Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра Математики и математического моделирования

МАТЕМАТИКА 1

Методические указания и задания по выполнению расчетно – графических работ для студентов специальности 5В070200 – Автоматизация и управление

Алматы 2018

Составители: А.К.Искакова, Э.С.Есботаева. Математика 1. Методические указания и задания по выполнению расчетно – графических работ для студентов специальности 5В070200 – Автоматизация и управление. –Алматы: АУЭС, 2018. - 46 с.

Методические указания и задания по выполнению расчетно – графических работ по дисциплине «Математика 1» для студентов специальности 5В070200 –Автоматизация и управление составлены по программе дисциплины «Математика – 1» в соответствии с общим колличеством кредитов и выбора направления. Обьем и содержание каждого модуля составлены с учетом психологических особенностей обучаемых.

Графики – 1, список литературы – 5.

Рецензент: к.п.н., доцент Саламатина А.М.

Печатается по плану некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2018 г.

© НАО «Алматинский университет энергетики и связи», 2018 г.

Введение

Программа по курсу «Математика 1» структурирована в соответствии с действующими учебными планами АУЭС. Все студенты изучают 3 модуля в курсе «Математика 1», что соответствует общему количеству кредитов, выделенных в учебных планах. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные формулы и методы дифференцирования и интергрирования функции одной переменной, а также уметь находить оптимальные методы в решении прикладных задач.

Методические указания содержат задания к 3 расчетно-графическим работам (РГР) по разделам «Введение в анализ. Теория пределов», «Дифференциальное исчисление функции одной переменной», «Интегральное исчисление функции одной переменной» дисциплины «Математика 1». По каждой части приведены теоретические вопросы и материалы. Приведены примеры решения типового варианта по каждой РГР и методические указания.

Номер варианта каждого студента определяется по списку группы. Расчетно-графическая работа должна выполняться четко и разборчиво в ученической тетради.

Расчетно-графическая работа №1 курса «Математика 1»

Введение в анализ. Теория пределов

Цель работы: изучить понятия предел функции в точке, односторонние пределы, точки разрыва функции и научиться применять их в решении прикладных задач.

Теоретические вопросы.

1.Функция одной переменной и ее свойства.
2.Сложная функция, функция заданная параметрически.
3.Числовые последовательности и их пределы.
4.Предел функции. Замечательные пределы.
5.Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация.

Расчетные задания

Задание 1. Найти предел функции.

1.1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}$	1.2 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+4x-21}$	1.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+10x^2+24x}{2x^3+6x^2+4}$
1.4 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-15x-42}{x^2-4}$	1.5 $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{2x^2+9x-5}{8x^2-6x+1}$	1.6 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{6x-8-x^2}{x^2+2x-24}$

1.7 $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2-5x-2}{6x^2-x-1}$	1.8 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-7x+10}$	1.9 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-6x-7}{-x^2+18x+17}$
1.10 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^3-27}$	1.11 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x+3}$	1.12 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x-1}$
1.13 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{x+2}$	1.14 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-14x+6}{x-3}$	1.15 $\lim\limits_{x\to -1/2}\dfrac{6x^2+x-1}{x+1/2}$
1.16 $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{6x^2-x-1}{x-1/2}$	1.17 $\lim\limits_{x\to -1/3}\dfrac{9x^2-1}{x+1/3}$	1.18 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x-2}$
1.19 $\lim\limits_{x\to -1/3}\dfrac{3x^2-2x-1}{x+1/3}$	1.20 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+8x+1}{x+1}$	1.21 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$
1.22 $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x-1/2}$	1.23 $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{6x^2-5x+1}{x-1/3}$	1.24 $\lim\limits_{x\to -7/5}\dfrac{10x^2+9x-7}{x+7/5}$
1.25 $\lim\limits_{x\to -7/2}\dfrac{2x^2+13x+21}{2x+7}$	1.26 $\lim\limits_{x\to 5/2}\dfrac{2x^2-9x+10}{2x-5}$	1.27 $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{6x^2+x-1}{x-1/3}$
1.28 $\lim\limits_{x\to -1/2}\dfrac{6x^2-75x-39}{x+1/2}$	1.29 $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{2x^2+15x+7}{x+7}$	1.30 $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{2x^2-13x-24}{x-8}$

Задание 2. Найти предел функции.

2.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^5-7x^2+2}{3x^5+2x^2-6x}$	2.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x+2}{x^2-3x^2+1}$	2.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+3x-5}{x^6-2x^2+4}$
2.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^7-9x}{9x^5-4x^2-5}$	2.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-x-12}{x^3-x-7}$	2.6 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^5-7x-7}{2x^7+2x-2}$
2.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-6x^2-4}{x^3-2x^3+1}$	2.8 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9x^7-2x-6}{3x^7+3x-3}$	2.9 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^6-5x+2}{x^2-2x+2}$
2.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-2x^2-3x}{12x^3-5}$	2.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x+4x^6}{5x^2-6x+7}$	2.12 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+4x+7}{x^4+4x^2-10}$
2.11 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5-4x^2+28x}{5x^5+3x^2-1}$	2.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+7x-1}{7x^4+2x+5}$	2.15 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-2x^2-2x}{3x^2+3x}$
2.16 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^2+12x+16}{4x^2+5x+6}$	2.17 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^3-x^2+2}{8x^4+x-4}$	2.18 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-x-14}{6x^2+9x-11}$

2.19 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^6+x^2+x}{9x^6+3x-2}$	2.20 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4-8x^2-2}{2x^2-7x-5}$	2.21 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2+8x+2}{x^4+6x^2-9}$
2.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+12x+6}{4x^2-8x+4}$	2.23 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^8+x^6+x^4}{5x^4+13x^2-6x}$	2.24 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{11x^2+2x+2}{3x^3-3x+4}$
2.25 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^4+3x^3+x^2}{-x^2-x-15}$	2.26 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^4+6x^3-x}{x+x^2-x^3}$	2.27 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^8-3x^3+2x}{x^3+8x^2+17}$
2.28 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+5x^5-1}{-8x^7-6x^5+x^3}$	2.29 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+12x^2-9}{21x^2+3x+18}$	2.30 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-6x-6}{2x^5+13x^3-7}$

Задание 3. Найти предел функции.

3.1 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2+2x-24}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$	3.2 $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{3x^2+6x-24}$	3.3 $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$
3.4 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$	3.5 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{4+x}}{3x^2-4x+1}$	3.6 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{5x^2-15x+10}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$
3.7 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$	3.8 $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$	3.9 $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$
3.10 $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$	3.11 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$	3.12 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7x}}$
3.13 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$	3.14 $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$	3.15 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$
3.16 $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$	3.17 $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$	3.18 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$
3.19 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$	3.20 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$	3.21 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$
3.22 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{12x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$	3.23 $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$	3.24 $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$
3.25 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$	3.26 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$	3.27 $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}$
3.28 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+8}-3}$	3.29 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{3x^2+3x}$	3.30 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$

Задание 4. Найти предел функции.

4.1а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{x}$	4.2 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin 2x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{1}{x}}$	4.3 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{9x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x}\right)^{3x}$
4.4 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{tg3x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{5x}$	4.5 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+8x)^{\frac{4}{x}}$	4.6 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg9x}{18x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$
4.7 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12x}{\sin 4x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{6/x}$	4.8 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\sin 4x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-11x)^{\frac{8}{x}}$	4.9а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x^2}{1-\cos 3x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{3x}$
4.10 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{6x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{4x}$	4.11 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{14x^2}{1-\cos x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{8x}$	4.12 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{tg7x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-6}{x}\right)^{6x}$
4.13 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x}{\sin 3x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{11}{x}\right)^{4x}$	4.14 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{tg4x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{6}{x}\right)^{6x}$	4.15 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{18x}{tg6x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x/10}$
4.16 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg9x}{6x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{5x}{4}\right)^{2/x}$	4.17 а) $\lim\limits_{x\to 0} xctg9x$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-13x)^{3/x}$	4.18 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{\sin 4x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-9x)^{\frac{9}{x}}$
4.19 а) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 7xctg7x$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{5/x}$	4.20 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{10x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{8/x}$	4.21 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 14x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+9x)^{\frac{10}{x}}$
4.22а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x}{arctg4x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{3x}{7}\right)^{\frac{1}{x}}$	4.23 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{2x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{4/x}$	4.24 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{tg6x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+8x)^{\frac{3}{x}}$

4.25 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 7x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-6x)^{2/x}$	4.26 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{tg9x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{7x/2}$	4.27 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 8x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x}\right)^{9x}$
4.28 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sin 6x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{9}{x}\right)^{3x}$	4.29 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{tg8x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{x}$	4.30 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x}{tg2x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3x}\right)^{6x}$

Задание 5. Исследовать функцию на непрерывность.

5.1 а) $f(x)=3^{\frac{1}{x+4}}$, б) $g(x)=\dfrac{9}{4+x}$	5.2 а) $f(x)=2^{\frac{1}{x-1}}$, б) $g(x)=\dfrac{1}{8-x}$	5.3 а) $f(x)=6^{\frac{1}{x+3}}$, б) $g(x)=\dfrac{1}{x-10}$
5.4 а) $f(x)=9^{\frac{1}{x-5}}$, б) $g(x)=\dfrac{1}{x-13}$	5.5 а) $f(x)=5^{\frac{1}{9-x}}$, б) $g(x)=\dfrac{4}{x-3}$	5.6 а) $f(x)=4^{\frac{1}{x+7}}$, б) $g(x)=\dfrac{7}{x+21}$
5.7 а) $f(x)=7^{\frac{1}{3-2x}}$, б) $g(x)=\dfrac{2}{3x+4}$	5.8 а) $f(x)=8^{\frac{1}{3x-2}}$, б) $g(x)=\dfrac{6}{7-3x}$	5.9 а) $f(x)=2^{\frac{1}{5-2x}}$, б) $g(x)=\dfrac{5}{2x+9}$
5.10 а) $f(x)=12^{\frac{1}{x+4}}$, б) $g(x)=\dfrac{7}{7-2x}$	5.11 а) $f(x)=6^{\frac{1}{3-4x}}$, б) $g(x)=\dfrac{6}{x+5}$	5.12 а) $f(x)=11^{\frac{1}{x+6}}$, б) $g(x)=\dfrac{13}{20+4x}$
5.13а) $f(x)=9^{\frac{2}{x}}$, б) $g(x)=\dfrac{6}{5+2x}$	5.14 а) $f(x)=10^{\frac{1}{x+5}}$, б) $g(x)=\dfrac{1}{9-3x}$	5.15 а) $f(x)=4^{\frac{1}{4+x}}$, б) $g(x)=\dfrac{2}{7+x}$
5.16 а) $f(x)=3^{\frac{1}{5x+3}}$, б) $g(x)=\dfrac{4}{8+9x}$	5.17 а) $f(x)=5^{\frac{1}{5+x}}$, б) $g(x)=\dfrac{13}{2x-1}$	5.18 а) $f(x)=16^{\frac{7}{2x}}$, б) $g(x)=\dfrac{9}{9+18x}$

5.19 а) $f(x)=16^{\frac{1}{9-x}}$, б) $g(x)=\frac{14}{6x-3}$	5.20 а) $f(x)=17^{\frac{1}{5+20x}}$, б) $g(x)=\frac{3}{6-4x}$	5.21 а) $f(x)=14^{\frac{1}{6-x}}$, б) $g(x)=\frac{3}{2+x}$
5.22 а) $f(x)=15^{\frac{3}{4-x}}$, б) $g(x)=\frac{1}{6-2x}$	5.23 а) $f(x)=5^{\frac{1}{8-x}}$, б) $g(x)=\frac{10}{x-3}$	5.24 а) $f(x)=7^{\frac{4}{2+x}}$, б) $g(x)=\frac{5}{8-x}$
5.25 а) $f(x)=13^{\frac{1}{7-x}}$, б) $g(x)=\frac{3}{8-x}$	5.26 а) $f(x)=4^{\frac{9}{4+x}}$, б) $g(x)=\frac{14}{x+7}$	5.27 а) $f(x)=12^{\frac{1}{1-x}}$, б) $g(x)=\frac{7}{12-6x}$
5.28 а) $f(x)=9^{\frac{9}{9-x}}$, б) $g(x)=\frac{1}{3x+5}$	5.29 а) $f(x)=6^{\frac{1}{x+11}}$, б) $g(x)=\frac{4}{4-x}$	5.30 а) $f(x)=7^{\frac{2}{4x-5}}$, б) $g(x)=\frac{19}{x+11}$

Задание 6. Найти указанные пределы.

