Коммерциялық емес
Акционерлы қоғам

АЛМАТЫ ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС УНИВЕРСИТЕТІ

Математика және
математикалық үлгілеу
кафедрасы

МАТЕМАТИКА 1

5В070200 – Автоматтандыру және басқару

мамандығының студенттеріне арналған есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар

Алматы 2018

Құрастырушылар: А.К.Искакова, Э.С.Есботаева. Математика 1. 5В070200 – Автоматтандыру және басқару мамандығының студенттеріне арналған есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар. –Алматы: КеАҚ АЭжБУ, 2018. – 44 б.

«Математика 1» пәні бойынша есептеу - сызба жұмыстары 5В070200 – Автоматтандыру және басқару мамандығының студенттеріне арналған.

Есептеу - сызба жұмыстары көрсетілген мамандықтың «Математика – 1» пәнінің бағдарламасына сәйкес құрылған. Студенттер, жалпы кредиттің санына сәйкес, таңдап алынған бағыттарына байланысты модульдік жүйе бойынша бұл курсын тындап, білім алады. Әрбір модульдің көлемі мен мазмұны білімалушылардың жастық психологиялық ерекшеліктеріне сай құрылған.

Сызба – 2, әдеб.көрсеткіші – 5.

Пікір беруші: п.ғ.к., доцент Саламатина А.М.

«Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2018ж. жоспары бойынша басылды.

© «Алматы энергетика және байланыс университеті» КЕАҚ, 2018 ж.

Кіріспе

Бұл әдістемелік нұсқауда «Математика 1» пәнінің «Талдауға кіріспе. Шектер теориясы», «Бір айнымалы функцияның дифференциалдық есептеуі», «Бір айнымалы функцияның интегралдық есептеуі» тарауларының бағдарламасына сәйкес есептеу-сызба жұмыстары (ЕСЖ) берілген. Қажетті теориялық материалдар келтірілген.

№1 есептеу-сызба жұмысында 7 тапсырма, №2 есептеу-сызба жұмысында 5 тапсырма, №3 есептеу-сызба жұмысында 16 тапсырма берілген. Тапсырмаларды орындауға қажетті негізгі формулалар мен типтік нұсқаның шешуі келтірілді.

Әрбір студент өз нұсқасын топ тізіміндегі нөмірі бойынша анықтайды. Есептеу-сызба жұмыстары оқушы дәптеріне орындалуы тиіс. Барлық есептер анық және түсінікті жазылуы керек.

№1 есептеу-сызба жұмысы

1 Талдауға кіріспе. Шектер теориясы

ЕСЖ мақсаты: студенттерді бір айнымалы функцияның нүктедегі шегін, біржақты шектерді, функцияның үзіліс нүктелерін, кесіндіде үзіліссіз функцияның қасиеттерін (шенелгендік, ең үлкен, ең кіші мәндерінің бар болуы) қолданбалы есептерді шешуде тиімді әдістерді пайдалана білуге дағдыландыру.

Тапсырмалар

1. Шекті табыңыз.

1.1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}$	1.2 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+4x-21}$	1.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+10x^2+24x}{2x^3+6x^2+4}$
1.4 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-15x-42}{x^2-4}$	1.5 $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{2x^2+9x-5}{8x^2-6x+1}$	1.6 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{6x-8-x^2}{x^2+2x-24}$
1.7 $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2-5x-2}{6x^2-x-1}$	1.8 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-7x+10}$	1.9 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-6x-7}{-x^2+18x+17}$
1.10 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^3-27}$	1.11 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x+3}$	1.12 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x-1}$
1.13 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{x+2}$	1.14 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-14x+6}{x-3}$	1.15 $\lim\limits_{x\to -1/2}\dfrac{6x^2+x-1}{x+1/2}$

1.16 $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{6x^2-x-1}{x-1/2}$	1.17 $\lim\limits_{x\to -1/3}\dfrac{9x^2-1}{x+1/3}$	1.18 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x-2}$
1.19 $\lim\limits_{x\to -1/3}\dfrac{3x^2-2x-1}{x+1/3}$	1.20 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+8x+1}{x+1}$	1.21 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$
1.22 $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x-1/2}$	1.23 $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{6x^2-5x+1}{x-1/3}$	1.24 $\lim\limits_{x\to -7/5}\dfrac{10x^2+9x-7}{x+7/5}$
1.25 $\lim\limits_{x\to -7/2}\dfrac{2x^2+13x+21}{2x+7}$	1.26 $\lim\limits_{x\to 5/2}\dfrac{2x^2-9x+10}{2x-5}$	1.27 $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{6x^2+x-1}{x-1/3}$
1.28 $\lim\limits_{x\to -1/2}\dfrac{6x^2-75x-39}{x+1/2}$	1.29 $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{2x^2+15x+7}{x+7}$	1.30 $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{2x^2-13x-24}{x-8}$

2. Шекті табыңыз.

2.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^5-7x^2+2}{3x^5+2x^2-6x}$	2.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x+2}{x^2-3x^2+1}$	2.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+3x-5}{x^6-2x^2+4}$
2.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^7-9x}{9x^5-4x^2-5}$	2.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-x-12}{x^3-x-7}$	2.6 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^5-7x-7}{2x^7+2x-2}$
2.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-6x^2-4}{x^3-2x^3+1}$	2.8 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9x^7-2x-6}{3x^7+3x-3}$	2.9 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^6-5x+2}{x^2-2x+2}$
2.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-2x^2-3x}{12x^3-5}$	2.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x+4x^6}{5x^2-6x+7}$	2.12 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+4x+7}{x^4+4x^2-10}$
2.11 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5-4x^2+28x}{5x^5+3x^2-1}$	2.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+7x-1}{7x^4+2x+5}$	2.15 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-2x^2-2x}{3x^2+3x}$
2.16 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^2+12x+16}{4x^2+5x+6}$	2.17 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^3-x^2+2}{8x^4+x-4}$	2.18 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-x-14}{6x^2+9x-11}$
2.19 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^6+x^2+x}{9x^6+3x-2}$	2.20 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4-8x^2-2}{2x^2-7x-5}$	2.21 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2+8x+2}{x^4+6x^2-9}$
2.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+12x+6}{4x^2-8x+4}$	2.23 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^8+x^6+x^4}{5x^4+13x^2-6x}$	2.24 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{11x^2+2x+2}{3x^3-3x+4}$
2.25 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^4+3x^3+x^2}{-x^2-x-15}$	2.26 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^4+6x^3-x}{x+x^2-x^3}$	2.27 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^8-3x^3+2x}{x^3+8x^2+17}$
2.28 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+5x^5-1}{-8x^7-6x^5+x^3}$	2.29 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+12x^2-9}{21x^2+3x+18}$	2.30 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-6x-6}{2x^5+13x^3-7}$

3. Шекті табыңыз.

3.1 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+2x-24}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$	3.2 $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{3x^2+6x-24}$	3.3 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$
3.4 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$	3.5 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{4+x}}{3x^2-4x+1}$	3.6 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-15x+10}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$
3.7 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$	3.8 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$	3.9 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$
3.10 $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$	3.11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$	3.12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x}$
3.13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$	3.14 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$	3.15 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$
3.16 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$	3.17 $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$	3.18 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$
3.19 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$	3.20 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$	3.21 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$
3.22 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$	3.23 $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$	3.24 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$
3.25 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$	3.26 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$	3.27 $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}$
3.28 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+8}-3}$	3.29 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{3x^2+3x}$	3.30 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$

4. Шекті табыңыз.

4.1 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^x$	4.2 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin 2x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{1}{x}}$	4.3 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{9x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x}\right)^{3x}$
4.4 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{tg3x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{5x}$	4.5 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+8x)^{\frac{4}{x}}$	4.6 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg9x}{18x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$
4.7 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12x}{\sin 4x}$,	4.8 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\sin 4x}$,	4.9 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x^2}{1-\cos 3x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{6/x}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-11x)^{\frac{8}{x}}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{3x}$
4.10 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{4x}$	4.11 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{14x^2}{1-\cos x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{8x}$	4.12 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x}{tg7x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-6}{x}\right)^{6x}$
4.13 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{9x}{\sin 3x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{11}{x}\right)^{4x}$	4.14 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{tg4x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{x}\right)^{6x}$	4.15 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{18x}{tg6x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x/10}$
4.16 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg9x}{6x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{5x}{4}\right)^{2/x}$	4.17 а) $\lim\limits_{x\to 0} xctg9x$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-13x)^{3/x}$	4.18 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{\sin 4x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-9x)^{\frac{9}{x}}$
4.19 а) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 7xctg7x$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{5/x}$	4.20 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{10x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{8/x}$	4.21 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 14x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+9x)^{\frac{10}{x}}$
4.22 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{8x}{arctg4x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{3x}{7}\right)^{\frac{1}{x}}$	4.23 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{2x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{4/x}$	4.24 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{tg6x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+8x)^{\frac{3}{x}}$
4.25 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 7x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-6x)^{2/x}$	4.26 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{tg9x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{7x/2}$	4.27 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 8x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{9x}$
4.28 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 6x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{9}{x}\right)^{3x}$	4.29 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{tg8x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}$	4.30 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{9x}{tg2x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{3x}\right)^{6x}$

5. Шекті табыңыз.

