Коммерциялық емес
Акционерлы қоғам

АЛМАТЫ
ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ
БАЙЛАНЫС
УНИВЕРСИТЕТІ

Математикалық модельдеу
және бағдарламалық қамту
кафедрасы

МАТЕМАТИКА 1

5В070200 – Автоматтандыру және басқару
мамандығының студенттері үшін дәрістер жинағы

Алматы 2017

Құрастырушылар: А.К.Искакова, Э.С.Есботаева. Математика 1. 5В070200 – Автоматтандыру және басқару мамандығының студенттері үшін дәрістер жинағы –Алматы: АЭжБУ, 2017 - 71 б.

«Математика 1» пәні бойынша дәрістер жинағы 5В070200 – Автоматтандыру және басқару мамандығының студенттеріне арналған.

Дәрістер конспектісі көрсетілген мамандықтың «Математика – 1» пәнінің бағдарламасына сәйкес құрылған. Студенттер, жалпы кредиттің санына сәйкес, таңдап алынған бағыттарына байланысты модульдік жүйе бойынша бұл курсын тындап, білім алады. Әрбір модульдің көлемі мен мазмұны білімалушылардың жастық психологиялық ерекшеліктеріне сай құрылған. Материалдарды беру жолдары пәнаралық байланыстарға сәйкес жасалынған.

Сызба – 24, әдеб.көрсеткіші – 12.

Пікір беруші: техн.ғ.к., доцент К.О.Гали

«Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2017ж. жоспары бойынша басылды.

Модуль 1. Сызықтық және векторлық алгебра

Дәріс 1. Сызықтық алгебра. Екінші және үшінші ретті анықтауыштар, олардың қасиеттері. *n*–ші ретті анықтауыштар. Матрицалар және оларға амалдар қолдану. Кері матрица. Матрицаның рангі және оны есептеу

Дәріс мазмұны: анықтауыштар, олардың қасиеттері. Матрицалар және оларға қолданатын амалдар, кері матрица, матрицаның рангі және оны есептеу.

Мақсаты: студенттерді анықтауыш, матрица және оларға қолданатын амалдар ұғымдарымен таныстыру.

Анықтама. $m \times n$ өлшемді матрица деп:

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} = \|a_{ij}\| = (a_{ij}) \qquad (1)$$

түріндегі m - жол (жатық жол) және n - бағаннан (тік жолдан) тұратын тік бұрышты сандар кестесін айтады,

мұндағы a_{ij} - сандары оның элементтері деп аталады, 1-ші индекс осы элемент тұрған жол нөмірін, ал 2-ші индекс баған нөмірін білдіреді.

Егер $m = n$ болса, онда (1) шаршы матрица деп аталады, бұл жағдайда n саны оның ретін көрсетеді. n-ші ретті шаршы матрица n^2 элементтен тұратыны түсінікті.

Матрица - ғылыми техникалық және экономикалық есептерде кестелік ақпараттарды жазу үшін қолданылады; бағдарламалау саласында матрицаларды екі өлшемді массивтер деп атайды.

Кейде ыңғайлы болу үшін матрицаның өлшемін индекспен жазады: $A_{m\times n}$. Егер $m\times n$ өлшемді $A_{m\times n} = (a_{ij})$ және $B_{m\times n} = (b_{ij})$ матрицаларының сәйкес элементтері тең болса, онда олар тең матрицалар деп аталады да $A = B$ деп белгіленеді.

Шаршы матрица үшін осы матрицадан туындаған анықтауыш (матрица анықтауышы) деп аталатын $|a_{ij}|$ санын қарастыруға болады. Кейде анықтауыш *detA* (ағылшын детерминант - анықтауыш**)** немесе Δ арқылы белгіленеді.

2-ші ретті матрица анықтауышы деп:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{2}$$

санын айтады, ал 3-ші ретті матрица анықтауышы деп

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \tag{3}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

санын айтады. (3)-тәсіл үшбұрыш ережесі деп аталады.

Мұндағы $a_{11}, a_{22}, a_{33},$ - элементтері орналасқан кесінді анықтауыштың бас диагоналы, ал $a_{13}, a_{22}, a_{31},$ - элементтері орналасқан кесінді оның бүйір диагоналы деп аталады.

(3)-қосындысындағы әрбір қосылғыш (таңбасымен қоса) анықтауыш мүшесі деп аталады. Әрбір мүшеде әрбір жол мен әрбір бағанның бір-бірден элементтері бар. Бұл элементтерді әрбір мүшеде бірінші индексінің, яғни элемент жатқан жол нөмірінің, өсу ретімен орналастыруға болады.

Анықтама. A матрицасының жолдарын сәйкес бағандар emin орын алмастырудан алынған A^T матрицасы A матрицасының транспонирленген матрицасы деп аталады.

A мен A^T матрицаларының элементтері бас диагоналға салыстырғанда симметриялы орналасқан.

Жолдарды бағандармен алмастыру тәсілі транспонирлеу деп аталады. Δ анықтауышынан транспонирлеу арқылы алынған анықтауышты Δ^* арқылы белгілейтін боламыз.

Енді анықтауыштардың қасиеттерін қарастырайық. Ыңғайлы болу үшін оларды 3-ші ретті анықтауыштар үшін тұжырымдаймыз. Алайда бұл қасиеттер реті кез келген анықтауыш үшін де орынды. Кейбір жағдайларда сөйлем ықшамырақ болу үшін «жол» немесе «баған» деген ұғымдарды «қатар» деп атайтын боламыз.

1) Транспонирленген анықтауыш пен берілген анықтауыштың мәндері әрдайым бірдей.

2) Анықтауыштың екі параллель қатарын орын алмастырса (бұл амалды екі параллель қатарды транспозициялау деп атаймыз), анықтауыштың таңбасы өзгереді.

3) Параллель екі қатары бірдей (сәйкес элементтері тең) анықтауыш нөлге тең.

4) Егер қандай да бір қатардың барлық элементтері k санына көбейтілсе, онда анықтауыш мәні де k санына көбейтіледі, басқаша айтқанда,

қатардың ортақ көбейткішін анықтауыш таңбасының алдына шығаруға болады.

Салдар. Егер екі параллель қатарлардың сәйкес элементтері пропорционал болса, онда анықтауыш нөлге тең.

5) Егер анықтауыштың қандай да бір қатарының барлық элементтері нөлге тең (нөлдік қатар) болса, онда анықтауыштың мәні де нөлге тең.

6) Егер анықтауыштың белгілі бір қатарының әрбір элементі екі қосылғыштың қосындысы етіп берілсе, онда анықтауыш екі анықтауыштың қосындысына тең. Бірінші анықтауыштың сәйкес қатары бірінші қосылғыштардан, ал екінші анықтауыштың сәйкес қатары екінші қосылғыштардан тұрады да, бұл екі анықтауыштың қалған сәйкес қатарлары өзара тең элементтерден тұрады.

7) Егер анықтауыштың қандай да бір қатарының барлық элементтеріне осы қатарға параллель қатардың сәйкес элементтерін кез келген k санына көбейтіп қосса, анықтауыштың мәні өзгермейді.

Минорлар мен алгебралық толықтауыштар. Анықтауыш элементтерін жол немесе баған элементтері бойынша жіктеу. Кез келген ретті анықтауышты есептеуге келесі қасиеттер мүмкіндік береді.

Анықтама. A матрицасының кез келген элементінің миноры деп элементі тұрған жол мен бағанды алып тастап A матрицасының қалған қатарларынан құралған матрицаны айтады.

n-ші ретті A матрицасының a_{ij} элементінің миноры реті $n-1$ тең i-ші жолмен j-ші бағанды сызып тастағанда шығатын анықтауыш болады, оны M_{ij} арқылы белгілейміз.

Мысал. 3-ші ретті A матрицасының a_{22} элементінің миноры реті екіге тең анықтауыш болады:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ болса, онда } \quad M_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Анықтама. a_{ij} элементінің алгебралық толықтауышы немесе адъюнкті деп $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ санын айтады.

8) Анықтауыштың қандай да бір қатарының элементтері мен олардың алгебралық толықтауыштарының көбейтінділерінің қосындысы осы анықтауыш мәніне тең:

$$\Delta=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+.....a_{in}A_{in}, \;\; i=1,2,....,n, \tag{4}$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + ... a_{nk} A_{nk}, \ k = 1,2,...., n, \qquad (5)$$

(4) - қосынды анықтауыштың 1-ші жол элементтері бойынша жіктелуі, ал (5) қосынды - анықтауыштың *k*-ші баған элементтері бойынша жіктелуі деп аталады.

9) Анықтауыштың қандайда бір қатар элементтерімен осы қатарға параллель басқа бір қатардың сәйкес элементтерінің алгебралық толықтауыштарының көбейткіштерінің қосындысы нөлге тең.

Анықтама. n-ші ретті А матрицасының анықтауышы деп жіктелу туралы 8-ші тұжырымды және басқада (анықтауыштың) қасиеттерін пайдалана отырып алынған осы матрицаға сәйкес келетін санды айтады.

Матрицаларға амалдар қолдану. Матрицаларға қолданылатын келесі амалдарды қарастырамыз: санға көбейту, қосу, көбейту, кері матрица табу.

Алдымен келесі түсініктерді енгізейік.

Шаршы матрицаның бас диагоналінің сыртындағы (бас диагональ элементтерінен басқа) элементтердің барлығы нөлге тең болса оны диагональдік матрица дейді. *n*-ші ретті диагональдік матрицаны келесі түрде жазуға болады:

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & d_2 & .... & 0 \\ & .... & & \\ 0 & 0 & ..... & d_n \end{pmatrix}$$

Егер мұнда $d_1 = d_2 = ... d_n = d$ болса, $d = 1$ және $d = 0$ үшін диагональдік матрица сәйкес *E* - бірлік матрица және *O* - нөлдік матрица деп аталады

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 1 & .... & 0 \\ & .... & & \\ 0 & 0 & ..... & 1 \end{pmatrix}, \qquad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & .... & 0 \\ & .... & & \\ 0 & 0 & ..... & 0 \end{pmatrix}$$

Ескерту. Нөлдік матрица түсінігі кез келген тік бұрышты (шаршы емес) матрицалар үшін де енгізіледі.

Анықтама. $A = (a_{ij}),$ $i = 1,2,...., m$, $j = 1,2,...., n$ матрицасы мен λ санының көбейтіндісі (λA) деп әрбір элементі $C_{ij} = \lambda a_{ij}$ тең $C = (c_{ij})$, $i = 1,2,...., m$, $j = 1,2,...., n$ матрицасын айтады.

Бұл амал үшін келесі қасиеттер орындалады:

1) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$- сандық көбейткіштерге қатысты ассоциативті.

2) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ - сандарды қосуға қатысты дистрибутивті. Сонымен бірге, $1\cdot A=A$, $(-1)\cdot A=A$, $0\cdot A=0$ теңдіктері орындалады.

Анықтама. Бірдей өлшемді А мен В матрицаларының қосындысы деп әрбір элементі $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ тең, өлшемі А немесе В өлшеміндей $C=A+B$ матрицасын айтады.

Матрицаларды қосу амалы үшін келесі қасиеттер орынды:

1) $A+B=B+A$ - коммутативтік.

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ - ассоциативтік.

3) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ - матрицаларды қосуға қатысты дистрибутивтік.

Анықтама. $A_{m\times n}=(a_{ij})$ және $B_{n\times p}=(b_{ij})$ матрицаларының көбейтіндісі деп элементтері:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\ ,\quad i=1,2,....,m;\quad j=1,2,....p,$$

яғни i-ші жол мен j-ші баған қиылысуындағы c_{ij} элементі А матрицасының i-ші жолы мен В матрицасының j-ші бағанының сәйкес элементтерінің көбейтінділерінің қосындысына тең болатын $C_{m\times p}=AB$ матрицасын айтады.

Ескерту. Анықтамадан 1-ші матрицаның бағандар саны 2-ші матрицаның жолдар санына тең болатын матрицаларды ғана көбейтуге болатынын көреміз.

$AB\neq BA$, яғни матрицаларды көбейту коммутативті емес екендігін де байқаймыз.

Матрицаларды көбейту амалы келесі қасиеттерге ие:

1) $(AB)C=A(BC)$ – ассоциативті.

2) $(A+B)C=AB+BC$ және матрицаларды қосуға қатысты дистрибутивті.

3) Шаршы матрицалар үшін $\det(AB)=\det A\cdot\det B$, яғни көбейтіндінің анықтауышы көбейткіштердің анықтауыштарының көбейтіндісіне тең.

Сонымен бірге кез келген шаршы A матрица үшін:

$$AE=EA=A,\ A\cdot 0=0\cdot A=0\ ,$$

яғни E бірлік матрица бірлік сан сияқты, ал нөлдік матрица нөл саны сияқты роль атқарады.

Анықтама. Егер $AA^{-1}=A^{-1}A=E$, (E– бірлік матрица) теңдіктері орындалса, онда A^{-1} матрицасы A матрицасына кері деп аталады.

Анықтама. Анықтауышы нөлге тең емес шаршы матрица нұқсансыз (невырожденная), ал анықтауышы нөлге тең шаршы матрица нұқсанды (вырожденная) деп аталады.

Ескерту. «Нұқсанды» немесе «нұқсансыз» түсініктер тек қана квадрат матрицалар үшін ғана қолданылатынын ескертеміз.

$\det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$ теңдігінен нұқсанды матрица үшін кері матрица болмайтыны шығады $\left(0 \cdot \det A^{-1} \neq 1\right)$.

Анықтама. $A_{n\times n} = (a_{ij})$ шаршы матрицасы берілсе, оның элементтерінің алгебралық A_{ij} толықтауыштарынан құралған

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & \dots\dots\dots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

матрицасын тіркелген матрица деп атайды.

Тіркелген матрицаны алу үшін *A* матрицасының әрбір элементін оның алгебралық толықтауышымен ауыстырып, алынған матрицаны транспонирлеу керек. Тіркелген матрицаның A_{ij} элементінің 1-ші индексі баған, ал 2-ші индексі жол нөмерін көрсетеді. A_{ij} -ші элементі *i*-ші баған мен *j*-ші жол қиылысуындағы элемент.

Кері матрица. Теорема. Нұқсансыз матрицалардың, тек қана солардың кері матрицалары бар және кері матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & \dots\dots\dots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

формуласы бойынша табылады.

Матрица рангісі. Кез келген тік бұрышты матрицаға тән сандық сипаттамасын қарастырамыз. Матрица рангісі базистік жолдар (базистік бағандар) деп аталатын жолдар (бағандар) санын анықтайды, ал қалған жолдарды (бағандарды) осы базистік жолдардың (базистік бағандардын) сызықтық комбинацияларынан алуға болады.

Анықтама. A матрицасының *k*-ші *ретті* миноры деп *A* матрицасының кез келген *k* жолы мен кез келген *k* бағандарының қиылысуындағы элементтермен құралған матрицаны айтады.

Анықтама. A матрицасының рангісі деп осы матрицасының нұқсансыз минорларының ең үлкен ретін айтады да $r(A)$ немесе r_A немесе $rangA$ символдарының біреуімен белгілейді.

Нөлдік матрицасының рангі нөлге тең деп есептеледі.

Егер *A* матрицасы *n*-ші ретті нұқсансыз шаршы матрица болса, онда $r(A)=n$; егер $\det A=0$ болса, онда $A\neq 0$ үшін $1\leq r(A)<n$;

A матрицасы $m\times n$ өлшемді матрица болса, онда $r(A)\leq \min\{m,n\}$. Матрица рангісін табу үшін оның 1-ші ретті минорынан бастап барлық минорларын нұқсансыздыққа зерттесе болғаны.

Көмкеруші минорлар әдісі бұл процедураны едәуір жеңілдетеді.

Осы әдісті түсіндірейік. Кез келген 1-ші ретті нұқсансыз минор *(A* матрицасының нөлге тең емес элементі) алынады, оны A_1 деп белгілейік. Енді A_1-ді көмкеруші (ішінде A_1 болатын) барлық 2-ші ретті минорлар қарастырылады. Егер оның барлығы нұқсанды болса, онда *r(A)*=1*,* ал егер олай болмаса, яғни ең болмағанда нұқсансыз екінші ретті бір минор бар болса, онда оны A_2 арқылы белгілейміз. Келесі циклдер осы сияқты жалғасады. *A* матрицасының *k*-ші ретті нұқсансыз миноры A_k, ал оны көмкеретін барлық минорлар нұқсанды болса, онда *r(A)=k,* ал егер олай болмаса A_{k+1} нұқсансыз минорын алып процесс одан әрі қарай жалғасады.

Матрица рангісін табудың тағы бір әдісін - элементар түрлендірулер немесе Гаусс әдісін қарастырайық.

A матрицасы үшін элементар түрлендіруле*р* деп келесі түрлендірулерді айтады:

1) Жолдарды (немесе бағандарды) орнымен алмастыру.

2) Қатарды нөлге тең емес санға көбейту.

3) Қатарға оған параллель қатарды қандай да бір *k* санына көбейтіп қосу.

4) Нөлдік қатарды алып тастау.

Матрицаға осы аталған элементар түрлендірулерді қолданса, оның рангі өзгермейді.

A матрицасынан элементар түрлендірулер арқылы алынған *B* матрицасын оған эквивалент деп атайды да *A~B* символымен белгілейді.

A матрицасының рангін табу үшін, оның рангісін оңай табуға болатын, оған эквивалент *B* матрицасына ауыстыру орынды. Мұндай матрицаларға, мысалы, трапеция тәріздес матрицалар жатады. Олар жалпы жағдайда келесі түрде жазылады:

$$A\approx\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots & a_{1r}\ldots\ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}\ldots\ldots & a_{2r}\ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0\ldots\ldots & a_{rr}\ldots\ldots & a_{rn} \end{pmatrix}, a_{ii}\neq 0, \qquad i=1,2,\ldots,r.$$

Ал бұл матрица үшін нұқсансыз 1-ші ретті минордың бірі сол жақ жоғарғы бұрышта тұрғанын көреміз. Олай болса, *r*(*A*)=*r*.

Анықтама. Реті *A* матрицасының рангісіне тең кез келген нұқсансыз минор осы матрицаның базистік миноры деп аталады.

Базистік минордың жолдары мен бағандарын *A* матрицасының базистік жолдары және базистік бағандары деп атайтын боламыз.

Анықтама. $A_1, A_2,.., A_k$ жолдарының (бағандарының) сызықтық комбинациясы деп $C_1A_1 + C_2A_2 + ... + C_kA_k$, $(C_i, i = 1,2,...., k)$ қосындысын айтады.

Теорема (базистік минор туралы). A матрицасының кез келген жолы (бағаны) оның базистік жолдарының (бағандарының) сызықтық комбинациясы түрінде жазылады.

Дәріс 2. Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі. Крамер ережесі. Сызықты теңдеулер жүйесін матрицалық түрде жазу және оны матрицалық тәсілмен шешу. *n*–белгісі бар *m* сызықты теңдеулер жүйесі. Біртекті сызықты теңдеулер жүйесі

Дәріс мазмұны: сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі және оны Крамер ережесімен, матрица әдісімен шешу. n белгісізі бар m сызықты теңдеуден құралған жүйе. Біртекті сызықты теңдеулер жүйесі.

Мақсаты: сызықты теңдеулер жүйесін Крамер ережесімен және матрицалық әдіспен шешуді көрсету.

Анықтама. n белгісі бар m сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі (САТЖ) келесі түрде жазылады:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}, \qquad (1)$$

мұндағы $x_1, x_{2,....,}x_n$ айнымалылары жүйенің белгісіздері;

a_{ij}, $i = 1,2,.., m$, $j = 1,2,...., n$ жүйе коэффициенттері;

$b_i, i = 1,2,3,..., m$ бос мүшелер.

Жүйенің барлық теңдеулерін тепе-теңдіке айналдыратын $x_1, x_2,......, x_n$ белгісіздерінің сандары жүйенің шешімі деп аталады.

Егер жүйенің шешімі бар болса, ол үйлесімді, ал шешімі болмаса, үйлесімсіз жүйе деп аталады.