6.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$	6.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$	6.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{3x}$	6.4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{4x+1}\right)^{3x-1}$
6.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}$	6.6 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)^{2x+1}$	6.7 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{5x}$	6.8 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{4x}$
6.9 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+3}{2x-4}\right)^{x+2}$	6.10 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^{x-1}$	6.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-3}{x+4}\right)^{x+3}$	6.12 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{7x+4}\right)^{x}$
6.13 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-5}{3x+4}\right)^{2x}$	6.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{4x-5}\right)^{2x}$	6.15 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{3x+1}\right)^{5x}$	6.16 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-4}{x+6}\right)^{x-1}$
6.17 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{3x+10}\right)^{3x}$	6.18 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{x+4}\right)^{6x+1}$	6.19 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+3}{3x-1}\right)^{2x}$	6.20 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x+5}{x-10}\right)^{5x}$
6.21 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+7}{x+4}\right)^{4x}$	6.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{4x+5}\right)^{3x}$	6.23 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5x-7}{x+6}\right)^{2x}$	6.24 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-4x}{2-x}\right)^{6x}$

6.25 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-2x}{3-x}\right)^{-x}$	6.26 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4+3x}{5+x}\right)^{7x}$	6.27 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-1}{2x+5}\right)^{3x}$	6.28 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{2-10x}\right)^{5x}$
6.29 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{9x-4}\right)^{2x}$	6.30 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+5}{4x-2}\right)^{3x}$		

Задание 7. Исследовать функцию на непрерывность и построить график.

7.1 $f(x)=\begin{cases}x+4, & x\prec -1,\\ x^2+2, & -1\le x\le 1,\\ 2x, & x\succ 1.\end{cases}$	7.2 $f(x)=\begin{cases}x+4, & x\le 0,\\ (x+1)^2, & 0\prec x\le 2,\\ -x+4, & x\succ 2.\end{cases}$	7.3 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\le -1,\\ x^2+1, & -1\prec x\le 1,\\ -x+3, & x\succ 1.\end{cases}$
7.4 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ -(x-1)^2, & 0\prec x\prec 2,\\ x-3, & x\ge 2.\end{cases}$	7.5 $f(x)=\begin{cases}-2(x+1), & x\le -1,\\ (x+1)^2, & -1\prec x\prec 0,\\ x, & x\ge 0.\end{cases}$	7.6 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ x^2, & 0\prec x\le 2,\\ x+1, & x\succ 2.\end{cases}$
7.7 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\le 1,\\ 2x, & 1\prec x\le 3,\\ x+2, & x\succ 3.\end{cases}$	7.8 $f(x)=\begin{cases}x-3, & x\prec 0,\\ x+1, & 0\le x\le 4,\\ x+3, & x\succ 4.\end{cases}$	7.9 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 0,\\ 0, & 0\prec x\le 2,\\ x-2, & x\succ 2.\end{cases}$
7.10 $f(x)=\begin{cases}2x^2, & x\le 0,\\ x, & 0\prec x\le 1,\\ x+2, & x\succ 1.\end{cases}$	7.11 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\prec 0,\\ x, & 0\le x\le 2,\\ 0, & x\succ 2.\end{cases}$	7.12 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le \pi/2,\\ 0, & \pi/2\prec x\prec \pi,\\ 2, & x\ge \pi.\end{cases}$
7.13 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\le 0,\\ x^2, & 0\prec x\prec 2,\\ 2x, & x\ge 2.\end{cases}$	7.14 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\prec 0,\\ x^2-1, & 0\le x\prec 1,\\ -x, & x\ge 1.\end{cases}$	7.15 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\prec 0,\\ x^2+1, & 0\le x\prec 2,\\ 1+x, & x\ge 2.\end{cases}$
7.16 $f(x)=\begin{cases}x+3, & x\le 0,\\ 1, & 0\prec x\le 2,\\ x^2-2, & x\succ 2.\end{cases}$	7.17 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\prec 0,\\ \sin x, & 0\le x\prec \pi,\\ 3, & x\ge \pi.\end{cases}$	7.18 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\prec -1,\\ x^2+1, & -1\le x\le 2,\\ 2x, & x\succ 2.\end{cases}$

7.19 $f(x)=\begin{cases}1, & x\le 0,\\ 2^x, & 0\prec x\le 2,\\ x+3, & x\succ 2.\end{cases}$	7.20 $f(x)=\begin{cases}-x+2, & x\le -2,\\ x^3, & -2\prec x\le 1,\\ 2, & x\succ 1.\end{cases}$	7.21 $f(x)=\begin{cases}3x+4, & x\le -1,\\ x^2-2, & -1\prec x\prec 2,\\ x, & x\ge 2.\end{cases}$
7.22 $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 1,\\ (x-2)^2, & 1\prec x\prec 3,\\ -x+6, & x\ge 3.\end{cases}$	7.23 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\prec 1,\\ x^2+2, & 1\le x\le 2,\\ -2x, & x\succ 2.\end{cases}$	7.24 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\prec -1,\\ x-1, & -1\le x\le 3,\\ -x+5, & x\succ 3.\end{cases}$
7.25 $f(x)=\begin{cases}x, & x\le -2,\\ -x+1, & -2\prec x\le 1,\\ x^2-1, & x\succ 1.\end{cases}$	7.26 $f(x)=\begin{cases}x+3, & x\le 0,\\ -x^2+4, & 0\prec x\prec 2,\\ x-2, & x\ge 2.\end{cases}$	7.27 $f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ x^2-1, & -1\prec x\le 2,\\ 2x, & x\succ 2.\end{cases}$
7.28 $f(x)=\begin{cases}-1, & x\prec 0,\\ \cos x, & 0\le x\le \pi,\\ 1-x, & x\succ \pi.\end{cases}$	7.29 $f(x)=\begin{cases}2, & x\prec -1,\\ 1-x, & -1\le x\le 1,\\ \ln x, & x\succ 1.\end{cases}$	7.30 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ x^3, & 0\prec x\le 2,\\ x+4, & x\succ 2.\end{cases}$

Методические указания к выполнению заданий и пример решения типового варианта

Задание 1. Найти предел: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$.

Решение:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+2)(5x+3)}{(x+2)(3x-4)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x+3}{3x-4}=\frac{7}{10}=0{,}7.$$

Задание 2. Найти предел: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}$.

Решение:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5\left(2+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^4}\right)}{x^2\left(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(2+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^4}\right)}{3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}=$$

$$=\left|\frac{-\infty}{3}\right|=-\infty.$$

Задание 3. Найти предел: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{21+x}-5\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}{\left(x^3-64\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{21+x-25}{\left(x^3-64\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\left(x-4\right)\left(x^2+4x+16\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\left(x^2+4x+16\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\frac{1}{480}.$$

Задание 4. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg9x}{8x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3x}\right)^{5x}$.

Решение:

а) для раскрытия неопределенности используется свойство первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg9x}{8x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 9x}{\cos 9x}}{8x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{8x}\cdot\frac{1}{\cos 9x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{9x}\cdot\frac{9}{8\cos 9x}=$$

$$=1\cdot\frac{9}{8}=\frac{9}{8};$$

б) для раскрытия неопределенности $\left|1^{\infty}\right|$ используется свойство второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{5x}=\left|1^{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x}{2x-3}-1\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-2x+3}{2x-3}\right)^{5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{3}{2x-3}\cdot 5x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3}{2x-3}\cdot 5x}=e^{\frac{15}{2}}.$$

Задание 5. Исследовать функции на непрерывность:

а) $f(x)=9^{\frac{5}{8-x}}$; б) $f(x)=\dfrac{4}{5+3x}$.

Решение:

а) функция $f(x)=9^{\frac{5}{8-x}}$ определена и непрерывна в интервалах $x\in(-\infty;8)\cup(8;+\infty)$. Следовательно, разрыв возможен в точке $x_0=8$. Находим односторонние пределы функции в этой точке:

$$f(8-0)=\lim_{x\to 8-0}9^{\frac{5}{8-x}}=9^{\frac{5}{8-(8-0)}}=9^{\frac{5}{+0}}=9^{+\infty}=+\infty;$$

$$f(8+0)=\lim_{x\to 8+0}9^{\frac{5}{8-x}}=9^{\frac{5}{8-(8+0)}}=9^{\frac{5}{-0}}=9^{-\infty}=\frac{1}{9^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0,$$

т.е. в точке $x_0 = 8$ функция терпит бесконечный разрыв. Следовательно, $x_0 = 8$ – точка разрыва второго рода;

б) функция $f(x) = \frac{4}{5+3x}$ определена и непрерывна в интервалах $x \in (-\infty; -\frac{5}{3}) \cup \left(-\frac{5}{3}; +\infty\right)$. Следовательно, разрыв возможен в точке $x_0 = -\frac{5}{3}$. Находим односторонние пределы функции в этой точке:

$$f\left(-\frac{5}{3}-0\right) = \lim_{x \to -\frac{5}{3}-0} \frac{4}{5+3x} = \frac{4}{5+3\cdot\left(-\frac{5}{3}-0\right)} = \frac{4}{-0} = -\infty;$$

$$f\left(-\frac{5}{3}+0\right) = \lim_{x \to -\frac{5}{3}+0} \frac{4}{5+3x} = \frac{4}{5+3\cdot\left(-\frac{5}{3}+0\right)} = \frac{4}{+0} = +\infty,$$

т.е. в точке $x_0 = -\frac{5}{3}$ функция терпит бесконечный разрыв. Следовательно, $x_0 = -\frac{5}{3}$ – точка разрыва второго рода.

Расчетно-графическая работа №2 курса «Математика 1»

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Цель работы: изучить понятия свойства функции, непрерывной на отрезке (ограниченность, существование наибольшего, наименьшего значений), дифференцирование сложной функции и функции, заданной параметрически, производные высших порядков и научить применять их в решении прикладных задач.

Теоретические вопросы.

1.Производная функции.

2.Дифференцирование функции заданной параметрически.

3.Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя.

4.Признаки монотонности функции. Экстремумы функции.

5.Выпуклость, вогнутость графика функции. Точки перегиба.

6.Асимптоты графика функции.

7.Исследование функции с помощью производной. Построение графика функции.

Задание 1. Найти производные функций.

1.1 а) $f(x)=tg\left(10x^2+3x-4\right)$, б) $g(x)=\left(e^{\cos x}+6\right)^3$	1.2 а) $f(x)=\cos\left(5x^2-7\right)$, б) $g(x)=\dfrac{2x^2}{\cos^2 x}$	1.3 а) $f(x)=e^{9x+x^2}$, б) $g(x)=\dfrac{8x}{tg^2 4x}$
1.4 а) $f(x)=\left(3x+11x^3\right)^8$, б) $g(x)=\dfrac{\sin^4 x}{7+2\cos^2 x}$	1.5 а) $f(x)=\sqrt[4]{5x^6+12x^3}$, б) $g(x)=6tg^3\left(x^3+8\right)$	1.6 а) $f(x)=arctg\left(x^7+4x\right)$, б) $g(x)=5tg^3x+\lg\cos 2x$
1.7 а) $f(x)=tg\left(4x^2+x+5\right)$, б) $g(x)=\left(e^{\sin 2x}+6\right)^5$	1.8 а) $f(x)=\sin\left(10x^2-7x+5\right)$, б) $g(x)=\dfrac{8x^3}{\cos^4 9x}$	1.9 а) $f(x)=e^{4x-x^3}$, б) $g(x)=\dfrac{tg^2 6x}{2x-7}$
1.10 а) $f(x)=\left(2x^3+8x\right)^{12}$, б) $g(x)=\dfrac{7x^8}{arctg^2 x}$	1.11 а) $f(x)=\sqrt[5]{2x^8-5x^3}$, б) $g(x)=5ctg^3\left(6x^2+6\right)$	1.12 а) $f(x)=arcctg\left(5x^5+9x\right)$, б) $g(x)=7tg^3x-\lg\sin 4x$

