AB}\right|$, $\left|\vec{b}\right| = \left|\vec{AC}\right|$, координаты середины отрезка AB, AC ;

б) скалярное произведение $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, проекцию вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$, векторное произведение $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$, смешанное произведение $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$;

в) площадь треугольника и параллелограмма, полученного из векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$;

г) объем пирамиды, построенной из векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Решение:

а) координаты вектора по двум точкам, определяется разностью между координатами конца и начала вектора. Пусть даны две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, расположенные в пространстве, то координаты вектора расчитываются по формуле:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Если вектор задан $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, то модуль (длина) определяется по формуле:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (-6 - (-2), 3 - 7, -1 - 0) = (-4, -4, -1);$$

$$\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) = (-3 - (-2), 4 - 7, 1 - 0) = (-1, -3, 1);$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16 + 16 + 1} = \sqrt{33};$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 9 + 1} = \sqrt{11}.$$

Координаты середины отрезка AB и AC вычисляются по формуле:

$$C_1\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) = \left(\frac{-2-6}{2}, \frac{7+3}{2}, \frac{0-1}{2}\right) = \left(-4, 5, -\frac{1}{2}\right);$$

$$C_2\left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}, \frac{z_1 + z_3}{2}\right) = \left(\frac{-2-3}{2}, \frac{7+4}{2}, \frac{0+1}{2}\right) = \left(-2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

где точка C_1 середина отрезка AB;

точка C_2 середина отрезка AC;

б) векторы $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ заданы в виде координат, то скалярное произведение определяется по формуле:

$$\left(\vec{ab}\right) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = (-4)\cdot(-1) + (-4)\cdot(-3) + (-1)\cdot 1 = 4 + 12 - 1 = 15.$$

Если скалярное произведение векторов – отрицательное число, то угол между данными векторами тупой и наоборот.

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{ab} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\left(\vec{ab}\right) = np_{\vec{b}}\, a \cdot \left|\vec{b}\right| = np_{\vec{a}}\, b \cdot \left|\vec{a}\right|.$$

Проекция вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$ равна скалярному произведению этих векторов, деленному на длину вектора $\vec{b}$:

$$np_{\vec{b}}\, a = \frac{\vec{ab}}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{15}{\sqrt{11}} \approx 4.5.$$

Если $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, то векторное произведение

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix};$$

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & -4 & -1\\ -1 & -3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4 & -1\\ -3 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-4 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-4 & -4\\ -1 & -3\end{vmatrix}\vec{k}=-7\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k}=(-7,5,8).$$

Смешанное произведение заданное тремя векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вычисляется по формуле:

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix};$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}-4 & -4 & -1\\ -1 & -3 & 1\\ -9 & -1 & 0\end{vmatrix}=0-1+36+27-4-0=58.$$

Так как $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\neq 0$, то эти векторы не компланарны;

в) рассмотрим векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$. Площадь треугольника ABC есть половина площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, есть модуль векторного произведения $\vec{AB}\times\vec{AC}$, а потому площадь треугольника ABC есть:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|.$$

В пункте б) показано нахождение векторного произведения векторов:

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=-7i+5j+8k.$$

Найдем модуль вектора, в данном случае площадь параллелограмма:

$$\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|=\sqrt{(-7)^2+5^2+8^2}=\sqrt{138}\approx 11.747.$$

Площадь треугольника:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot 11.747\approx 5.873;$$

г) объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c},$ находим по формуле:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|.$$

Найдем:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -4 & -4 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -9 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 58 \approx 9.6.$$

Задание 5. Заданы точки $A(2,-2)$, $B(-3,2)$ и уравнение прямой $l_1 : x - 2y + 2 = 0$.

Записать уравнение прямой:

а) $l = (AB)$ - проходящей через заданные точки;

б) l - в виде уравнения прямой в отрезках;

в) l - с угловым коэффициентом;

г) l_2 - проходящей через точку A и перпендикулярную прямой l_1;

е) l_2 и l, и угол между ними.