Белгісіздердің коэффициенттерінен құралған $m \times n$ өлшемді матрицаны *A* арқылы (оны жүйе матрицасы деп атайды) $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}.....a_{1n} \\ a_{21}a_{22}.....a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}.....a_{mn} \end{pmatrix}$, бос мүшелер бағанын B арқылы $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots\cdots \\ b_m \end{pmatrix}$, немесе $B=\left(b_1\ b_2\ \ldots b_m\right)^*$, ал белгісіздер бағанын X арқылы $X=\left(x_1\ \mathrm{x}_2 \ldots \mathrm{x}_m\right)^*$ белгілейік. Сонда (1) САТЖ матрицалық түрде жазуға болады:

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},$$

немесе қысқаша *AX=B*.

Егер *A* шаршы матрица болса жүйенің матрицалық түрінен кері матрицаны пайдаланып, оның шешімін табуға болады.

Теорема. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйенің матрицасы нұқсансыз болса, онда оның жалғыз шешімі бар және ол келесі формуламен есептеледі:

$$\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}. \qquad (2)$$

САТЖ-сін (2) формула арқылы шешу матрицалық әдіс деп аталады.

Крамер ережесі. САТЖ-нің n-ші ретті шаршы матрицасының детерминанты $det A \neq 0$ болсын. Онда жүйенің жалғыз шешімі бар және ол келесі формулалар арқылы табылады:

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i=1,2,\ldots,n, \qquad (3)$$

мұндағы, Δ_i анықтауышы - Δ анықтауышынан оның i-ші бағанын жүйенің бос мүшелер бағанымен ауыстыру арқылы алынатын анықтауыш.

САТЖ зерттеудің және оның шешімін табудың Гаусс әдісі. Матрицалық әдіс пен Крамер ережесінің негізгі екі кемшілігі бар. Біріншіден, оларды нұқсансыз матрицалары бар теңдеулер жүйесіне ғана қолдануға болады; екіншіден, сандық теңдеулер жүйесін шешуде тиімсіз, өйткені ол әдістерді қолдану (Гаусс схемасына қарағанда) n^2 есеге жуық есептеу амалдарын жасауды керек етеді, мысалы, $n>10$ болса, онда бұл әдістерді қолдану мүмкіндігі тіпті аз.

Элементар түрлендіру (Гаусс) әдісі кез келген тік бұрышты (квадрат қана емес) матрицалары бар теңдеулер жүйесін зерттеп және шешімін табуға (жүйенің шексіз көп шешімі бар жағдайда да) мүмкіндік береді.

Теңдеулер жүйесін зерттеу - оның үйлесімді (немесе үйлесімсіз) екенін, ал егер үйлесімді болса, онда жүйе шешімінің қанша болатынын анықтау.

Анықтама. САТЖ-нің кеңейтілген матрицасы деп жүйе матрицасының оң жағынан бос мүшелер бағанын тіркеп жазу арқылы алынған матрицаны айтады (тіркелген бос мүшелерді әдетте вертикаль сызықпен бөліп қояды).

Мысалы, (1)-САТЖ матрицасы $A_{m\times n}$ өлшемді болса, онда оның кеңейтілген матрицасы $\overline{A}_{m\times(n+1)}$ өлшемді болады:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{c|c} a_{11}a_{12}...a_{1n} & b_1 \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} & b_2 \\ .... & .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Олардың рангтерінің екі жағдайы: $r(\overline{A})=r(A)$ немесе $r(\overline{A})>r(A)$ болуы мүмкін. Келесі теорема теңдеулер жүйесін зерттеуге мүмкіндік береді.

Теорема (Кронекер-Капелли теоремасы). Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің матрицасы мен кеңейтілген матрицасының рангілері тең болса және тек сонда ғана $(r(A)=r(\vec{A}))$ жүйе үйлесімді болады.

Енді теңдеулер жүйесін Гаусс схемасы бойынша зерттеу және шешу сұрақтарын қарастырайық.

Гаусс әдісімен A және $\overline{A}$ матрицаларының рангілерін анықтау үшін $\overline{A}$ кеңейтілген матрицасын жазып алып (соңғы бос мүшелер бағанын өзгертпей) элементар түрлендірулер арқылы A матрицасы трапеция тәріздес матрицаға келтіріледі. Егер бұл түрлендірулерде бағандар орын алмасқан болса, оларды өздеріне сәйкес белгісіздермен белгілеп отырады.

Трапеция теріздес матрица рангісі туралы жоғарыда қарастырғанбыз. Сонымен $r(A)$ және $r(\vec{A})$ анықталды делік. Келесі жағдайлар болуы мүмкін:

1) $r(\vec{A})>r(A)$. Бұл жағдайда Кронекер-Капелли теоремасы бойынша теңдеулер жүйесі үйлесімсіз.

2) $r(\vec{A})=r(A)=r$. Бұл жағдайда Кронекер-Капелли теоремасы бойынша теңдеулер жүйесі үйлесімді, сонымен бірге:

а) егер $r=n$ болса, яғни матрицалардың рангілері белгісіздер санына тең болса, онда жүйе шешімі жалғыз болады;

б) егер $r<n$ болса, онда теңдеулер жүйесінің $n-r$ параметрлеріне $(c_1,c_2,....,c_{n-1})$ тәуелді шексіз көп шешімі болады.

Ескерту. Қолданылған элементар түрлендірулер жүйенің шешімдер жиынын өзгертпейді, яғни жүйе бастапқы жүйеге мәндес болып қалады.

Біртекті және біртекті емес сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі.

Анықтама. Егер бос мүшелерінің барлығы нөлге тең, болса, САТЖ-ы біртекті, ал бос мүшелер бағаны нөл емес САТЖ-ы біртекті емес деп аталады.

Біртекті САТЖ-сін келесі түрде жазуға болады:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2} + \ldots\ldots a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

немесе матрицалық түрде *AX*=0. Мұнда $0 = (0\ldots)^*$ - нөл баған. Біртекті жүйе әрқашанда үйлесімді, өйткені оның тривиалды деп аталатын $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ шешімі бар.

Матрицалық әдіс және Крамер ережесі біртекті жүйені шешуге қолданудың реті келмейді. Өйткені, егер $\det A \neq 0$ болса, онда $r(A) = r(\vec{A}) = n \ \ (A = \vec{A})$, болады да жүйенің жалғыз тривиалды шешімі бар; ал егер detA=0, болса бұл әдістер қолданылмайды (жарамайды). Сондықтан, мұндай жағдайда біртекті жүйелердің шешудің Гаусс схемасын қолданамыз.

Дәріс 3. Векторлық алгебра. Үш өлшемді $\mathbf{R}^3$ кеңістігі. Векторлар және оларға қолданатын сызықты амалдар. $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ және $\mathbf{R}^n$ декарттық координаттар жүйесі. Полярлық координаттар жүйесі

Дәріс мазмұны: жазықтық пен кеңістіктегі векторлар, оларға қолданатын сызықтық амалдар. Декарттық және поляр координаттар жүйесі.

Мақсаты: жазықтықтағы және кеңістіктегі векторлар ұғымын қарастыру, оларға қолданатын амалдарды қарастыру, поляр координаттар жүйесі ұғымын енгізу.

Векторлар және оларға қолданылатын амалдар. Векторлар белгілі бір бағыты болатын шамаларды сипаттауға қолданылады. Оларға мысалдар ретінде күш, жылдамдық, үдеу т.б. атауға болады.

Анықтама. Вектор деп бас нүктесі А соңғы нүктесі (ұшы) В болатын өзіне-өзін параллель жылжытуға болатын, бағытталған АВ кесіндісін айтады.

Сонымен, ұзындықтары тең ($|\overline{AB}| = |\overline{A_1B_1}|$) және бағыттас екі $\overline{AB}$ және $\overline{A_1B_1}$ кесінділерінің жалғыз ғана $\vec{a}$ векторын анықтайды деп есептеп $\vec{a} = \overline{AB} = \overline{A_1B_1}$ түрінде жазуға болады (1 сурет).

1 сурет

Бұдан, вектор басы етіп кез келген нүктені алуға болатыны шығады. Егер *A* мен *B* нүктелері беттесе, онда ол $\overline{AB} = \overline{AA} = \overline{0}$ арқылы белгіленеді де нөлдік вектор деп аталады. $\overline{AB}$ векторының модулі (ұзындығы) $\left|\overline{AB}\right|$ деп AB кесіндісінің ұзындығын айтады. Кейде $\left|\overline{AB}\right|=AB$ деп те жазыла береді. Нөлдік вектордың модулі нөлге тең ($|0| = 0$), оның бағыты болмайды.

Бір түзуде немесе параллель түзулерде жататын векторлар коллинеар векторлар деп аталады. Нөл вектор кез келген векторға коллинеар деп есептеледі. Коллинеар векторларды $\vec{a}_1 \| \vec{a}_2$ арқылы белгілейді. $\vec{a}$ векторына коллинеар, модулі $|\vec{a}|$ тең, бағыты $\vec{a}$ векторына қарама-қарсы бағытталған вектор $\vec{a}$ векторына қарама-қарсы вектор деп аталады да, $\vec{a}$ арқылы белгіленеді.

Анықтама. $\vec{a}$ векторы мен α санының көбейтіндісі $\alpha \cdot \vec{a}$ деп белгіленеді, және бұл вектордың

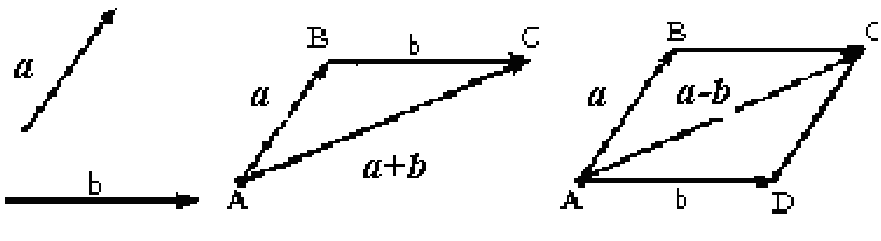
1) модулі $|\alpha \cdot \vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$ -ға тең.

2) $\alpha \cdot \vec{a} \| \vec{a}$.

3) $\alpha > 0$ болса, $\vec{a}$ - векторымен бағыттас, ал $\alpha < 0$ болса, $\vec{a}$ - векторына бағыты қарама-қарсы болады.

4) Егер $\alpha = 0$ болса, онда $\alpha\vec{a} = 0$.

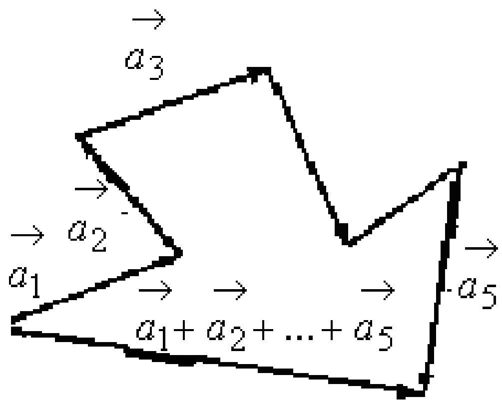
Анықтама. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының қосындысы $\vec{a} + \vec{b}$ деп, $\vec{b}$ векторының басын $\vec{a}$ векторының ұшымен беттестірген жағдайда, $\vec{a}$ векторының басынан $\vec{b}$ векторының ұшына бағытталған $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ векторын айтады (2 сурет).



2 сурет

$\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының қосындысын табу үшін “үшбұрыш ережесін” пайдалануға болады. Ол үшін кез келген A нүктесіне $\overline{AB} = \vec{a}$ және $\overline{BC} = \vec{b}$ векторларын тұрғызса $\vec{a} + \vec{b} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ шығады. Немесе “параллелограм ережесін” пайдалануға болады. Мұнда $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларын ортақ A басына келтіреді де, оларды қабырғалар етіп параллелограмм тұрғызады, оның A нүктесінен шығатын $\overline{AC}$ диоганалы $\vec{a} + \vec{b}$ болады.

Бірнеше $\vec{a}_i$, $i = 1,2,...,n$ векторларды қосу үшін әрбір келесі $\vec{a}_i$ векторының басын алдыңғы $\vec{a}_{i-1}$ векторының ұшымен түйістіріп, бірінші $\vec{a}_1$ векторының басымен соңғы $\vec{a}_n$ векторының ұшын қосып, $\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i$ векторын тұрғызады (3 сурет).



3 сурет

Бұл амалдар үшін келесі қасиеттер орынды:

1) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ - ассоциативті (сандық көбейткіштерге қатысты).

2) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ - дистрибутивті (сандарға қосуға қатысты).

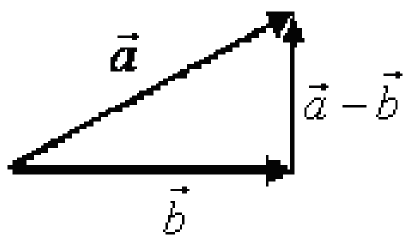
3) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - коммутативті (векторларды қосуға қатысты).

4) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ - ассоциативті.

5) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ - дистрибутивті (векторларды қосуға қатысты).

Анықтама. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының айырымы $\vec{a} - \vec{b}$ деп $\vec{b}$ векторымен қосындысы $\vec{a}$ векторына тең болатындай $x = \vec{a} - \vec{b}$ векторын айтады, яғни $\vec{b} + x = \vec{a}$ болса, онда $x = \vec{a} - \vec{b}$.

Бір нүктеден шығатын $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторының айырымын $x = \vec{a} - \vec{b}$ салу үшін $\vec{b}$ векторының ұшын $\vec{a}$ векторының ұшымен қосатын вектор тұрғызса болғаны немесе $\vec{a} - \vec{b} = \overline{OA} - \overline{OB} = \overline{BA}$ (4 сурет)



4 сурет

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$ - теңдігінің дұрыстығын тексеру қиын емес.

Анықтама. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ векторларының сызықтық комбинациясы деп

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + ... + c_n\vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\vec{a}_i$$

векторын айтады,

мұндағы c_i, $(i = 1,2,...,n)$ кез келген сандар.

Анықтама. Бір жазықтықта болмаса параллель жазықтықтарда жататын $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ векторлары компланарлы деп аталады.

Векторлық кеңістік базисі. Вектор координаталары. Векторлық кеңістік деп кез келген сызықтық комбинациясы осы кеңістікте жататын векторлар жиынын айтады.

Кез келген векторлық кеңістікте бірнеше векторларды тандап алып, осы кеңістіктің әрбір векторын, осы векторлардың бір мәнді сызықтық комбинациясы арқылы жазуға болады. Мұндай векторларды базистік деп атайды. Қысқаша түзу, жазықтық және кеңістік деп сәйкес векторлық түзу, векторлық жазықтық және векторлық кеңістіктерді атайтын боламыз.

Анықтама. Түзудегі әрбір нөлдік емес вектор түзу базисі деп аталады. Кез келген коллинеар емес $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ векторлар жұбы жазықтық базисі деп аталады. Кез келген компланар емес $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ векторлар үштігі кеңістік базисі деп аталады.

Базис туралы теорема. Кеңістіктің әрбір $\vec{e}$ векторы $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ базистік векторлардың сызықтық комбинациясы болады және ол вектор үшін мұндай комбинация жалғыз ғана болады:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3. \tag{1}$$

(1) - тендік жазықтық және түзу үшін сәйкес келесі түрде жазылады:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \qquad \vec{a} = x\vec{e}_1.$$

Аньқтама. Егер

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b} \tag{2}$$

теңдігінен $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ шықса, онда $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторлар жүйесі сызықтық тәуелді деп аталады.

Егер (2) теңдігі орындалатындай, барлығы бірдей бірмезгілде нөл емес $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ сандары бар болса, онда $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторлар жүйесі сызықтық тәуелді деп аталады. Анық болу үшін $\vec{a}_k \neq 0$ деп алсақ, онда

$$\vec{a}_k = \frac{\alpha_1}{\alpha_k}\vec{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k}\vec{a}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_k}\vec{a}_n.$$

Сонымен, егер n векторлар жүйесі сызықтық тәуелді болса, онда олардың бірі қалған векторлардың сызықтық комбинациясы болады.

Ескерту. Базистік векторлар туралы теореманы дәлелдеместен, базистік векторлар жүйесі сызықтық тәуелсіз болатынын көреміз.

(1) теңдікті $\vec{a}$ векторының $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ базисі бойынша жіктелуі деп атайды, x,y,z - сандары $\vec{a}$ векторының $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ базисіндегі координаталары деп аталады және $\vec{a}=(x,y,z)$ деп те жазылады.

1-теорема. Векторларды қосқанда олардың сәйкес координаталары қосылады, ал векторды санға көбейткенде оның барлық координаталары сол санға көбейтіледі.

2-теорема. Екі вектор тең болуы үшін олардың сәйкес координаталарының тең болуы қажетті және жеткілікті, яғни $\vec{a}=(x_a,y_a,z_a),\ \vec{b}=(x_b,y_b,z_b)$ векторлары үшін:

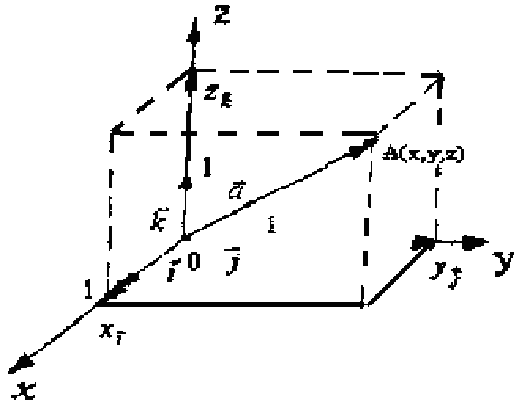
$$\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow\ x_a=x_b,\ y_a=y_b,\ z_a=z_b\ .$$

3-теорема (*координаталы векторлардың коллинеарлық белгісі*) $\vec{a}=(x_a,y_a,z_a)$ және $\vec{b}=(x_b,y_b,z_b)$ берілсін. Онда

$$\vec{b}\|\vec{a} \Leftrightarrow \frac{x_b}{x_a}=\frac{y_b}{y_a}=\frac{z_b}{z_a}=\lambda\ ,$$

яғни $\vec{a},\ \vec{b}$ векторлары коллинеарлы болуы үшін олардың сәйкес координаталары пропорционал болуы қажетті және жеткілікті.

Кеңістікте $OXYZ$ тік бұрышты декарттық координаталар жүйесі берілсін. Бұл жүйемен байланыста болатын, сәйкес *OX, OY, OZ* остерінің бойында орналасқан $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ бірлік векторлары $(|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1)$ кеңістік базисін құрайды (5 сурет). Оларды сәйкес $OX,\ OY,\ OZ$ остерінің орттары деп атайды.



5 сурет

Кеңістіктен кез келген *A* нүктесін алайық. $\overline{OA}$ векторы (басы координаталар бас нүктесінде, ұшы *A* нүктесі болатын) *A* нүктесінің радиус-векторы деп аталады.

Егер $A=\{x,y,z\}$ болса, онда $\overline{OA}=\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=(x,y,z)$ теңдігін жаза аламыз. Шынында, $\vec{i}=(1,0,0),\ \vec{j}=(0,1,0),\ \vec{k}=(0,0,1)$ болғандықтан:

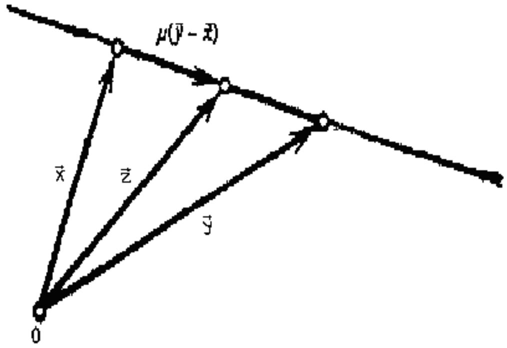
$$x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=(x,0,0)+(0,y,0)+(0,0,k)=(x,y,z).$$

Тік бұрышты координаталар жүйесінде $A=(x_a,y_a,z_a),\ \ B=(x_b,y_b,z_b)$ нүктелері берілсе, онда

$$\overline{AB}=(x_b-x_a,y_b-y_a,z_b-z_a).$$

Расында да, $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a)$.

Кесіндіні берілген қатынасқа бөлу. R^n кеңістігінің ($n = 1$– болғанда түзу, $n = 2$ -болғанда жазықтық, $n = 3$- болғанда кеңістік, $n > 3$- n-өлшемді абстрактылы (дерексіз) кеңістік) кез келген x, y-нүктелері (радиус-векторлары) берілсін. Онда $[x, y]$ кесіндісін келесі түрде анықтауға болады (6 сурет).