5.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$	5.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$	5.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{3x}$	5.4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{4x+1}\right)^{3x-1}$
5.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}$	5.6 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)^{2x+1}$	5.7 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{5x}$	5.8 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{4x}$
5.9 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+3}{2x-4}\right)^{x+2}$	5.10 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^{x-1}$	5.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-3}{x+4}\right)^{x+3}$	5.12 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{7x+4}\right)^{x}$
5.13 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-5}{3x+4}\right)^{2x}$	5.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{4x-5}\right)^{2x}$	5.15 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{3x+1}\right)^{5x}$	5.16 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-4}{x+6}\right)^{x-1}$
5.17 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{3x+10}\right)^{3x}$	5.18 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{x+4}\right)^{6x+1}$	5.19 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+3}{3x-1}\right)^{2x}$	5.20 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x+5}{x-10}\right)^{5x}$
5.21 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+7}{x+4}\right)^{4x}$	5.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{4x+5}\right)^{3x}$	5.23 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5x-7}{x+6}\right)^{2x}$	5.24 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-4x}{2-x}\right)^{6x}$
5.25 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-2x}{3-x}\right)^{-x}$	5.26 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4+3x}{5+x}\right)^{7x}$	5.27 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-1}{2x+5}\right)^{3x}$	5.28 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{2-10x}\right)^{5x}$
5.29 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{9x-4}\right)^{2x}$	5.30 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+5}{4x-2}\right)^{3x}$		

6. Функцияны үзіліссіздікке зерттеңіз.

6.1 а) $f(x)=3^{\frac{1}{x+4}}$, б) $g(x)=\frac{9}{4+x}$	6.2 а) $f(x)=2^{\frac{1}{x-1}}$, б) $g(x)=\frac{1}{8-x}$	6.3 а) $f(x)=6^{\frac{1}{x+3}}$, б) $g(x)=\frac{1}{x-10}$
6.4 а) $f(x)=9^{\frac{1}{x-5}}$, б) $g(x)=\frac{1}{x-13}$	6.5 а) $f(x)=5^{\frac{1}{9-x}}$, б) $g(x)=\frac{4}{x-3}$	6.6 а) $f(x)=4^{\frac{1}{x+7}}$, б) $g(x)=\frac{7}{x+21}$

6.7 а) $f(x)=7^{\frac{1}{3-2x}}$, б) $g(x)=\frac{2}{3x+4}$	6.8 а) $f(x)=8^{\frac{1}{3x-2}}$, б) $g(x)=\frac{6}{7-3x}$	6.9 а) $f(x)=2^{\frac{1}{5-2x}}$, б) $g(x)=\frac{5}{2x+9}$
6.10 а) $f(x)=12^{\frac{1}{x+4}}$, б) $g(x)=\frac{7}{7-2x}$	6.11 а) $f(x)=6^{\frac{1}{3-4x}}$, б) $g(x)=\frac{6}{x+5}$	6.12 а) $f(x)=11^{\frac{1}{x+6}}$, б) $g(x)=\frac{13}{20+4x}$
6.13 а) $f(x)=9^{\frac{2}{x}}$, б) $g(x)=\frac{6}{5+2x}$	6.14 а) $f(x)=10^{\frac{1}{x+5}}$, б) $g(x)=\frac{1}{9-3x}$	6.15 а) $f(x)=4^{\frac{1}{4+x}}$, б) $g(x)=\frac{2}{7+x}$
6.16 а) $f(x)=3^{\frac{1}{5x+3}}$, б) $g(x)=\frac{4}{8+9x}$	6.17 а) $f(x)=5^{\frac{1}{5+x}}$, б) $g(x)=\frac{13}{2x-1}$	6.18 а) $f(x)=16^{\frac{7}{2x}}$, б) $g(x)=\frac{9}{9+18x}$
6.19 а) $f(x)=16^{\frac{1}{9-x}}$, б) $g(x)=\frac{14}{6x-3}$	6.20 а) $f(x)=17^{\frac{1}{5+20x}}$, б) $g(x)=\frac{3}{6-4x}$	6.21 а) $f(x)=14^{\frac{1}{6-x}}$, б) $g(x)=\frac{3}{2+x}$
6.22 а) $f(x)=15^{\frac{3}{4-x}}$, б) $g(x)=\frac{1}{6-2x}$	6.23 а) $f(x)=5^{\frac{1}{8-x}}$, б) $g(x)=\frac{10}{x-3}$	6.24 а) $f(x)=7^{\frac{4}{2+x}}$, б) $g(x)=\frac{5}{8-x}$
6.25 а) $f(x)=13^{\frac{1}{7-x}}$, б) $g(x)=\frac{3}{8-x}$	6.26 а) $f(x)=4^{\frac{9}{4+x}}$, б) $g(x)=\frac{14}{x+7}$	6.27 а) $f(x)=12^{\frac{1}{1-x}}$, б) $g(x)=\frac{7}{12-6x}$
6.28 а) $f(x)=9^{\frac{9}{9-x}}$, б) $g(x)=\frac{1}{3x+5}$	6.29 а) $f(x)=6^{\frac{1}{x+11}}$, б) $g(x)=\frac{4}{4-x}$	6.30 а) $f(x)=7^{\frac{2}{4x-5}}$, б) $g(x)=\frac{19}{x+11}$

7. Функцияны үзіліссіздікке зерттеп, графигін салыңыз.

7.1 $f(x)=\begin{cases} x+4, & x \prec -1, \\ x^2+2, & -1 \le x \le 1, \\ 2x, & x \succ 1. \end{cases}$	7.2 $f(x)=\begin{cases} x+4, & x \le 0, \\ (x+1)^2, & 0 \prec x \le 2, \\ -x+4, & x \succ 2. \end{cases}$	7.3 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x \le -1, \\ x^2+1, & -1 \prec x \le 1, \\ -x+3, & x \succ 1. \end{cases}$
7.4 $f(x)=\begin{cases} -x, & x \le 0, \\ -(x-1)^2, & 0 \prec x \prec 2, \\ x-3, & x \ge 2. \end{cases}$	7.5 $f(x)=\begin{cases} -2(x+1), & x \le -1, \\ (x+1)^2, & -1 \prec x \prec 0, \\ x, & x \ge 0. \end{cases}$	7.6 $f(x)=\begin{cases} -x, & x \le 0, \\ x^2, & 0 \prec x \le 2, \\ x+1, & x \succ 2. \end{cases}$
7.7 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x \le 1, \\ 2x, & 1 \prec x \le 3, \\ x+2, & x \succ 3. \end{cases}$	7.8 $f(x)=\begin{cases} x-3, & x \prec 0, \\ x+1, & 0 \le x \le 4, \\ x+3, & x \succ 4. \end{cases}$	7.9 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \le 0, \\ 0, & 0 \prec x \le 2, \\ x-2, & x \succ 2. \end{cases}$
7.10 $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & x \le 0, \\ x, & 0 \prec x \le 1, \\ x+2, & x \succ 1. \end{cases}$	7.11 $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x \prec 0, \\ x, & 0 \le x \le 2, \\ 0, & x \succ 2. \end{cases}$	7.12 $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x \le \pi/2, \\ 0, & \pi/2 \prec x \prec \pi, \\ 2, & x \ge \pi. \end{cases}$
7.13 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x \le 0, \\ x^2, & 0 \prec x \prec 2, \\ 2x, & x \ge 2. \end{cases}$	7.14 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x \prec 0, \\ x^2-1, & 0 \le x \prec 1, \\ -x, & x \ge 1. \end{cases}$	7.15 $f(x)=\begin{cases} -x, & x \prec 0, \\ x^2+1, & 0 \le x \prec 2, \\ 1+x, & x \ge 2. \end{cases}$
7.16 $f(x)=\begin{cases} x+3, & x \le 0, \\ 1, & 0 \prec x \le 2, \\ x^2-2, & x \succ 2. \end{cases}$	7.17 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x \prec 0, \\ \sin x, & 0 \le x \prec \pi, \\ 3, & x \ge \pi. \end{cases}$	7.18 $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x \prec -1, \\ x^2+1, & -1 \le x \le 2, \\ 2x, & x \succ 2. \end{cases}$
7.19 $f(x)=\begin{cases} 1, & x \le 0, \\ 2^x, & 0 \prec x \le 2, \\ x+3, & x \succ 2. \end{cases}$	7.20 $f(x)=\begin{cases} -x+2, & x \le -2, \\ x^3, & -2 \prec x \le 1, \\ 2, & x \succ 1. \end{cases}$	7.21 $f(x)=\begin{cases} 3x+4, & x \le -1, \\ x^2-2, & -1 \prec x \prec 2, \\ x, & x \ge 2. \end{cases}$
7.22 $f(x)=\begin{cases} x, & x \le 1, \\ (x-2)^2, & 1 \prec x \prec 3, \\ -x+6, & x \ge 3. \end{cases}$	7.23 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x \prec 1, \\ x^2+2, & 1 \le x \le 2, \\ -2x, & x \succ 2. \end{cases}$	7.24 $f(x)=\begin{cases} x^3, & x \prec -1, \\ x-1, & -1 \le x \le 3, \\ -x+5, & x \succ 3. \end{cases}$

7.25 $f(x)=\begin{cases} x, & x\le -2,\\ -x+1, & -2\prec x\le 1,\\ x^2-1, & x\succ 1. \end{cases}$	7.26 $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 0,\\ -x^2+4, & 0\prec x\prec 2,\\ x-2, & x\ge 2. \end{cases}$	7.27 $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1,\\ x^2-1, & -1\prec x\le 2,\\ 2x, & x\succ 2. \end{cases}$
7.28 $f(x)=\begin{cases} -1, & x\prec 0,\\ \cos x, & 0\le x\le \pi,\\ 1-x, & x\succ \pi. \end{cases}$	7.29 $f(x)=\begin{cases} 2, & x\prec -1,\\ 1-x, & -1\le x\le 1,\\ \ln x, & x\succ 1. \end{cases}$	7.30 $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0,\\ x^3, & 0\prec x\le 2,\\ x+4, & x\succ 2. \end{cases}$

Тапсырманы орындауға арналған әдістемелік нұсқау және типтік нұсқаның шешуі

1. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$.