Решение:

а) уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

В нашем случае l будет:

$$\frac{x - 2}{-3 - 2} = \frac{y - (-2)}{2 - (-2)};$$

$$l_2 : \frac{x - 2}{-5} = \frac{y + 4}{4}.$$

Общий вид уравнения прямой на плоскости:

$$\frac{x - 2}{-5} = \frac{y + 4}{4}; \qquad 4(x - 2) = (-5)\cdot(y + 1); \qquad 4x - 8 = -5y - 5; \qquad 4x + 5y - 3 = 0;$$

б) уравнение прямой в отрезках задается из общего вида уравнения по формуле:

$$Ax + By + C = 0 \rightarrow Ax + By = -C \rightarrow \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{b}} = 1.$$

В нашем случае:

$$4x + 5y - 3 = 0 \rightarrow 4x + 5y = 3 \rightarrow \frac{x}{\frac{3}{4}} + \frac{y}{\frac{3}{5}} = 1 \rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{в} = 1,$$

где $a = \frac{3}{4}$, $в = \frac{3}{5}$.

Точки (a,0) и (b,0) расположены на осях координат Ox и Oy и удалены от начала координат на a и b единиц. Направление, в котором нужно откладывать длину отрезка, определяется знаком, который стоит перед числами a и b. Знак «–» обозначает, что длину отрезка необходимо откладывать в отрицательном направлении координатной оси;

в) общее уравнение прямой при $B \neq 0$ можно привести к виду:

$$Ax + By + C = 0 \;\;\rightarrow\;\; y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}, \;\; y = kx + в,$$

где $k = -\frac{A}{B}$ - угловой коэффициент равный тангенсу угла $k = tg\,\varphi$, образованного данной прямой и положительным направлением оси Ox, $b = -\frac{C}{B}$ - величина направленного отрезка, отсекаемого на оси Oy:

$$l : 4x + 5y - 3 = 0 \;\;\rightarrow\;\; 5y = -4x + 3 \;\;\rightarrow\;\; y = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5};$$

г) уравнение прямой l_2, проходящей через точку (x_0, y_0), перпендикулярно прямой l_1 имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0).$$

В нашем случае $l_1 : y = \frac{1}{2}x + 1$, тогда:

$$l_2 : y - (-2) = -\frac{1}{\frac{1}{2}}(x - 2); \;\; y + 2 = -2(x - 2);$$

$$y + 2 = -2x + 4; \;\; 2x + y - 2 = 0;$$

д) если две прямые заданы уравнением с угловым коэффициентом:

$$y = k_1 x + в_1;$$

$$y = k_2 x + в_2$$

то угол между ними можно найти, используя формулу:

$$tg\left(\widehat{l_1, l_2}\right) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Если знаменатель равен нулю $1 + k_1 k_2 = 0$, то прямые перпендикулярны.

В нашем случае прямые l_2 и l имеют угловые коэффициенты соответственно:

$$l_2: \;\; k_2 = -2; \; l: \;\; k = -\frac{4}{5}.$$

Тогда по формуле:

$$tg\,\varphi = \frac{-2 - (-\frac{4}{5})}{1 + (-\frac{4}{5}) \cdot (-2)} \approx -0{,}461, \qquad \varphi \approx 155^0.$$

Задание 6. Даны точки $A(1,2,-1), B(3,3,2), C(2,-3,7)$ и уравнение плоскости $P_2 : \; 2x + 3y + z - 4 = 0$. Найти:

а) уравнение плоскости $P_1 = (ABC)$;

б) P_1 в виде уравнения плоскости в отрезках;

в) каноническое уравнение прямой $L_1 = (BC)$;

г) параметрическое уравнение прямой L_1;

д) уравнение плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярно плоскостям P_1 и P_2.