6 сурет

$$z = \lambda x + \mu y, \quad \lambda, \mu > 0, \quad \lambda + \mu = 1. \qquad (3)$$

Мұнда $\mu = 0$ болса, онда $z = x$, *ал* $\lambda = 0$, онда $z = y$, ал кез келген $\lambda > 0$, $\mu > 0$ үшін z нүктесі $[x, y]$ кесіндінің ішкі нүктесі.

(3) - теңдікті келесі түрде жазуға болады:

$$z = (l - \mu)x + \mu y = x + \mu(y - x), \quad 0 \le \mu \le 1$$

немесе

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y = y + \lambda(x - y), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Теорема. $z = \lambda x + \mu y, \quad \lambda, \mu \ge 0, \quad \lambda + \mu = 1$ нүктесі $[x, y]$ кесіндісін ұзындық-тары $\frac{\mu}{\lambda}$ қатынасындай болатын кесінділерге бөледі.

Дәріс 4. Векторлардың сызықты тәуелділігі және тәуелсіздігі. Базис. $\mathbf{R}^3$ кеңістігінде екі векторды скаляр және векторлық түрде көбейту, олардың қасиеттері. Векторлар арасындағы бұрыш. Вектордың проекциясы. Үш вектордың аралас көбейтіндісі және қасиеттері. Векторлардың көбейтіндісінің геометриялық және механикалық мағыналары

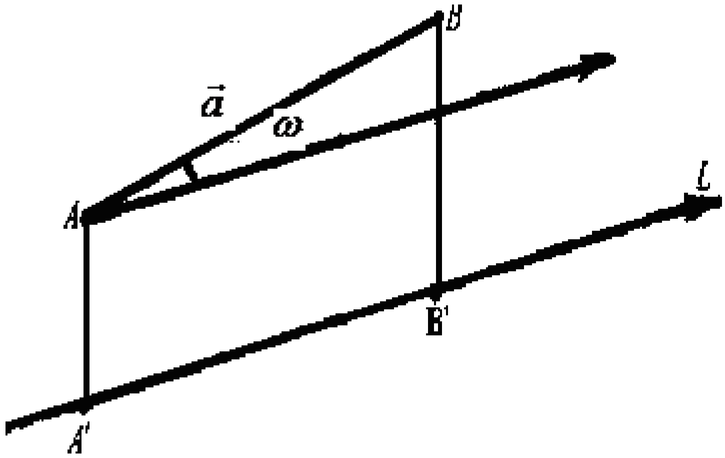
Дәріс мазмұны: векторлардың сызықтық тәуелділігі және тәуелсіздігі базис. Векторлардың скаляр, векторлық көбейтулері. Үш векторды аралас көбейту. Скаляр, векторлық және аралас көбейтудің қасиеттері. Векторлардың көбейтіндісінің геометриялық және механикалық мағыналары.

Мақсаты: скаляр, векторлық және аралас көбейту ұғымдарын енгізу, олардың қасиеттерін қарастыру, механикалық және геометриялық мағыналарын көрсету.

Векторлардың түзудегі проекциясы. Векторлардың скаляр көбейтіндісі және оның қасиеттері. Кейде (i,j,k) базисіндегі вектор координаталарын проекция ретінде жазу ыңғайлы.

$\vec{a}=\overline{AB}$ векторының бағыттал-ған L түзуге проекциясы $(Пр_L\vec{a})$ деп $\overline{A'B'}$ векторын айтады, мұндағы $\overline{A'B'}$ нүктелері A мен B-нің L түзуіне проекциялары (7 сурет)

$$\overline{A'B'}=Пр_L\overline{AB}.$$



7 сурет

$\overline{A'B'}$ - векторының екі түрлі ғана бағыты бар: егер $\vec{a}$ мен L-дің арасындағы бұрыш сүйір, яғни $0<\omega=\angle(\vec{a},L)<90^\circ$ болса, онда оның бағыты L түзуінің бағытымен беттеседі де, ал доғал, $90^\circ<\omega=\angle(\vec{a},L)<180^\circ$ болса, онда $\overline{A'B'}$ - векторы L түзуінің бағытына қарама-қарсы болады. Сондықтан, $\vec{a}$ векторының бағытталған L - түзуге проекциясын келесі түрде анықтайды.

Анықтама. $\vec{a}=\overline{AB}$ векторының L - бағытталған түзуге проекциясы деп $\vec{a}$ векторының ұзындығы мен $\vec{a}$ векторы мен L түзуінің бағыты арасындағы бұрышының косинусының көбейтіндісін айтады:

$$Пр_L\vec{a}=|\vec{a}|\cos\omega \quad (4)$$

$\vec{a},\vec{b}$ векторларының берілген бағытқа проекциялары келесі қасиеттерге ие:

1) $Пр_L(\vec{a}+\vec{b})=Пр_L\vec{a}+Пр_L\vec{b}$.

2) $Пр_L(\alpha\cdot\vec{a})=\alpha\cdot Пр_L\vec{a}$.

Осыдан $Пр_L(\vec{a}-\vec{b})=Пр_L\vec{a}-Пр_L\vec{b}$ екендігі шығады.

Анықтама. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісі деп осы векторлардың ұзындықтары мен олардың арасындағы бұрышының косинусының көбейтіндісіне тең санды айтамыз және оны $\vec{a}\cdot\vec{b},\ (\vec{a},\vec{b})$ таңбаларының біреуімен белгілейміз:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi \quad (5)$$

(4) - теңдігін ескеріп (5) теңдігін келесі түрде де жаза аламыз:

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a}Пр_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{b}Пр_{\vec{b}}\vec{a}\,.$$

Скаляр көбейтіндінің қасиеттері:

$(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$;

$(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b}) + (\vec{a},\vec{c})$;

$(\vec{a},\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a},\vec{b})$.

Нөл емес $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлары үшін:

1) $(\bar{a},\bar{b}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \angle(\bar{a},\bar{b}) = \frac{\pi}{2}$ ($\bar{a}$, $\bar{b}$ векторлары ортогональ).

2) $(\bar{a},\bar{b}) > 0 \;\Leftrightarrow\; 0 < \angle(\bar{a},\bar{b}) < \frac{\pi}{2}$ $\angle(\bar{a},\bar{b})$ - сүйір бұрыш.

3) $(\bar{a},\bar{b}) < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < (\bar{a},\bar{b}) < \pi;$ $\angle(\bar{a},\bar{b})$ - доғал бұрыш.

Кез келген $\vec{a}$ векторы үшін:

$$(\bar{a},\bar{a}) = \left|\bar{a}^2\right| = a^2.$$

Тік бұрышты декарттық координаталар жүйесінің орттары $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ үшін:

$$(\bar{i},\bar{i}) = (\bar{j},\bar{j}) = (\bar{k},\bar{k}) = 1,$$
$$(\bar{i},\bar{j}) = (\bar{i},\bar{k}) = (\bar{j},\bar{k}) = 0.$$

Егер $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ базисінде $\bar{a} = (x_1,y_1,z_1)$, $\bar{b} = (x_2,y_2,z_2)$ векторлары берілсе, онда

$$(\bar{a},\bar{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Дербес жағдайда $\bar{a} = \bar{b}$ болса, онда $\bar{a}\bar{a} = \left|\bar{a}\right|^2 = x^2 + y^2 + z^2$, бұдан $\bar{a} = (x,y,z) = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ векторының ұзындығын анықтауға болады:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{6}$$

Егер $\bar{a} = (x,y,z)$, $\bar{b} = (x',y',z')$ берілсе, онда (6)-шы теңдіктен $\bar{a}$ мен $\bar{b}$ нүктелерінің ара қашықтығының формуласы шығады:

$$\left|\overline{AB}\right| = \left|\vec{b} - \vec{a}\right| = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}\,.$$

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ және $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ векторларының арасындағы φ бұрышы:

$$cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}\,. \tag{7}$$

(7)-теңдіктен $\overline{a}$ =(x_1,y_1,z_1) және $\overline{b}$ =(x_2,y_2,z_2) векторларының ортогональдық *($\overline{a} \perp \overline{b}$)* белгісін алуға болады:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 .$$

Анықтама. Нөл емес $\vec{a}$ векторының бағыттаушы косинустары деп осы вектор мен *OX, OY, OZ* остерінің арасындағы α, β, γ бұрыштарының косинустарын айтады.

$\vec{a}$ = *(x, y, z)* векторының бағыттаушы косинустары:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ;$$

$$\cos\beta = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ;$$

$$\cos\gamma = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} .$$

Бағыттаушы косинустар үшін $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$ теңдігі орындалады. Кез келген нөл емес $\overline{a}$ *= (x, y, z) = xi + yj + zk* векторының орты:

$$\left(\left|\overline{a^o}\right| = 1\right) \qquad \overline{a^o} = \frac{\vec{\overline{a}}}{|\overline{a}|} = \frac{x}{|\overline{a}|}\overline{i} + \frac{y}{|\overline{a}|}\overline{j} + \frac{z}{|\overline{a}|}\overline{k} ;$$

$$\overline{a^o} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) .$$

Векторлық көбейтінді және оның қасиеттері.

Анықтама. $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ - бастары ортақ бір *O* нүктесіне келтірілген, компланар емес, реттелген векторлар үштігі болып $\overline{c}$ вектор ұшынан қарағанда $\overline{a}$ векторынан $\overline{b}$ векторына жақын тұспен бұрылу сағат тілінің бағытына қарама-қарсы бағытта болса, онда $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ - оң үштік векторлар, сағат тілі бағытымен бірдей болса, $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ - теріс үштік векторлар деп аталады.

Анықтама. $\overline{a}$ мен $\overline{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісі деп келесі үш шартты қанағаттандыратын $\overline{c} = [\overline{a}, \overline{b}] = \overline{a} \times \overline{b}$ векторын айтады:

1) $\overline{c}$ векторының модулі $\overline{a}$ мен $\overline{b}$ векторларының модульдері мен осы екі вектор арасындағы бұрыштың синусының көбейтіндісіне тең:

$$|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \sin(\angle\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi .$$

2) $\overline{c}$ әрбір $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторларына ортогональ, яғни ол $\overline{a}$ мен $\overline{b}$ арқылы өтетін жазықтыққа перпендикуляр.

3) Векторлар реттелген оң үштік векторлар құрайды.

Мысалы, $\bar{i}\, x\, \bar{j} = \bar{k}$, $\bar{j}\, x\, \bar{k} = \bar{i}$, $\bar{k}\, x\, \bar{i} = \bar{j}$.

Бірінші теңдікті көрсетейік. $\left|\vec{k}\right| = \left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = 1$, $\varphi = \angle(\bar{i}, \bar{j})=90^0$ және $\bar{k} \perp \bar{i}$, $\bar{k} \perp \bar{j}$, болғандықтан

1) $\left|\vec{k}\right| = \left|\vec{i}\right| \cdot \left|\vec{j}\right| \cdot \sin(\vec{i}, \vec{j}) = 1$, яғни 1=1 тепе-теңдігі орындалады.

2) Шарт айқын.

3) $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – оң үштік векторлар екенін тексеру қиын емес.

Векторлық көбейтіндінің қасиеттері:

1) $[\bar{a}, \bar{b}]=-[\bar{b}, \bar{a}]$ – антикоммутативттік.

2) $[\bar{a}, \bar{b}+\bar{c}]=[\bar{a}, \bar{b}]+[\bar{a}, \bar{c}]$ - дистрибутивтік (векторларды қосуға қатысты).

3) $[\alpha\bar{a}, \beta\bar{b}] = \alpha\beta[\bar{a}, \bar{b}]$ - ассоциативтік (санға көбейтуге қатысты).

Сонымен бірге келесі қасиеттер де орындалады:

а) $\vec{a} \| \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$, яғни $\bar{a}$ мен $\bar{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісі нөлге тең болса, олар коллинеар болады. Бұл тұжырымның дұрыстығына көз жеткізу үшін векторлық көбейту анықтамасын пайдаланса болғаны;

б) $\bar{a}$ мен $\bar{b}$ векторларына салынған параллелограмм ауданы $S = \vec{a} \times \vec{b}$ тең (векторлық көбейтінді анықтамасының бірінші шартынан шығады);

в) егер $\bar{a}$ $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ базисінде $\bar{a}$=(x_1,y_1,z_1), $\bar{b}$ =(x_2,y_2,z_2) векторлары берілсе, онда

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} y_1 z_1 \\ y_2 z_2 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} y_1 z_1 \\ y_2 z_2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix} \bar{k},$$

немесе (символдық анықтауыш арқылы) келесі түрде жазылады:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Векторлардың аралас көбейтіндісі.

Анықтама. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі деп $\bar{a}, \bar{b}$ векторларының $\vec{a} \times \vec{b}$ векторлық көбейтіндісі мен $\bar{c}$ векторының скаляр көбейтіндісін айтады:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}.$$

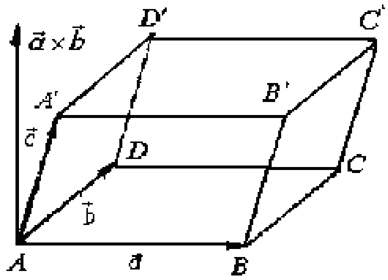
Егер $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ базисінде $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ болса, онда

$$(\overline{a}\times\overline{b})\overline{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Скаляр көбейтіндінің анықтамасына сүйеніп (8)-ді келесі түрде жазуға болады:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| Пр_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}=\left(\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\varphi\right)\cdot Пр_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}.$$

Мұндағы $\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$ шамасы $\overline{a},\overline{b}$ векторларына салынған ABCD параллелограммының ауданы; $Пр_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}$ саны $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ - векторларына салынған *ABCDA'B'C'D'* параллелепипедтің *ABCD* жағына жүргізілген биіктік (8 сурет) екенін ескерсек, онда $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}$- аралас көбейтіндісін $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ векторларына салынған параллелепипед көлемін «+» таңбасымен ($\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ оң үштік векторлар болса) немесе «-» таңбасымен ($\overline{a},\overline{b},\overline{c}$) теріс үштік векторлар болса) беретінін көруге болады.



8 сурет

Сонымен, $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ векторларына салынған параллелепипед көлемі осы үш вектордың аралас көбейтіндісінің модуліне тең болады екен,

$$V_{пар}=(\overline{a}\times\overline{b})\overline{c}=\pm\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(8)-ші теңдіктен анықтауыштың қасиетін пайдалана отырып келесі қатынастарды аламыз:

$$(\overline{a}\times\overline{b})\overline{c}=(\overline{b}\times\overline{c})\overline{a}=(\overline{c}\times\overline{a})\overline{b}; \quad (9)$$

$$(\overline{a}\times\overline{b})\overline{c}=(\overline{b}\times\overline{a})\overline{c}=(\overline{a}\times\overline{c})\overline{b}=-(\overline{c}\times\overline{b})\overline{a}.$$

Скаляр көбейтіндісінің коммутативтік қасиеті бойынша $(\overline{b}\times\vec{c})\overline{a}=\overline{a}(\overline{b}\times\vec{c})$ болатынын ескерсек, онда (9)-қатынастардың бірінші тендігі $(\overline{b}\times\vec{c})\overline{a}=\overline{a}(\overline{b}\times\vec{c})$ түрінде жазылады, ал бұл теңдік векторлардың аралас көбейтіндісін $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ символымен белгілеуге мүмкіндік береді:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\overline{b}\times\vec{c})\overline{a}=\overline{a}(\overline{b}\times\vec{c}).$$

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторлары компланар болуы үшін олардың аралас көбейтіндісі $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ болуы қажетті және жеткілікті.

Дәріс 5. Аналитикалық геометрия. Жазықтықтағы түзудің теңдеулері. Түзулердің арасындағы бұрыш. Жазықтықтағы түзулердің өзара орналасуы. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу

Дәріс мазмұны: аналитикалық геометрия элементтері: түзудің жазықтықтағы теңдеулері, жазықтықтағы түзулер арасындағы бұрыш.

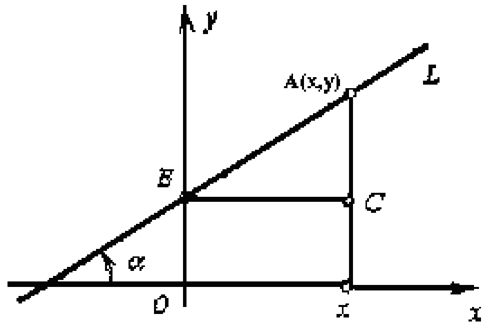
Мақсаты: аналитикалық геометрия элементтерімен таныстыру.

Жазықтықтағы түзу. Түзу геометриядағы алғашқы ұғымдардың (түсініктердің) бірі. Мектеп курсынан *L* түзуінің тендеуі

$$y = kx + l \qquad (1)$$

түрінде жазылатынын білеміз.

Мұнда $k = tg\alpha$ түзудің бұрыштық коэффициенті, ал α дегеніміз *L* түзуі мен *x* осінің оң бағыты арасындағы бұрыш; *l* - түзу мен *y* осінің қиылысу нүктесінің ординатасы (*l*=*OB*) (9 сурет).



9 сурет

Енді

$$Ax + By + C = 0 \qquad (2)$$

теңдеуін қарастырайық.

Мұндағы A,B,C - белгілі сандар және *A* мен *B* бірдей нөлге тең емес.

Егер $B \neq 0$ болса, онда (2)-ден $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ түрінде немесе $k = -\frac{A}{B}$, $l = -\frac{C}{B}$ арқылы белгілеп $y = kx + l$, яғни (1) - теңдеу түрінде жаза аламыз.

Егер *B*=0 болса, онда (2) – ден

$$Ax + C = 0 \ (A \neq 0) \ \text{немесе} \ x = a \qquad \left(a = -\frac{C}{A}\right) \qquad (3)$$

түрінде жазуға болады. Бұл y осіне параллель түзу, басқаша айтқанда, абсциссалары a санына тең болатын нүктелердің геометриялық орны.

Егер *A*=0 ($B \neq 0$) болса, онда (2)-ден

$$y = -\frac{C}{B} \quad \text{немесе} \quad \left(b = -\frac{C}{B} \right) \tag{4}$$

түрінде жазар едік. Бұл *x* осіне параллель тузу: ординаталары b санына тең болатын нүктелердің геометриялық орны.

(3) және (4) теңдеулерінде $a = 0$ және $b = 0$ болса, онда $x = 0$ және $y = 0$, сәйкес *y* осінің және *x* осінің теңдеулері шығады.

(2)-теңдеуін жазықтықтағы түзудің жалпы теңдеуі деп атайды.

Мысал. Бұрыштық коэффициенті k-ға тең, (x_0,y_0) - нүктесі арқылы өтетін түзу теңдеуін жазу керек.

Шешуі: $y = kx + l$ бұрыштық коэффициенті k-ға тең (l- кез келген сан) болатын түзу теңдеуі. (x_0,y_0) нүктесі осы түзу бойында болатындықтан:

$$y_0 = kx_0 + l \tag{5}$$

теңдік орындалуы тиіс. (1)-ден (5)-ті мүшелеп шегеріп іздеп отырған теңдеуді аламыз:

$$y - y_0 = k(x - x_0)\,. \tag{6}$$

Мысал. $M_1(x_1,y_1)$ және $M_2(x_2,y_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазу керек. $x_1 \neq x_2$ болсын, онда ізделінген түзу *y* осіне параллель емес, сондықтан оның теңдеуі ((6)- қараңыз):

$$y - y_1 = k(x - x_1)\,, \tag{7}$$

түрінде жазылады. Бұл теңдеуден түзудің $M_1(x_1;y_1,)$ нүктесі арқылы өтетіні көрініп тұр. Ол $M_2(x_2,y_2)$ нүктесі арқылы да өтетіндіктен:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \tag{8}$$

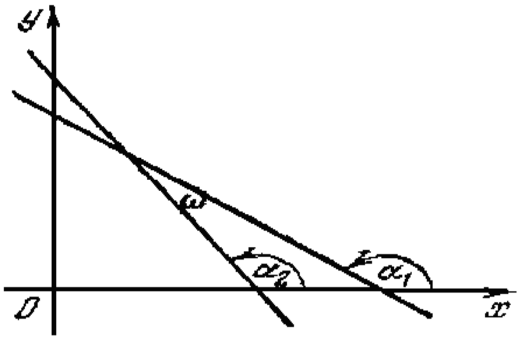
теңдігі орындалуы тиіс. (7)-ні (8)-ге мүшелеп бөлеміз, сонда:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\,, \tag{9}$$

берілген $M_1(x_1,y_1)$ және $M_2(x_2,y_2)$ нуктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін аламыз.