Шешуі:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+2)(5x+3)}{(x+2)(3x-4)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x+3}{3x-4}=\frac{7}{10}=0{,}7.$$

2. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}$.

Шешуі:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}.=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5\left(2+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^4}\right)}{x^2\left(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(2+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^4}\right)}{3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{-\infty}{3}=-\infty.$$

3. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}$.

Шешуі:

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{21+x}-5\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}{\left(x^3-64\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\lim_{x\to4}\frac{21+x-25}{\left(x^3-64\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)\left(x^2+4x+16\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\lim_{x\to4}\frac{1}{\left(x^2+4x+16\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\frac{1}{480}.$$

4. Шекті табыңыз: а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg9x}{8x}$; ә) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3x}\right)^{5x}$.

Шешуі:

а) бірінші тамаша шекті қолданамыз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg9x}{8x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 9x}{\cos 9x}}{8x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{8x}\cdot\frac{1}{\cos 9x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{9x}\cdot\frac{9}{8\cos 9x}=$$

$$=1\cdot\frac{9}{8}=\frac{9}{8};$$

ә) екінші тамаша шекті қолданамыз:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{5x}=\left|1^{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x}{2x-3}-1\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-2x+3}{2x-3}\right)^{5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{3}{2x-3}\cdot 5x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3}{2x-3}\cdot 5x}=e^{\frac{15}{2}}.$$

5. Функцияны үзіліссіздікке зерттеңіз:

а) $f(x)=9^{\frac{5}{8-x}}$ ә) $f(x)=\frac{4}{5+3x}$.

Шешуі: а) $f(x)=9^{\frac{5}{8-x}}$ функциясы $x\in(-\infty;8)\cup(8;+\infty)$ аралықтарында анықталған, сондықтан үзіліс $x_0=8$ болуы мүмкін. Функцияның осы нүктедегі біржақты шектерін анықтаймыз:

$$f(8-0)=\lim_{x\to 8-0}9^{\frac{5}{8-x}}=9^{\frac{5}{8-(8-0)}}=9^{\frac{5}{+0}}=9^{+\infty}=+\infty;$$

$$f(8+0)=\lim_{x\to 8+0}9^{\frac{5}{8-x}}=9^{\frac{5}{8-(8+0)}}=9^{\frac{5}{-0}}=9^{-\infty}=\frac{1}{9^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0,$$

демек $x_0=8$ – II текті үзіліс нүктесі;

ә) $f(x)=\frac{4}{5+3x}$ функциясы $x\in(-\infty;-\frac{5}{3})\cup\left(-\frac{5}{3};+\infty\right)$ аралықтарында анықталған, сондықтан үзіліс $x_0=-\frac{5}{3}$ болуы мүмкін. Функцияның осы нүктедегі біржақты шектерін анықтаймыз:

$$f(-\frac{5}{3}-0)=\lim_{x\to-\frac{5}{3}-0}\frac{4}{5+3x}=\frac{4}{5+3\cdot\left(-\frac{5}{3}-0\right)}=\frac{4}{-0}=-\infty;$$

$$f(-\frac{5}{3}+0)=\lim_{x\to-\frac{5}{3}+0}\frac{4}{5+3x}=\frac{4}{5+3\cdot\left(-\frac{5}{3}+0\right)}=\frac{4}{+0}=+\infty,\text{ демек }\quad x_0=-\frac{5}{3}\quad-\quad\text{II}$$

текті үзіліс нүктесі.

№2 есептеу-сызба жұмысы

1 Бір айнымалы функцияның дифференциалдық есептеуі

ЕСЖ мақсаты: параметрлік түрде берілген және күрделі функциялардың туындыларын, жоғарғы ретті туындылар мен дифференциалдарды тауып, оларды қолданбалы есептерді шешуде тиімді әдістерді пайдалана білуге дағдыландыру.

1. Функцияның туындысын табыңыз.

1.1 а) $g(x)=\left(e^{\cos x}+6\right)^3$ б) $f(x)=tg\left(10x^2+3x-4\right)$,	1.2 а) $f(x)=\cos\left(5x^2-7\right)$, б) $g(x)=\dfrac{2x^2}{\cos^2 x}$	1.3 а) $f(x)=e^{9x+x^2}$, б) $g(x)=\dfrac{8x}{tg^2 4x}$
1.4 а) $f(x)=\left(3x+11x^3\right)^8$, б) $g(x)=\dfrac{\sin^4 x}{7+2\cos^2 x}$	1.5 а) $f(x)=\sqrt[4]{5x^6+12x^3}$, б) $g(x)=6tg^3\left(x^3+8\right)$	1.6 а) $f(x)=arctg\left(x^7+4x\right)$, б) $g(x)=5tg^3 x+\lg\cos 2x$
1.7 а) $f(x)=tg\left(4x^2+x+5\right)$, б) $g(x)=\left(e^{\sin 2x}+6\right)^5$	1.8 а) $g(x)=\dfrac{8x^3}{\cos^4 9x}$ б) $f(x)=\sin\left(10x^2-7x+5\right)$,	1.9 а) $f(x)=e^{4x-x^3}$, б) $g(x)=\dfrac{tg^2 6x}{2x-7}$
1.10 а) $f(x)=\left(2x^3+8x\right)^{12}$, б) $g(x)=\dfrac{7x^8}{arctg^2 x}$	1.11 а) $f(x)=\sqrt[5]{2x^8-5x^3}$, б) $g(x)=5ctg^3\left(6x^2+6\right)$	1.12 а) $f(x)=arcctg\left(5x^5+9x\right)$, б) $g(x)=7tg^3 x-\lg\sin 4x$
1.13 а) $f(x)=tg\left(6x^2+7x-7\right)$, б) $g(x)=\left(6^{\cos 4x}+3\right)^5$	1.14 а) $g(x)=\dfrac{9x^4}{\cos^2 x}$ б) $f(x)=\cos\left(7x^4-6x^2+6\right)$,	1.15 а) $f(x)=8^{x+5x^2}$, б) $g(x)=\dfrac{1}{2}\sin^2 7x+\ln\cos 7x$
1.16 а) $f(x)=\left(2x^5-9x^4\right)^9$, б) $g(x)=\dfrac{10x^4}{arcctg^4 5x}$	1.17 а) $f(x)=\sqrt[5]{x^6-7x^4-2x^2}$ б) $g(x)=\dfrac{(11-4x)^6}{\arcsin 6x}$	1.18 а) $f(x)=arctg\left(2x^4+7x\right)$, б) $g(x)=\dfrac{1}{2}\cos^2 x+\ln\sin x$

1.19 а) $g(x)=\left(e^{tg2x}+8\right)^5$ б) $f(x)=\sin\left(9x^3+5x^2+5\right)$,	1.20 а) $f(x)=ctg\left(2x^2+6x\right)$, б) $g(x)=\frac{1}{7}tg^7 3x^2$	1.21 а) $f(x)=2^{5x^4+2}$, б) $g(x)=\frac{(8+5x)^5}{tg5x}$
1.22 а) $f(x)=\left(4x+6x^6\right)^9$, б) $g(x)=\frac{\cos^5 x5}{1+\sin 5x}$	1.23 а) $f(x)=\sqrt[7]{x-8x^3}$ б) $g(x)=7\cos^3\left(3x^2-3\right)$	1.24 а) $f(x)=\arcsin\left(x^5-7x\right)$, б) $g(x)=\frac{1}{5}ctg^5 x+\ln\sin x$
1.25 а) $f(x)=\ln\left(3x^4+x^3\right)$, б) $g(x)=\left(e^{\sqrt{3x}}-7\right)^{11}$	1.26 а) $f(x)=\cos\left(\sqrt[4]{x}-2\right)$, б) $g(x)=\frac{\left(2x+3x^3\right)^3}{\cos 9x}$	6.27 а) $f(x)=e^{3x-4x^3}$, б) $g(x)=\sqrt[6]{(\sin 4x+4x)^4}$
1.28 а) $f(x)=\sqrt{9x+\cos 9x}$, б) $g(x)=\frac{3x^2}{\ln\left(4x^3-8\right)}$	1.29 а) $f(x)=\sqrt[3]{\ln 3x}$, б) $g(x)=5tg(\arcsin 10)$	1.30 а) $f(x)=arctg(\sin 2x+2)$, б) $g(x)=4x-\lg(\cos 4x+4)$

2. Параметрлік түрде берілген функцияның:
а) бірінші ретті туындысын табыңыз;
б) екінші ретті туындысын табыңыз.