1.13 а) $f(x)=tg\left(6x^2+7x-7\right)$, б) $g(x)=\left(6^{\cos 4x}+3\right)^5$	1.14 а) $f(x)=\cos\left(7x^4-6x^2+6\right)$, б) $g(x)=\dfrac{9x^4}{\cos^2 x}$	1.15 а) $f(x)=8^{x+5x^2}$, б) $g(x)=\dfrac{1}{2}\sin^2 7x+\ln\cos 7x$
1.16 а) $f(x)=\left(2x^5-9x^4\right)^9$, б) $g(x)=\dfrac{10x^4}{arcctg^4 5x}$	1.17 а) $f(x)=\sqrt[5]{x^6-7x^4-2x^2}$ б) $g(x)=\dfrac{(11-4x)^6}{\arcsin 6x}$	1.18 а) $f(x)=arctg\left(2x^4+7x\right)$, б) $g(x)=\dfrac{1}{2}\cos^2 x+\ln\sin x$
1.19 а) $f(x)=\sin\left(9x^3+5x^2+5\right)$, б) $g(x)=\left(e^{tg2x}+8\right)^5$	1.20 а) $f(x)=ctg\left(2x^2+6x\right)$, б) $g(x)=\dfrac{1}{7}tg^7 3x^2$	1.21 а) $f(x)=2^{5x^4+2}$, б) $g(x)=\dfrac{(8+5x)^5}{tg5x}$
1.22 а) $f(x)=\left(4x+6x^6\right)^9$, б) $g(x)=\dfrac{\cos^5 x}{1+\sin x}$	1.23 а) $f(x)=\sqrt[7]{x-8x^3}$ б) $g(x)=7\cos^3\left(3x^2-3\right)$	1.24 а) $f(x)=\arcsin\left(x^5-7x\right)$, б) $g(x)=\dfrac{1}{5}ctg^5 x+\ln\sin x$
1.25 а) $f(x)=\ln\left(3x^4+x^3\right)$, б) $g(x)=\left(e^{\sqrt{3x}}-7\right)^{11}$	1.26 а) $f(x)=\cos\left(\sqrt[4]{x}-2\right)$, б) $g(x)=\dfrac{\left(2x+3x^3\right)^3}{\cos 9x}$	1.27 а) $f(x)=e^{3x-4x^3}$, б) $g(x)=\sqrt[6]{(\sin 4x+4x)^4}$
1.28 а) $f(x)=\sqrt{9x+\cos 9x}$, б) $g(x)=\dfrac{3x^2}{\ln\left(4x^3-8\right)}$	1.29 а) $f(x)=\sqrt[3]{\ln 3x}$, б) $g(x)=5tg(\arcsin 10)$	1.30 а) $f(x)=arctg(\sin 2x+2)$, б) $g(x)=4x-\lg(\cos 4x+4)$

Задание 2. Найти а) первую производную функции, заданной параметрическими уравнениями; б) найти вторую производную функции, заданной параметрическими уравнениями

2.1 $\begin{cases} x=(5t+3)\cos 5t, \\ y=5t^3. \end{cases}$	2.2 $\begin{cases} x=8\cos t, \\ y=4\sin^2 t. \end{cases}$	2.3 $\begin{cases} x=6\cos^3 t, \\ y=9\sin t. \end{cases}$

2.4 $\begin{cases} x = 1/(t-4), \\ y = t^2/(t-4). \end{cases}$	2.5 $\begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = 3te^{9t}. \end{cases}$	2.6 $\begin{cases} x = \sqrt{7t}, \\ y = \sqrt[5]{7t}. \end{cases}$
2.7 $\begin{cases} x = 3t/(t^3+1), \\ y = t^2/(t^2+1). \end{cases}$	2.8 $\begin{cases} x = 4\sqrt{t^2-1}, \\ y = 6(t+1)/\sqrt{t^2-1}. \end{cases}$	2.9 $\begin{cases} x = 8t + 4t^2, \\ y = 10\sqrt{t^3} - 6t^2. \end{cases}$
2.10 $\begin{cases} x = (\ln 6t)/t, \\ y = \ln 6t. \end{cases}$	2.11 $\begin{cases} x = e^{3t}\cos 2t, \\ y = e^{3t}\sin 2t. \end{cases}$	2.12 $\begin{cases} x = \frac{1}{4}t^4, \\ y = t\ln 2t. \end{cases}$
2.13 $\begin{cases} x = 7\cos^2 t, \\ y = 4\sin t. \end{cases}$	2.14 $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 8\sin^2 t. \end{cases}$	2.15 $\begin{cases} x = 5arctgt, \\ y = 15\ln(1+t^2). \end{cases}$
2.16 $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$	2.17 $\begin{cases} x = 4(t-\sin t), \\ y = 4(1-\cos t). \end{cases}$	2.18 $\begin{cases} x = 8(\sin t - \cos t), \\ y = 4(\cos t + \sin t). \end{cases}$
2.19 $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$	2.20 $\begin{cases} x = e^{3t}, \\ y = \sqrt{t-1}. \end{cases}$	2.21 $\begin{cases} x = (\ln t)/t, \\ y = t^2 \ln t. \end{cases}$
2.22 $\begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$	2.23 $\begin{cases} x = 1/(t+1), \\ y = t^2/(t+1). \end{cases}$	2.24 $\begin{cases} x = 5\sin 3t, \\ y = 3\cos^3 t. \end{cases}$
2.25 $\begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = e^{8t}/t. \end{cases}$	2.26 $\begin{cases} x = \sqrt[3]{(t-1)^2}, \\ y = \sqrt{t-1}. \end{cases}$	2.27 $\begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = t + \ln t. \end{cases}$
2.28 $\begin{cases} x = te^t, \\ y = t/e^t. \end{cases}$	2.29. $\begin{cases} x = 6t^2 - 4, \\ y = 3\sqrt{t^5} \end{cases}$	2.30 $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln t. \end{cases}$

Задание 3. Найти значение второй производной функции $y = f(x)$ в заданной точке x_0.

3.1 $y = \sin^2 x,$ $x_0 = \pi/4$	3.2 $y = arctgx,$ $x_0 = 1$	3.3 $y = \ln(2+x^2),$ $x_0 = 0$
3.4 $y = e^x \cos x,$ $x_0 = 0$	3.5 $y = e^x \sin 2x,$ $x_0 = 0$	3.6 $y = e^{-x}\cos x,$ $x_0 = 0$
3.7 $y = \sin 2x,$ $x_0 = \pi$	3.8 $y = (2x+1)^5,$ $x_0 = 1$	3.9 $y = \ln(1+2x),$ $x_0 = 2$

3.10 $y=\frac{1}{2}e^x x^2,$ $x_0=0$	3.11 $y=\arcsin x,$ $x_0=0$	3.12 $y=(5x-4)^5,$ $x_0=2$
3.13 $y=x\sin x,$ $x_0=\frac{\pi}{2}$	3.14 $y=x^2\ln x,$ $x_0=\frac{1}{3}$	3.15 $y=x\sin 2x,$ $x_0=-\frac{\pi}{4}$
3.16 $y=x\cos 2x,$ $x_0=\frac{\pi}{12}$	3.17 $y=x^4\ln x,$ $x_0=1$	3.18 $y=x+arctgx,$ $x_0=1$
3.19 $y=\cos^2 x,$ $x_0=\frac{\pi}{4}$	3.20 $y=\ln(x^2-4),$ $x_0=3$	3.21 $y=x^2\cos x,$ $x_0=\frac{\pi}{2}$
3.22 $y=x\arccos x,$ $x_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$	3.23 $y=(x+1)\ln(x+1),$ $x_0=-\frac{1}{2}$	3.24 $y=(7x-4)^6,$ $x_0=1$
3.25 $y=2^{x^2},$ $x_0=1$	3.26 $y=(4x-3)^5,$ $x_0=1$	3.27 $y=x\arcsin x,$ $x_0=2$
3.28 $y=\ln^3 x,$ $x_0=1$	3.29 $y=x\sin 2x,$ $x_0=\frac{\pi}{4}$	3.30 $y=\sin(x^3+\pi),$ $x_0=\sqrt[3]{\pi}$

Задание 4. Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя.

4.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$	4.2 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2^{\ln x}-x}{x-1}$	4.3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}$
4.4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2-\sin x^2}$	4.5 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x}{2\sin x+x}$	4.6 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$
4.7 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$	4.8 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{x^3}$	4.9 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$
4.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$	4.11 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}}{1-\cos 5x}$	4.12 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\pi/x}{ctg(\pi x/2)}$

4.13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin 5x)}$	4.14 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{tgx}{tg5x}$	4.15 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{5x}}{\sin x}$
4.16 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctgx}{x^3}$	4.17 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$	4.18 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$
4.19 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^3-1}$	4.20 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{ctgx}$	4.21 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{1-\cos 6x}$
4.22 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{x^3-64}$	4.23 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 4x}$	4.24 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{2x}}{tg4x}$
4.25 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-4^x}{x\sqrt{1-x^2}}$	4.26 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$	4.27 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(7+x)}{\sqrt[7]{x-3}}$
4.28 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{5-5e^{-3x}}$	4.29 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{9x}-1}{\cos 5x}$	4.30 $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$

Задание 5. Для иследования функции $y=f(x)$ определить:

а) область определения и точки разрыва;

б) асимптоты графика функции;

в) точки пересечения графика функции с осями координат;

г) четность, нечетность;

д) интервалы монотонности, экстремумы;

е) интервалы вогнутости, выпуклости и точки перегиба;

ж) построить график функции.

5.1 $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$	5.2 $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$	5.3 $y=\dfrac{2}{x^2+2x}$	5.4 $y=\dfrac{4x^2}{3+x^2}$	5.5 $y=\dfrac{12x}{x^2+9}$
5.6 $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$	5.7 $y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$	5.8 $y=\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$	5.9 $y=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$	5.10 $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$
5.11 $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$	5.12 $y=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2$	5.13 $y=\dfrac{12-3x^2}{12+x^2}$	5.14 $y=\dfrac{9+6x-3x^2}{x^2-2x+13}$	5.15 $y=\dfrac{-8x}{x^2+4}$
5.16 $y=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$	5.17 $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$	5.18 $y=\dfrac{4x}{(x+1)^2}$	5.19 $y=\dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$	5.20 $y=\dfrac{1-2x^3}{x^2}$
5.21	5.22	5.23	5.24	5.25

$y=\dfrac{4}{x^2+2x-3}$	$y=\dfrac{4}{3+2x-x^2}$	$y=\dfrac{x^2+2x-7}{x^2+2x-3}$	$y=\dfrac{1}{x^4-1}$	$y=-\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2$
5.26 $y=\dfrac{x^3-32}{x^2}$	5.27 $y=\dfrac{4(x+1)^2}{x^2+2x+4}$	5.28 $y=\dfrac{3x-2}{x^3}$	5.29 $y=\dfrac{x^2-6x+9}{(x-1)^2}$	5.30 $y=\dfrac{x^3-27x+54}{x^3}$

Методические указания к выполнению заданий и пример решения типового варианта

Задание 1. Найти производные функций:

а) $y=\ln\left(4x^2-5x+2^{-3x}\right)$, б) $y=\dfrac{ctg^5 3x}{x+2}$.