Мысал. $y_1 = k_1 x + b_1$ және $y_2 = k_2 x + b_2$ түзулерінің арасындағы бұрышты табу керек.

Шешуі. $k_1 = tg\alpha_1$, $k_2 = tg\alpha_2$ - бұрыштық коэффициенттер, α_1, α_2 - түзулердің x осінің оң бағытымен жасайтын бұрыштары (10 сурет).



10 сурет

ω=α$_1$-α$_2$ теңдігінен

$$tg\omega = t(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}, \qquad (10)$$

яғни екі түзудің арасындағы бұрышты табу формуласын аламыз. (10)-теңдіктен екі түзудің перпендикулярлық белгісі: $1 + k_1 k_2 = 0$, $k_1 k_2 = -1$ және екі түзудің параллельдік ($tg\omega = 0$) белгісі: $k_1 - k_2 = 0$, $k_1 = k_2$ шығады. Жағдайға бейімдеп (2) теңдеуді $x = x_1$, $y = x_2$, $A = A_1$, $B = A_2$ деп алып:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + C = 0 \qquad (11)$$

түрінде жазып алайық.

Егер $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, $C \neq 0$ болса, онда (11)-ді келесі түрге келтіруге болады:

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 1; \quad a = \frac{-C}{A_1}; \quad b = \frac{-C}{A_2} \qquad (12)$$

(12)-ні түзудің кесінділік теңдеуі деп атайды. Бұл түзу x_1 осін $(a,0)$, ал x_2 осін $(0,b)$ нүктесінде қияды. (11)- теңдеуімен берілген түзу (x_1°, x_2°) нүктесі арқылы ететін болса, онда:

$$A_1 x_1^0 + A_2 x_2^0 + C = 0 . \qquad (13)$$

(11)-ден (13)-ні шегерсек, онда келесі теңдеуге келеміз:

$$A_1(x_1 - x_1^\circ) + A_2(x_2 - x_2^\circ) = 0 . \qquad (14)$$

(14) - түзудің $M_\circ(x_1^\circ, x_2^\circ)$ нүктесі арқылы өтетін теңдеуі.

Егер $\overline{A} = (A_1, A_2)$, $\overline{x} = (x_1, x_2)$, $\overline{x}^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ)$ векторларын енгізсек, онда (14)-тің сол жағындағы шама $\overline{A}$ мен $\overline{x} - \overline{x}^\circ$ векторларының скаляр көбейтіндісі екені шығады.

$$\overline{A} \cdot (\overline{x} - \overline{x}^0) = 0 . \qquad (15)$$

Мұндағы $\bar{x}-\bar{x}^{\circ}$ векторы L түзуінде жатыр. Олай болса, (15)-тен $\bar{A}=(A_1,A_2)$ векторы берілген түзуге перпендикуляр болатыны шығады. Бұл A_1,A_2 коэффициенттерінің геометриялық мағынасы.

L түзуге перпендикуляр вектор осы түзудің нормалі (нормаль векторы) деп аталады да, оны көбінесе $\bar{n}$ арқылы белгілейді. Сонымен, $n=(A_1,A_2)\perp L$, яғни L: $A_1x_1+A_2x_2+C=0$ теңдеуіндегі A_1, A_2 осы түзуге нормаль вектордың координаталары болатынын көрдік.

Енді

$$L_1:\ A_1x_1+A_2x_2+C_1=0 \text{ және } L_2:\ B_1x_1+B_2x_2+C_2=0 \tag{16}$$

түзулерінің арасындағы φ бұрышын табайық.

$\bar{A}=(A_1,A_2)\perp L_1$ және $\bar{B}=(B_1,B_2)\perp L_2$ болғандықтан $\varphi=\angle(\bar{A},\bar{B})$ олай болса,

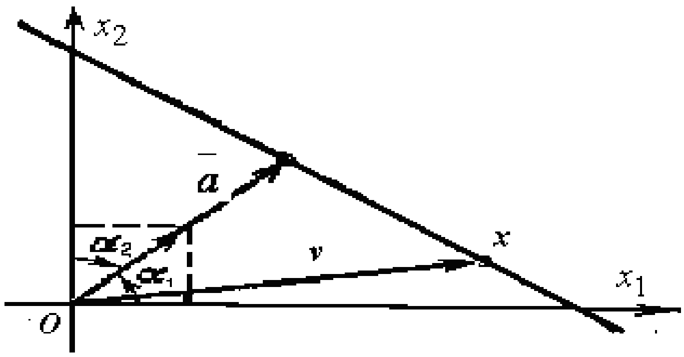
$$cos\varphi=\frac{\bar{A}\bar{B}}{|\bar{A}|\cdot|\bar{B}|}=\frac{A_1B_1+A_2B_2}{\sqrt{A_1^2+A_2^2}\cdot\sqrt{B_1^2+B_2^2}}. \tag{17}$$

(17)-ден L_1 және L_2 түзулерінің перпендикулярлық $\varphi=\frac{\pi}{2},\ cos\frac{\pi}{2}=0$ шартын жаза аламыз:

$$A_1A_2+B_1B_2=0.$$

Егер екі түзу параллель болса ($L_1\|L_2$), онда A мен B коллинеар болады, яғни $\bar{A}=\lambda\bar{B},\ \lambda$ - тұрақты сан. Бұдан түзулердің параллельдік шарты шығады: $\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}$.

Тік бұрышты координаталар жүйесінде координата бас нүктесінен өтпейтін кез келген L түзуі берілсін. $\bar{a}$ векторы координата бас нүктесінен шығатын L түзуіне перпендикуляр, ұшы L түзуінде жататын вектор болсын (11 сурет).



11 сурет

$\bar{a}$ векторы L түзуін толығымен анықтайды, өйткені, $\bar{a}$ векторының ұшы арқылы оған перпендикуляр жалғыз ғана түзу жүргізуге болады.

Айталық, $\bar{a}=p$, $\bar{v}=(cos\,\alpha_1,cos\,\alpha_2)$ дегеніміз $\bar{a}$ векторының орты, ал $cos\alpha_1,\ cos\alpha_2$ - оның бағыттаушы косинустары болсын. $\vec{x}=(x_1,x_2)$

векторы L - түзуінің кез келген нүктесі (радиус-вектор) болсын. Осы x векторының $\bar{v}$ - бірлік векторына проекциясы p тең екені айқын: $Пр_{\bar{v}}\bar{x} = p\bar{x}$. Сондықтан, L түзуінің векторлық теңдеуі деп аталатын:

$$(\bar{x},\bar{v}) = |\bar{v}| Пр_{\bar{v}} x = p \qquad (18)$$

теңдеуді аламыз. Расында да керісінше (18)-теңдеуді қанағаттандыратын әрбір $\vec{x}$ нүктесі L түзуінде жатады. Егер L түзуі координата бас нүктесі арқылы өтсе, онда оның теңдеуі де (18) - түрінде жазылады.

(18) -ді координаталар бойынша:

$$x_1 \cos\alpha_1 + x_2 \cos\alpha_2 = p \qquad (p \geq 0), \qquad (19)$$

немесе

$$\cos\alpha_2 = \cos(90^\circ - \alpha_1) = \sin\alpha_1$$

ескеріп

$$x_1 \cos\alpha_1 + x_2 \sin\alpha_2 = p \qquad (p \geq 0) \qquad (20)$$

түрінде жазуға болады. (19) немесе (20) түзудің қалыпты теңдеуі деп аталады.

Егер L түзуі жалпы теңдеу $A_1x_1 + A_2x_2 + C_1 = 0$ арқылы берілсе, онда оны қалыптастырушы көбейткіш деп аталатын:

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}$$

санға көбейту арқылы қалыпты тендеуге келтіруге болады. Мұндағы таңба C таңбасына қарама-қарсы етіп алынады, өйткені, $p = -M \cdot C \geq 0$. Расында, $(M \cdot A_1)^2 + (M \cdot A_2)^2 = l$ теңдігі орындалатындықтан $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ бұрышының $M \cdot A_1 = \cos\alpha_1$, $M \cdot A_2 = \sin\alpha_2$ болатын жалғыз ғана мәні табылады.

Мысал. $\bar{x}^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ)$ нүктесінен $A_1x_1 + A_2x_2 + C_1 = 0$ теңдеуімен анықталған түзуге дейінгі d - қашықтығын табу керек.

Шешуі. $\bar{x}^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ)$ нүктесінен $(\bar{x}^\circ, \bar{v}) - p = 0$ түзуге дейінгі қашықтықты:

$$d = |(\bar{x}^\circ, \bar{v}) - p| \qquad (21)$$

формуласымен есептеуге болады. (21)-ші теңдікті түзудің жалпы теңдеуі арқылы жазсақ:

$$d = \frac{|A_1x_1^\circ + A_2x_2^\circ + C|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}$$

алар едік. (21)-ші теңдіктен $\bar{x}^{\circ} = (x_1^{\circ}, x_2^{\circ})$ нүктесінен $(\bar{x}^{\circ}, \bar{v}) - p = 0$ түзуге дейінгі қашықтықты табу үшін $\bar{x} = (x_1, x_2)$ координаталарын сәйкес $c = (x^{\circ}, x^{\circ})$ координаталармен ауыстырып алынған өрнектің модулін алу керек екен.

Ескерту. Егер 0- бас нүктесі мен $\bar{x}^{\circ}$ нүктесі L түзуінің бір жағында жатса, онда $\bar{v}$ мен $x - \bar{x}^{\circ}$ арасындағы бұрыш сүйір, яғни $p - (\bar{x}^{\circ}, \bar{v}) > 0$ (**немесе** $A_1 x_1^{\circ} + A_2 x_2^{\circ} + C < 0$), ал 0 - мен $\bar{x}^{\circ}$ нүктелері L түзуінің екі жағында жатса, онда $\bar{v}$ мен $x - \bar{x}^{\circ}$ арасындағы бұрыш доғал, яғни $p - (\bar{x}^{\circ}, \bar{v}) < 0$ немесе $A_1 x_1^{\circ} + A_2 x_2^{\circ} + C > 0$ болар еді.

Дәріс 6. R^3 кеңістігінде жазықтық пен түзудің теңдеулері жазықтық пен түзудің теңдеулері. Жазықтық пен түзудің өзара орналасуы. Кеңістіктегі түзу және жазықтық теңдеулерінің қолданулары

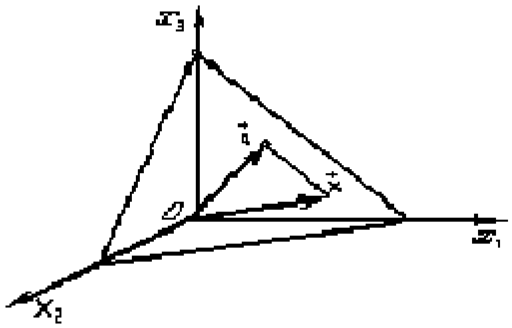
Дәріс мазмұны: кеңістіктегі жазықтықпен түзу теңдеулері, жазықтық пен түзудің өзара орналасуы. Кеңістіктегі түзу және жазықтық теңдеулерінің қолданулары.

Мақсаты: кеңістіктегі жазықтықпен, жазықтық пен түзудің өзара орналасуымен және олардың қолдануларымен таныстыру.

Жазықтық теңдеуі. Тік бұрышты (x_1, x_2, x_3) координаталар жүйесі енгізілген R^3 кеңістігінде 0- бас нүктеден шыққан $\bar{a}$ векторы берілсін. $\bar{a}$ векторының ұшы арқылы өтетін, оған перпендикуляр жазықтық жалғыз ғана болады. Міне, осы жазықтықтың теңдеуін жазу керек. Сонымен:

$$|\vec{a}| = p, \quad \vec{v} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3).$$

Айталық $\bar{a}$ векторының орты, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – $\vec{v}$ векторының сәйкес x_1, x_2, x_3 остерінің арасындағы бұрыштар белгілі болсын. $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ - жазықтықтың кез келген нүктесінің (радиус-вектордың) $\vec{v}$- векторына проекциясы p санына тең $Пр_{\bar{v}} \bar{x} = p$ (12 сурет).



12 сурет

Олай болса,

$$(\bar{x},\bar{v}) = |v| \cdot \text{Пр}_{\bar{v}}\,\bar{x} = p, \qquad p \ge 0$$

немесе

$$(\bar{x},\bar{v}) = p, \qquad p \ge 0 .$$

Бұл теңдеу жазықтықтың векторлық теңдеуі деп аталады. Егер оны векторлардың координаталары арқылы жазсақ, онда ол

$$x_1 \cos\alpha_1 + x_2 \cos\alpha_2 + x_3 \cos\alpha_3 = p, \quad p \ge 0 \qquad (1)$$

түріне ие болады да, оны жазықтықтың қалыпты теңдеуі деп атайды. (1)-ді кез келген *k* санына (нөлге тең емес) көбейтіп, оған эквивалент теңдеу аламыз:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + B = 0 . \qquad (2)$$

Мұнда $A_i = k\cos\alpha_i$, $i=1,2,3$; $\mathrm{B} = -\mathrm{k}\cdot\mathrm{p}$;

$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \ne 0$, яғни A_1, A_2, A_3 - бір мезгілде нөл бола алмайды.

(2)-ті жазықтықтың жалпы теңдеуі деп атайды. Жазықтықтың жалпы теңдеуінен қалыпты тендеуге өту үшін (2)-ті қалыптаушы көбейткіш:

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}^2{}_1 + \mathrm{A}^2{}_2 + \mathrm{A}^2{}_3}}$$

санына көбейтсе болғаны (таңба *B*-таңбасына қарама-қарсы етіп алынады). Онда (2)-ке эквивалентті

$$M \cdot A_1x_1 + M \cdot A_2x_2 + M \cdot A_3x_3 = p \qquad (3)$$

тендеуін аламыз.

$(M \cdot A_1)^2 + (M \cdot A_2)^2 + (M \cdot A_3)^2 = 1$ болатындықтан, $\bar{v} = (M \cdot A_1, M \cdot A_2, M \cdot A_3)$ векторы бірлік вектор болады, ал оның координаталар остеріндегі проекциялары: $MA_1=\cos\alpha_1$, $MA_2=\cos\alpha_2$, $MA_3=\cos\alpha_3$. α_i - $\bar{v}$ векторымен x_i, $i = 1,2,3$ осінің оң бағытымен арасындағы бұрыш. Сондықтан (24)-ші теңдеу:

$$x_1 \cos\alpha_1 + x_2 \cos\alpha_2 + x_3 \cos\alpha_3 = p \qquad (p \ne 0)$$

түрінде, яғни қалыпты тендеуге келеді. (2) - теңдеуден:

1) B=0 болса, онда жазықтың координата бас нүктесі арқылы өтетінін, ал $B\neq 0$ болса, онда ол координата бас нүктесі арқылы өтпейтінін айта аламыз.

2) $A=(A_1, A_2, A_3)$ векторы жазықтыққа перпендикуляр болатыны белгілі. Өйткені ол жазықтыққа перпендикуляр:

$$\bar{v} = (M \cdot A_1, M \cdot A_2, M \cdot A_3) = M(A_1, A_2, A_3) = M\bar{A}$$

векторына коллинеар. (23) – теңдеуді p - жазықтығының жалпы теңдеуі:

$$p:\ Ax+By+Cz+D=0$$

түрінде жазып, жоғарыдағы екі мәлімет арқылы жазықтықтың координаталық остер мен координаталық жазықтықтарға қарағандағы орналасу жағдайларын талдайық. Атап көрсетілмесе A,B,C,D – нөлге тең емес сандар деп есептейміз.

а) егер C=0 болса, онда $p:\ Ax+By+D=0$ түріне келеді де $p // Oz$, өйткені, оның нормалі $\bar{n} = (A, B, O) \perp OZ$.

Соңғы тұжырым $\bar{n} = (A,B,O)$ мен $\bar{k} = (0,0,1)$ векторларының скаляр көбейтіндісінің нөлге теңдігінен: $\vec{n} \cdot \vec{k} = A \cdot 0 + B \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$ шығады. Осы сияқты,

B=0 болса, $p:\ Ax+Cz+D=0$, онда $p//Oy$;

$A=0$ болса, $p: By+Cz+D=0$, онда $p//Ox$ болады.

Бұл үш жағдайда да D=0 болса, онда p жазықтығы сәйкес z, y, x остері арқылы өтеді;

б) егер $C=B=0$ болса, онда $p:\ AX+D=0$ немесе p: $x = a$ $\left(a = -\dfrac{D}{A}\right)$ теңдеуі OXY жазықтығына параллель (немесе x осіне перпендикуляр) жазықтықты анықтайды, өйткені $\bar{n} = (A,0,0)$ және $\bar{i} = (1,0,0)$ коллинеар векторлар.

Сол сияқты, $C=A=0$ болса, онда $p: By+D=0$ немесе p: $y=b$ $\left(b = -\dfrac{D}{B}\right)$, ал $A=B=0$ болса, онда p: $Cz+D=0$ немесе $z=c$ $\left(c = -\dfrac{D}{C}\right)$ жазықтықтары сәйкес OXZ және OXY координаталық жазықтықтарына параллель болады.

Жазықтықтың кесінділік теңдеуі. Егер $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + B = 0$ теңдеуінде $A_i \neq 0$, $i = 1,2,3$; $B\neq 0$ болса, онда оны $-B$ шамасына бөліп:

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 1, \qquad a_i = -\frac{B}{A_i}, \qquad i = 1,2,3 \tag{4}$$

түріне келтіруге болады. (4)-ті жазықтықтың кесінділік теңдеуі деп атайды. Бұл жазықтықтың x_1 осін $(a_1, 0, 0)$ нүктесінде, x_2 осін $(0, a_2, 0)$ нүктесінде, x_3 осін $(0, 0, a_3)$ нүктесінде қиып өтеді.

Анықтама. p жазықтығындағы кез келген коллинеар емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларын осы жазықтықтың бағыттаушы векторлары деп атайды.

Мысал. Бағыттаушы векторлары $\overline{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\overline{b}=(b_1,b_2,b_3)$ болатын $\vec{x}^{\circ}=(x_1,x_2,x_3)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазу керек.

Шешуі. $\vec{x}^{\circ}=(x_1,x_2,x_3)$ жазықтықтың кез келген нүктесі болсын. Онда $x-\overline{x}^{\circ}$ векторы ізделініп отырған жазықтықта жатқандықтан:

$$\overline{x}-\vec{x}^{0}=(x_1-x_1^0,x_2-x_2^0,x_3-x_3^0),\quad \overline{a}=(a_1,a_2,a_3),\quad \overline{b}=(b_1,b_2,b_3)$$

векторлары компланар болады. Олай болса олардың аралас көбейтіндісі нөлге тең:

$$(\overline{x}-\overline{x}^{\circ})\overline{a}\overline{b}=0$$

немесе

$$\begin{vmatrix} x_1-x_1{}^0 & x_2-x_2{}^0 & x_3-x_3{}^0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0. \qquad (5)$$

Соңғы теңдікті жазықтықтың бағыттаушы векторлары бойынша жазылған теңдеуі дейді.

Мысал. Бір түзудің бойында жатпайтын $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазу керек.

Шешуі.

$$\overline{a}_1=\overline{M_0M_1}=(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$$

және

$$\overline{a}_2=\overline{M_0M_2}=(x_2-x_0,y_2-y_0,z_2-z_0)$$

векторлары p жазықтығының бағыттаушы векторлары болатындықтан (5) бойынша $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ - үш нүкте арқылы өтетін жазықтық тендеуі келесі түрде жазылады:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0.$$

Мысал. α_1: $A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+C=0$, α_2: $B_1x_1+B_2x_2+B_3x_3+D=0$ түрінде берілген екі жазықтық арасындағы бұрышты табу керек.