Решение:

а) уравнение плоскости, проходящей через точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

В нашем случае P_1:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z + 1 \\ 3 - 1 & 3 - 2 & 2 - (-1) \\ 2 - 1 & -3 - 2 & 7 - (-1) \end{vmatrix} = 0 \to \begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z + 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

раскрыв определитель в правой части равенства, получим уравнение плоскости P_1 в общем виде $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$23x - 13y - 11z - 8 = 0, \quad (A = 23, B = -13, C = -11, D = -8).$$

Геометрический смысл коэффициентов: *A*, *B*, *C* – это координаты нормального (перпендикулярного) вектора плоскости, то есть это вектор $\overline{N} = (23, -13, -11) \perp P_1$;

б) перенесём в общем уравнении плоскости свободный член –8 в правую часть и разделим обе части на 8. Получим уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{8/23} + \frac{y}{-8/13} + \frac{z}{-8/11} = 1 ,$$

где $a = 8/23$, $b = -8/13$, $c = -8/11$ – это величины отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях, считая от начала координат;

в) каноническое уравнение прямой, проходящей через две точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2), находится по формуле:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} .$$

Значит, уравнение прямой L_1, проходящей через точки B и C, имеет вид:

$$\frac{x-3}{2-3}=\frac{y-3}{-3-3}=\frac{z-2}{7-2} \quad \text{или} \quad \frac{x-3}{-1}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z-2}{5};$$

г) параметрическое уравнение называется уравнение прямой вида:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t,$$

где $\overline{a}(m,n,p)$ – ее направляющий вектор.

В предыдущем пункте найден каноническое уравнение прямой L_1.

Параметрическими называются уравнения прямой вида:

$$\begin{cases} x = mt + x_0; \\ y = nt + y_0; \\ z = pt + z_0. \end{cases}$$

Чтобы получить параметрические уравнения прямой, приравняем канонические уравнения к параметру t и из полученных равенств найдём x, y, z:

$$L_1: \frac{x-3}{-1}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z-2}{5}=t \to \begin{cases} \dfrac{x-3}{-1}=t \to x=-t+3; \\ \dfrac{y-3}{-6}=t \to y=-6t+3; \\ \dfrac{z-2}{5}=t \to z=5t+2. \end{cases}$$

Итак, параметрическое уравнение прямой L_1 имеет вид:

$$\begin{cases} x = -t + 3; \\ y = -6t + 32; \\ z = 5t + 2; \end{cases}$$

д) если плоскость перпендикулярна одновременно двум другим плоскостям, то ее нормальный вектор можно найти как векторное произведение нормальных векторов двух плоскостей:

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 23 & -13 & -11 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -13 & -11 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 23 & -11 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 23 & -13 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\vec{k}=20\vec{i}-55\vec{j}+95\vec{k}.$$

Находим уравнение плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярно двум плоскостям по фомуле:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Отсюда:

$$20(x-1)-55(y-2)+95(z+1)=0,$$

$$20x-55y+95z+185=0.$$

Задание 7. Даны точка $A(3, -1)$; радиус окружности $R=4$; $a = 3$; $b = 2$ – полуоси кривых; D: $y=-3$ – уравнение прямой. Найти:

а) уравнение окружности с центром в точке A и радиусом R;

б) каноническое уравнение эллипса с полуосями $a=3$ и $b=2$, координаты его фокусов и эксцентриситет;

в) каноническое уравнение гиперболы с действительной полуосью $a=3$ и мнимой $b=2$, координаты его фокусов, эксцентриситет и уравнения ассимптот;

г) каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат, если D ее директриса, координаты его фокуса и эксцентриситет;

д) схематический чертеж эллипса, гиперболы и параболы (рисунок 2).

Решение:

а) уравнение окружности с центром в точке (x_0, y_0) радиуса R имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

В нашем варианте:

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16;$$

б) каноническое уравнение эллипса с полуосями a и b имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

В нашем варианте:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Фокусы эллипса – это точки $F_1(-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$:

- если $a > b$, то $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ и эксцентриситет ε эллипса равен $\varepsilon = \frac{c}{a}$;
- если $b > a$, то $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ и $F_1(0, -c)$, $F_2 = (0, c)$, $\varepsilon = \frac{c}{b}$.