Решение:

а) по формуле производной сложной функции $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$ находим:

$$y'=\frac{\left(4x^2-5x+2^{-3x}\right)'}{4x^2-5x+2^{-3x}}=\frac{8x-5+2^{-3x}\ln 2\cdot(-3)}{4x^2-5x+2^{-3x}}=$$

$$=\frac{8x-5-3\cdot 2^{-3x}\ln 2}{4x^2-5x+2^{-3x}};$$

б) отдельно расписывается производная сложной функции числителя:

$$\left(ctg^5 3x\right)'=\left|\begin{matrix}замена:\\ u=ctg3x;\\ t=3x\end{matrix}\right|=\left(u^5\right)_u'\cdot(ctgt)_t'\cdot(3x)'=$$

$$=5u^4\cdot\frac{-1}{\sin^2 t}\cdot 3=-5ctg^4 3x\frac{3}{\sin^2 3x};$$

$$y'=\left(\frac{ctg^5 3x}{x+2}\right)'=\frac{\left(ctg^5 3x\right)'\cdot(x+2)-(x+2)'\cdot ctg^5 3x}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{-5ctg^4 3x\cdot\dfrac{3}{\sin^2 3x}\cdot(x+2)-ctg^5 3x}{(x+2)^2}=\frac{\dfrac{-15(x+2)ctg^4 3x}{\sin^2 3x}-ctg^5 3x}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{-15(x+2)ctg^4 3x-\sin^2 3x\cdot ctg^5 3x}{(x+2)^2\sin^2 3x}.$$

Задание 2. Найти а) первую производную функции, заданной параметрическими уравнениями; б) найти вторую производную функции, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3t^4 - t^2, \\ y = t^3 - 5. \end{cases}$$

Решение:

а) Первую производную функции, заданной параметрическими уравнениями, находим по формуле: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$:

$$\begin{cases} x'_t = 12t^3 - 2t, \\ y'_t = 3t^2, \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{3t^2}{12t^3 - 2t} = \frac{3t^2}{2t\left(6t^2 - 1\right)} = \frac{3t}{2\left(6t^2 - 1\right)}.$$

Задание 3. Найти значение второй производной функции $y = \ln^3 x$ в точке $x_0 = 1.$

Решение:

$$y' = \left(\ln^3 x\right)' = 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{3\ln^2 x}{x};$$

$$y'' = \left(\frac{3\ln^2 x}{x}\right)' = 3 \cdot \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln^2 x}{x^2} = 3 \cdot \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{3\ln x\left(2 - \ln x\right)}{x^2};$$

$$y''(1) = \frac{3\ln 1(2 - \ln 1)}{1^2} = 0.$$

Задание 4. Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 7x}{x \sin 7x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

Решение:

а) правило Лопиталя применяется для неопределенностей вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{x\sin 7x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 7x)'}{(x\sin 7x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{7\sin 7x}{\sin 7x+7x\cos 7x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(7\sin 7x)'}{(\sin 7x+7x\cos 7x)'}==\lim_{x\to 0}\frac{49\cos 7x}{7\cos 7x+7(\cos 7x-x\sin 7x)}=\frac{49}{14}=\frac{7}{2};$$

б) при значении $x=0$ получается неопределенность вида $\infty-\infty$, поэтому дроби приводятся к общему знаменателю и далее используется эквивалентность бесконечно малых величин:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=|\infty-\infty|=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\cdot\sin^2 x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\cdot x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2-\sin^2 x\right)'}{\left(x^4\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{6x^2}=\frac{1}{3}.$$

Задание 5. Для функции $y=\dfrac{x^2+1}{3x}$ определить:

а) область определения и точки разрыва;
б) асимптоты графика функции;
в) точки пересечения графика функции с осями координат;
г) четность, нечетность;
д) интервалы монотонности, экстремумы;
е) интервалы вогнутости, выпуклости и точки перегиба;
ж) построить график функции.

Решение:

а) $x=0$ - точка разрыва, в области своего определения функция непрерывна: $x\neq 0\Leftrightarrow D(y):(-\infty;\ 0)\cup(0;+\infty)$. Найдем односторонние пределы в точке разрыва:

$$\lim_{x\to -0}\frac{x^2+1}{3x}=-\infty,\ \lim_{x\to +0}\frac{x^2+1}{3x}=+\infty;$$

б) прямая $x=x_0$ является вертикальной асимптотой, если $f(x_0\pm 0)=\pm\infty\Rightarrow x=0$ – вертикальная асимптота.

Прямая $y=kx+b$ – наклонная ассимптота, где

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{3x^2}=\frac{1}{3},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{3x}-\frac{x}{3}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x}=0.$$

Таким образом, $y=\frac{1}{3}x$ – наклонная асимптота;

в) так как $x=0$ - точка разрыва, то график функции не пересекается с осью Ox .Так как $y=\frac{x^2+1}{3x}\neq 0$, то график функции не пересекается с осью Oy;

г) $y(-x)=\frac{(-x)^2+1}{3(-x)}=-\frac{x^2+1}{3x}=-y(x)$, т.е. функция нечетная, значит график симметричен относительно начала координат. $y\succ 0$ при $x\succ 0$, поэтому график расположен в первой и третьей четвертях. Функция непериодическая. Так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{3x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+1\right)'}{(3x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3}=+\infty,$$

то функция неограниченно возрастает:

д) $y'=\left(\frac{x^2+1}{3x}\right)'=\frac{1}{3}\cdot\frac{2x^2-x^2-1}{x^2}=\frac{x^2-1}{3x^2}$,

$y'=0$ при $x_1=-1,\ x_2=1$ – стационарные точки. В области определения функции y' существует. Исследуем изменения знака производной функции в каждом интервале:

если $0<x<1$, то $y'<0$ - функция убывает,

если $1<x<+\infty$, то $y'>0$ - функция возрастает,

при $x=1$ имеем локальный минимум: $y(1)=\frac{1+1}{3}=\frac{2}{3}$,

если $-\infty<x<-1$, то $y'>0$ - функция возрастает,

если $-1<x<0$, то $y'<0$ - функция убывает,

при $x=-1$ имеем локальный максимум: $y(-1)=-\frac{2}{3}$;

е) $y''=\left(\frac{x^2-1}{3x^2}\right)'=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{2}{3x^3},\quad y''\neq 0$.

Вторая производная существует в области определения:

при $x\in(0;+\infty)\quad y''>0$ - график выпуклый вниз;

при $x\in(-\infty;0)\quad y''<0$ - график выпуклый вверх; точек перегиба нет;

ж) график функции показан на рисунке 1.

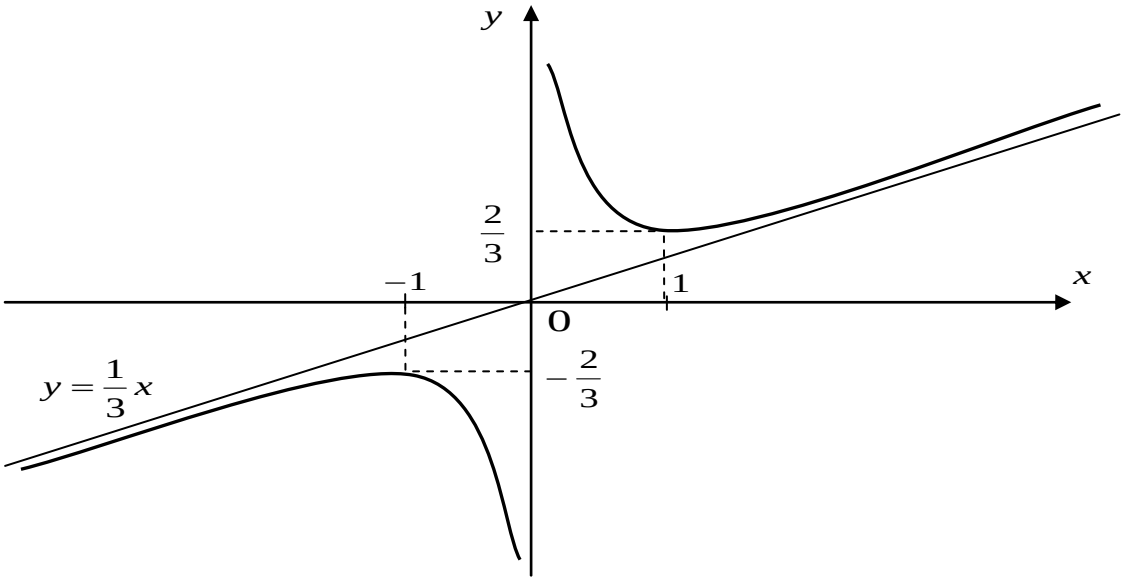

Рисунок 1

Расчетно-графическая работа №3 курса «Математика 1»

Интегральное исчисление функции одной переменной

Цель работы: изучить основные свойства и методы интегрирования неопределенного и определенного интегралов, научиться применять определенные интегралы при решении геометрических и физических задач.

Теоретические вопросы.

1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.
2. Таблица основных формул интегрирования.
3. Непосредственное интегрирование. Интегрирование по частям и с помощью замены переменной.
4. Интегрирование рациональных функций путем разложения на простейшие дроби.
5. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.
6. Интегрирование некоторых иррациональных выражений.
7. Основные свойства определенных интегралов. Формула Ньютона – Лейбница.
8. Вычисление определенного интеграла методами интегрирования по частям и заменой переменной.
9. Несобственные интегралы с бесконечными пределами. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Основные свойства несобственных интегралов.
10. Приложения определенных интегралов к вычислению площадей плоских фигур, объемов тел.

Расчетные задания

Задание 1. Найти интегралы.

1.1	$\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$	1.16	$\int x^2\cdot\sqrt[4]{b\cdot x}dx$
1.2	$\int\frac{\left(\sqrt{x^3}-2x^2+3x^4\right)}{x}dx$	1.17	$\int\frac{x^3-3\sqrt{x^5}-\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}}dx$
1.3	$\int\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}}+\frac{a}{x^4}-x\right)dx$	1.18	$\int\left(\sqrt{\frac{x}{a}-\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$
1.4	$\int\left(5x^3-\frac{\sin 5}{\sqrt[3]{x^5}}\right)dx$	1.19	$\int\left(x\cdot\sin a-\frac{4\sqrt{x}}{x^2}\right)dx$
1.5	$\int\left(a^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\right)^3 dx$	1.20	$\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3 dx$
1.6	$\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{x+2}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$	1.21	$\int\frac{x^4-2\sqrt{x}+x\sqrt{x}}{x^2}dx$
1.7	$\int\frac{\left(\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}\right)^2}{x}dx$	1.22	$\int\frac{\left(1-b\sqrt{x}\right)^2}{x^3}dx$
1.8	$\int x\cdot\sqrt[3]{a\cdot x}dx$	1.23	$\int\frac{\left(2-\sqrt{x^3}\right)^3}{x^2}dx$
1.9	$\int\frac{\sqrt{x}-3x\cdot\sqrt[3]{x}+x^5}{x^2}dx$	1.24	$\int\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}{\sqrt[4]{x}}dx$
1.10	$\int\frac{1-5x^3}{x^4}dx$	1.25	$\int\frac{(2x+5)^3}{x^2}dx$
1.11	$\int\frac{\left(x-\frac{a}{x}\right)^2}{\sqrt{x}}dx$	1.26	$\int\frac{x^3-2\sqrt{x}+x\sqrt[3]{x}}{x}dx$
1.12	$\int\frac{(2x+a)^3}{x^2}dx$	1.27	$\int\frac{\left(2-a\sqrt{x^3}\right)^2}{x^2}dx$
1.13	$\int\frac{(x-1)^3}{x\cdot\sqrt{x}}dx$	1.28	$\int\frac{\left(1-b\sqrt[3]{x}\right)}{x^2}dx$

1.14	$\int \frac{\left(\sqrt{b\cdot x}-\frac{x}{b}\right)^2}{x}dx$	1.29	$\int \frac{(2x+b)^3}{x^3}dx$
1.15	$\int \frac{x^4-2x-\sqrt{x}}{x^2}dx$	1.30	$\int \frac{\left(b\cdot x+\frac{a}{x}\right)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$

Задание 2. Найти интегралы.

2.1	$\int \pi^x \cdot e^{x+1}dx$	2.16	$\int \frac{2^x+3^x}{2^{x+1}}dx$
2.2	$\int \left(e^x+e^{2x}\right)^2 dx$	2.17	$\int \left(5^{x+1}+5^{-x}\right)^2 dx$
2.3	$\int \left(e^x-2e^{-x}\right)dx$	2.18	$\int \left(5^x-5^{-x}\right)^2 dx$
2.4	$\int 3^{-x}\left(7+2^{x+1}\right)dx$	2.19	$\int 5^x\cdot 3^{1-x}dx$
2.5	$\int \left(4e^x\cdot 5^x-\pi^{2x}\right)dx$	2.20	$\int e^x\cdot\sqrt{2^x}dx$
2.6	$\int e^{-x}\left(2^x-3e^{x+3}\right)dx$	2.21	$\int \frac{1}{e^x}\left(e^{x+1}+2e^{-x}\right)dx$
2.7	$\int 7^{-x}\left(\sqrt{7^{2x}}+5^x\right)dx$	2.22	$\int \left(e^x+e^{2x}\right)^3 dx$
2.8	$\int 5^{-x}\left(4-3^{x+1}\right)dx$	2.23	$\int \frac{3^{-x}+2^{x+3}}{2^{x+1}}dx$
2.9	$\int 3^x\left(5-7^{-x}\right)dx$	2.24	$\int 2^{-x}\left(3-5^{x+2}\right)dx$
2.10	$\int 2^x\cdot 5^x dx$	2.25	$\int 3^x\left(7+2^{-x}\right)dx$
2.11	$\int e^x\left(2^{x+1}-5e^{3-x}\right)dx$	2.26	$\int \left(e^x+2^{-x}\right)^2 dx$
2.12	$\int \left(3^{\frac{x}{2}}-3^{\frac{-x}{2}}\right)^2 dx$	2.27	$\int \left(e^x-2\right)^2 dx$
2.13	$\int 3^{-x}\left(4-5^{x+2}\right)dx$	2.28	$\int \left(e^{-x}-e^x\right)^3 dx$
2.14	$\int 4^x\left(7+2^{-x}\right)dx$	2.29	$\int \frac{1}{3^x}\left(e^{x+1}+2\cdot e^{-x}\right)dx$
2.15	$\int \frac{3^{-x}+2^{x+3}}{2^{x+1}}dx$	2.30	$\int \pi^{2x}\left(\frac{1}{2^x}-3^{x+1}\right)dx$

Задание 3. Найти интегралы.