Шешуі. $\overline{A}=(A_1,A_2,A_3)$, $\overline{B}=(B_1,B_2,B_3)$ векторлары сәйкес α_1 және α_2 жазықтықтарына перпендикуляр болғандықтан осы екі вектор арасындағы бұрыш берілген екі жазықтық арасындағы бұрышқа тең. Олай болса ($\varphi=\angle(\overline{A},\overline{B})$)

$$\overline{A}\cdot\overline{B}=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cos\varphi,$$

бұдан

$$\cos\varphi = \frac{\overline{A}\overline{B}}{|A||B|} = \frac{A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}\sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2}}.$$

Соңғы формуладан екі жазықтың перпендикулярлық белгісін жаза аламыз $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$, яғни

$$\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \text{ немесе } \vec{A}\vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = 0.$$

α_1 және α_2 жазықтықтары параллель болу үшін *A* мен *B* векторлары коллинеар болады. Одан

$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3}$$

Егер бұған қосымша

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3} = \frac{C}{D}$$

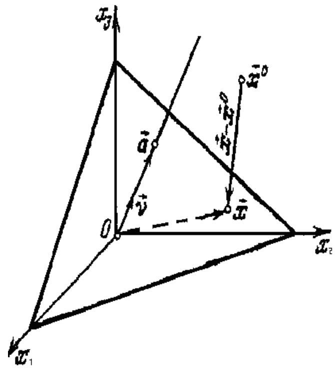
орындалса, онда жоғарыдағы α_1 және α_2 жазықтықтары беттеседі, яғни екі теңдеу тек бір ғана жазықтықты анықтайды.

Мысал. $\bar{x}^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ)$ нүктесінен α: $A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+B=0$ жазықтығына дейін қашықтықты табу керек.

Шешуі. Жазықтық теңдеуін қалыпты түрге келтірейік:

$$(\bar{x}\,\bar{v}) = p, \quad p \neq 0.$$

13-суреттен $\bar{x} - \bar{x}^{\mathbf{0}}$ α- жазықтығының кез келген $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3)$ нүктесімен берілген $\bar{x}^\circ=(x^0_1,x^0_2,x^0_3)$ нүктесінің айырымы болатын $\bar{x} - \bar{x}^\circ$ векторының $\vec{v}$ векторына проекциясының абсолют шамасы ізделініп отырған $\bar{x}^\circ$- нен α – жазықтығына дейінгі d- қашықтығы болатынын көруге болады:



13 сурет

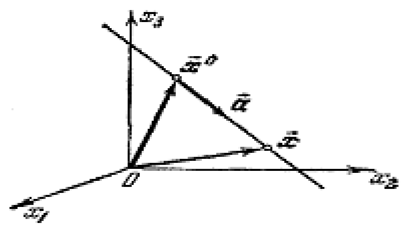
$$d = Пр_{\bar{v}}(\bar{x} - \bar{x}^0) = (\bar{x} - \bar{x}^0, \bar{v}) = (\bar{x}, \bar{v}) - (\bar{x}^0, \bar{v}) = \left|p - (\bar{x}^0, \bar{v})\right| = \left|(\bar{x}^0, \bar{v}) - p\right|.$$

Бұл теңдікті жазықтық параметрлері бойынша жазсақ, алатынымыз:

$$d = \frac{\left|A_1x^0{}_1 + A_2x^0{}_2 + A_3x^0{}_3 + B\right|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}$$

13 суреттен, егер $\bar{x}^\circ$ және $\bar{v}$ - доғал бұрыш жасаса, онда $(\bar{x}^\circ, \bar{v})-p > 0$ немесе $(\bar{x}^\circ, \bar{v}) > p$, ал $\bar{x}^\circ$ мен 0(0,0,0) нүктелері α - жазықтығының бір жағында жатса, онда $\angle(\bar{x}-\bar{x}^\circ, \bar{v})$ - сүйір бұрыш, сондықтан $(\bar{x}^\circ, \bar{v})-p<0$ немесе $(\bar{x}^\circ, \bar{v})<p$ болатынын көруге болады.

Кеңістіктегі түзу. Кеңістіктегі кез келген L -түзуін қарастырайық (14 сурет).



14 сурет

Айталық түзуде жатқан $\bar{x}^\circ=(x^\circ_1 x^\circ_2, x_3^\circ)$ нүктесі және x° нүктесінен шығатын L түзуінде жатқан $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ векторы берілсін.

L - түзуінде жатқан кез келген нүктені $\bar{x}=(x_1, x_2, x_3)$ арқылы белгілейік. Онда $\bar{x}-\bar{x}^\circ$ векторын $\bar{x}-\bar{x}^\circ=t\bullet\bar{a}$, t - сан, түрінде жазуға болады (14 сурет).

Егер t параметрі $(-\infty,+\infty)$ аралығындағы мәндерді қабылдаса, онда $\vec{x}=\vec{x}^0+t\vec{a}$ теңдеуі бүкіл L түзуін береді. Сондықтан:

$$\bar{x}-\bar{x}^\circ=t\bar{a}; \qquad -\infty<t<+\infty \tag{6}$$

теңдігін $\bar{x}^\circ$ нүктесі арқылы өтетін және $\vec{a}$ векторы бойымен бағытталған түзудің векторлық теңдеуі деп атайды. (6)-ны координаталар бойынша келесі үш тендеулер жүйесі түрінде жазуға болады:

$$\begin{cases} x_1-x_1^0=ta_1 \\ x_2-x_2^0=ta_2 \\ x_3-x_3^0=ta_3 \end{cases}.$$

Бұл теңдеуді түзудің кеңістіктегі параметрлік теңдеуі деп атайды.

Теңдеуді t - параметрін шығарып, келесі түрде жазуға болады:

$$\frac{x_1-x_2^0}{a_1}=\frac{x_2-x_2^0}{a_2}=\frac{x_3-x_3^0}{a_3}, \qquad a_1^2+a_2^2+a_3^2\neq 0 \tag{7}$$
.

(28)-ні түзудің канондық (дағдылы) теңдеулері дейді, ал $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ векторын L түзуінің бағыттаушы векторы деп атайды.

Ескерту. a_1, a_2, a_3 сандарының біреуі немесе екеуі нөлге тең болуы мүмкін. Ыңғайлы болғандықтан ондай жазуды символдық түрде қалдырады.

Екі жазықтықтың теңдеулері жалпы түрде берілсін:

$$A_1x+A_2y+A_3z+C=0; \tag{8}$$

$$B_1x+B_2y+B_3z+D=0. \qquad (9)$$

Егер олардағы белгісіздердің сәйкес коэффициенттері пропорционал болса:

$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_3}{B_3},$$

онда (8) және (9) жазықтықтар параллель, ал коэффициенттерімен қоса бос мүшелері де пропорционал болса:

$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_3}{B_3}=\frac{C}{D},$$

онда (8) және (9) жазықтықтары беттесетіні белгілі.

Олай болмаса (8) және (9) жазықтықтар түзу бойымен қиылысады және (8) және (9) теңдеулер жүйесі кеңістіктегі түзулердің жалпы теңдеулері деп аталады. Бұл жағдайда келесі анықтауыштардың ең болмағанда біреуі нөлге тең болмайды:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix}.$$

Анық болуы үшін $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ болсын. Онда (8), (9) теңдеулерді x пен y - ке қатысты шешсек:

$$\begin{cases} x = \alpha z+\mu \\ y = \beta z+v \end{cases},$$

мұндағы α,β,μ,v - қандай да бір сандар.

Бұл теңдеулерді z - ке қатысты шеше отырып

$$\frac{x-\mu}{\alpha}=\frac{y-v}{\beta}=\frac{z}{1}$$

екендігін аламыз. Бұл (8), (9) тендеулерімен берілген түзудің канондық тендеуі:

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3};$$

$$\frac{x-x_2}{a_1}=\frac{y-y_2}{a_2}=\frac{z-z_2}{a_3}$$

теңдеулерімен берілген түздің арасындағы φ бұрышы олардың сәйкес $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ және $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$ бағыттаушы векторларының арасындағы бұрышқа $\varphi=\angle(\bar{a},\bar{b})$ тең болғандықтан:

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}} \qquad (10)$$

(10) - теңдіктен екі түздің перпендикулярлық $\left(\varphi=\frac{\pi}{2}\right)$ белгісін:

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$$

және екі түздің параллельдік белгісін:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$$

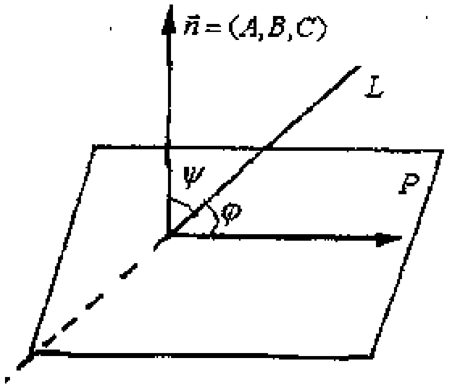
жаза аламыз.

Берілген $p:\ Ax+By+Cz+D=0$ жазықтығы мен *L:* $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ түзуінің арасындағы φ бұрышын

$$\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}=\cos\psi$$

формуласымен табуға болады.

Мұндағы $\psi=90^0-\varphi$. Өйткені (15 сурет) $\sin\varphi$ шамасы p жазықтығының $\bar{n}=(A,B,C)$ нормалі мен L – түзуінің $\bar{n}=(l,m,n)$ бағыттауышы векторы арасындағы $\psi=(\bar{n},\bar{a})$, бұрыштың косинусына тең $\sin\varphi=\cos(\vec{n},\vec{a})=\cos\psi$.



15 сурет

Енді (10) формуладан:

а) түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісін:

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n};$$

б) түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісін:

$$A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n = 0 \qquad (11)$$

аламыз.

Соңғы шартқа қосымша $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ теңдігі орындалса L түзуі p жазықтығында жатқаны.

Дәріс 7. Екінші ретті қисықтар. Екінші ретті қисықтардың жалпы теңдеуі. Эллипстің, гиперболаның, параболаның канондық теңдеулері. Қисықтардың геометриялық қасиеттері. Екінші ретті қисықтардың фокалдық қасиеттері

Дәріс мазмұны: екінші ретті қисықтар: эллипс, гипербола, парабола, олардың канондық теңдеулері. Екінші ретті қисықтардың фокалдық қасиеттері.

Мақсаты: екінші ретті қисықтар және олардың графиктерімен таныстыру.

Жазықтықтағы тік бұрышты координаталар жүйесінде екінші дәрежелі айқындалмаған теңдеумен анықталған қисық берілсін:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (1)$$

мұндағы A,B,C,D,E,F берілген нақты сандар және $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Бұл қисықты екінші ретті қисық деп атайды. (1) - теңдеуді қанағаттандыратын нақты координаталары бар нүктелер болмауы да мүмкін. Мысалы: $x^2+y^2=1$. Мұндай жағдайда теңдеу екінші ретті жорамал қисықты анықтайды дейді.

(1) теңдеудің алты дербес жағдайын қарастырамыз:

1) Жарты остерінің ұзындықтары a және b болатын эллипс теңдеуі:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \qquad a \geq b > 0.$$

Егер, дербес жағдайда, $a = b$ болса, онда центрі координаталық бас нүктеде болатын, радиусі a -ға тең шеңбер теңдеуі:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

2) Жарты остері a және b болатын гипербола теңдеуі:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \qquad a \geq b > 0.$$

3) Парабола теңдеуі:

$$y^2 = 2px; \quad p > 0.$$

4) Қиылысатын түзулер жұбының теңдеуі:

$$a^2x^2 - b^2y^2 = 0; \quad a,b > 0.$$

5) Параллель немесе беттесетін түзулер жұбының теңдеуі:

$$x^2 - a^2 = 0; \quad a > 0.$$

6) Нүктені анықтайтын теңдеу:

$$x^2 + a^2 = 0.$$

Енді осы қисықтарға қысқаша тоқталамыз.

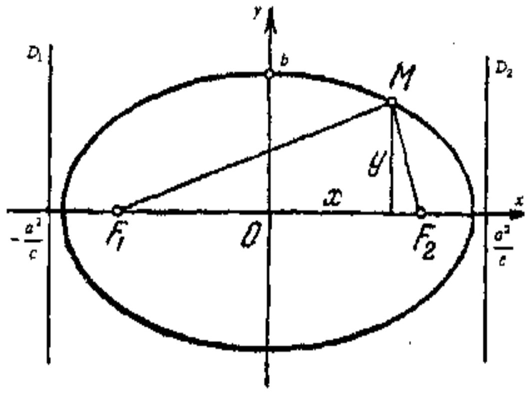
Эллипс.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad a \geq b > 0. \qquad (2)$$

$a > b$ болсын, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ арқылы белгілейік.

x осінде эллипстің фокустары деп аталатын $F_1(-c,0)$ және $F_2(c,0)$ нүктелерін белгілейік (16 сурет).

Анықтама. F_1, F_2 фокустарына дейінгі қашықтықтарының қосындысы тұрақты, $2a$ шамасына тең болатын нүктелердің геометриялық орны эллипс деп аталады.



16 сурет

$M(x,y)$ нүктесі $MF_1 + MF_2 = 2a$ шартты қанағаттандыратын кез келген нүкте (16 сурет):

$$\mathrm{MF_1} = \sqrt{(\mathrm{x}+\mathrm{c})^2 + y^2}; \quad MF_2 = \sqrt{(\mathrm{x}+\mathrm{c})^2 + y^2}$$

болғандықтан

$$2a = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2};$$

$$2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2};$$

$$4a^2 + (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = (x+c)^2 + y^2;$$

$$4a^2 + 4cx = 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\ ;$$

$$a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2)\ ;$$

$$-b^2x^2 = -a^2b^2 + a^2y^2\ ;$$

$$a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2\ ;$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Керісінше, (x,y) нүктесінің координаталары (2) -тендеуді қанағаттандырса, онда осы амалдарды кері бағытта жасай отырып (x,y) нүктесінен F_1 және F_2 нүктелеріне дейінгі қашықтықтардың қосындысы $2a$ тең болатынын көреміз.

(2) - эллипстің канондық (дағдылы) теңдеуі дейді, ал a мен b эллипстің сәйкес үлкен және кіші ($a > b$) жарты остері деп аталады.

Егер $y = 0$ болса, онда $|x| = a$, яғни эллипс графигі x осін $x = a$, $x = -a$ нүктелерінде қияды.

Егер $x = 0$ болса, онда $|y| = b$, яғни эллипс графигі y осін $y = b$, $y = -b$ нүктелерінде қияды. Бұл нүктелерді эллипстің төбелері деп атайды.

x -ті $(-x)$ -ке, y -ті $(-y)$ -ке ауыстырсақ (2)-ші теңдеу өзгермейді, демек, эллипс y осіне және x осіне салыстырғанда сәйкес симметриялы. Сондықтан Ox және Oy остері эллипстің симметрия остері деп аталады (эллипстің фокустері арқылы өтетін осі фокальдік (тоғысты) осі деп аталады).

$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ санын эксцентриситет деп атайды. Эллипс эксцентриситеті үшін $0 \le e \le 1$ теңсіздіктері орындалады.

$|x| = \dfrac{a}{e} = \dfrac{a^2}{c}$ теңдеулерінен анықталатын (фокальдік осіне перпендикуляр) түзулер эллипстің директрисалары деп аталады.

Эллипс теңдеуін параметрлік түрде жазайық:

$$\begin{cases} x = & a\cos\theta \\ y = & b\sin\theta \end{cases}, \qquad 0 \le \theta < 2\pi. \tag{3}$$

Шынында да

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{b^2\sin^2\theta}{b^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,$$

яғни (3)-ші теңдіктерімен анықталған (x, y) нүктесі кез келген θ үшін (2) эллипске жатады.

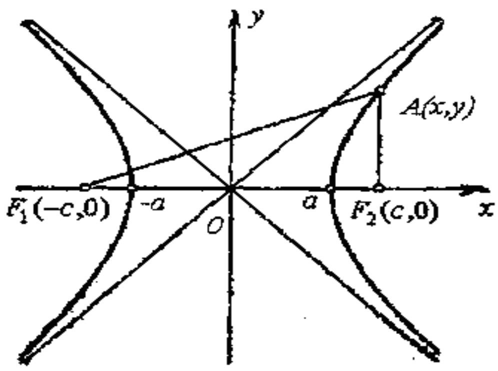
Эллипстер (шеңберлер) табиғатта және күнделікті өмірде көп кездеседі. Мысалы, планеталар күнді эллипс бойымен айнала қозғалады, ал ол эллипстердің фокустерінің бірінде күн тұрады.

Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a, b > 0 \tag{4}$$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ деп алып x осінің бойынан (4)-ші гипербола фокустері деп аталатын $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ нүктелерін белгілейік (17 сурет).

Анықтама. F_1 және F_2 фокустарға дейінгі қисықтықтарының айырымы тұрақты $2a$ тең нүктелердің геометриялық орны гипербола деп аталады.



17 сурет

(4) теңдеу гиперболаның канондық теңдеуі деп аталады. Бұл теңдеуден гипербола x осіне де, y осіне де симметриялы болатынын байқаймыз. Мұнда x осіндегі $[-a, a]$ кесіндісі және y осіндегі $[-b, b]$ кесіндісі гиперболаның сәйкес нақты және жорамал остері деп аталады.

Егер $y = 0$ болса, онда $x = a, \quad x = -a$, яғни гипербола x осін $(-a,0)$ және $(a,0)$ нүктелерінде қияды. Осы нүктелерді гиперболаның төбелері дейді.

Егер $x = 0$ болса, онда $-\frac{y^2}{b^2} = 1$, ал бұл теңдеудің нақты түбірі жоқ. Демек, гипербола y осімен қиылыспайды. Эллипстегі сияқты, O нүктесі гипербола центрі деп аталады.

Гиперболаның эксцентриситет, директрисалары эллипстен сәйкес анықтамалар арқылы анықталады. Гипербола үшін $e > 1$. Суретте $y = \pm \frac{b}{a} x$ теңдеуінен екі түзу сызылған. Олар гипербола асимптоталары деп аталады. Асимптота анықтамасы ілгеріде математикалық талдау курсында қарастырылады. (4) - гиперболаның оң бұтағының параметрлік теңдеуі:

$$\begin{cases} x = a \cdot chu = \dfrac{a}{2}(e^u + e^{-u}) \\ y = b \cdot shu = \dfrac{b}{2}(e^u + e^{-u}) \quad -\infty < u + \infty \end{cases} \tag{5}$$

түрінде жазуға болады. Шынында да, $ch^2 u - sh^2 u = 1$ екенін ескерсек, онда (5)–ші теңдеуден:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=ch^2u-sh^2u=1$$

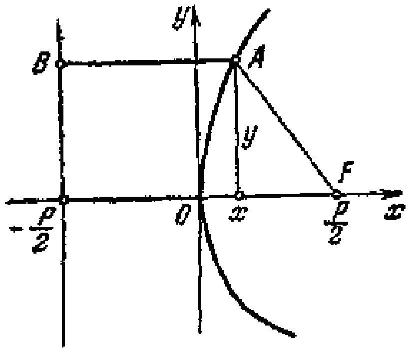
аламыз. Гиперболаның оң тармағының жоғарғы жартысы u параметрінің $u\in[0,+\infty)$, ал төменгі жартысы u параметрінің $u\in[-\infty,0)$ аралықтарындағы өзгерістеріне сәйкес келеді.

Парабола

$$y^2=2px, \qquad p>0 \tag{6}$$

x осінде парабола фокусі деп аталатын $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ нүктесін белгілеп, парабола директрисасы деп аталатын $x=\frac{p}{2}$ түзуін жүргіземіз (18 сурет).

Анықтама. Фокус пен директрисадан бірдей қашықтықта орналасқан $A(x,y)$ нүктелердің геометриялық орны парабола деп аталады.



18 сурет

(6)-теңдеуді параболаның канондық (дағдылы) теңдеуі дейді, ал $p>0$ санын оның параметрі деп атайды. O - нүктесін парабола төбесі дейді. Ox осі параболаның симметрия осі деп аталады.

Парабола эксцентриситеті бірге тең $e=1$.

Параболаның жоғарғы жартысының теңдеуі:

$$y=\sqrt{2px}\,; \quad 0\le x<\infty .$$

Дәріс 8. Екінші ретті беттер, олардың канондық теңдеулері. Беттерді параллель қима әдісімен зерттеу

Дәріс мазмұны: екінші ретті беттер және олардың канондық формасы, беттерді параллель қималармен зерттеу.

Мақсаты: цилиндрлік, гиперболалық және конустық екінші ретті беттермен танысу.