2.1 $\begin{cases}x=(5t+3)\cos 5t,\\ y=5t^3.\end{cases}$	2.2 $\begin{cases}x=8\cos t,\\ y=4\sin^2 t.\end{cases}$	2.3 $\begin{cases}x=6\cos^3 t,\\ y=9\sin t.\end{cases}$
2.4 $\begin{cases}x=1/(t-4),\\ y=t^2/(t-4).\end{cases}$	2.5 $\begin{cases}x=e^{-3t},\\ y=3te^{9t}.\end{cases}$	2.6 $\begin{cases}x=\sqrt{7t},\\ y=\sqrt[5]{7t}.\end{cases}$
2.7 $\begin{cases}x=3t/\left(t^3+1\right),\\ y=t^2/\left(t^2+1\right).\end{cases}$	2.8 $\begin{cases}x=4\sqrt{t^2-1},\\ y=6(t+1)/\sqrt{t^2-1}.\end{cases}$	2.9 $\begin{cases}x=8t+4t^2,\\ y=10\sqrt{t^3}-6t^2.\end{cases}$
2.10 $\begin{cases}x=(\ln 6t)/t,\\ y=\ln 6t.\end{cases}$	2.11 $\begin{cases}x=e^{3t}\cos 2t,\\ y=e^{3t}\sin 2t.\end{cases}$	2.12 $\begin{cases}x=\frac{1}{4}t^4,\\ y=t\ln 2t.\end{cases}$
2.13 $\begin{cases}x=7\cos^2 t,\\ y=4\sin t.\end{cases}$	2.14 $\begin{cases}x=4\cos t,\\ y=8\sin^2 t.\end{cases}$	2.15 $\begin{cases}x=5arctgt,\\ y=15\ln\left(1+t^2\right).\end{cases}$

2.16 $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$	2.17 $\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t). \end{cases}$	2.18 $\begin{cases} x=8(\sin t-\cos t), \\ y=4(\cos t+\sin t). \end{cases}$
2.19 $\begin{cases} x=\sin 2t, \\ y=\cos^2 t. \end{cases}$	2.20 $\begin{cases} x=e^{3t}, \\ y=\sqrt{t-1}. \end{cases}$	2.21 $\begin{cases} x=(\ln t)/t, \\ y=t^2\ln t. \end{cases}$
2.22 $\begin{cases} x=\arccos t, \\ y=\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$	2.23 $\begin{cases} x=1/(t+1), \\ y=t^2/(t+1). \end{cases}$	2.24 $\begin{cases} x=5\sin 3t, \\ y=3\cos^3 t. \end{cases}$
2.25 $\begin{cases} x=e^{-2t}, \\ y=e^{8t}/t. \end{cases}$	2.26 $\begin{cases} x=\sqrt[3]{(t-1)^2}, \\ y=\sqrt{t-1}. \end{cases}$	2.27 $\begin{cases} x=\ln^2 t, \\ y=t+\ln t. \end{cases}$
2.28 $\begin{cases} x=te^t, \\ y=t/e^t. \end{cases}$	2.29. $\begin{cases} x=6t^2-4, \\ y=3\sqrt{t^5} \end{cases}$	2.30 $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=\ln t. \end{cases}$

3. $y=f(x)$ функциясының x_0 нүктедегі екінші ретті туындысын табыңыз.

3.1 $y=\sin^2 x,$ $x_0=\pi/4$	3.2 $y=arctgx,$ $x_0=1$	3.3 $y=\ln(2+x^2),$ $x_0=0$
3.4 $y=e^x\cos x,$ $x_0=0$	3.5 $y=e^x\sin 2x,$ $x_0=0$	3.6 $y=e^{-x}\cos x,$ $x_0=0$
3.7 $y=\sin 2x,$ $x_0=\pi$	3.8 $y=(2x+1)^5,$ $x_0=1$	3.9 $y=\ln(1+2x),$ $x_0=2$
3.10 $y=\frac{1}{2}e^x x^2,$ $x_0=0$	3.11 $y=\arcsin x,$ $x_0=0$	3.12 $y=(5x-4)^5,$ $x_0=2$
3.13 $y=x\sin x,$ $x_0=\frac{\pi}{2}$	3.14 $y=x^2\ln x,$ $x_0=\frac{1}{3}$	3.15 $y=x\sin 2x,$ $x_0=-\frac{\pi}{4}$
3.16 $y=x\cos 2x,$ $x_0=\frac{\pi}{12}$	3.17 $y=x^4\ln x,$ $x_0=1$	3.18 $y=x+arctgx,$ $x_0=1$
3.19 $y=\cos^2 x,$ $x_0=\frac{\pi}{4}$	3.20 $y=\ln(x^2-4),$ $x_0=3$	3.21 $y=x^2\cos x,$ $x_0=\frac{\pi}{2}$

3.22 $y = x\arccos x,$ $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$	3.23 $y = (x+1)\ln(x+1),$ $x_0 = -\frac{1}{2}$	3.24 $y = \ln^3 x,$ $x_0 = 1$
3.25 $y = 2^{x^2},$ $x_0 = 1$	3.26 $y = (4x-3)^5,$ $x_0 = 1$	3.27 $y = x\arcsin x,$ $x_0 = 2$
3.28 $y = (7x-4)^6,$ $x_0 = 1$	3.29 $y = x\sin 2x,$ $x_0 = \frac{\pi}{4}$	3.30 $y = \sin(x^3+\pi),$ $x_0 = \sqrt[3]{\pi}$

4. $y = f(x)$ функциясы үшін:

а) анықталу облысын және үзіліс нүктелерін табыңыз;

ә) функцияның графигінің асимптоталарын табыңыз;

б) функцияның сызбасының координаталық өстермен қиылысу нүктелерін табыңыз;

в) жұп, тақтығын анықтаңыз;

г) монотондық интервалдарын, экстремумдарын табыңыз;

д) ойыс, дөңес аралықтарын, иілу нүктелері табыңыз;

е) сызбасын сызыңыз.

4.1 $y = \frac{x^3+4}{x^2}$	4.2 $y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$	4.3 $y = \frac{2}{x^2+2x}$	4.4 $y = \frac{4x^2}{3+x^2}$	4.5 $y = \frac{12x}{x^2+9}$
4.6 $y = \frac{x^2-3x+3}{x-1}$	4.7 $y = \frac{4-x^3}{x^2}$	4.8 $y = \frac{x^2-4x+1}{x-4}$	4.9 $y = \frac{2x^3+1}{x^2}$	4.10 $y = \frac{(x-1)^2}{x^2}$
4.11 $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$	4.12 $y = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2$	4.13 $y = \frac{12-3x^2}{12+x^2}$	4.14 $y = \frac{9+6x-3x^2}{x^2-2x+13}$	4.15 $y = \frac{-8x}{x^2+4}$
4.16 $y = \frac{x-1}{(x+1)^2}$	4.17 $y = \frac{3x^4+1}{x^3}$	4.18 $y = \frac{4x}{(x+1)^2}$	4.19 $y = \frac{8(x-1)}{(x+1)^2}$	9.20 $y = \frac{1-2x^3}{x^2}$
4.21 $y = \frac{4}{x^2+2x-3}$	4.22 $y = \frac{4}{3+2x-x^2}$	4.23 $y = \frac{x^2+2x-7}{x^2+2x-3}$	4.24 $y = \frac{1}{x^4-1}$	9.25 $y = -\left(\frac{x}{x+2}\right)^2$
4.26 $y = \frac{x^3-32}{x^2}$	4.27 $y = \frac{4(x+1)^2}{x^2+2x+4}$	4.28 $y = \frac{3x-2}{x^3}$	4.29 $y = \frac{x^2-6x+9}{(x-1)^2}$	4.30 $y = \frac{x^3-27x+54}{x^3}$

5. Лопиталь ережесін пайдаланып, шекті табыңыз.

5.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$	5.2 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2^{\ln x}-x}{x-1}$	5.3 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-x}{x-\sin x}$
5.4 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2-\sin x^2}$	5.5 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-x}{2\sin x+x}$	5.6 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$
5.7 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$	5.8 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{x^3}$	5.9 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{1-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$
5.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$	5.11 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}}{1-\cos5x}$	5.12 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\pi/x}{ctg(\pi x/2)}$
5.13 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin2x)}{\ln(\sin5x)}$	5.14 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{tgx}{tg5x}$	5.15 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-e^{5x}}{\sin x}$
5.16 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-arctgx}{x^3}$	5.17 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos3x}$	5.18 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$
5.19 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x^3-1}$	5.20 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{ctgx}$	5.21 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos3x}{1-\cos6x}$
5.22 $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{x^3-64}$	5.23 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin4x}$	5.24 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{2x}}{tg4x}$
5.25 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x-4^x}{x\sqrt{1-x^2}}$	5.26 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos3x-e^{-x}}$	5.27 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(7+x)}{\sqrt[7]{x-3}}$
5.28 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin4x}{5-5e^{-3x}}$	5.29 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{9x}-1}{\cos5x}$	5.30 $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{1-2\sin x}{\cos3x}$

Тапсырманы орындауға арналған әдістемелік нұсқау және типтік нұсқаның шешуі

1. Функцияның туындысын табыңыз:

а) $y=\ln\left(4x^2-5x+2^{-3x}\right)$; ә) $y=\dfrac{ctg^5 3x}{x+2}$.