Итак, в нашем варианте, поскольку $b > a$, то:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$

эксцентриситет равен $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, ($\varepsilon < 1$). Фокусы лежат на оси Ox:

$$F_1(-\sqrt{5}, 0),\ F_2 = (\sqrt{5}, 0);$$

в) каноническое уравнение гиперболы с действительной полуосью a, мнимой полуосью b имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

С действительной полуосью b и мнимой полуосью a:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{или} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Для гиперболы с действительной полуосью *a* эксцентриситет равен $\varepsilon = \frac{c}{a}$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Уравнения асимптот гиперболы имеют вид: $y = \pm \frac{b}{a} x$; фокусы – это точки $F_1(-c.0), F_2 = (c,0)$, расположенные на действительной оси.

По условию *a*=3, *b*=2, поэтому каноническое уравнение гиперболы с действительной полуосью *a* будет:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 .$$

Для неё полуфокусное расстояние $c = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$, эксцентриситет равен $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}, (\varepsilon \succ 1)$, фокусы: $F_1(-\sqrt{13}.0), F_2 = (\sqrt{13},0)$; уравнения асимптот:

$$y = \pm \frac{2}{3} x .$$

Гиперболу легко построить следующим образом: строим прямоугольник со сторонами $x = \pm a, y = \pm b$ (у нас $x = \pm 3, y = \pm 2$). Диагонали прямоугольника являются асимптотами гиперболы, точки пересечения сторон прямоугольника с действительной осью гиперболы – вершинами гиперболы;

г) по условию, если директриса параболы $y = -\frac{p}{2}$, то осью симметрии параболы с вершиной в начале координат является ось *Ox*. Значит, её каноническое уравнение имеет вид $x^2 = 2py$.

Если директриса параболы $x = -\frac{p}{2}$, то осью симметрии параболы с вершиной в начале координат является ось *Oy*. Значит, её каноническое уравнение имеет вид $y^2 = 2px$.

Так как директриса параболы имеет уравнение *y*=-3, то $-\frac{p}{2} = -3 \Rightarrow p = 6.$ Тогда уравнение параболы имеет вид: $x^2 = 2 \cdot 6 \cdot y \to x^2 = 12y$. Фокус параболы – это точка $F(0, \frac{p}{2})$, лежащая на оси симметрии. В нашем случае фокус - $F(0,3)$.