Екінші ретті беттер. Екінші ретті беттер деп x,y координаталары келесі екінші ретті алгебралық теңдеуді

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_0=0, \tag{1}$$

қанағаттандыратын нүктелер жиынын айтады.

Мұндағы a_k коэффициенттерінің ең болмағанда бірі нөлге тең емес.

(1) тендеудің маңызды дербес жағдайларын атап өтеміз:

1) *Эллипсоид:*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1; \qquad a,b,c>0.$$

2) *Бір қуысты гиперболоид:*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1; \qquad a,b,c>0.$$

3) *Қос қуысты гиперболоид:*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1; \qquad a,b,c>0.$$

4) *Эллипстік параболоид:*

$$z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}; \qquad p,q>0.$$

5) *Гиперболалық параболоид:*

$$z=\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}; \qquad p,q>0.$$

6) *Екінші ретті конус:*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0; \qquad a,b,c>0.$$

7) *Нүкте:*

$$x^2+y^2+z^2=0.$$

8) *Екінші ретті цилиндрлер:*

а) эллипстік цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \qquad a,b>0;$$

б) гиперболалық цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1; \qquad a,b>0;$$

в) параболалық цилиндр:

$$y^2=2px; \qquad p>0;$$

г) қиылысатын жазықтықтар жұбы:

$$a^2x^2-b^2y^2=0; \qquad a,b>0;$$

д) параллель немесе беттесетін жазықтықтар:

$$x^2-a^2=0; \qquad a>0;$$

ж) түзу:

$$x^2+y^2=0.$$

Бұл теңдеулер көрсетілген беттердің канондық (дағдылы) теңдеулері деп аталады. Канондық теңдеулердің жалпы теңдеуден координаталар жүйесін түрлендіру (координата остерін параллель жылжыту және бұру) арқылы алуға болады. Жалпы жағдайда мұндай түрлендіру күрделі процедураны талап етеді, алайда *xy, xz, yz* мүшелері (1)-ші теңдеуде жоқ болса $(a_{12}=a_{13}=a_{23}=0)$, онда канондық теңдеудің толық квадраттын бөлу және координата остерін параллель жылжыту әдістерімен ғана алуға болады.

Келтірілген (1-8) екінші ретті беттердің түрлері мен қасиеттерін параллельдік қима әдісімен орнатуға болады: беттер координаталық жазықтықтарға параллель жазықтықтар арқылы қиылысады да, қимада алынған сызықтықтардың түрі мен қасиеттеріне қарай беттің түрі мен қасиеттері туралы қорытынды жасалады.

Жоғарыда аталған екінші ретті беттерге тоқталайық.

1. *Эллипсоид*

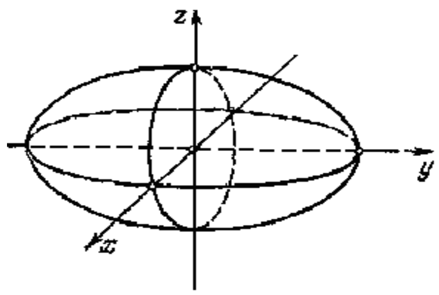
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad a,b,c>0. \tag{2}$$

Егер $a=b=c=R$ болса, онда (2) эллипсоид центрі координата басында, радиусі *R*-ге тең сфераға айналады:

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \tag{3}$$

a,b,c - эллипсоидтың жарты беттері деп аталады.

(3)-ші теңдеуден эллипсоидтың $x=0,\ \ y=0,\ \ z=0$ координаталық жазықтықтар және координата басымен салыстырғанда симметриялы екенін көреміз (19 сурет).



19 сурет

Эллипсоидтың $z=h,\ -c\le h\le c$ жазықтықтарымен қимасы

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2} \quad \text{немесе} \quad \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1$$

түріндегі эллипстер. Олардың жарты остері:

$$a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\,; \qquad b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\,.$$

$z=0,\ (h=0)$ мәнінде ең үлкен сан болатындықтан, бұл мәнге ($z=0,\ (h=0)$) сәйкес эллипсте ең үлкен болады.

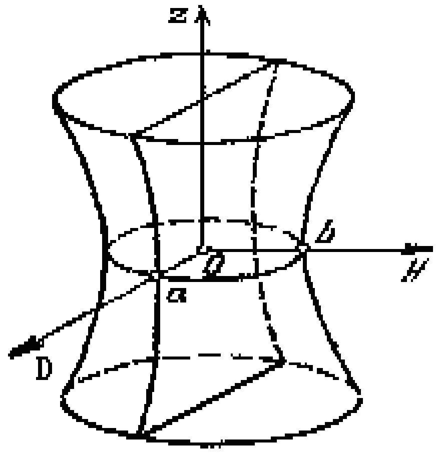
Осы сияқты жағдайлар $x = h, \quad -a \le h \le a$ және $y = h, \quad -b \le h \le b$ жазықтықтарымен (эллипсоид) қимасында да болады. Эллипсоидтың ($\pm a$,0,0), (0,$\pm b$,0), (0,0,$\pm c$) нүктелері оның төбелері деп аталады.

Егер эллипсоидтың қандайда бір жарты беттері өзара тең болса, онда эллипсоид эллипстің сәйкес координата осі арқылы айналуынан шығады да оны айналу эллипсоиды деп атайды.

2. *Бірқуысты гиперболоид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a, b, c > 0. \tag{4}$$

(4)-ші теңдеу түрінен бірқуысты гиперболоид координаталық жазықтықтарға және координата бас нүктесіне салыстырғанда симметриялы бет екенін көреміз. *a, b, c* сандары бірқуысты гиперболоидтың жарты остері деп аталады (20 сурет).



20 сурет

Бірқуысты гиперболоидтың ($\pm a$,0,0), (0,$\pm b$,0) нүктелері оның төбелері деп аталады. (4)-ші беттің $z = h$ жазықтығымен қимасы:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \quad \text{немесе} \quad \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1$$

түріндегі эллипс.

Егер (4)-ші бет пен $x = h$ немесе $y = h$ жазықтығымен қисақ, онда қимаға сәйкес келесі гиперболаны аламыз:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2} \quad \text{немесе} \quad \frac{x^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(c\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1$$

және

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \quad \text{немесе} \quad \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1.$$

Егер $h = \pm a$ болса, онда бірінші гипербола келесі екі түзуге беттеседі:

$$y = \pm \frac{b}{a} z.$$

Егер $h \le a$ болса, онда гиперболаның нақты симметриялы осі *Oy*-ке параллель түзу, ал $|h| > a$ болса, *Oz* - ке параллель түзу болады.

Егер $a = b$ болмаса, онда (2)-ші бет пен $z = h$ жазықтықтарының қимасы, радиусі $a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$ тең шеңбер, ал бұл жағдайда (2)-ші бет $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ гиперболасының *Oz* осін айналуынан алады.

3. *Гиперболалық параболоид*

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z; \qquad p, q > 0. \tag{5}$$

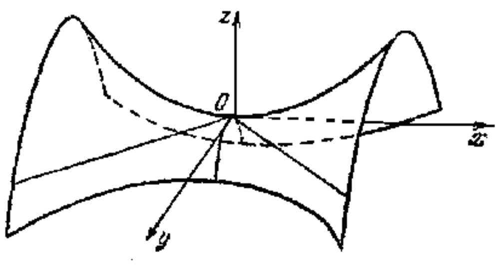
(5)-ші теңдеуден берілген бет $x = 0,\ y = 0$ жазықтықтарымен салыстырғанда симметриялы екенін көреміз. (5)-ші беттің $z = h$ жазықтығымен қимасы:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2h$$

түріндегі гипербола және $h > 0$ болса, гиперболаның нақты симметрия осі *Ox* - осіне параллель, ал $h < 0$ болса, *Oy* - осіне параллель болады. $h = 0$ болса, қимада қиылысатын екі түзу шығады.

(5)-ші беттің $x = h$ немесе $y = h$ жазықтықтарымен қимасы тармақтары сәйкес төмен немесе жоғары бағытталған парабола болады (21 сурет)

$$-\frac{y^2}{q} = 2z - \frac{h^2}{p}, \qquad \frac{x^2}{p} 2z - \frac{h^2}{p}.$$



21 сурет

4. *Екінші ретті конус*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{6}$$

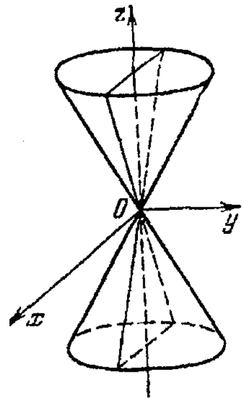
(6)-ші бет $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ жазықтықтарына және *O*(0,0,0) координата басына салыстырғанда симметриялы екені түсінікті. (6)-ші беттін $z = h$ жазықтығымен қимасы - эллипстер:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2} \quad \text{немесе} \quad \frac{x^2}{\left(\frac{ah}{c}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{ah}{c}\right)^2}=1.$$

Егер (13)-ші бетті $x=h$ немесе $y=h$ жазықтықтарымен қисақ, онда қимада сәйкес:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2} \quad \text{немесе} \quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{h^2}{b^2}$$

гиперболалары алынады (22 сурет).



22 сурет

Егер (6)-ші бетті $y=kx$ жазықтықтарымен қисақ, онда қимада қиылысатын түзулер жұбын аламыз:

$$z=\pm cx\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{h^2}{b^2}}.$$

5. *Нүкте*

$$x^2+y^2+z^2=0. \tag{7}$$

(7)-ші теңдеуді тек қана $x=y=z=0$ нүктесі қанағаттандырады.

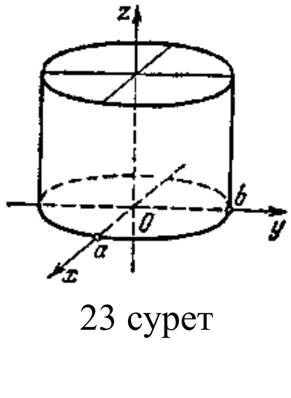
6. *Екінші ретті цилиндрлер*

1) *Эллипстік цилиндр*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a,b>0. \tag{8}$$

(8)-ші теңдеуде z жоқ. Бұл теңдеу XOY жазықтығында жарты беттері a мен b болатын эллипсті анықтайды.

Егер (x,y) нүктесі осы эллипсте жатса, онда z-тің кез келген мәнінде (x,y,z)- нүктесі (8)-ші бетте жатады. Oz осіне параллель, XOY жазықтығын-дағы (8)-ші эллипс бойымен айналатын түзуден (15)-ші бет алынады (23 сурет).



23 сурет

(8) эллипс беттің бағыттаушы сызығы, ал осы эллипс арқылы өтетін, Oz - параллель сызық беттің жасаушысы деп аталады.

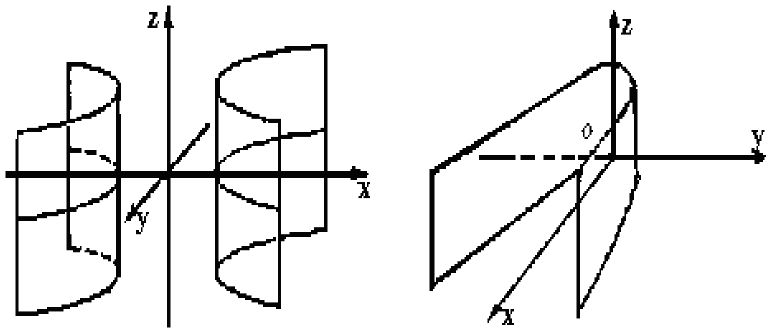
Анықтама. Түзудің берілген L сызығын қия отырып берілген бағытқа параллель жылжуынан құрылған бет цилиндрлік бет деп аталады.

2) *Гиперболалық және параболалық цилиндрлер*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a,b,>0.$$

$$y^2=2px,\ p>0\,.$$

Бұл жағдайда беттердің бағыттаушы сызықтары гипербола мен парабола, ал жасаушылары - осы XOY жазықтығындағы гипербола мен параболадан өтетін, Oz осіне параллель түзулер (24 сурет).



24 сурет

Модуль 2. Математикалық талдау негіздері

Дәріс 9. Талдауға кіріспе. Сан тізбегінің шегі. Функция. Функцияның нүктедегі шегі, қасиеттері. Нүктедегі және сан аралағандығы функцияның үзіліссіздігі. Функцияларды салыстыру

Дәріс мазмұны: математикалық талдауға кіріспе. Басты ұғымдар-сандық тізбек шегі, функция, функцияның нүктедегі шегі және оның қасиеті.

Мақсаты: математикалық талдаудың негіздерімен танысу.

Жиындар. Жиын деп белгілі бір белгілерге қарай біріктірілген түрлі заттардың тобын айтады. Әдетте жиынды латын әріптерімен *A, B, C*, ..., ал оның элементтерін *a, b,* c, ... белгілейді. Элементтерінің санына қарай жиындар екі түрге бөлінеді: шекті және шексіз жиындар.

Нақты сандар және олардың қасиеттері. Рационал сан деп екі бүтін санның қатынасын $\frac{m}{n},\ n\neq 0$ айтады. Рационал сандар жиының Q әрпімен белгілейді: $Q=\left\{\frac{m}{n}\right\}$. Кез келген периодсыз шексіз бөлшекті иррационал сан деп атайды, оны $a=\pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2..\alpha_m...$ (α_0 - бүтін сан, α_i болса 0-ден 9-ға дейін сандар). Рационал және иррационал сандар жиынын нақты сандар жиыны деп атап, оны R деп белгілейді.

Натурал сандар жиыны N, бүтін сандар жиыны Z, рационал сандар жиыны Q арасында мынадай қатынас бар $N\subset Z$, $Z\subset Q$, $N\subset Q$.

Нақты сандар жиынының қасиеттері: нақты сандардың реттілігі, тығыздығы, нақты сандар жиынының үзіліссіздігі.

Анықтама. Егер E жиынының кез келген x саны үшін $x \le M \ (x \ge m)$ теңсіздігін қанағаттандыратын M саны (m саны) табылса, онда E жиыны жоғарғы (төменгі) жағынан шектелген жиын деп аталады. M санын (m санын) E жиынының жоғарғы (төменгі) шекарасы дейді.

Жоғарғы және төменгі жағынан шектелген жиынды шектелген жиын дейді.

Анықтама. Егер E жиыны ең болмағанда бір жағынан шектелмесе, онда Е жиынын шектелмеген дейді.

Вейерштрасс теоремасы. Кез келген бос емес жоғарыдан (төменнен) шектелген жиынның дәл жоғарғы (дәл төменгі) шекарасы бар.

Сан тізбегі және оның шегі.

Анықтама. Егер әрбір натурал n санына белгілі бір ереже (заң) бойынша x_n нақты саны сәйкестендірілсе, онда нөмірленген нақты сандар жиыны:

$$x_1, x_2, ..., x_n, ... \tag{1}$$

сан тізбегі немесе тізбек деп атап, $\{x_n\}$ жазады. (1) тізбекке кіретін сандарды оның мүшелері, ал x_n санын оның жалпы мүшесі деп атайды.

Анықтама. Егер $\forall \varepsilon > 0$ саны үшін сәйкес $N = N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $\forall n > N$ мәндерінде $|x_n - a| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда a санын (1) тізбектің шегі деп атайды да, оны былай жазады: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Анықтама. Егер (1) тізбектің шекті шегі a бар болса, онда оны a санына жинақты дейді. Егер (1) тізбектің шегі жоқ немесе ∞ болса, онда оны жинақсыз дейді.

Шексіз аз және шексіз үлкен тізбектер.

Анықтама. Шегі нөлге тең болатын $\{\alpha_n\}$ тізбегін шексіз аз тізбек немесе қысқаша шексіз аз дейді.

Анықтама. Егер $\forall M > 0$ санына сәйкес N нөмірі табылып, $n>N$ мәндерінде $|x_n| > M$ теңсізідігі орындалса, онда $\{x_n\}$ тізбегін шексіз үлкен тізбек немесе шексіз үлкен дейді де $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Теорема (шексіз үлкен және шексіз аз тізбектердің арасындағы байланыс). Егер $\{x_n\}$ тізбегі шексіз үлкен болса, онда қайсы бір нөмірден бастап $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ анықталады және ол шексіз аз болады.

Анықтама. Егер (1) тізбектің белгілі нөмірден бастап барлық мүшелері a санының кез келген кішкене аймағында жатса, онда a санын тізбектің шегі дейді.

Шексіз аз тізбектердің қасиеттері:

1) Саны шекті шексіз аз тізбектердің алгебралық қосындысы шексіз аз тізбек болады.

2) Шектелген тізбек пен шексіз аз тізбектің көбейтіндісі шексіз аз тізбек болады.

Жинақты тізбектердің қасиеттері:

1-*теорема*. Жинақты тізбектің тек бір ғана шегі бар.

2-*теорема*. Кез келген жинақты тізбек шектелген.

Монотонды тізбек және оның шегі. е саны.

Анықтама. Егер $\forall n \in N$ үшін $x_n < x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$ теңсіздігі орындалса, онда $\{x_n\}$ тізбегін өспелі (кемімелі) тізбек деп атайды.

Тізбектердің барлық осы түрлерін біріктіріп жалпы атпен монотонды тізбектер деп атайды.

1-*теорема.* Кез келген жоғарғы (төменгі) жағынан шектелген монотонды өспелі (кемімелі) тізбек жинақты және

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\} \quad (\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}).$$

Жоғарыдағы теореманы

$$\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\},\ n = 1, 2, ...$$

тізбегіне қолданып

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

шекті аламыз. е-саны иррационал сан, ол *е*=2,71828...

Анықтама. $x_1, x_2, \ldots, x_n, \cdots$ тізбегімен бірге натурал сандардан тұратын және $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ шарттарды қанағаттандыратын $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ тізбекке сәйкес жасалған $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \cdots$ тізбегін $\{x_n\}$ тізбектің бөлімше тізбегі немесе тізбекшесі деп атайды.

2-теорема. Егер $\{x_n\}$ тізбек a санына жинақты болса, онда оның кез келген тізбекшесі де сол a санына жинақты.

Больцано-Вейерштрасс теоремасы. Кез келген шектелген тізбектен жинақты бөлімше тізбекті бөліп алуға болады.

Функция туралы негізгі ұғымдар. Айталық, $X \subset R$ сан жиыны берілсін. Егер $\forall x \in X$ санына қайсы бір ереже бойынша бір *у* саны сәйкестендірілсе, Х жиынында функция анықталған дейді де $y = f\left(x\right), x \in X$ деп белгілейді, мұндағы *х*- аргумент немесе тәуелсіз айнымалы, ал у- тәуелді айнымалы дейді.

Функция мен аргументтің арасындағы байланыс әртүрлі тәсілдермен беріледі. Егер функция формула арқылы берілсе, онда функция *аналитикалық* түрде берілген дейді. К*естелік тәсіл*: аргументтің мәндері мен оларға сәйкес келетін функция мәндерінің кестесі беріледі. Функция берілуінің *графиктік* тәсілі бойынша x-пен y-тің арасындағы сәйкестік ережесі дайын график түрінде беріледі.

Функция шегі. Айталық, $X=\{x\}$ сандар жиыны болсын.

1-*анықтама (Гейне бойынша).* Егер x_0 нүктесіне жинақты болатын X жиынының кез келген тізбегі $\{x_n\}$ $(x_n \neq x_0)$ бойынша құрылған $\{f(x_n)\}$ тізбегі b санына жинақты болса, онда b санын $y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде *шегі* немесе шектік мәні деп атайды. Оны былай жазады:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b \ \textit{немесе} \ x\to x_0 \Rightarrow f(x)\to b .$$

2-*анықтама (Коши бойынша).* Егер кез келген оң ε санына сәйкес $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ саны табылып $0<|x-x_0|<\delta$ шартын қанағаттандыратын x-тің барлық мәндері үшін $|f(x)-b|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда b санын $y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі шегі немесе шектік мәні деп атайды. Оны былай жазады:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b \quad \text{немесе} \quad x\to x_0 \ \Rightarrow \ f(x)\to b .$$

Теорема. Функция шегінің Гейне және Коши бойынша анықтамалары эквивалентті.

3-*анықтама (Гейне бойынша).* Егер x_0 нүктесіне жинақты және x_0 үлкен (x_0 кіші) сандардан тұратын аргумент мәндерінің кез келген тізбегі $\{x_n\}$ үшін оған сәйкес функция мәндерінің $\{f(x_n)\}$ тізбегі b санына жинақты болса, онда b санын $y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі оң (сол) жақ шегі деп атайды.