3.1	$\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}dx$	3.16	$\int \frac{\cos^2 x+5\cos x}{\cos x}dx$

3.2	$\int\left(5\sin x-\frac{4}{\cos^2 x}\right)dx$	3.17	$\int(3\cos x-4\sin x)dx$
3.3	$\int\frac{2+\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$	3.18	$\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x}dx$
3.4	$\int\frac{1-3\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$	3.19	$\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx$
3.5	$\int\frac{1+5\cos^3 x}{\cos 2x+\sin^2 x}dx$	3.20	$\int\frac{\sin 2x}{\sin^2 x}dx$
3.6	$\int\frac{\cos 2x-5\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$	3.21	$\int\frac{5\sin 2x}{\cos^{23} x}dx$
3.7	$\int\frac{5\sin 2x-5tgx}{\sin x\cdot\cos x}dx$	3.22	$\int\frac{\cos 2x-\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$
3.8	$\int\frac{\sin^2 x-3\sin x-\frac{5}{\sin x}}{\sin x}dx$	3.23	$\int\frac{\cos^2 x+5\cos x}{\cos^2 x}dx$
3.9	$\int\left(3\sin x+\frac{2}{\cos^2 x}\right)dx$	3.24	$\int\frac{\cos^2 x-3\cos x}{\cos x}dx$
3.10	$\int\left(5\cos x-\frac{7}{\sin^2 x}\right)dx$	3.25	$\int\frac{\cos 2x-\cos^2 x}{\sin^2 x}dx$
3.11	$\int\frac{tgx}{\sin 2x}dx$	3.26	$\int\left(1+tg^2 x\right)dx$
3.12	$\int\frac{ctgx}{\sin x\cdot\cos x}dx$	3.27	$\int\frac{6\sin 2x}{\cos^2 x}dx$
3.13	$\int\left(\frac{\sin x}{2}+\frac{7}{\cos^2 x}\right)dx$	3.28	$\int ctg^2 xdx$
3.14	$\int\frac{\cos 2x-\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$	3.29	$\int\frac{\cos\ 2x-\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$
3.15	$\int\frac{2ctgx}{\sin 2x}dx$	3.30	$\int\frac{ctgx}{\sin 2x}dx$

Задание 4. Найти интегралы.

4.1	$\int\left(2\cos 3x-\frac{7}{\sin^2 x}\right)dx$	4.16	$\int\frac{\sin^2 4x-5\sin 4x}{\sin 4x}dx$
4.2	$\int\left(5\sin 4x+\frac{4}{\cos^2 x}\right)dx$	4.17	$\int\frac{3ctgx-4}{\sin 2x}dx$
4.3	$\int\left(2\cos\frac{x}{2}+tgx\right)dx$	4.18	$\int\frac{5tgx-3}{8\sin 2x}dx$

4.4	$\int \frac{ctgx+1}{\sin 2x}dx$	4.19	$\int\left(5\sin\frac{x}{7}+\frac{4}{\cos^2 3x}\right)dx$
4.5	$\int \frac{tgx-2}{\sin 2x}dx$	4.20	$\int(5\sin 3x-4\cos 7x)dx$
4.6	$\int\left(3\sin\frac{x}{4}+\frac{4}{\cos^2 5x}\right)dx$	4.21	$\int \frac{5\sin 2x}{\cos^2 x}dx$
4.7	$\int(3\cos 5x-4\sin 7x)dx$	4.22	$\int \frac{\cos^2 5x+2\cos 5x}{\cos 5x}dx$
4.8	$\int \frac{3\sin 2x}{\cos^2 x}dx$	4.23	$\int \frac{5-\sin^3 8x}{\sin^2 8x}dx$
4.9	$\int \frac{\cos^2 3x-4\cos 3x}{\cos 3x}dx$	4.24	$\int\left(7\cos\frac{x}{3}-\frac{3}{\sin^2 2x}\right)dx$
4.10	$\int \frac{3+\cos^3 3x}{\cos^2 3x}dx$	4.25	$\int\left(\frac{\sin 3x}{2}-\frac{8}{\cos^2 5x}\right)dx$
4.11	$\int\left(3\cos 7x-\frac{4}{\sin^2 3x}\right)dx.$	4.26	$\int\left(5\cos\frac{7}{3}x-\frac{4}{\sin^2 5x}\right)dx$
4.12	$\int\left(\frac{\sin 6x}{2}+\frac{7}{\cos^2 4x}\right)dx$	4.27	$\int\left(3tg\frac{4}{3}x-\frac{3}{\cos^2 7x}\right)dx$
4.13	$\int \frac{1-2\sin^3 4x}{\sin^2 4x}dx$	4.28	$\int \frac{\cos^2 7x-4\sin 7x}{\cos 7x}dx$
4.14	$\int\left(\frac{3\cos 4x}{7}-\frac{7}{\sin^2 3x}\right)dx$	4.29	$\int \frac{3tgx-4}{5\sin 2x}dx$
4.15	$\int\left(5\sin\frac{x}{3}+2\cos 7x\right)dx$	4.30	$\int \frac{3\sin 6x}{\cos^2 3x}dx$

Задание 5. Найти интегралы.

5.1	$\int\left(\frac{5}{x^2-3}-\frac{7}{x^2+3}\right)dx$	5.16	$\int \frac{dx}{4x^2-1}$
5.2	$\int \frac{dx}{5-3x^2}$	5.17	$\int \frac{dx}{4x^2+1}$
5.3	$\int \frac{dx}{3x^2-2}$	5.18	$\int\left(\frac{3}{x^2-5}-\frac{2}{x^2+3}\right)dx$
5.4	$\int \frac{2}{2x^2-1}dx$	5.19	$\int\left(\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^2-2}\right)dx$
5.5	$\int \frac{dx}{2x^2-3}$	5.20	$\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^2+2}\right)dx$

5.6	$\int \frac{dx}{3+7x^2}$	5.21	$\int\left(\frac{7}{81-x^2}+\frac{4}{225+x^2}\right)dx$
5.7	$\int \frac{dx}{1-7x^2}$	5.22	$\int \frac{dx}{64x^2-1}$
5.8	$\int \frac{dx}{3x^2+2}$	5.23	$\int \frac{dx}{64x^2+1}$
5.9	$\int\left(\frac{7}{3-x^2}-\frac{4}{5+x^2}\right)dx$	5.24	$\int\left(\frac{72}{9+x^2}+\frac{14}{25-x^2}\right)dx$
5.10	$\int\left(\frac{1}{x^2-4}+\frac{5}{9+x^2}\right)dx$	5.25	$\int \frac{dx}{49x^2+16}$
5.11	$\int \frac{dx}{63+7x^2}$	5.26	$\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^2+4}\right)dx$
5.12	$\int \frac{dx}{16-27x^2}$	5.27	$\int\left(\frac{5}{x^2+36}+\frac{7}{x^2-9}\right)dx$
5.13	$\int \frac{dx}{4x^2+25}$	5.28	$\int \frac{6dx}{36x^2-25}$
5.14	$\int\left(\frac{7}{9-x^2}+\frac{4}{25+x^2}\right)dx$	5.29	$\int \frac{2}{25x^2-1}dx$
5.15	$\int\left(\frac{3}{4-x^2}-\frac{4}{16+x^2}\right)dx$	5.30	$\int \frac{dx}{25x^2-36}$

Задание 6. Найти интегралы.

6.1	$\int(4x+3)\cdot\sin 5xdx$	6.16	$\int x\cdot\sin^2 2xdx$
6.2	$\int(3x-2)\cdot\cos 5xdx$	6.17	$\int\ln(4-2x)dx$
6.3	$\int e^{-3x}\cdot(2-9x)dx$	6.18	$\int 7^{-3x}\cdot(2-5x)dx$
6.4	$\int x\cdot\sin^2 xdx$	6.19	$\int(2x-7)\cdot\sin 3xdx$
6.5	$\int\ln(2x-1)dx$	6.20	$\int(8-3x)\cdot\cos 5xdx$
6.6	$\int 5^{-2x}\cdot(4+3x)dx$	6.21	$\int e^{-4x}\cdot(2+3x)dx$
6.7	$\int(2-4x)\cdot\sin 2xdx$	6.22	$\int x\cdot\cos^2 2xdx$
6.8	$\int(4x+7)\cdot\cos 3xdx$	6.23	$\int\ln(7-2x)dx$
6.9	$\int e^{2x}\cdot(4-7x)dx$	6.24	$\int 4^{-5x}\cdot(1-3x)dx$
6.10	$\int x\cdot\cos^2 xdx$	6.25	$\int(x+2)\cdot\sin 3xdx$
6.11	$\int\ln(3x+1)dx$	6.26	$\int(4x+3)\cdot\cos 6xdx$
6.12	$\int 2^{-3x}\cdot(4x-1)dx$	6.27	$\int e^{7x}\cdot xdx$

6.13	$\int (2-4x)\cdot \sin 2x dx$	6.28	$\int 3x\cdot \sin^2 2x dx$
6.14	$\int (8-3x)\cdot \cos 5x dx$	6.29	$\int \ln(7-5x)dx$
6.15	$\int e^{4x}\cdot(3+7x)dx$	6.30	$\int 4^{-3x}\cdot(5-2x)dx$

Задание 7. Найти интегралы.

7.1	$\int \frac{1-\ln(x-1)}{x-1}dx$	7.16	$\int \frac{(2\cos x+3\sin x)dx}{(2\sin x-3\cos x)^3}$
7.2	$\int \frac{arctgx-x}{1+x^2}dx$	7.17	$\int \frac{\left(\sqrt{\arcsin 2x}+4\right)dx}{\sqrt{1-4x^2}}$
7.3	$\int \frac{(x+1)dx}{x^2+16}$	7.18	$\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-\ln^2 x}}$
7.4	$\int \frac{\arcsin^3 x-8}{\sqrt{1-x^2}}dx$	7.19	$\int \frac{(1-\cos x)dx}{(x-\sin x)^2}$
7.5	$\int x\cdot\left(2^{x^2+1}-4\right)dx$	7.20	$\int \frac{\sqrt[3]{tg2x}+1}{\cos^2 2x}dx$
7.6	$\int \frac{tg(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$	7.21	$\int x\cdot\cos\left(x^2+1\right)dx$
7.7	$\int \frac{(\arccos x)^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$	7.22	$\int \frac{\left(x^3+x\right)dx}{x^4+1}$
7.8	$\int \frac{1-\ln^2 x}{x}dx$	7.23	$\int \frac{(\sin x-\cos x)dx}{(\cos x+\sin x)^5}$
7.9	$\int \frac{\sqrt{arctgx}-3x}{1+x^2}dx$	7.24	$\int tgx\cdot\ln\cos x dx$
7.10	$\int \frac{5x^2dx}{4+x^3}$	7.25	$\int \frac{\arcsin 3x-8}{\sqrt{1-9x^2}}dx$
7.11	$\int \frac{(1-2x)dx}{\sqrt{1+x^2}}$	7.26	$\int \frac{2^{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}dx$
7.12	$\int x^3\left(e^{x^4+2}-2\right)dx$	7.27	$\int \frac{5-\ln^3 x}{x}dx$
7.13	$\int \frac{8x-arctg2x}{1+4x^2}dx$	7.28	$\int \frac{\left(\sqrt[3]{tg(x+1)}+5\right)dx}{\cos^2(x+1)}$
7.14	$\int \frac{1-\sqrt{\ln x}}{x}dx$	7.29	$\int \frac{(1-3x)dx}{1-x^2}$
7.15	$\int \frac{xdx}{4+x^4}$	7.30	$\int \frac{5xdx}{3+2x^2}$

Задание 8. Найти интегралы.