Шешуі:

а) күрделі функцияның туындысының формуласы $\left(\ln u\right)'=\dfrac{u'}{u}$ бойынша табамыз:

$$y' = \frac{\left(4x^2 - 5x + 2^{-3x}\right)'}{4x^2 - 5x + 2^{-3x}} = \frac{8x - 5 + 2^{-3x}\ln 2 \cdot (-3)}{4x^2 - 5x + 2^{-3x}} =$$

$$= \frac{8x - 5 - 3 \cdot 2^{-3x}\ln 2}{4x^2 - 5x + 2^{-3x}};$$

ә) алымының туындысын бөлек табамыз:

$$(ctg^5 3x)' = \left|\begin{matrix} u = ctg3x \\ t = 3x \end{matrix}\right| = (u^5)' \cdot (ctgt)' \cdot (3x)' =$$

$$= 5u^4 \cdot \frac{-1}{\sin^2 t} \cdot 3 = -5ctg^4 3x \frac{3}{\sin^2 3x};$$

$$y' = \left(\frac{ctg^5 3x}{x+2}\right)' = \frac{\left(ctg^5 3x\right)' \cdot (x+2) - (x+2)' \cdot ctg^5 3x}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{-5ctg^4 3x \cdot \frac{3}{\sin^2 3x} \cdot (x+2) - ctg^5 3x}{(x+2)^2} = \frac{\frac{-15(x+2)ctg^4 3x}{\sin^2 3x} - ctg^5 3x}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{-15(x+2)ctg^4 3x - \sin^2 3x \cdot ctg^5 3x}{(x+2)^2 \sin^2 3x}.$$

2. Параметрлік түрде берілген функцияның туындысын табыңыз:

$$\begin{cases} x = 3t^4 - t^2 \\ y = t^3 - 5 \end{cases}.$$

Шешуі:

Параметрлік түрде берілген функцияның туындысын $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ формуласы бойынша табамыз:

$\begin{cases} x'_t = 12t^3 - 2t, \\ y'_t = 3t^2, \end{cases}$ болғандықтан, $y'_x = \frac{3t^2}{12t^3 - 2t} = \frac{3t^2}{2t\left(6t^2 - 1\right)} = \frac{3t}{2\left(6t^2 - 1\right)}.$

3. $y = \ln^3 x$ функциясының $x_0 = 1$ нүктедегі екінші ретті туындысын табыңыз.

Шешуі:

$$y' = \left(\ln^3 x\right)' = 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{3\ln^2 x}{x};$$

$$y'' = \left(\frac{3\ln^2 x}{x}\right)' = 3\cdot\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x - 1\cdot\ln^2 x}{x^2} = 3\cdot\frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{3\ln x(2-\ln x)}{x^2};$$

$$y''(1) = \frac{3\ln 1(2-\ln 1)}{1^2} = 0.$$

4. $y = \dfrac{x^2+1}{3x}$ функциясы үшін

а) анықталу облысы және үзіліс нүктелерін табыңыз;

ә) функцияның сызбасының асимптоталарын табыңыз;

б) функцияның сызбасының координаталық өстермен қиылысу нүктелерін табыңыз;

в) жұп, тақтығын анықтаңыз;

г) монотондық интервалдарын, экстремумдарын табыңыз;

д) ойыс, дөңес аралықтарын, иілу нүктелері табыңыз;

е) сызбасын салыңыз.

Шешуі:

а) $x = 0$ – үзіліс нүктесі, өзінің анықталу облысында функция үзіліссіз: $x \neq 0 \Leftrightarrow D(y): (-\infty;\ 0)\cup(0;+\infty)$.

Үзіліс нүктедегі біржақты шектерін анықтаймыз:

$$\lim_{x\to -0}\frac{x^2+1}{3x} = -\infty,\ \lim_{x\to +0}\frac{x^2+1}{3x} = +\infty;$$

ә) $f(x_0 \pm 0) = \pm\infty \Rightarrow x = 0$ – вертикаль асимптота.

$y = kx + b$ түзуі – көлбеу ассимптота,

мұндағы $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{3x^2} = \dfrac{1}{3}$,

$$b = \lim_{x\to\infty}(y-x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{3x} - \frac{x}{3}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x} = 0.$$

Демек, $y = \dfrac{1}{3}x$ – көлбеу ассимптота;

б) $x = 0$ – үзіліс нүктесі болғандықтан, функцияның графигі *OX* өсімен қиылыспайды.

$y = \dfrac{x^2+1}{3x} \neq 0$, демек функцияның сызбасы *OY* өсімен қиылыспайды;

в) $y(-x) = \dfrac{(-x)^2+1}{3(-x)} = -\dfrac{x^2+1}{3x} = -y(x)$, демек функция тақ, яғни оның сызбасы координаталар басына қарағанда симметриялы.

$x > 0$ үшін $y > 0$, сондықтан график бірінші және үшінші ширекте орналасқан.

Функция периодты емес.

Функция шексіз өседі, себебі

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{3x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^2+1\right)'}{\left(3x\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{3} = +\infty .$$

г) функцияның бірінші ретті туындысын табайық:

$$y' = \left(\frac{x^2+1}{3x}\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{2x^2-x^2-1}{x^2} = \frac{x^2-1}{3x^2},$$

$x_1 = -1,\ x_2 = 1$ мәндерінде $y' = 0$, демек бұл нүктелер – стационар нүктелер.

Функцияның анықталу облысында y' бірінші ретті туындысы бар. Әрбір интервалда функцияның туындысының таңбасын анықтаймыз:

$0 < x < 1$ үшін $y' < 0$ - функция кемімелі;

$1 < x < +\infty$ үшін $y' > 0$ - функция өспелі;

$x = 1$ нүктеде функция минимумға ие: $y(1) = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}$;

$-\infty < x < -1$ үшін $y' > 0$ - функция өспелі;

$-1 < x < 0$ үшін $y' < 0$ - функция кемімелі;

x=-1 нүктеде функция максимумға ие: $y(-1) = -\frac{2}{3}$;

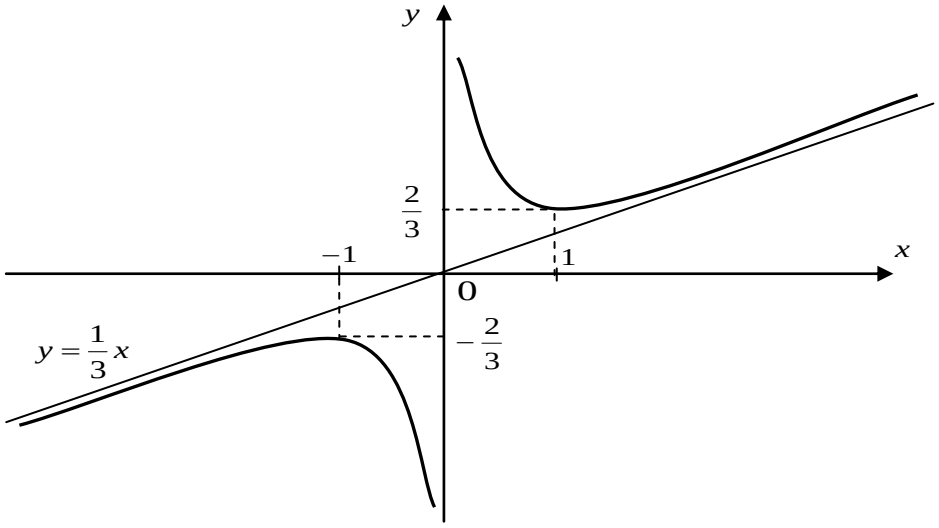
д) $y'' = \left(\frac{x^2-1}{3x^2}\right)' = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{3x^3}$, $y'' \neq 0$. Функцияның анықталу облысында екінші ретті туынды бар:

$x \in (0; +\infty)$ үшін $y'' > 0$ – сызба ойыс;

$x \in (-\infty; 0)$ үшін $y'' < 0$ – сызба дөңес;

иілу нүктелері жоқ;

е) функцияның сызбасы 1 суретте келтірілген.



1 сурет

5. Лопиталь ережесін пайдаланып, шекті табыңыз:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{x\sin 7x}$; ә) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Шешуі:

а) Лопиталь ережесі $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ немесе $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$:түрдегі анықталмағандықтарға қолданылады:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{x\sin 7x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 7x)'}{(x\sin 7x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{7\sin 7x}{\sin 7x+7x\cos 7x}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(7\sin 7x)'}{(\sin 7x+7x\cos 7x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{49\cos 7x}{7\cos 7x+7(\cos 7x-x\sin 7x)}=\frac{49}{14}=\frac{7}{2};$$

ә) $x=0$ мәнінде $\infty-\infty$ түріндегі анықталмағандықты аламыз, сондықтан бөлшектерді ортақ бөлімге келтіріп, шексіз аздардың эквиваленттігін қолданамыз:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=|\infty-\infty|=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\cdot\sin^2 x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\cdot x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2-\sin^2 x\right)'}{\left(x^4\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{6x^2}=\frac{1}{3}.$$

№3 есептеу-сызба жұмысы

3 Бір айнымалы функцияның интегралдық есептеуі

ЕСЖ мақсаты: студенттерді анықталмаған және анықталған интегралдың негізгі қасиеттері мен әдістерін меңгеруге, анықталған интегралды геометриялық, физикалық есептерді шешуде тиімді әдістерді пайдалана білуге дағдыландыру.

Тапсырмалар

1. Интегралды табыңыз.