4-*анықтама (Коши бойынша).* Егер кез келген оң ε санына сәйкес $\delta>0$ саны табылып $x_0<x<x_0+\delta$ $(x_0-\delta<x<x_0)$ шартын қанағаттандыратын аргумент x-тің барлық мәндері үшін $|f(x)-b|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда b санын $y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі оң жақ (сол жақ) шегі деп атайды. Оны былай жазады:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=b \ (\lim_{x\to x_0-0} f(x)=b)$$

немесе

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0) \quad (\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)) .$$

Функцияның оң және сол жақ шектерін функцияның *бір жақты шектері* деп атайды.

Дәріс 10. Шексіз кемімелі және шексіз өспелі шамалар. Тамаша шектер. Шектерді есептеу. Анықталмағандықтар түрлері. Шексіз аз және

шексіз үлкен функциялар, олардың қасиеттері. Эквивалентті шексіз аз және шексіз үлкен функциялар, оларды шектерді есептегенде қолдану

Дәріс мазмұны: шексіз аз және шексіз үлкен функциялар, олардың қасиеттері, анықталмағандық түрлері, тамаша шектер. Шектерді есептеу.

Мақсаты: шексіз аз және шексіз үлкен функция ұғымын енгізу, тамаша шектермен, шектерді есептеу тәсілдерімен танысу.

Шексіз аз және шексіз үлкен функциялар және оларды салыстыру.

Анықтама. Егер $\alpha(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі шегі нөлге тең болса, онда $\alpha(x)$ функциясын шексіз аз функция немесе қысқаша *шексіз аз* деп атайды $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

1-*теорема.* Саны шекті шексіз функциялардың қосындысы, көбейтіндісі шексіз аз функция болады.

2-*теорема*. Шектелген функция мен шексіз аз функцияның көбейтіндісі шексіз аз функция болады.

Анықтама. Егер $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ болса, онда $\alpha(x)$-ті x_0 нүктесінде $\beta(x)$-ке қарағанда *жоғары ретті шексіз аз* дейді. Оны $\alpha=o(\beta)$ белгілейді де «о микрон β» деп оқиды.

Анықтама. Егер $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c-const,\ c\neq 0$ болса, онда $\alpha(x)$ пен $\beta(x)$-ті x_0 нүктесінде *аздығы бірдей ретті* деп атайды.

Анықтама. Егер $\alpha(x)$ пен $\beta^k(x)\ (k>0)$ шамалары бірдей ретті шексіз аз функциялар болса, яғни $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=c\neq 0\ (c-const)$, онда шексіз аз $\alpha(x)$ функциясын шексіз аз $\beta(x)$ функциясына қарағанда k-ретті дейді де, оны былай жазады: $\alpha=o(\beta^k)$.

Анықтама. Егер $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ болса, онда $\alpha(x)$ пен $\beta(x)$ функция-ларын *эквивалентті* деп атайды, оны $\alpha\sim\beta$ белгілейді.

Анықтама. Егер $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{A(x)}{B(x)}=\infty$ болса, онда $A(x)$-ты $B(x)$-ке қарағанда жоғары ретті шексіз үлкен дейді.

***Функцияның нүктедегі үзіліссіздігі*.** Айталық $f(x)$ функциясы X сан жиынында анықталсын және $x_0\in X$.

Анықтама (*Гейне бойынша*). Егер X жиынынан алынған $\forall x_1, x_2, ..., x_n, ...$ тізбегі x_0 санына жинақты болғанда осы тізбекке сәйкес келетін $\{f(x_n)\}$ тізбегі x_0 санына жинақты болса, онда $f(x)$ функциясын x_0 нүктесінде үзіліссіз дейді.

Анықтама (Коши бойынша). Егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып $|x - x_0| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын x барлық мәндері үшін $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда $f(x)$ функциясын x_0 нүктесінде үзіліссіз деп атайды. Оны былай жазады:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

*Анықтама***.** Егер x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясы үзіліссіз болмаса, онда x_0 нүктесін $f(x)$ функциясының үзіліс нүктесі деп атайды, ал функцияны осы нүктеде үзілісті дейді.

Үзіліс нүктелер түрлері. Анықтама. Егер біржақты шектері бар:

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x), \; f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

алайда бұлар функцияның x_0 нүктесіндегі мәніне тең емес, онда x_0 нүктесін бірінші текті үзіліс нүктесі деп атайды.

Анықтама. Егер оң жақ немесе сол жақ шектерінің жоқ дегенде біреуі болмаса, онда $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде II текті үзіліс нүктесі бар дейді.

Үзіліссіз функциялардың қасиеттері. Теорема. Егер X жиынында анықталған $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда осы нүктеде $f(x) \pm \varphi(x),\; f(x) \cdot \varphi(x)$ және $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ $(\varphi(x_0) \neq 0)$ функциялары да үзіліссіз.

Теорема. Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз және $f(x_0) \neq 0$ болса, онда x_0 нүктесін керегінше аз аймағында жатқан барлық x нүктелерінде $f(x)$ таңбалары $f(x_0)$ таңбасымен бірдей болады.

Теорема. Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда осы нүктесінің белгілі бір аймағы табылып, ол аймақта $f(x)$ функциясы шектелген болады.

Үзіліссіз функиялардың глобалдық қасиеттері. Вейерштрастың 1-*теоремасы*. Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда ол функция $[a,b]$ шектелген.

Вейерштрастың 2-*теоремасы.* Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ сегментінде үзіліссіз болса, онда осы сегментте функция өзінің дәл төменгі және дәл жоғарғы шекараларын қабылдайды, демек $[a,b]$ сегментінде x_1 және x_2 нүктелері табылып $f(x_1)=\sup\limits_{[a,b]} f(x), \qquad f(x_2)=\inf\limits_{[a,b]} f(x)$.

Больцано-Кошидің 1-*теоремасы* (үзіліссіз функцияның нөлдері туралы). Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және кесіндінің ұштарындағы функция мәндерінің таңбалары әртүрлі болса, онда $[a,b]$ кесіндісінде ең болмағанда бір с нүктесі табылып $f(c)=0$ болады.

Больцано-Кошидің 2-*теоремасы* (*функцияның аралық мәндері туралы*). Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және $f(a)\neq f(b)$ болса, онда функция осы кесіндіде $f(a)$ мен $f(b)$ сандарының арасында жатқан кез келген μ мәнін қабылдайды, демек $f(c)=\mu,\ c\in[a,b]$ нүктесі табылады.

Кантор теоремасы. Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда ол осы кесіндіде бірқалыпты үзіліссіз болады.

Бірінші тамаша шек:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Салдары.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1.$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1.$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1.$

Екінші тамаша шек:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Бұл формулада $x=\frac{1}{t}$ десек, онда $\lim\limits_{t\to 0}\left(1+t\right)^t=e$ шекті де екінші тамаша шек деп атайды.

Екінші тамаша шектің салдары:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e.$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k.$

Дәріс 11. Бір айнымалы функциялардың дифференциалдық есептеулері. Туындының геометрикалық және механикалық мәні. Функцияның нүктедегі туындысы және дифференциалы. Туындылар кестесі. Күрделі, айқындалмаған және параметрлі түрде берілген функцияларды дифференциалдау

Дәріс мазмұны: бір айнымалы функцияны дифференциялдау, функцияның нүктедегі туындысы, туынды ұғымына келтіретін есептер, туындының геометриялық және механикалық мәні.

Мақсаты: функция туындысы ұғымын енгізу, туынды ұғымына келтіретін есептерді қарастыру, туындының геометриялық және механикалық мәнін көрсету.

Туынды, туындының геометриялық және физикалық мағынасы. Айталық, $y = f(x)$ функциясы қайсыбір X аралығында анықталсын. Кез келген $x_0 \in X$ нүктесінде x аргументіне Δx өсімшесін $x_0 + \Delta x \in X$ береміз, онда $y = f(x)$ функциясы $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ өсімшеге өседі.

Анықтама. Егер аргумент өсімшесі нөлге ұмтылғанда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ шекті шегі бар болса, онда осы шекті $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысы деп атайды. Туындыны мына символдардың біреуімен белгілейді:

а) $f'(x_0)$ немесе $y'(x_0)$ (Лагранж белгілеуі);

б) $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ немесе $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ (Лейбниц белгілеуі).

Сонымен,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = y'(x_0).$$

Туынды ұғымына келтірілетін есептер.

Жылдамдық туралы есеп. Материалдық нүкте түзу сызық бойымен қозғалыста болсын және $S = S(t)$ нүктенің t уақытта жүріп өткен жолы. t уақыттан $t + \Delta t$ уақытқа өткенде нүкте $S(t + \Delta t) - S(t)$ жолды жүріп өтеді. Туындының механикалық мағынасы лездік жылдамдық болады:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{орт} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = S'(t).$$

Жанама туралы есеп. Айталық $y = f(x)$ функциясы $(a,$b) аралығында анықталған және x_0 нүктесі мен $x_0 + \Delta x$ нүктесі берілсін. Қиюшыны жүргізсек, қиюшымен OX осінің арасында бұрыш $\varphi(\Delta x)$ болсын.

Егер $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0$ шек бар болса, онда бұрыштық коэффициенті $k = tg\varphi_0$ және $M(x_0, f(x))$ нүктесі арқылы өтетін түзуді қиюшының шектік орналасуы деп атайды. Жанама деп x_0 нүктесінде қиюшының шектік орналасуын айтады.

Жанаманың бар болуы үшін $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0$ шектің бар болуы жеткілікті. Шек φ_0 жанаманың Ox өсімен жасайтын бұрышына тең. Егер

$y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде туындысы бар болса, онда $y = f(x)$ функция графигінің М нүктесінде жанамасы бар:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = arctgf'(x_0) => tg\varphi_0 = f'(x_0),$$

яғни x_0 нүктесінде $y = f(x)$ функциясының туындысы осы функция графигінің x_0 нүктесіндегі жанаманың бұрыштық коэффициентіне тең.

Теорема. $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде дифференциалдануы үшін, оның осы нүктеде шекті туындысының бар болуы қажетті және жеткілікті.

Дифференциалдау ережелері.

Теорема. Егер $u(x)$ пен $v(x)$ функциялары x нүктесінде дифференциалданатын болса, онда олардың қосындысы, айырмасы, көбейтіндісі және бөліндісі де осы х нүктесінде дифференциалданып, келесі теңдіктер орындалады:

I. $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$.

II. $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Дербес жағдайда $[cu(x)]' = cu'(x), \ (c - const)$.

III. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}, \quad (v(x) \neq 0).$

Теорема. Егер $x = \varphi(t)$ функциясы t_0 нүктесінде, ал $y = f(x)$ функциясы $x_0 = \varphi(t_0)$ нүктесінде дифференциалданатын болса, онда $y = f[\varphi(t)]$ күрделі функция t_0 нүктесінде дифференциалданады және

$$y'(x_0) = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0) = f'[\varphi(t_0)] \cdot \varphi'(t_0).$$

Теорема. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ сегментінде үзіліссіз, өспелі (кемімелі) болып, $x_0 \in [a,b]$ нүктесінде нөлге тең емес туындысы бар болса, онда $x = f^{-1}(y)$ кері функцияның $y_0 = f(x_0)$ нүктесінде туындысы бар және

$$x'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Функция дифференциалы. Дифференциалдың инварианттық қасиеті.
Анықтама. $y = f(x)$ функциясы $x_0 \in R$ нүктесінің қайсыбір аймағында анықталып, оның толық өсімшесі $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ осы нүктенің аймағында

$$\Delta y = \mathrm{A}\Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$$

түрде өрнектелсе, онда $y = f(x)$ функциясын x_0 нүктесінде дифференциалданады деп атайды, мұндағы $A = A(x_0)$ функциясы Δx тәуелсіз, ал $\Delta x \to 0$ ұмтылғанда $\varepsilon(\Delta x) \to 0$, $A\Delta x$ функцияның дифференциалы дейді де, оны $df(x_0)$ немесе dy белгілейді. Сонымен,

$$\Delta y = dy + \varepsilon(\Delta x)$$

мұндағы $dy = A\Delta x,\ dx = \Delta x$ – тәуелсіз айнымалының өсімшесі. Сондықтан

$$\Delta y \approx dy; \quad dy = f'(x_0)dx.$$

1-*теорема*. $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалдануы үшін, оның осы x_0 нүктесінде туындысының бар болуы қажетті және жеткілікті.

2-*теорема*. Егер функция қайсыбір нүктеде дифференциалданатын болса, онда ол функция бұл нүктеде үзіліссіз.

Дифференциалдау ережелері:

1) $d(Cu) = Cdu,\ (C - const)$.

2) $d(u \pm v) = du \pm dv$.

3) $d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du.$

4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$.

$y = f(x)$ функциясы қайсыбір x нүктесінде дифференциалданады дейік, онда $dy = f'(x)dx$ белгілі. Енді x тәуелсіз айнымалы t–дан тәуелді болсын дейік $x = \varphi(t)$. Демек, $y = f[\varphi(t)]$ күрделі функция болады. Оның дифференциалы

$$dy = \{f(\varphi)\}' dt = f'_\varphi \cdot \varphi'(t)dt = f'(x)dx, \text{ себебі } dx = \varphi'(t)dt.$$

Сонымен, $y = f(x)$ функциясының дифференциалының түрі аргумент x тәуелсіз айнымалы болса да немесе функция болса да өзгермейтінін көреміз, осыны дифференциалдық инварианттық қасиеті деп атайды.

Дифференциалды функция мәндерін жуықтап есептеуге пайдалануға болады: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

Туындының геометриялық мағынасынан $y = f(x)$ функциясына $M(x_0, y_0)$ нүктесінде жүргізілген жанама теңдеуі шығады:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad (y_0 = f(x_0))$$

Жанама нүктесі арқылы өтетін нормаль деп жанамаға перпендикуляр түзуді айтады. Нормаль теңдеуі:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Дәріс 12. Интервалда дифференциалданатын функциялар туралы негізгі теоремалар. Функцияның нүктедегі туындысы және дифференциалын қолдану. Жоғары ретті туындылар мен дифференциалдар. Тейлор көпмүшелігі және формуласы. Лопиталь ережесі арқылы анықтамалдықтарды ашу. Функцияны зерттеу, графигін тұрғызу

Дәріс мазмұны: дифференциалданатын функциялар туралы негізгі теоремалар. Жоғары ретті туындылар мен дифференциалдар. Тейлор формуласы. Лопиталь ережесі арқылы анықтамалдықтарды ашу. Функцияны зерттеу, графигін тұрғызу.

Мақсаты: дифференциалданатын функциялар туралы негізгі теоремалар мен таныстыру. Лопиталь ережесі арқылы анықтамалдықтарды ашу. Функцияны зерттеп, графигін тұрғызуды көрсету.

Жоғары ретті туындылар. $y=f(x)$ функциясының (a,b) интервалының барлық нүктесінде шекті туындысы бар болсын. Егер $f'(x_0)$ функциясының $x_0 \in (a,b)$ нүктесінде туындысы бар болса, онда оны $y=f(x_0)$ функциясының x_0 нүктесіндегі екінші ретті туындысы немесе екінші туындысы деп атайды да, мына символдардың біреуімен белгілейді:

$$f''(x_0); \quad \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2}; \quad y''(x_0).$$

Жоғарыдағыдай үшінші, төртінші, т.с.с. n ретті туындылар анықтамаларын беруге болады. Мысалы, үшінші ретті туындыны жазамыз:

$$f'''(x_0), \quad \frac{d^3 f(x_0)}{dx^3}, \quad \frac{d^3 y}{dx^3}, \quad y'''(x_0),$$

n-ші ретті туынды:

$$f^{(n)}(x_0), \quad \frac{d^n f(x_0)}{dx^n}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad y^{(n)}(x_0);$$

$$y^{(n)}(x_0) = \left[y^{(n-1)}(x)\right]'_{x=x_0}.$$

*Екінші ретті туындының механикалық мағынасы***.** Қозғалыстағы нүктенің уақыттың t мезгіліндегі үдеуі жолдан уақыт бойынша алынған екінші ретті туындыға тең, себебі бірінші ретті туындының механикалық мағынасы: $S=f(t)$ функциясы үшін $S'(t)$ туындысы қозғалыстын t мезгіліндегі жылдамдығы $v(t)$ тең. Жылдамдық өсімшесі $\Delta v = v(t+\Delta t) - v(t)$ уақыттың t мезгілінен $t+\Delta t$ мезгіліне дейінгі аралықта нүктенің жылдамдығы қаншалық өзгергенің көрсетеді:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t)$$

немесе

$$a(t) = (S'(t))' = S''(t).$$

Жоғары ретті дифференциал. Айталық $y = f(x)$ тәуелсіз айнымалы функциясының дифференциалы $dy = f'(x)dx$, x аргументінің дифференциалы dx тұрақты болсын:

а) $d^2 f(x) = f''(x)dx^2$ - екінші ретті дифференциал;

б) $d^n y = d\left(d^{n-1} y\right) \quad \Rightarrow \quad d^n f = f^{(n)} dx^n$.- n-ші ретті дифференциал.

$d^n y, \quad n \ge 2$ дифференциалдары үшін инварианттылық қасиет орындалмайды.

Жоғары ретті дифференциалдардың кейбір қасиеттері:

1) $d^n(u \pm v) = d^n u \pm d^n v.$

2) $d^n(cu) = cd^n u, \qquad c - const.$

3) $d^n(u \cdot v) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k} u d^n v,$

мұндағы $u(x)$ және $v(x)$ функциялары n рет дифференциалданады.

Лейбниц формуласы. Теорема. Егер $u(x)$ және $v(x)$ функцияларының x нүктесінде n ретті туындылары бар болса, онда $u(x) \cdot v(x)$ көбейтіндінің де n ретті туындысы бар және ол мына формуламен анықталады:

$$\left(u \cdot v\right)^{(n)} = uv^n + C_n' u' v^{(n-1)} + C_n^2 u'' v^{(n-2)} + \ldots + C_n^{n-1} u^{(n-1)} v' + u^{(n)} v, \qquad (1)$$

мұндағы

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}, \qquad 1 \le k \le n.$$

(1) формуланы Лейбниц формуласы деп атайды, оны былай да жазуға болады:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=o}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Кері функцияның жоғары ретті туындысы. $y = y(x)$ және $x = x(y)$ функциялары өзара кері функциялар болсын, онда:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x};$$

$$x''_{yy} = (x'_y)'_y = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}.$$

Параметрлік түрде берілген функцияның жоғары ретті туындысы. Егер $y = y(x)$ функциясы параметрлік теңдеулермен $x = x(t),\ y = y(t)$ берілген болса, онын бірінші ретті туындысы:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

формула бойынша есептеледі, ал екінші ретті туындысы:

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}.$$

Дифференциалдық есептеудің негізгі теоремалары.

Анықтама. Егер $\forall x \in X$ нүктелері үшін $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$ теңсіздігі орындалса, онда $f(x)$ функциясы $x_0 \in X$ нүктесінде ең үлкен (ең кіші) мән қабылдайды деп айтады.

Ферма теоремасы. $y = f(x)$ функциясы X аралығында анықталып, оның ішкі x_0 нүктесінде ең үлкен (ең кіші) мән қабылдасын. Егер x_0 нүктесінде шекті $f'(x_0)$ бар болса, онда ол $f'(x_0) = 0$.

Ролль теоремасы. Егер $y = f(x)$ функциясы мына шарттарды қанағаттандырса: $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз; (a,b) интервалында дифференциалданады; $[a,b]$ кесіндісінің ұштарындағы мәндері өзара тең, демек $f(a) = f(в)$, онда (a,b) интервалында жоқ дегенде бір ξ нүктесі $\xi \in (a,b)$ табылып, $f'(\xi) = 0$ болады.