8.1	$\int \frac{(x-3)dx}{x^2+8x+5}$	8.16	$\int \frac{(3-5x)dx}{x^2-2x+5}$
8.2	$\int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$	8.17	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$
8.3	$\int \frac{(5-x)dx}{x^2+2x+3}$	8.18	$\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+8x-3}$
8.4	$\int \frac{(4x+1)dx}{\sqrt{x^2-8x+17}}$	8.19	$\int \frac{(3x-5)dx}{\sqrt{x^2+8x+7}}$
8.5	$\int \frac{(5+7x)dx}{2-2x-x^2}$	8.20	$\int \frac{2xdx}{x^2+2x-4}$
8.6	$\int \frac{(3-2x)dx}{\sqrt{6x-8-x^2}}$	8.21	$\int \frac{(3x+7)dx}{\sqrt{2x+4-x^2}}$
8.7	$\int \frac{(7x+4)dx}{x^2-8x-15}$	8.22	$\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{x^2-8x+5}}$
8.8	$\int \frac{(5x-2)dx}{\sqrt{x^2-2x+3}}$	8.23	$\int \frac{(5-4x)dx}{x^2-8x+17}$
8.9	$\int \frac{(2x+7)dx}{x^2-4x+5}$	8.24	$\int \frac{(7-5x)dx}{\sqrt{2x-x^2+2}}$
8.10	$\int \frac{(x-1)dx}{x^2-4x+5}$	8.25	$\int \frac{(2x+5)dx}{x^2+2x+3}$
8.11	$\int \frac{(1-2x)dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$	8.26	$\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$
8.12	$\int \frac{(2+3x)dx}{4x-x^2-6}$	8.27	$\int \frac{(5x+3)dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$
8.13	$\int \frac{(8-3x)dx}{x^2+6x+11}$	8.28	$\int \frac{(8x-7)dx}{\sqrt{x^2+6x+18}}$
8.14	$\int \frac{(x-4)dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$	8.29	$\int \frac{(5x-7)dx}{\sqrt{8x-15-x^2}}$
8.15	$\int \frac{(2x-7)dx}{\sqrt{x^2-6x+11}}$	8.30	$\int \frac{(7x-2)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

Задание 9. Найти интегралы.

9.1	$\int \frac{(5x+1)}{(x+2)(x^2-1)}dx$	9.16	$\int \frac{(7-6x)}{x(x^2+6)}dx$

9.2	$\int \frac{5x}{(x-1)(x^2+2)}dx$	9.17	$\int \frac{(5x-3)}{(x+7)(x^2-9)}dx$
9.3	$\int \frac{(2x-1)}{(x-3)(x^2+1)}dx$	9.18	$\int \frac{(7x+2)}{(x+1)(x^2+5)}dx$
9.4	$\int \frac{(x+4)}{(x+2)(x^2+7)}dx$	9.19	$\int \frac{(x-1)}{(x+9)(x^2+4)}dx$
9.5	$\int \frac{(2-x)}{(x+2)(x^2+4)}dx$	9.20	$\int \frac{dx}{(x+8)(x^2-5)}$
9.6	$\int \frac{(x+2)}{(x+4)(x^2+2)}dx$	9.21	$\int \frac{(2-5x)}{(x+1)(x^2+4)}dx$
9.7	$\int \frac{5}{(x-2)(x^2+7)}dx$	9.22	$\int \frac{(4-5x)}{(x+7)(x^2-3)}dx$
9.8	$\int \frac{(x-1)}{(x+3)(x^2+1)}dx$	9.23	$\int \frac{(4x-7)}{(x+2)(x^2+6)}dx$
9.9	$\int \frac{4x+3}{x(x^2+4)}dx$	9.24	$\int \frac{8}{(x+3)(x^2-4)}dx$
9.10	$\int \frac{2x+1}{(x-6)(x^2+5)}dx$	9.25	$\int \frac{(4x+6)}{(x+1)(x^2+5)}dx$
9.11	$\int \frac{2}{(x+5)(x^2-1)}dx$	9.26	$\int \frac{(3-4x)}{(x+3)(x^2+4)}dx$
9.12	$\int \frac{(4-7x)}{(x+2)(x^2+7)}dx$	9.27	$\int \frac{(7x+1)}{(x-2)(x^2+8)}dx$
9.13	$\int \frac{(x+4)}{(x+2)(x^2+9)}dx$	9.28	$\int \frac{(4x+1)}{(x-4)(x^2+1)}dx$
9.14	$\int \frac{(5x-5)}{(x+6)(x^2-3)}dx$	9.29	$\int \frac{5}{(x+2)(x^2+2)}dx$
9.15	$\int \frac{(2x+1)}{(x-6)(x^2+25)}dx$	9.30	$\int \frac{(6x-3)}{(x-2)(x^2+10)}dx$

Задание 10. Найти интегралы.

10.1	$\int \frac{(x^3+1)dx}{x^2-x}$	10.16	$\int \frac{(x^5-x^3+1)dx}{x^2-x}$
10.2	$\int \frac{(x^5+3x^3-1)dx}{x^2+x}$	10.17	$\int \frac{(2x^5-8x^3+3)dx}{x^2+2x}$
10.3	$\int \frac{(3x^4-12x^3-7)dx}{x^2+2x}$	10.18	$\int \frac{(4+9x^3-x^5)dx}{x^2+3x}$

10.4	$\int \frac{(3x^3+25x+4)dx}{x^2+3x}$	10.19	$\int \frac{(3x^3-2)dx}{x^2-6x}$
10.5	$\int \frac{(3x^5-12x^2-7)dx}{x^2-2x}$	10.20	$\int \frac{(x^3+2x^2+3)dx}{x^2-4x}$
10.6	$\int \frac{(x^5-x^3+1)dx}{x^2-4x}$	10.21	$\int \frac{(2x^3-1)dx}{x^2-5x}$
10.7	$\int \frac{(x^3-3x^2-12)dx}{x^2+4x}$	10.22	$\int \frac{(2x^4+6x+7)dx}{x^2-6x}$
10.8	$\int \frac{(x^3-5x^2+5x+23)dx}{x^2+2x}$	10.23	$\int \frac{(2x^3+6x^2+4)dx}{x^2+7x}$
10.9	$\int \frac{(4x^4-x-3)dx}{x^2+x}$	10.24	$\int \frac{(x^3-10x-4)dx}{x^2-4x}$
10.10	$\int \frac{(x^3+13x-6)dx}{x^2+6x}$	10.25	$\int \frac{(x^3+6x^2+13)dx}{x^2+x}$
10.11	$\int \frac{(x^4+6x^3+24)dx}{x^2-3x}$	10.26	$\int \frac{(x^3-13x+6)dx}{x^2+2x}$
10.12	$\int \frac{(x^3+6x^2-5)dx}{x^2+4x}$	10.27	$\int \frac{(1+25x^3-x^5)dx}{x^2+2x}$
10.13	$\int \frac{(x^5-x^4+6)dx}{x^2-2x}$	10.28	$\int \frac{(4x^3+x^2+2)dx}{x^2+3x}$
10.14	$\int \frac{(4x^3+x^2-2)dx}{x^2+5x}$	10.29	$\int \frac{(3x^3+2x-1)dx}{x^2-7x}$
10.15	$\int \frac{(3x^3+2x^2+1)dx}{x^2+x}$	10.30	$\int \frac{(2x^5+6x^2-4)dx}{x^2+x}$

Задание 11. Вычислить интегралы.

11.1	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$	11.16	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$
11.2	$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$	11.17	$\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \cos^2 t dt$
11.3	$\int_{0.5}^1 e^{-2x+1} dx$	11.18	$\int_{0.5}^1 \frac{dx}{(x+1)^2}$
11.4	$\int_0^1 \frac{x+2}{x+1} dx$	11.19	$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2}$

11.5	$\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0} \frac{dx}{\cos^2 2x}$	11.20	$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$
11.6	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$	11.21	$\int_{\frac{1}{3}}^{2} \frac{x^2+1}{x^4} dx$
11.7	$\int_{1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$	11.22	$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+4x+5}$
11.8	$\int_{3}^{10} \sqrt[3]{x-2} dx$	11.23	$\int_{0.25}^{1} \frac{dx}{(4x+1)^2}$
11.9	$\int_{0}^{1} \left(\sqrt{x-1}\right)^2 dx$	11.24	$\int_{0.5}^{1} \frac{dx}{(2x+1)^3}$
11.10	$\int_{-1}^{2} x^4 dx$	11.25	$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} tg\frac{x}{2} dx$
11.11	$\int_{0}^{7} \sqrt[3]{x+1} dx$	11.26	$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)}$
11.12	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \sin^2 x dx$	11.27	$\int_{0}^{16} \sqrt[4]{x^5} dx$
11.13	$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$	11.28	$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^2+1}{x^4} dx$
11.14	$\int_{-1}^{-0.5} \frac{x^2-1}{x^4} dx$	11.29	$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$
11.15	$\int_{0}^{\pi} \left[\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 dx$	11.30	$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x-1)^3}$

Задание 12. Вычислить интегралы.

12.1	$\int_{0}^{\pi} x \cdot \sin\frac{x}{2} dx$	12.16	$\int_{0}^{1} x \cdot e^{-4x} dx$

12.2	$\int_{-1}^{0} x \cdot \cos \pi x dx$	12.17	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{\sin^2 x}$
12.3	$\int_{-1}^{0} x \cdot e^{3x} dx$	12.18	$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos 2x dx$
12.4	$\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x^2} dx$	12.19	$\int_{1}^{e} x^2 \cdot \ln x dx$
12.5	$\int_{0}^{1} x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x dx$	12.20	$\int_{0}^{2} x \cdot 3^{-x} dx$
12.6	$\int_{0}^{\sqrt{e}} \ln x dx$	12.21	$\int_{0}^{\pi} x \cdot \sin \frac{x}{3} dx$
12.7	$\int_{0}^{1} x \cdot \cos \frac{\pi x}{3} dx$	12.22	$\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$
12.8	$\int_{1}^{e} x \cdot \ln x dx$	12.23	$\int_{0}^{\pi} x \cdot \cos \frac{x}{4} dx$
12.9	$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\cos^2 x}$	12.24	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\sin^2 x}$
12.10	$\int_{0}^{\frac{1}{2}} x \cdot \sin \frac{\pi x}{2} dx$	12.25	$\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x^2} dx$
12.11	$\int_{0}^{1} x \cdot 5^x dx$	12.26	$\int_{0}^{1} (x+2) \cdot e^{-x} dx$
12.12	$\int_{-1}^{0} x \cdot \cos \pi x dx$	12.27	$\int_{0}^{1} (x+1) \cdot 4^{-2x} dx$
12.13	$\int_{-1}^{0} x \cdot e^{-2x} dx$	12.28	$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} x \cdot \cos 2x dx$
12.14	$\int_{1}^{e} \sqrt{x} \cdot \ln x dx$	12.29	$\int_{0,5}^{1} \sqrt[3]{x} \cdot \ln x dx$
12.15	$\int_{1}^{e} \frac{\ln x dx}{x^3}$	12.30	$\int_{0}^{1} (x+2) \cdot e^{3x} dx$

Задание 13. Вычислить интегралы.

13.1	$\int_{1+e}^{1+e^2} \frac{\ln(x-1)dx}{x-1}$	13.16	$\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\arccos^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
13.2	$\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{arctgx}{1+x^2}dx$	13.17	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x\cdot\cos x+\sin x)}{(x\cdot\sin x)^2}dx$
13.3	$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{(x+\cos x)dx}{x^2+2\sin x}$	13.18	$\int_{0}^{1} x\cdot e^{x^2}dx$
13.4	$\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}$	13.19	$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+4}}$
13.5	$\int_{1}^{4} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$	13.20	$\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln^5 x}}$
13.6	$\int_{2}^{3} \frac{dx}{1+\sqrt{2x-1}}$	13.21	$\int_{1}^{4} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$
13.7	$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2\cos x+3\sin x)}{(2\sin x-3\cos x)^3}dx$	13.22	$\int_{1}^{6} \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$
13.8	$\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln^3 x}}$	13.23	$\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln^2 x+1}}$
13.9	$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$	13.24	$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{5+4x}}$
13.10	$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{arctg\,2x}{1+4x^2}dx$	13.25	$\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx$
13.11	$\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\cdot(\ln^2 x+1)}$	13.26	$\int_{e-1}^{e^2-1} \frac{\ln^2(x+1)}{x+1}dx$
13.12	$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1+x^2}}$	13.27	$\int_{-1}^{0} \frac{\sqrt{tg(x+1)}}{\cos^2(x+1)}dx$
13.13	$\int_{0}^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$	13.28	$\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)\cdot\sqrt{arctgx}}$
13.14	$\int_{-1}^{0} \frac{tg(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$	13.29	$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{(x+\cos x)dx}{(x^2+2\sin x)^2}$

13.15	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx \cdot \ln\cos x dx$	13.30	$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+1}}$

Задание 14. Вычислить несобственные интегралы.