1.1	$\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$	1.16	$\int x^2\cdot\sqrt[4]{b\cdot x}dx$
1.2	$\int\frac{\left(\sqrt{x^3}-2x^2+3x^4\right)}{x}dx$	1.17	$\int\frac{x^3-3\sqrt{x^5}-\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}}dx$
1.3	$\int\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}}+\frac{a}{x^4}-x\right)dx$	1.18	$\int\left(\sqrt{\frac{x}{a}-\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$
1.4	$\int\left(5x^3-\frac{\sin 5}{\sqrt[3]{x^5}}\right)dx$	1.19	$\int\left(x\cdot\sin a-\frac{4\sqrt{x}}{x^2}\right)dx$
1.5	$\int\left(a^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\right)^3 dx$	1.20	$\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3 dx$
1.6	$\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{x+2}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$	1.21	$\int\frac{x^4-2\sqrt{x}+x\sqrt{x}}{x^2}dx$
1.7	$\int\frac{\left(\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}\right)^2}{x}dx$	1.22	$\int\frac{\left(1-b\sqrt{x}\right)^2}{x^3}dx$

1.8	$\int x \cdot \sqrt[3]{a \cdot x} dx$	1.23	$\int \frac{\left(2-\sqrt{x^3}\right)^3}{x^2} dx$
1.9	$\int \frac{\sqrt{x}-3x \cdot \sqrt[3]{x}+x^5}{x^2} dx$	1.24	$\int \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}{\sqrt[4]{x}} dx$
1.10	$\int \frac{1-5x^3}{x^4} dx$	1.25	$\int \frac{(2x+5)^3}{x^2} dx$
1.11	$\int \frac{\left(x-\frac{a}{x}\right)^2}{\sqrt{x}} dx$	1.26	$\int \frac{x^3-2\sqrt{x}+x\sqrt[3]{x}}{x} dx$
1.12	$\int \frac{(2x+a)^3}{x^2} dx$	1.27	$\int \frac{\left(2-a\sqrt{x^3}\right)^2}{x^2} dx$
1.13	$\int \frac{(x-1)^3}{x \cdot \sqrt{x}} dx$	1.28	$\int \frac{\left(1-b\sqrt[3]{x}\right)}{x^2} dx$
1.14	$\int \frac{\left(\sqrt{b \cdot x}-\frac{x}{b}\right)^2}{x} dx$	1.29	$\int \frac{(2x+b)^3}{x^3} dx$
1.15	$\int \frac{x^4-2x-\sqrt{x}}{x^2} dx$	1.30	$\int \frac{\left(b \cdot x+\frac{a}{x}\right)^2}{\sqrt[3]{x}} dx$

2. Интегралды табыңыз.

2.1	$\int \pi^x \cdot e^{x+1} dx$	2.16	$\int \frac{2^x+3^x}{2^{x+1}} dx$
2.2	$\int \left(e^x+e^{2x}\right)^2 dx$	2.17	$\int \left(5^{x+1}+5^{-x}\right)^2 dx$
3.3	$\int \left(e^x-2e^{-x}\right) dx$	2.18	$\int \left(5^x-5^{-x}\right)^2 dx$
2.4	$\int 3^{-x}\left(7+2^{x+1}\right) dx$	2.19	$\int 5^x \cdot 3^{1-x} dx$
2.5	$\int \left(4e^x \cdot 5^x-\pi^{2x}\right) dx$	2.20	$\int e^x \cdot \sqrt{2^x} dx$
2.6	$\int e^{-x}\left(2^x-3e^{x+3}\right) dx$	2.21	$\int \frac{1}{e^x}\left(e^{x+1}+2e^{-x}\right) dx$
2.7	$\int 7^{-x}\left(\sqrt{7^{2x}}+5^x\right) dx$	2.22	$\int \left(e^x+e^{2x}\right)^3 dx$
2.8	$\int 5^{-x}\left(4-3^{x+1}\right) dx$	2.23	$\int \frac{3^{-x}+2^{x+3}}{2^{x+1}} dx$

2.9	$\int 3^x\left(5-7^{-x}\right)dx$	2.24	$\int 2^{-x}\left(3-5^{x+2}\right)dx$
2.10	$\int 2^x\cdot 5^x dx$	2.25	$\int 3^x\left(7+2^{-x}\right)dx$
2.11	$\int e^x\left(2^{x+1}-5e^{3-x}\right)dx$	2.26	$\int\left(e^x+2^{-x}\right)^2 dx$
2.12	$\int\left(3^{\frac{x}{2}}-3^{\frac{-x}{2}}\right)^2 dx$	2.27	$\int\left(e^x-2\right)^2 dx$
2.13	$\int 3^{-x}\left(4-5^{x+2}\right)dx$	2.28	$\int\left(e^{-x}-e^x\right)^3 dx$
2.14	$\int 4^x\left(7+2^{-x}\right)dx$	2.29	$\int\frac{1}{3^x}\left(e^{x+1}+2\cdot e^{-x}\right)dx$
2.15	$\int\frac{3^{-x}+2^{x+3}}{2^{x+1}}dx$	2.30	$\int\pi^{2x}\left(\frac{1}{2^x}-3^{x+1}\right)dx$

3. Интегралды табыңыз.

3.1	$\int\frac{\sin 2x}{\cos^3 x}dx$	3.16	$\int\frac{\cos^2 x+5\cos x}{\cos x}dx$
3.2	$\int\left(5\sin x-\frac{4}{\cos^2 x}\right)dx$	3.17	$\int\left(3\cos x-4\sin x\right)dx$
3.3	$\int\frac{2+\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$	3.18	$\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x}dx$
3.4	$\int\frac{1-3\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$	3.19	$\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx$
3.5	$\int\frac{1+5\cos^3 x}{\cos 2x+\sin^2 x}dx$	3.20	$\int\frac{\sin 2x}{\sin^2 x}dx$
3.6	$\int\frac{\cos 2x-5\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$	3.21	$\int\frac{5\sin 2x}{\cos^{23} x}dx$
3.7	$\int\frac{5\sin 2x-5tgx}{\sin x\cdot\cos x}dx$	3.22	$\int\frac{\cos 2x-\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$
3.8	$\int\frac{\sin^2 x-3\sin x-\frac{5}{\sin x}}{\sin x}dx$	3.23	$\int\frac{\cos^2 x+5\cos x}{\cos^2 x}dx$
3.9	$\int\left(3\sin x+\frac{2}{\cos^2 x}\right)dx$	3.24	$\int\frac{\cos^2 x-3\cos x}{\cos x}dx$
3.10	$\int\left(5\cos x-\frac{7}{\sin^2 x}\right)dx$	3.25	$\int\frac{\cos 2x-\cos^2 x}{\sin^2 x}dx$
3.11	$\int\frac{tgx}{\sin 2x}dx$	3.26	$\int\left(1+tg^2 x\right)dx$

3.12	$\int \frac{ctgx}{\sin x \cdot \cos x} dx$	3.27	$\int \frac{6\sin 2x}{\cos^2 x} dx$
3.13	$\int \left(\frac{\sin x}{2} + \frac{7}{\cos^2 x} \right) dx$	3.28	$\int ctg^2 x dx$
3.14	$\int \frac{\cos 2x - \cos^2 x}{\sin^4 x} dx$	3.29	$\int \frac{\cos\ 2x - \cos^2 x}{\sin^4 x} dx$
3.15	$\int \frac{2ctgx}{\sin 2x} dx$	3.30	$\int \frac{ctgx}{\sin 2x} dx$

4. Интегралды табыңыз.

4.1	$\int \left(2\cos 3x - \frac{7}{\sin^2 x} \right) dx$	4.16	$\int \frac{\sin^2 4x - 5\sin 4x}{\sin 4x} dx$
4.2	$\int \left(5\sin 4x + \frac{4}{\cos^2 x} \right) dx$	4.17	$\int \frac{3ctgx - 4}{\sin 2x} dx$
4.3	$\int \left(2\cos \frac{x}{2} + tgx \right) dx$	4.18	$\int \frac{5tgx - 3}{8\sin 2x} dx$
4.4	$\int \frac{ctgx + 1}{\sin 2x} dx$	4.19	$\int \left(5\sin \frac{x}{7} + \frac{4}{\cos^2 3x} \right) dx$
4.5	$\int \frac{tgx - 2}{\sin 2x} dx$	4.20	$\int (5\sin 3x - 4\cos 7x) dx$
4.6	$\int \left(3\sin \frac{x}{4} + \frac{4}{\cos^2 5x} \right) dx$	4.21	$\int \frac{5\sin 2x}{\cos^2 x} dx$
4.7	$\int (3\cos 5x - 4\sin 7x) dx$	4.22	$\int \frac{\cos^2 5x + 2\cos 5x}{\cos 5x} dx$
4.8	$\int \frac{3\sin 2x}{\cos^2 x} dx$	4.23	$\int \frac{5 - \sin^3 8x}{\sin^2 8x} dx$
4.9	$\int \frac{\cos^2 3x - 4\cos 3x}{\cos 3x} dx$	4.24	$\int \left(7\cos \frac{x}{3} - \frac{3}{\sin^2 2x} \right) dx$
4.10	$\int \frac{3 + \cos^3 3x}{\cos^2 3x} dx$	4.25	$\int \left(\frac{\sin 3x}{2} - \frac{8}{\cos^2 5x} \right) dx$
4.11	$\int \left(3\cos 7x - \frac{4}{\sin^2 3x} \right) dx$	4.26	$\int \left(5\cos \frac{7}{3} x - \frac{4}{\sin^2 5x} \right) dx$
4.12	$\int \left(\frac{\sin 6x}{2} + \frac{7}{\cos^2 4x} \right) dx$	4.27	$\int \left(3tg \frac{4}{3} x - \frac{3}{\cos^2 7x} \right) dx$
4.13	$\int \frac{1 - 2\sin^3 4x}{\sin^2 4x} dx$	4.28	$\int \frac{\cos^2 7x - 4\sin 7x}{\cos 7x} dx$

4.14	$\int\left(\frac{3\cos 4x}{7}-\frac{7}{\sin^2 3x}\right)dx$	4.29	$\int\frac{3tgx-4}{5\sin 2x}dx$
4.15	$\int\left(5\sin\frac{x}{3}+2\cos 7x\right)dx$	4.30	$\int\frac{3\sin 6x}{\cos^2 3x}dx$

5. Интегралды табыңыз.