Лагранж теоремасы. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және (a,b) интервалында дифференциалданатын болса, онда $\xi \in (a,b)$ нүктесі табылып:

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi).$$

Коши теоремасы. Егер $f(x)$ және $g(x)$ функциялары $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз, (a,b) интервалында дифференциалданатын; $\forall x \in (a,b)$ нүктесінде $g(x) \ne 0$ болса, онда $\xi \in (a,b)$ нүктесі табылып, тендігі орындалады:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Тейлор формуласы. Теорема. Егер $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде n ретті туындысы бар болса, онда дәрежесі n артпайтын $P_n(x)$ көпмүшесі табылып, ол мына шарттарды қанағаттандырады:

$$P_n(x_0) = f(x_0); \qquad P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0); \quad k = 1,2,...n$$

және мына түрде жазылады

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

$P_n(x)$ - Тейлор көпмүшелігі деп аталады. Алайда, $f(x)$ функциясы бүтін көпмүшелік болмағандықтан, қатені $R_{n+1}(x)$ белгілейді, демек $R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x)$, онда мына формуланы Тейлор формуласы деп атайды:

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x), \tag{1}$$

мұндағы $R_{n+1}(x) = o((x - x_0)^n)$ - Пеано түріндегі қалдық;

$R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ - Лагранж түріндегі қалдық.

Егер $x_0 = 0$ болса, онда (1) формуладан Маклорен формуласы алынады:

$$f(x) = F(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x), \tag{2}$$

мұндағы $R_{n+1}(x) = o(x^n)$ - Пеано түріндегі қалдық;

$R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ - Лагранж түріндегі қалдық.

Лопиталь ережесі.

I. $\frac{0}{0}$ *түріндегі анықталмағандық.*

1-*теорема***.** Егер $f(x)$ және $g(x)$ функциялары x_0 нүктесінің аймағында анықталып, $f(x_0) = g(x_0) = 0$ және шекті туындылары $f'(x_0)$, $g'(x_0) \neq 0$ бар болса, онда $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ шек бар, ол

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} .$$

II. $\frac{\infty}{\infty}$ *түріндегі анықталмағандық.*

2-*теорема***.** Егер $f(x)$ және $g(x)$ функциялары (a,b) интервалында дифференциалданса, $\forall x \in (a,b)$ үшін $g'(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, шекті немесе шексіз $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ шек бар болса, онда $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ шек те бар және

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

III. $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, түріндегі анықталмағандықтарды алдымен алгебралық түрлендіру арқылы $\frac{0}{0}$ немесе $\frac{\infty}{\infty}$ түріне келтіріп, сонан соң Лопиталь ережесін қолданады.

Функцияның монотондылық белгісі. Функцияның экстремумы, ойыс және дөнестігі, асимптоталары.

1-*теорема.* Егер $f(x)$ функциясы (a,b) интервалында дифференциалданып $\forall x \in (a,b)$ үшін $f'(x) = 0$ болса, онда $f(x)$ функциясы (a,b) интервалында тұрақты.

2-*теорема.* (a,b) интервалында дифференциалданатын $f(x)$ функциясы осы интервалда кемімейтін (өспейтін) болуы үшін $\forall x \in (a,b)$ нүктесінде $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ теңсіздігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

3-*теорема* (локалдық экстремумның қажетті шарты). Егер $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде экстремумы бар және дифференциалданатын болса, онда $f'(x_0) = 0$.

Анықтама. Егер функция графигі кез келген нүктеде жүргізілген жанамадан жоғары (төмен) жатса, онда $y = f(x)$ функция графигінің (a,b) аралығында дөңестігі төмен (жоғары) бағытталған дейді.

4-*теорема*. Егер $y = f(x)$ функциясының (a,b) интервалында шекті екінші ретті туындысы бар болса және $\forall x \in (a,b)$ үшін $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$ шарт орындалса, онда $y = f(x)$ функциясының графигі (a,b) интервалында ойыс (дөңес) болады.

Анықтама. Егер x_0 нүктесінен өткенде функцияның дөңестік бағыты өзгерсе, демек $\delta>0$ саны табылып $(x_0-\delta,\ x_0)$ мен $(x_0,\ x_0+\delta)$ интервалының біреуінде график ойыс (дөңес), ал екіншісінде дөңес (ойыс) болса, онда x_0 нүктесін $y = f(x)$ функциясының иілу нүктесі деп, ал $(x_0,\ f(x_0))$ нүктесін $y = f(x)$ функция графигінің иілу нүктесі деп атайды.

Анықтама. Егер төмендегі шарттардың жоқ дегенде біреуі орындалса:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \infty ,$$

онда x=x_0 түзуін $y = f(x)$ функция графигінің асимптотасы деп атайды.

$y = kx + b$ түзуін $y = f(x)$ функция графигінің $x \to +\infty$ асимптотасы деп атайды, егер

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0\ . \qquad (3)$$

Егер $k\neq0$, онда асимптотаны көлбеу дейді, ал егер b=0, онда асимптотаны вертикаль деп атайды. (3) формуладағы k, b былай анықталады:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx].$$

Функцияны зерттеу тәртібі. Функцияны зерттеп, графигін салуды төмендегі тәртіппен жүргізу ыңғайлы:

1) Функцияның анықталу облысын, үзіліссіздікке зерттеп, үзіліс нүктелерін табу керек. Функцияны жұп (тақ), периодты (периодсыз) діққе зерттеу.
2) Графиктің асимптоталарын анықтау.
3) Функцияның өсу (кему) облыстарын, экстремум нүктелерін табу.
4) Екінші туындыны анықтап, иілу нүктелерін және ойыс (дөңес) аралықтарын табу.
5) Функция графигінің координаталар осьтерімен қиылысатын нүктелерін анықтау.
6) Графикті салу.

Модуль 3. Бір айнымалы функциялардын интегралдық есептеулері

Дәріс 13. Бір айнымалы функциялардын интегралдық есептеулері. Анықталмаған интеграл, оның қасиеттері. Негізгі интегралдар кестесі. Анықталмаған интегралдарды интегралдау әдістері

Дәріс мазмұны: анықталмаған интеграл және оның негізгі қасиеттері, негізгі интеграл кестесі. Анықталмаған интегралдарды интегралдау тәсілдері.

Мақсаты: анықталмаған интеграл ұғымын енгізу, негізгі қасиеттерін көрсету, анықталмаған интегралды интегралдау тәсілдерін көрсету.

Анықталмаған интеграл және оның қасиеттері. Егер X аралығында кез келген x үшін $F'(x)=f(x)$ теңдігі орындалса, $F(x)$ функциясын осы аралықта анықталған $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы деп атайды.

Теорема. Егер $F(x)$ функциясы қайсыбір X аралығында $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда $f(x)$ функциясының кез келген басқа алғашқы функциясы $F(x)+C$ түрінде өрнектеледі, мұндағы С кез келген тұрақты сан.

Анықтама. $f(x)$ функциясы X аралығында анықталсын. Осы функцияның X аралығындағы барлық алғашқы функцияларының жиынтығын $f(x)$ функциясының анықталмаған интегралы деп атайды да, былай белгілейді: $\int f(x)dx$. Сонымен:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

мұндағы $f(x)$ интеграл астындағы функция;

$f(x)dx$ - интеграл астындағы өрнек;

x - интегралдау айнымалысы.

Анықталмаған интегралдың қасиеттері:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$; $\quad d\int f(x)dx = f(x)dx$.

2) $\int dF(x) = F(x) + C$.

3) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,\ k - const$.

4) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Анықталмаған интегралды интегралдау әдістері.

1. *Айнымалыны алмастыру әдісі*.

Теорема. Айталық, $x = \varphi(t)$ функциясы қайсыбір T аралығында анықталған, дифференциалданатын функция болсын, сонымен қатар осы функцияның X мәндер жиынында $f(x)$ функциясы анықталған болсын. Егер $f(x)$ функциясының X жиынында алғашқы функциясы $F(x)$ бар болса:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

онда $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ функциясының T жиынында алғашқы функциясы $F(\varphi(t))$ бар және айнымалыны алмастыру формуласы:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

(1) формула бойынша интегралды есептеген соң t-дан қайта x-ке көшу керек.

2. *Бөліктеп интегралдау әдісі.*

Теорема. Егер $u = u(x)$ және $v = v(x)$ функциялары X аралығында дифференциалданса және осы аралықта $\int vdu$ интегралы бар болса, онда X аралығында $\int udv$ интегралы бар болады және

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (2)$$

(2) - анықталмаған интегралды бөліктеп интегралдау формуласы.

Дәріс 14. Бөлшек рационал және иррационал функцияларды интегралдау. Тригонометрикалық өрнектерді интегралдау

Дәріс мазмұны: бөлшек рационал және иррационал функцияларды интегралдау. Тригонометрикалық өрнектерді интегралдау.

Мақсаты: анықталмаған интегралды интегралдау тәсілдерін көрсету.

Рационал функцияларды интегралдау. Жай бөлшектерді интегралдауды қарастырайық. Жай бөлшектер деп мына дұрыс бөлшектерді айтады:

$$\text{I. } \frac{A}{(x-a)^n}; \qquad \text{II. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^2}; \qquad n=1,2,\ldots,$$

мұндағы *A, M, N, a,p, q*- нақты сандар, $p^2-4q<0$.

I. n=1 болсын $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C$.

II. $n=1,\ \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx,\ (x^2+px+q)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}$

сонда

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}}dx = \left| \begin{array}{l} t=x+\frac{p}{2} \\ dt=dx \\ \frac{4q-p^2}{4}=a^2 \end{array} \right| =$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2N-MP}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

III. Егер $\frac{P(x)}{Q(x)}$ бөлшегінің P(x) дәрежесі Q(x) дәрежесінен үлкен болса, онда P(x) көпмүшелігін Q(x)-ке бөліп $S(x)$ бүтін бөлігін бөліп алу керек:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

мұндағы $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ дұрыс рационал функция, оны жоғарыдағы жай бөлшектерге жіктеуге болады. Онда:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int S(x)dx+\int \frac{P_1(x)}{Q(x)}dx.$$

Иррационал және трансцендент функцияларды интегралдау.

I. $R\left(x,\ \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$ түрдегі иррационал функция $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ алмастыруы арқылы t-ға қарай рационал функцияға түрлендіруге болады, мұндағы a, b, с, d – тұрақты сандар, $n\in N,\ R$ - рационал функция.

II. $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx, a\neq 0,\ b^2-4ac\neq 0$, интегралды Эйлер алмастыруын пайдаланып:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}x,\ (a>0)$ Эйлердің 1- ші алмастыруы.

2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c},\quad (c>0)$ Эйлердің 2-ші алмастыруы.

3) $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha)$ немесе $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\beta)$.

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ - Эйлердің 3-ші алмастыруы.

Тригонометриялық функцияларды интегралдау.

I. R-рационал функция болсын, онда $\int R(\sin x,\cos x)dx$ түріндегі интеграл $t=tg\dfrac{x}{2},\ x\in(-\pi,\pi)$ универсал алмастыруы арқылы t-ға қарай рационал функцияға түрлендіріледі:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, x=2arctgt,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

II. Интеграл астындағы функция R төмендегі шарттарды қанағаттандырса:

1) $R(\sin x,\cos x)$ функциясы $\sin x$ бойынша тақ функциясы.

2) $R(\sin x,\cos x)$ функциясы $\cos x$ бойынша тақ функциясы.

3) $R(\sin x,\cos x)$ функциясы $\cos x$ және $\sin x$ бойынша жұп функциясы болса, онда әр жағдайға сай алмастыруын жасау керек.

III. $\int \sin^m x\cdot\sin^n xdx,\ m,n\in Z$.

1 *жағдай.* m, n – көрсеткіштерінің біреуі тақ оң сан болса, 2 *жағдай.* m, n – көрсеткіштері жұп оң сандар болса, онда интеграл астындағы функцияның дәрежесін төмендетіп, интегралдау керек.

IV. $\int\sin\alpha x\cos\beta xdx$, $\int\cos\alpha x\cos\beta xdx$, $\int\sin\alpha x\sin\beta xdx$. Интеграл астындағы функцияны төмендегі формулалармен түрлендіру керек:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right];$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right].$$

Дәріс 15. Анықталған интеграл, оның қасиеттері. Ньютон-Лейбниц формуласы. Анықталған интегралдың қолдануы. Меншіксіз интегралдар

Дәріс мазмұны: анықталған интеграл, оның қасиеттері. Ньютон-Лейбниц формуласы. Анықталған интегралдың қолдануы, меншіксіз интеграл.

Мақсаты: анықталған интеграл ұғымын енгізу, оның қасиеттерін, Ньютон-Лейбниц формуласын, анықталған интеграл қолдануын және меншіксіз интегралды қарастыру.

Айталық y=$f(x)$ функциясы [a,b], (a<b) кесіндісінде анықталған. [a,b] кесіндісін қалауымызша n бөлікке бөлеміз:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b\,.$$

Әрбір $[x_{i-1},x_i]$ бөліктен қалауымызша $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$ нүктелерін таңдап аламыз, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ белгілейміз, қосынды түзейміз:

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\,. \qquad (1)$$

(1) - $f(x)$ функциясының [a,b] кесіндідегі интегралдық қосындысы деп атайды. $\lambda=\max\Delta x_i$ белгілейміз.

Анықтама. Егер $\lambda\to 0$ (1) интегралдық қосындының шекті шегі J бар болып, ол шек [a,b] кесіндісін τ -бөліктеуден және әрбір $[x_{i-1},\ x_i]$, $(i=\overline{1,\ n})$ кесіндісінен алынатын ξ_i нүктесінен тәуелсіз болса, онда J шегін [a,b] кесіндісінде $f(x)$ функциясының анықталған интегралы (Риман интегралы) деп атайды да оны $\int_a^b f(x)dx$ деп белгілейді немесе

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\,,$$

мұндағы a және b сәйкес интегралдың төменгі және жоғарғы шегі;
x - интегралдау айнымалысы;
$f(x)$ - интеграл астындағы функция.

1-*теорема*. Егер $f(x)$ функциясы [a,b] кесіндісінде интегралданса, онда ол функция шектелген.

2-*теорема.* [a,b] кесіндісінде шектелген $f(x)$ функциясының осы кесіндіде интегралдануы үшін $\lim_{\lambda\to 0}(S-s)=0$ шарттың орындалуы қажетті және жеткілікті.

3-*теорема.* Егер $f(x)$ функциясы [a,b] кесіндісінде үзіліссіз болса, онда ол осы кесіндіде интегралданады.

4-*теорема*. Егер $[a,b]$ кесіндіде $f(x)$ функциясы шектелген және саны шекті бірінші текті үзіліс нүктелері бар болса, онда ол функция интегралданады.

Анықталған интегралдың қасиеттері:

1) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz$.

2) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

3) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$

4) Егер $[a,b]$ кесіндісі $[a,c]$ және $[c, b]$ кесінділеріне бөлінсе, онда:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5) Егер $[a,b]$ кесіндісінде $f(x) \geq 0$ болса, онда $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Ньютон-Лейбниц формуласы:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), (F'(x) = f(x)).$$

Анықталған интегралдың геометрияда және физикада қолданылуы.

I. *Қисық сызықты трапецияның ауданын есептеу.*

1) Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде анықталған, теріс емес және үзіліссіз функция болса, онда $D = \{(x, y):\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ қисық-сызықты трапеция ауданы мына формуламен анықталады:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

2) Егер фигура төменгі және жоғарғы жағынан $y = f_1(x)$ және $y = f_2(x),\ f_1(x) \leq f_2(x),\ a \leq x \leq b$ функциялар графиктерімен шектелсе, $[a,b]$ кесіндісінде $f_1(x),\ f_2(x)$ теріс емес үзіліссіз функциялар болса, онда қисықсызықты трапецияның ауданы мына формуламен анықталады:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.$$

3) Егер қисықсызықты трапецияның жоғарғы шекарасы параметрлік теңдеулермен берілсе: $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \alpha \leq t \leq \beta$ және $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$, онда (1) формуладан $x = \varphi(t),\ dx = \varphi'(t)dt$ аламыз да, ауданды есептеу формуласы мына түрде анықталады:

$$S = \int_a^b \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

II. *Қисықтың ұзындығын есептеу.* Айталық, жазық *AB* қисығы y=*f*(*x*), $a \le x \le b$ теңдеуімен берілсін. Егер *f*(*x*) функциясы өзінің туындысы $f'(x)$ мен бірге [*a*,*b*] кесіндісінде үзіліссіз болса, онда *AB* доғасының ұзындығы L мына формуламен өрнектеледі:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Егер *AB* қисығы поляр координатасында $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, мұндағы $\rho(\varphi)$ өзінің туындысы $\rho'(\varphi)$-мен $[\alpha, \beta]$ үзіліссіз болса, онда AB ұзындығы былай анықталады:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2}\, d\varphi.$$

Егер *AB* доғасы параметрлік теңдеумен берілсе: $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \ \alpha \le t \le \beta$ және $\varphi(t),\ \psi(t)$ функциялары $[\alpha, \beta]$ кесіндісінде туындыларымен бірге үзіліссіз болса, онда оның ұзындығы:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$

III. *Жазық қисықтың статикалық моменттері мен ауырлық центрінің координаталарын есептеу.* Айталық, біртекті *G* материалдық қисық $y = f(x),\ \ a \le x \le b$ теңдеуімен берілсін, *f*(*x*) функциясы $[a, b]$ кесіндісінде дифференциалданатын функция. Егер материалдық қисық біртекті, демек оның массаның сызықтық тығыздығы $\rho = 1$ десек, онда қисықтың массасы *m* қисықтың ұзындығы *L* тең болады:

$$m = L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

G қисығының статикалық моменттері сәйкес O*x* және *Oy* өсіне қарай мына формулалармен есептеледі:

$$m_x = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx, \quad m_y = \int_a^b x\sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

Меншіксіз интегралдар ұғымы.

Анықтама. Айталық, $f(x)$ функциясы $[a, +\infty)$ аралығында анықталған және кез келген $[a, b]$ кесіндісінде интегралданады ($b>a$). Онда, егер шекті шек

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

бар болса, оны 1-текті меншіксіз интеграл деп атап, былай белгілейді:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad (2)$$

Сонымен

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Бұл жағдайда (2) интеграл бар немесе жинақты дейді. Егер шек болмаса немесе шексіздік болса, онда жинақсыз дейді. Дәл осылай меншіксіз интегралды $(-\infty, a]$ аралығында енгізуге болады.

Анықтама. $f(x)$ функциясы $[a,b)$ аралығында анықталған. Егер $x=b$ нүктесінің аймағында $f(x)$ функциясы шектелмеген болса, онда b нүктесін ерекше нүкте деп атайды, ал кез келген $[a,b-\varepsilon]$ кесіндісінде $f(x)$ интегралда, $\varepsilon>0$ және $b-\varepsilon>a$. Онда шекті шек бар болса

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

онда оны 2-текті меншіксіз интеграл деп атап, былай жазады:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Әдебиеттер тізімі

1 Сағынтаев С., Сағынтаева С. Жоғары математика: Оқулық. –Астана: ҚазЭҚСХУ БПО, 2015.
2 Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. -М., 2007.
3 Искакова А. Қ., Қанжарова Б. С., Сыдыков Ә. А. Жоғары математикадан есептер жинағы. -Алматы: Қазақ мемлекеттік қыздар педагогика институты, 2006.
4 Қабдықайыров Қ. Жоғары математика. -Алматы, 2004.
5 Айдос Е.Ш. Жоғары математика. -Алматы, 2003.
6 Никольский С.М. Курс математического анализа. -М., 2001.
7 Ахметкалиев Т., Сатығұлова С. Математикалық анализ. -Алматы, 1992.
8 Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т.1,2. -М., 1988.
9 Темірғалиев Н. Математикалық анализ. -А.: Мектеп. 1987.
10 Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть 1, 2. -М.: Наука, 1971, 1980.
11 Ильин В. А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. -М.: Наука, 1979.
12 Ибрашев Х.И., Еркеғұлов Ш.Т. Математикалық анализ. -А.: Мектеп, 1-2 т., 1970.

2017 ж. Жиынтық жоспары, реті 218

Искакова Ақжолтай Құрмантаевна
Есботаева Эльмира Султанмуратовна

МАТЕМАТИКА 1

5В070200 – Автоматтандыру және басқару
мамандығының студенттері үшін дәрістер жинағы

Редакторы Қ.С.Телғожаева
Стандарттау бойынша маман Н.Қ.Молдабекова

Басуға қол қойылды _______
Таралымы 20 дана
Көлемі 4,4 б.т.

Пішіні 60х84 1/16
Баспаханалық қағаз №1
Тапсырыс_____ Бағасы 2 215 тг.

«Алматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірмелі-көбейткіш бюросы
050013, Алматы, Байтұрсынұлы көшесі, 126