№	а)	б)	№	а)	б)
14.1	$\int_{-\infty}^{0} x\cdot e^x dx$	$\int_{-1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$	14.16	$\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$	$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$
14.2	$\int_{0}^{+\infty} x\cdot e^x dx$	$\int_{-2}^{0} \frac{dx}{3x+2}$	14.17	$\int_{-\infty}^{0} x^2\cdot e^{x^3} dx$	$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^4}}$
14.3	$\int_{e}^{+\infty} \frac{xdx}{e^{-2x}}$	$\int_{0}^{e/2} \ln 2x dx$	14.18	$\int_{0}^{+\infty} x\cdot e^{-x^2} dx$	$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$
14.4	$\int_{0}^{+\infty} x\cdot e^{-x^2} dx$	$\int_{0}^{1} \ln x dx$	14.19	$\int_{-1}^{+\infty} x\cdot e^{-\frac{x}{2}} dx$	$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}\cdot$
14.5	$\int_{1}^{+\infty} \frac{xdx}{x^4+2x^2+5}$	$\int_{-3}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$	14.20	$\int_{0}^{+\infty} x\cdot e^{-x} dx$	$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$
14.6	$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\cdot(1+\ln x)}$	$\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$	14.21	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x+13}$	$\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$
14.7	$\int_{-1}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+9}$	$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x}}$	14.22	$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x}$	$\int_{0}^{\pi/2} tg^2 x dx$
14.8	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+13}$	$\int_{0}^{2} \frac{dx}{x^2}$	14.23	$\int_{2}^{\infty} x\cdot\ln x dx$	$\int_{0}^{1/2} \frac{dx}{x\cdot\ln x}$
14.9	$\int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$	$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$	14.24	$\int_{1}^{\infty} \frac{arctgx}{1+x^2} dx.$	$\int_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 2x}$
14.10	$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{3x^2+1}$	$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$	14.25	$\int_{-\infty}^{0} x\cdot e^{3x} dx$	$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-4x+3}$
14.11	$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\cdot(x+1)}$	$\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$	14.26	$\int_{0}^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{4+x^2}} dx$	$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-5x}$
14.12	$\int_{-\infty}^{0} x\cdot e^{3x} dx$	$\int_{0}^{1} \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$	14.27	$\int_{-\infty}^{-1} x\cdot e^{2x} dx$	$\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$
14.13	$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$	$\int_{0}^{+1} 2^{-\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} dx$	14.28	$\int_{0}^{+\infty} x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$	$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3}$

14.14	$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}dx$	$\int\limits_{0}^{+1} e^{-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}dx$	14.29	$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{9x^2+2}}$	$\int\limits_{0}^{4} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}dx$
14.15	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x+13}$	$\int\limits_{0}^{0,5} x \cdot \ln x dx$	14.30	$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10}$	$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^3}$

Задание 15. Вычислить площадь области D, ограниченной данными линиями.

15.1	$D:\begin{cases} y=x^2 \\ y=2-x^2 \end{cases}$	15.16	$D:\begin{cases} y=e^{-x},\ y=1 \\ x=\ln 3 \end{cases}$
15.2	$D:\begin{cases} y=\sqrt{x},\ y\geq 0 \\ x=4 \end{cases}$	15.17	$D:\begin{cases} y=\sin^2 x,\ y=0 \\ 0\leq x\leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$
15.3	$D:\begin{cases} x+y=2 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$	15.18	$D:\begin{cases} y=\frac{1}{x},\ y=0 \\ x=1,\ \ x=2 \end{cases}$
15.4	$D:\begin{cases} y=\sin^2 x,\ y=0 \\ 0\leq x\leq \pi \end{cases}$	15.19	$D:\begin{cases} y=tgx,\ y=\sqrt{3} \\ x=0 \end{cases}$
15.5	$D:\begin{cases} y\geq x^2 \\ y\leq 4 \end{cases}$	15.20	$D:\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x \end{cases}$
15.6	$D:\begin{cases} y=2x \\ y=\sqrt{x} \end{cases}$	15.21	$D:\begin{cases} y=x^2,\ y=0 \\ x=1 \end{cases}$
15.7	$D:\begin{cases} y=x^3 \\ y=\sqrt{x} \end{cases}$	15.22	$D:\begin{cases} y=\frac{10}{1+x^2},\ y=1 \end{cases}$
15.8	$D:\begin{cases} y=\cos^2 x,\ y=0 \\ -\frac{\pi}{2}\leq x\leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$	15.23	$D:\begin{cases} y=x^2 \\ y=-x \end{cases}$
15.9	$D:\begin{cases} y=\frac{5}{1+x^2} \\ y=1 \end{cases}$	15.24	$D:\begin{cases} y=x^2 \\ y=\sqrt{x} \end{cases}$
15.10	$D:\begin{cases} y=\ln x,\ y=0 \\ x=e \end{cases}$	15.25	$D:\begin{cases} y=x^2 \\ y=x \end{cases}$

15.11	$D:\begin{cases} x+y=1 \\ x=0,\ y=0 \end{cases}$	15.26	$D:\begin{cases} y=\ln x \\ y=0 \\ x=e^2 \end{cases}$
15.12	$D:\begin{cases} y=x^2 \\ y=2+x \end{cases}$	15.27	$D:\begin{cases} y=e^{2x} \\ y=1 \\ x=1 \end{cases}$
15.13	$D:\begin{cases} y=\sqrt{x},\ y\geq 0 \\ x=9 \end{cases}$	15.28	$D:\begin{cases} y=\sin 2x,\ y=0 \\ 0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$
15.14	$D:\begin{cases} y=2x^2,\ y=0 \\ x=2 \end{cases}$	15.29	$D:\begin{cases} y\geq x^2 \\ y\leq 1 \end{cases}$
15.15	$D:\begin{cases} y\geq x^2 \\ y\leq 9 \end{cases}$	15.30	$D:\begin{cases} y=tgx,\ y=1 \\ x=0 \end{cases}$

Задание 16. Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.

16.1	$\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$ $0\leq t\leq \dfrac{\pi}{2}$	16.16	$\begin{cases} x=2{,}5(t-\sin t) \\ y=2{,}5(1-\cos t) \end{cases}$ $\dfrac{\pi}{2}\leq t\leq \pi$
16.2	$\begin{cases} x=2(\cos t+t\sin t) \\ y=2(\sin t-t\cos t) \end{cases}$ $0\leq t\leq \dfrac{\pi}{2}$	16.17	$\begin{cases} x=6(\cos t+t\sin t) \\ y=6(\sin t-t\cos t) \end{cases}$ $0\leq t\leq \pi$
16.3	$\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$ $0\leq t\leq \dfrac{\pi}{4}$	16.18	$\begin{cases} x=8\cos^3 t \\ y=8\sin^3 t \end{cases}$ $0\leq t\leq \dfrac{\pi}{6}$
16.4	$\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t) \\ y=e^t(\cos t-\sin t) \end{cases}$ $\dfrac{\pi}{6}\leq t\leq \dfrac{\pi}{4}$	16.19	$\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t) \\ y=e^t(\cos t-\sin t) \end{cases}$ $0\leq t\leq 2\pi$

16.5	$\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$	16.20	$\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$
16.6	$\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$	16.21	$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3}$
16.7	$\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t) \\ y = 4(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$	16.22	$\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t) \\ y = 8(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$
16.8	$\begin{cases} x = 10\cos^3 t \\ y = 10\sin^3 t \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$	16.23	$\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$ $\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{4}$
16.9	$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$	16.24	$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{3\pi}{2}$
16.10	$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t \\ y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 2t \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3}$	16.25	$\begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$
16.11	$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$ $\pi \le t \le 2\pi$	16.26	$\begin{cases} x = 7(t - \sin t) \\ y = 7(1 - \cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$
16.12	$\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t) \\ y = 3(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$	16.27	$\begin{cases} x = 3.5(\cos t + t \cdot \sin t) \\ y = 3.5(\sin t - t \cdot \cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

16.13	$\begin{cases} x = 6\cos^3 t \\ y = 6\sin^3 t \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$	16.28	$\begin{cases} x = 9\cos^3 t \\ y = 9\sin^3 t \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
16.14	$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$	16.29	$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$ $\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2}$
16.15	$\begin{cases} x = 3{,}5(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3{,}5(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$	16.30	$\begin{cases} x = 8(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 8(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

Методические указания к выполнению заданий и пример решения типового варианта

Задания 1-5 решаем, используя правила интегрирования, таблицу основных интегралов, тождественные преобразования подынтегральной функции.

Задание 1. Найти интеграл: $\int \frac{x^4 - 2\sqrt{x} + 3x\sqrt{x}}{x^3} dx.$

Решение:

$$\int \frac{x^4 - 2\sqrt{x} + 3x\sqrt{x}}{x^3} dx = \int \left(\frac{x^4}{x^3} - \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x^3} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{x^3} \right) dx = \int x dx - 2\int x^{-\frac{5}{2}} dx + 3\int x^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \frac{x^{1+1}}{1+1} - 2\frac{x^{-\frac{5}{2}+1}}{-\frac{5}{2}+1} + 3\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^2}{2} - 2\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} + 3\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3x^{\frac{3}{2}}} + 6x^{\frac{1}{2}} + C.$$

Задание 2. Найти интеграл: $\int \frac{1}{3^x}\left(e^{x+2} - 2\cdot e^{1-x}\right)dx.$

Решение:

$$\int \frac{1}{3^x}\left(e^{x+2}-2\cdot e^{1-x}\right)dx=\int\left(\frac{e^x\cdot e^2}{3^x}-2\cdot\frac{e}{3^x e^x}\right)dx=e^2\cdot\int\left(\frac{e}{3}\right)^x dx-2\cdot e\cdot\int\left(\frac{1}{3e}\right)^x dx=$$

$$=\frac{e^2\cdot e^x}{3^x\ln\frac{e}{3}}-2\cdot\frac{1}{(3e)^x\ln\frac{1}{3e}}+C=\frac{e^{x+2}}{3^x(\ln e-\ln 3)}+\frac{2\cdot e^{1-x}}{3^x(\ln 3-\ln e)}+C=$$

$$=\frac{e^{x+2}}{3^x(1-\ln 3)}+\frac{2\cdot e^{1-x}}{3^x(1+\ln 3)}+C.$$

Задание 3. Найти интеграл: $\int\frac{5\cdot\sin 2x}{\cos^2 x}dx.$

Решение:

$$\int\frac{5\cdot\sin 2x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{10\cdot\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x}dx=10\cdot\int tgxdx=-10\ln|\cos x|+C.$$

Задание 4. Найти интеграл: $\int\frac{7\cdot\cos^2 3x-4\cdot\cos 3x}{2\cdot\cos 3x}dx.$

Решение:

$$\int\frac{7\cdot\cos^2 3x-4\cdot\cos 3x}{2\cdot\cos 3x}dx=\int\frac{7\cdot\cos^2 3x}{2\cdot\cos 3x}dx-\int\frac{4\cdot\cos 3x}{2\cdot\cos 3x}dx=\frac{7}{2}\int\cos 3xdx-2\int dx=$$

$$=\frac{7}{6}\cdot\sin 3x-2\cdot x+C.$$

Задание 5. Найти интеграл: $\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2+3}\right)dx.$

Решение:

$$\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2+3}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-2\cdot\int\frac{dx}{3+x^2}=\ln|x|-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot arctg\,\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$

Задание 6. Найти интеграл: $\int(2-3\cdot x)\cdot\sin\frac{x}{4}dx.$

Решение: для решения данного примера применим способ интегрирования по частям по формуле интегрирования по частям $\int udv=uv-\int vdu$:

$$\int (2-3\cdot x)\cdot \sin\frac{x}{4}dx = \begin{vmatrix} u = 2-3\cdot x & du = -3\cdot dx \\ dv = \sin\frac{x}{4}dx & v = \int \sin\frac{x}{4}dx = -4\cdot\cos\frac{x}{4} \end{vmatrix} =$$

$$= -4\cdot(2-3\cdot x)\cdot\cos\frac{x}{4} - \int 3\cdot 4\cdot\cos\frac{x}{4}dx = 4(3\cdot x-2)\cdot\cos\frac{x}{4} - 12\cdot\int\cos\frac{x}{4}dx =$$

$$= 4\cdot(3\cdot x-2)\cdot\cos\frac{x}{4} - 48\cdot\sin\frac{x}{4} + C.$$

Задание 7. Найти интеграл: $\int \frac{\sqrt{tg3x+4}-7}{\cos^2 3x}dx$.