5.1	$\int\left(\frac{5}{x^2-3}-\frac{7}{x^2+3}\right)dx$	5.16	$\int\frac{dx}{4x^2-1}$
5.2	$\int\frac{dx}{5-3x^2}$	5.17	$\int\frac{dx}{4x^2+1}$
5.3	$\int\frac{dx}{3x^2-2}$	5.18	$\int\left(\frac{3}{x^2-5}-\frac{2}{x^2+3}\right)dx$
5.4	$\int\frac{2}{2x^2-1}dx$	5.19	$\int\left(\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^2-2}\right)dx$
5.5	$\int\frac{dx}{2x^2-3}$	5.20	$\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^2+2}\right)dx$
5.6	$\int\frac{dx}{3+7x^2}$	5.21	$\int\left(\frac{7}{81-x^2}+\frac{4}{225+x^2}\right)dx$
5.7	$\int\frac{dx}{1-7x^2}$	5.22	$\int\frac{dx}{64x^2-1}$
5.8	$\int\frac{dx}{3x^2+2}$	5.23	$\int\frac{dx}{64x^2+1}$
5.9	$\int\left(\frac{7}{3-x^2}-\frac{4}{5+x^2}\right)dx$	5.24	$\int\left(\frac{72}{9+x^2}+\frac{14}{25-x^2}\right)dx$
5.10	$\int\left(\frac{1}{x^2-4}+\frac{5}{9+x^2}\right)dx$	5.25	$\int\frac{dx}{49x^2+16}$
5.11	$\int\frac{dx}{63+7x^2}$	5.26	$\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^2+4}\right)dx$
5.12	$\int\frac{dx}{16-27x^2}$	5.27	$\int\left(\frac{5}{x^2+36}+\frac{7}{x^2-9}\right)dx$
5.13	$\int\frac{dx}{4x^2+25}$	5.28	$\int\frac{6dx}{36x^2-25}$
5.14	$\int\left(\frac{7}{9-x^2}+\frac{4}{25+x^2}\right)dx$	5.29	$\int\frac{2}{25x^2-1}dx$
5.15	$\int\left(\frac{3}{4-x^2}-\frac{4}{16+x^2}\right)dx$	5.30	$\int\frac{dx}{25x^2-36}$

6. Интегралды табыңыз.

6.1	$\int(4x+3)\cdot\sin 5xdx$	6.16	$\int x\cdot\sin^2 2xdx$
6.2	$\int(3x-2)\cdot\cos 5xdx$	6.17	$\int\ln(4-2x)dx$
6.3	$\int e^{-3x}\cdot(2-9x)dx$	6.18	$\int 7^{-3x}\cdot(2-5x)dx$
6.4	$\int x\cdot\sin^2 xdx$	6.19	$\int(2x-7)\cdot\sin 3xdx$
6.5	$\int\ln(2x-1)dx$	6.20	$\int(8-3x)\cdot\cos 5xdx$
6.6	$\int 5^{-2x}\cdot(4+3x)dx$	6.21	$\int e^{-4x}\cdot(2+3x)dx$
6.7	$\int(2-4x)\cdot\sin 2xdx$	6.22	$\int x\cdot\cos^2 2xdx$
6.8	$\int(4x+7)\cdot\cos 3xdx$	6.23	$\int\ln(7-2x)dx$
6.9	$\int e^{2x}\cdot(4-7x)dx$	6.24	$\int 4^{-5x}\cdot(1-3x)dx$
6.10	$\int x\cdot\cos^2 xdx$	6.25	$\int(x+2)\cdot\sin 3xdx$
6.11	$\int\ln(3x+1)dx$	6.26	$\int(4x+3)\cdot\cos 6xdx$
6.12	$\int 2^{-3x}\cdot(4x-1)dx$	6.27	$\int e^{7x}\cdot xdx$
6.13	$\int(2-4x)\cdot\sin 2xdx$	6.28	$\int 3x\cdot\sin^2 2xdx$
6.14	$\int(8-3x)\cdot\cos 5xdx$	6.29	$\int\ln(7-5x)dx$
6.15	$\int e^{4x}\cdot(3+7x)dx$	6.30	$\int 4^{-3x}\cdot(5-2x)dx$

7. Интегралды табыңыз.

7.1	$\int\frac{1-\ln(x-1)}{x-1}dx$	7.16	$\int\frac{(2\cos x+3\sin x)dx}{(2\sin x-3\cos x)^3}$
7.2	$\int\frac{arctgx-x}{1+x^2}dx$	7.17	$\int\frac{\left(\sqrt{\arcsin 2x}+4\right)dx}{\sqrt{1-4x^2}}$
7.3	$\int\frac{(x+1)dx}{x^2+16}$	7.18	$\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-\ln^2 x}}$
7.4	$\int\frac{\arcsin^3 x-8}{\sqrt{1-x^2}}dx$	7.19	$\int\frac{(1-\cos x)dx}{(x-\sin x)^2}$
7.5	$\int x\cdot\left(2^{x^2+1}-4\right)dx$	7.20	$\int\frac{\sqrt[3]{tg2x}+1}{\cos^2 2x}dx$
7.6	$\int\frac{tg(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$	7.21	$\int x\cdot\cos\left(x^2+1\right)dx$
7.7	$\int\frac{(\arccos x)^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$	7.22	$\int\frac{(x^3+x)dx}{x^4+1}$

7.8	$\int \frac{1-\ln^2 x}{x}dx$	7.23	$\int \frac{(\sin x-\cos x)dx}{(\cos x+\sin x)^5}$
7.9	$\int \frac{\sqrt{arctgx}-3x}{1+x^2}dx$	7.24	$\int tgx\cdot \ln\cos x dx$
7.10	$\int \frac{5x^2dx}{4+x^3}$	7.25	$\int \frac{\arcsin 3x-8}{\sqrt{1-9x^2}}dx$
7.11	$\int \frac{(1-2x)dx}{\sqrt{1+x^2}}$	7.26	$\int \frac{2^{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}dx$
7.12	$\int x^3\left(e^{x^4+2}-2\right)dx$	7.27	$\int \frac{5-\ln^3 x}{x}dx$
7.13	$\int \frac{8x-arctg2x}{1+4x^2}dx$	7.28	$\int \frac{\left(\sqrt[3]{tg(x+1)}+5\right)dx}{\cos^2(x+1)}$
7.14	$\int \frac{1-\sqrt{\ln x}}{x}dx$	7.29	$\int \frac{(1-3x)dx}{1-x^2}$
7.15	$\int \frac{xdx}{4+x^4}$	7.30	$\int \frac{5xdx}{3+2x^2}$

8. Интегралды табыңыз.

8.1	$\int \frac{(x-3)dx}{x^2+8x+5}$	8.16	$\int \frac{(3-5x)dx}{x^2-2x+5}$
8.2	$\int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$	8.17	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$
8.3	$\int \frac{(5-x)dx}{x^2+2x+3}$	8.18	$\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+8x-3}$
8.4	$\int \frac{(4x+1)dx}{\sqrt{x^2-8x+17}}$	8.19	$\int \frac{(3x-5)dx}{\sqrt{x^2+8x+7}}$
8.5	$\int \frac{(5+7x)dx}{2-2x-x^2}$	8.20	$\int \frac{2xdx}{x^2+2x-4}$
8.6	$\int \frac{(3-2x)dx}{\sqrt{6x-8-x^2}}$	8.21	$\int \frac{(3x+7)dx}{\sqrt{2x+4-x^2}}$
8.7	$\int \frac{(7x+4)dx}{x^2-8x-15}$	8.22	$\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{x^2-8x+5}}$
8.8	$\int \frac{(5x-2)dx}{\sqrt{x^2-2x+3}}$	8.23	$\int \frac{(5-4x)dx}{x^2-8x+17}$
8.9	$\int \frac{(2x+7)dx}{x^2-4x+5}$	8.24	$\int \frac{(7-5x)dx}{\sqrt{2x-x^2+2}}$

8.10	$\int \frac{(x-1)dx}{x^2-4x+5}$	8.25	$\int \frac{(2x+5)dx}{x^2+2x+3}$
8.11	$\int \frac{(1-2x)dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$	8.26	$\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$
8.12	$\int \frac{(2+3x)dx}{4x-x^2-6}$	8.27	$\int \frac{(5x+3)dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$
8.13	$\int \frac{(8-3x)dx}{x^2+6x+11}$	8.28	$\int \frac{(8x-7)dx}{\sqrt{x^2+6x+18}}$
8.14	$\int \frac{(x-4)dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$	8.29	$\int \frac{(5x-7)dx}{\sqrt{8x-15-x^2}}$
8.15	$\int \frac{(2x-7)dx}{\sqrt{x^2-6x+11}}$	8.30	$\int \frac{(7x-2)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

9. Интегралды табыңыз.

9.1	$\int \frac{(5x+1)}{(x+2)(x^2-1)}dx$	9.16	$\int \frac{(7-6x)}{x(x^2+6)}dx$
9.2	$\int \frac{5x}{(x-1)(x^2+2)}dx$	9.17	$\int \frac{(5x-3)}{(x+7)(x^2-9)}dx$
9.3	$\int \frac{(2x-1)}{(x-3)(x^2+1)}dx$	9.18	$\int \frac{(7x+2)}{(x+1)(x^2+5)}dx$
9.4	$\int \frac{(x+4)}{(x+2)(x^2+7)}dx$	9.19	$\int \frac{(x-1)}{(x+9)(x^2+4)}dx$
9.5	$\int \frac{(2-x)}{(x+2)(x^2+4)}dx$	9.20	$\int \frac{dx}{(x+8)(x^2-5)}$
9.6	$\int \frac{(x+2)}{(x+4)(x^2+2)}dx$	9.21	$\int \frac{(2-5x)}{(x+1)(x^2+4)}dx$
9.7	$\int \frac{5}{(x-2)(x^2+7)}dx$	9.22	$\int \frac{(4-5x)}{(x+7)(x^2-3)}dx$
9.8	$\int \frac{(x-1)}{(x+3)(x^2+1)}dx$	9.23	$\int \frac{(4x-7)}{(x+2)(x^2+6)}dx$
9.9	$\int \frac{4x+3}{x(x^2+4)}dx$	9.24	$\int \frac{8}{(x+3)(x^2-4)}dx$
9.10	$\int \frac{2x+1}{(x-6)(x^2+5)}dx$	9.25	$\int \frac{(4x+6)}{(x+1)(x^2+5)}dx$
9.11	$\int \frac{2}{(x+5)(x^2-1)}dx$	9.26	$\int \frac{(3-4x)}{(x+3)(x^2+4)}dx$

9.12	$\int \frac{(4-7x)}{(x+2)(x^2+7)}dx$	9.27	$\int \frac{(7x+1)}{(x-2)(x^2+8)}dx$
9.13	$\int \frac{(x+4)}{(x+2)(x^2+9)}dx$	9.28	$\int \frac{(4x+1)}{(x-4)(x^2+1)}dx$
9.14	$\int \frac{(5x-5)}{(x+6)(x^2-3)}dx$	9.29	$\int \frac{5}{(x+2)(x^2+2)}dx$
9.15	$\int \frac{(2x+1)}{(x-6)(x^2+25)}dx$	9.30	$\int \frac{(6x-3)}{(x-2)(x^2+10)}dx$

10. Интегралды табыңыз.