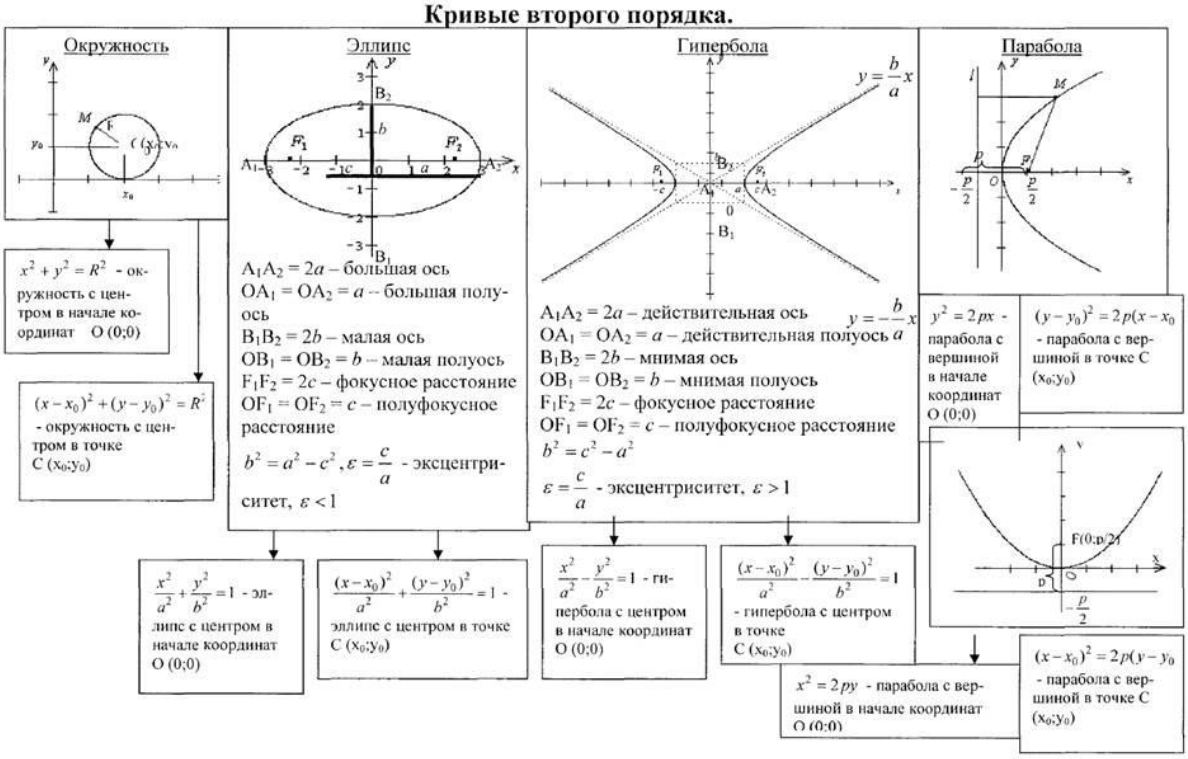
Кривые второго порядка.
Окружность
Эллипс
Гипербола
Парабола
$x^2 + y^2 = R^2$ - окружность с центром в начале координат O (0;0)
$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ - окружность с центром в точке C (x_0;y_0)
$A_1A_2 = 2a$ – большая ось
$OA_1 = OA_2 = a$ – большая полуось
$B_1B_2 = 2b$ – малая ось
$OB_1 = OB_2 = b$ – малая полуось
$F_1F_2 = 2c$ – фокусное расстояние
$OF_1 = OF_2 = c$ – полуфокусное расстояние
$b^2 = a^2 - c^2, \varepsilon = \dfrac{c}{a}$ - эксцентриситет, $\varepsilon < 1$
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ - эллипс с центром в начале координат O (0;0)
$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ - эллипс с центром в точке C (x_0;y_0)
$y = \dfrac{b}{a}x$
$y = -\dfrac{b}{a}x$
$A_1A_2 = 2a$ – действительная ось
$OA_1 = OA_2 = a$ – действительная полуось
$B_1B_2 = 2b$ – мнимая ось
$OB_1 = OB_2 = b$ – мнимая полуось
$F_1F_2 = 2c$ – фокусное расстояние
$OF_1 = OF_2 = c$ – полуфокусное расстояние
$b^2 = c^2 - a^2$
$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ - эксцентриситет, $\varepsilon > 1$
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ - гипербола с центром в начале координат O (0;0)
$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ - гипербола с центром в точке C (x_0;y_0)
$y^2 = 2px$ - парабола с вершиной в начале координат O (0;0)
$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$ - парабола с вершиной в точке C (x_0;y_0)
F(0;p/2)
$x^2 = 2py$ - парабола с вершиной в начале координат O (0;0)
$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$ - парабола с вершиной в точке C (x_0;y_0)

Рисунок 2

Список литературы

1 Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. ч.2. –М.: ОНИКС 21 век, Мир и образование, 2008. - 489 с.

2 Лунгу К.Н. и др. Сборник задач по высшей математике (с контрольными работами). – М.: Айрис пресс, 2011. -576 с.

3 Мустахишев К.М., Ералиев С.Е., Атабай Б.Ж. Математика (толық курс). – Алматы: NSN-Company, 2009. – 410 б.

4 Хасеинов К.А. Задачи и упражнения по инженерной математике (с индивидуальными заданиями). Часть 2. –Алматы, 2009. - 631 с.

Содержание