Решение: для нахождения данного интеграла применим формулу замены переменной:

$$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{vmatrix} = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt;$$

$$\int \frac{\sqrt{tg3x+4}-7}{\cos^2 3x}dx = \int \frac{\sqrt{tg3x+4}}{\cos^2 3x}dx - \int \frac{7dx}{\cos^2 3x} =$$

$$= \begin{vmatrix} \textit{в первом интеграле делаем замену}: \\ tg3x+4 = t \;\; dt = \frac{3dx}{\cos^2 3x} \;\; \frac{dx}{\cos^2 3x} = \frac{dt}{3} \end{vmatrix} = \int \frac{t^{\frac{1}{2}}dt}{3} - 7\cdot\int\frac{dx}{\cos^2 3x} =$$

$$= \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{3\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)} - \frac{7}{3}\cdot tg3x + C = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3\cdot\frac{3}{2}} + \frac{7}{3}\cdot tg3x + C = \frac{2}{9}\cdot(tg3x+4)^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{3}\cdot tg3x + C.$$

Задание 8. Найти интеграл: $\int \frac{(5x+3)dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$.

Решение: этот интеграл содержит квадратный трехчлен, поэтому применяем метод выделения полного квадрата:

$$\int \frac{(5x+3)dx}{\sqrt{4x-3-x^2}} = \int \frac{(5x+3)dx}{\sqrt{-\left(x^2-4x+4-4+3\right)}} = \int \frac{(5x+3)dx}{\sqrt{-\left((x-2)^2-1\right)}} = \int \frac{(5x+3)dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} =$$

$$= \begin{vmatrix} x-2 = t \\ x = t+2 \\ dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{5\cdot(t+2)+3}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int \frac{5t+13}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int \frac{5tdt}{\sqrt{1-t^2}} + \int \frac{13dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \textit{в первом интеграле} \\ \textit{используем замену} \\ 1-t^{2=z}; \quad -2tdt = dz \\ tdt = -\dfrac{dz}{2} \end{array} \right| = -\frac{5}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} + 13\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -5\sqrt{z} + 13\arcsin t + C =$$

$$= -5\sqrt{1-t^2} + 13\arcsin t + C = -5\sqrt{1-(x-2)^2} + 13ac\sin(x-2) + C =$$

$$= -5\sqrt{4x-x^2-3} + 13\arcsin(x-2) + C.$$

Задание 9. Найти интеграл: $\int \frac{(2\cdot x-3)dx}{(x-2)(x^2+10)}$.

Решение так как подынтегральная функция является правильной рациональной дробью, то представим ее в виде суммы простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{2x-3}{(x-2)(x^2+10)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+10}.$$

Приводим правую часть равенства к общему знаменателю и приравняем числители:

$$A(x^2+10) + (Bx+C)(x-2) = 2x-3.$$

При $x=2$ получаем: $14A=1$, *т.е.* $A=\frac{1}{14}$.

Для нахождения остальных коэффициентов раскрываем скобки:

$Ax^2 + 10A + Bx^2 + Cx - 2Bx - 2C = 2x - 3.$

В полученном тождестве приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$x^2 \mid \; A + B = 0;$

$x \mid \; C - 2B = 2 \Rightarrow \; B = -\frac{1}{14}, \; C = 2 + \frac{2}{14} = \frac{15}{7}.$

Итак, $\frac{2x-3}{(x-2)(x^2+10)} = \frac{\frac{1}{14}}{x-2} + \frac{\frac{15}{7} - \frac{x}{14}}{x^2+10}$.

Тогда

$$\int\frac{(2\cdot x-3)dx}{(x-2)(x^2+10)}=\frac{1}{14}\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{\left(\frac{15}{7}-\frac{x}{14}\right)dx}{x^2+10}=\frac{1}{14}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{15}{7}\int\frac{dx}{x^2+10}-$$

$$-\frac{1}{14}\int\frac{xdx}{x^2+10}=\left|\begin{array}{l}\textit{в последнем интеграле сделаем замену:}\\ x^2+10=t\quad 2\cdot xdx=dt\quad xdx=\frac{1}{2}dt\end{array}\right|=\frac{1}{14}\ln|x-2|+$$

$$+\frac{15}{7\sqrt{10}}arctg\,\frac{x}{\sqrt{10}}-\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{14}\ln|x-2|+\frac{15\cdot\sqrt{10}}{7\cdot 10}arctg\,\frac{x}{\sqrt{10}}-\frac{1}{28}\ln|t|+C=$$

$$=\frac{1}{14}\ln|x-2|+\frac{3\cdot\sqrt{10}}{14}arctg\,\frac{x}{\sqrt{10}}-\frac{1}{28}\ln|x^2+10|+C.$$

Задание 10. Найти интеграл: $\int\frac{2x^5-6x+3}{x^2+2x}dx.$

Решение: подинтегральная функция является неправильной дробно – рациональной функцией (степень многочлена в числителе больше степени многочлена в знаменателе), поэтому представим ее в виде суммы многочлена и правильной дроби, разделив числитель на знаменатель:

$$\frac{2x^5-6x+3}{x^2+2x}=2x^3-4x^2+8x-16+\frac{26x+3}{x^2+2x}.$$

Теперь правильную дробь разложим на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов (задание 9) и получим:

$$\frac{26x+3}{x(x+2)}=\frac{3}{2x}+\frac{49}{2(x+2)}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{(2x^5-6x+3)}{x^2+2x}dx=\int\left(2x^3-4x^2+8x-16+\frac{3}{2x}+\frac{49}{2(x+2)}\right)dx=$$

$$=2\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+\frac{8x^2}{2}-16x+\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{49}{2}\ln|x+2|+C=$$

$$=\frac{x^4}{2}-\frac{4x^3}{3}+4x^2-16x+\ln\sqrt{\frac{(x+2)^{49}}{x^3}}+C.$$

Задание 11. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{(x+3)^3}.$

Решение:

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{(x+3)^3}=\int_{-1}^{2}\frac{d(x+3)}{(x+3)^3}=\int_{-1}^{2}(x+3)^{-3}d(x+3)=\frac{(x+3)^{-3+1}}{-2}\Big|_{-1}^{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{4}\right)=\frac{21}{200}.$$

Задание 12. Найти интеграл: $\int_{1}^{e}(x+1)\cdot\ln x dx$.

Решение: используем формулу интегрирования по частям:

$$\int_{1}^{e}(x+1)\cdot\ln x dx=\left|\begin{array}{l} u=\ln x,\quad du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=(x+1)dx,\quad v=\dfrac{x^2}{2}+x \end{array}\right|=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\cdot\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\frac{dx}{x}=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\cdot\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x}{2}dx-\int_1^e dx=\frac{e^2}{2}+e-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e-x\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}+e-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}-e+1=$$

$$=\frac{e^2}{4}+\frac{5}{4}.$$

Задание 13. Найти интеграл: $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+1}}$.

Решение:

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+1}}=\left|\begin{array}{l} Замена\ \dfrac{1}{x}=t,\quad x=\dfrac{1}{t},\quad dx=-\dfrac{dt}{t^2} \\ при\quad x=\sqrt{3},\quad t=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ при\quad x=\sqrt{8},\quad t=\dfrac{1}{\sqrt{8}} \end{array}\right|=-\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{8}}}\frac{dt}{t^2\cdot\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}=\int_{\frac{1}{\sqrt{8}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=$$

$$=\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\Big|_{\frac{1}{\sqrt{8}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\ln\left|\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{1+\frac{1}{3}}\right|-\ln\left|\frac{1}{\sqrt{8}}+\sqrt{1+\frac{1}{8}}\right|=\ln\frac{1+2}{\sqrt{3}}-\ln\frac{1+3}{\sqrt{8}}=$$

$$=\ln\frac{3}{\sqrt{3}}-\ln\frac{4}{2\sqrt{2}}=\ln\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Задание 14. Вычислить интегралы (либо доказать расходимость):

а) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$, *б)* $\int_{0}^{2}\frac{dx}{2-x}$.

Решение:

а) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+4+5-4}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x+2)^2+1}=arctg(x+2)\Big|_{-\infty}^{\infty}=$$

$= arctg\infty - arctg(-\infty) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$, *значит, интеграл сходится*; *б*)

$$\int_0^2 \frac{dx}{2-x} = \left| \begin{array}{l} x = 2 \ - точка \quad разрыва \ 2 - го рода \ и является \\ верхней \ границей интеграла \end{array} \right| =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{2-x} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \ln|2-x| \Big|_0^{2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} (\ln 2 - \ln(2-2+\varepsilon)) = \infty,$$

значит, интеграл сходится.

Задание 15. Вычислить площадь фигуры D, ограниченной линиями:

$$y = \cos x, \quad y = -2\cos x, \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}.$$

Решение:

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos x - (-2\cos x)]dx = 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 3\sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 3\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= 3\left(\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right) = 6\sin\frac{\pi}{2} = 6(кв.единиц).$$

Задание 16. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x = 4 \cdot (2\cos t - \cos 2t), \\ y = 4 \cdot (2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$$

$$0 \le t \le \pi.$$

Решение: длину дуги находим по формуле:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

Найдем производные:

$x'(t) = (4(2\cos t - \cos 2t))' = 4 \cdot (-2\sin t + 2\sin 2t)$;

$y'(t) = (4(2\sin t - \sin 2t))' = 4(2\cos t - 2\cos 2t)$;

тогда

$$x'^2(t) + y'^2(t) = (8(-\sin t + \sin 2t))^2 + (8(\cos t - \cos 2t))^2 =$$

$$= 64(\sin^2 t - 2\sin t \cdot \sin 2t + \sin^2 2t + \cos^2 t - 2\cos t \cdot \cos 2t + \cos^2 2t) =$$

$$= 64(2 - 2\cos t) = 128(1 - \cos t) = 128 \cdot 2 \cdot \sin^2 \frac{t}{2}.$$

Найдем длину дуги:

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{128 \cdot 2 \cdot \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 16\int_0^{\pi} \sin\frac{t}{2} = -32\cos\frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} = 32.$$

Список литературы

1 Хасеинов К.А. Каноны математики. Алматы, 2004.

2 Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). – М.: Высшая школа, 2008. –176 с.

3 Индивидуальные задания по высшей математике: Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения ч.2: Учеб. пособие под ред. А.П. Рябушко – Мн.: Выш.шк., 2007.-396 с.

4 Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1,2. 2004.

5 Искакова А.К., Есботаева Э.С. Математика 1. Конспект лекций для студентов специальности 5В070200- Автоматизация и управление.- Алматы: НАО АУЭС, 2017.

Содержание

Введение..... 3
Расчетно-графическая работа №1. Введение в анализ. Теория пределов. Теоретические вопросы 3
Расчетные задания……... 3
Методические указания к выполнению заданий и пример решения типового варианта..... 10
Расчетно-графическая работа №2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Теоретические вопросы..... 13
Расчетные задания…….. 13
Методические указания к выполнению заданий и пример решения типового варианта..... 18
Расчетно-графическая работа №3. Интегральное исчисление функции одной переменной. Теоретические вопросы..... 22
Расчетные задания……..…… 23
Методические указания к выполнению заданий и пример решения типового варианта..... 39
Список литературы..... 46

Сводный план 2018 г., поз. 169

Искакова Акжолтай Курмантаевна
Есботаева Эльмира Султанмуратовна

МАТЕМАТИКА 1

Методические указания и задания по выполнению
расчетно – графических работ для студентов специальности
5В070200 –Автоматизация и управление

Редактор Л.Т.Сластихина
Специалист по стандартизации Н.К.Молдибекова

Подписано в печать _____
Тираж 55 экз.
Обьем 2,9 уч.-изд.л.

Формат 60х84 1/16
Бумага типографическая №1
Заказ_____ Цена 1500 тг.

Копировально - множительное бюро
некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013 Алматы, ул. Байтурсынова, 126