10.1	$\int \frac{(x^3+1)dx}{x^2-x}$	10.16	$\int \frac{(x^5-x^3+1)dx}{x^2-x}$
10.2	$\int \frac{(x^5+3x^3-1)dx}{x^2+x}$	10.17	$\int \frac{(2x^5-8x^3+3)dx}{x^2+2x}$
10.3	$\int \frac{(3x^4-12x^3-7)dx}{x^2+2x}$	10.18	$\int \frac{(4+9x^3-x^5)dx}{x^2+3x}$
10.4	$\int \frac{(3x^3+25x+4)dx}{x^2+3x}$	10.19	$\int \frac{(3x^3-2)dx}{x^2-6x}$
10.5	$\int \frac{(3x^5-12x^2-7)dx}{x^2-2x}$	10.20	$\int \frac{(x^3+2x^2+3)dx}{x^2-4x}$
10.6	$\int \frac{(x^5-x^3+1)dx}{x^2-4x}$	10.21	$\int \frac{(2x^3-1)dx}{x^2-5x}$
10.7	$\int \frac{(x^3-3x^2-12)dx}{x^2+4x}$	10.22	$\int \frac{(2x^4+6x+7)dx}{x^2-6x}$
10.8	$\int \frac{(x^3-5x^2+5x+23)dx}{x^2+2x}$	10.23	$\int \frac{(2x^3+6x^2+4)dx}{x^2+7x}$
10.9	$\int \frac{(4x^4-x-3)dx}{x^2+x}$	10.24	$\int \frac{(x^3-10x-4)dx}{x^2-4x}$
10.10	$\int \frac{(x^3+13x-6)dx}{x^2+6x}$	10.25	$\int \frac{(x^3+6x^2+13)dx}{x^2+x}$
10.11	$\int \frac{(x^4+6x^3+24)dx}{x^2-3x}$	10.26	$\int \frac{(x^3-13x+6)dx}{x^2+2x}$
10.12	$\int \frac{(x^3+6x^2-5)dx}{x^2+4x}$	10.27	$\int \frac{(1+25x^3-x^5)dx}{x^2+2x}$
10.13	$\int \frac{(x^5-x^4+6)dx}{x^2-2x}$	10.28	$\int \frac{(4x^3+x^2+2)dx}{x^2+3x}$

10.14	$\int \frac{\left(4x^3+x^2-2\right)dx}{x^2+5x}$	10.29	$\int \frac{\left(3x^3+2x-1\right)dx}{x^2-7x}$
10.15	$\int \frac{\left(3x^3+2x^2+1\right)dx}{x^2+x}$	10.30	$\int \frac{\left(2x^5+6x^2-4\right)dx}{x^2+x}$

11. Интегралды есептеңіз.

11.1	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$	11.16	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$
11.2	$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$	11.17	$\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \cos^2 t dt$
11.3	$\int_{0.5}^1 e^{-2x+1} dx$	11.18	$\int_{0.5}^1 \frac{dx}{(x+1)^2}$
11.4	$\int_0^1 \frac{x+2}{x+1} dx$	11.19	$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2}$
11.5	$\int_{-\frac{\pi}{8}}^0 \frac{dx}{\cos^2 2x}$	11.20	$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$
11.6	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$	11.21	$\int_{\frac{1}{3}}^2 \frac{x^2+1}{x^4} dx$
11.7	$\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$	11.22	$\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2+4x+5}$
11.8	$\int_3^{10} \sqrt[3]{x-2} dx$	11.23	$\int_{0.25}^1 \frac{dx}{(4x+1)^2}$
11.9	$\int_0^1 \left(\sqrt{x-1}\right)^2 dx$	11.24	$\int_{0.5}^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}$
11.10	$\int_{-1}^2 x^4 dx$	11.25	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} tg \frac{x}{2} dx$
11.11	$\int_0^7 \sqrt[3]{x+1} dx$	11.26	$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)}$

11.12	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \sin^2 x dx$	11.27	$\int_{0}^{16} \sqrt[4]{x^5}\, dx$
11.13	$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$	11.28	$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^2+1}{x^4} dx$
11.14	$\int_{-1}^{-0.5} \frac{x^2-1}{x^4} dx$	11.29	$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$
11.15	$\int_{0}^{\pi} \left[\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 dx$	11.30	$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x-1)^3}$

12. Интегралды есептеңіз.

12.1	$\int_{0}^{\pi} x \cdot \sin\frac{x}{2} dx$	12.16	$\int_{0}^{1} x \cdot e^{-4x} dx$
12.2	$\int_{-1}^{0} x \cdot \cos \pi x dx$	12.17	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{\sin^2 x}$
12.3	$\int_{-1}^{0} x \cdot e^{3x} dx$	12.18	$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos 2x dx$
12.4	$\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x^2} dx$	12.19	$\int_{1}^{e} x^2 \cdot \ln x dx$
12.5	$\int_{0}^{1} x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x dx$	12.20	$\int_{0}^{2} x \cdot 3^{-x} dx$
12.6	$\int_{0}^{\sqrt{e}} \ln x dx$	12.21	$\int_{0}^{\pi} x \cdot \sin\frac{x}{3} dx$
12.7	$\int_{0}^{1} x \cdot \cos\frac{\pi x}{3} dx$	12.22	$\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$
12.8	$\int_{1}^{e} x \cdot \ln x dx$	12.23	$\int_{0}^{\pi} x \cdot \cos\frac{x}{4} dx$
12.9	$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\cos^2 x}$	12.24	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\sin^2 x}$

12.10	$\int_0^{\frac{1}{2}} x\cdot\sin\frac{\pi x}{2}dx$	12.25	$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$
12.11	$\int_0^1 x\cdot 5^x dx$	12.26	$\int_0^1 (x+2)\cdot e^{-x}dx$
12.12	$\int_{-1}^0 x\cdot\cos\pi x dx$	12.27	$\int_0^1 (x+1)\cdot 4^{-2x}dx$
12.13	$\int_{-1}^0 x\cdot e^{-2x}dx$	12.28	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cdot\cos 2x dx$
12.14	$\int_1^e \sqrt{x}\cdot\ln x dx$	12.29	$\int_{0,5}^1 \sqrt[3]{x}\cdot\ln x dx$
12.15	$\int_1^e \frac{\ln x dx}{x^3}$	12.30	$\int_0^1 (x+2)\cdot e^{3x}dx$

13. Интегралды есептеңіз.

13.1	$\int_{1+e}^{1+e^2} \frac{\ln(x-1)dx}{x-1}$	13.16	$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\arccos^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
13.2	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{arctgx}{1+x^2}dx$	13.17	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x\cdot\cos x+\sin x)}{(x\cdot\sin x)^2}dx$
13.3	$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{(x+\cos x)dx}{x^2+2\sin x}$	13.18	$\int_0^1 x\cdot e^{x^2}dx$
13.4	$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}$	13.19	$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+4}}$
13.5	$\int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$	13.20	$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln^5 x}}$
13.6	$\int_2^3 \frac{dx}{1+\sqrt{2x-1}}$	13.21	$\int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$
13.7	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2\cos x+3\sin x)}{(2\sin x-3\cos x)^3}dx$	13.22	$\int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$
13.8	$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln^3 x}}$	13.23	$\int_1^e \frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln^2 x+1}}$

13.9	$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$	13.24	$\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{5+4x}}$
13.10	$\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{arctg\,2x}{1+4x^2}dx$	13.25	$\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx$
13.11	$\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\cdot\left(\ln^2 x+1\right)}$	13.26	$\int\limits_{e-1}^{e^2-1}\frac{\ln^2(x+1)}{x+1}dx$
13.12	$\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{dx}{x\cdot\sqrt{1+x^2}}$	13.27	$\int\limits_{-1}^{0}\frac{\sqrt{tg(x+1)}}{\cos^2(x+1)}dx$
13.13	$\int\limits_{0}^{\sin 1}\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$	13.28	$\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\cdot\sqrt{arctgx}}$
13.14	$\int\limits_{-1}^{0}\frac{tg(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$	13.29	$\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{(x+\cos x)dx}{\left(x^2+2\sin x\right)^2}$
13.15	$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}tgx\cdot\ln\cos x dx$	13.30	$\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+1}}$

14. Меншіксіз интегралды табыңыз.

№	а)	ә)	№	а)	ә)
14.1	$\int\limits_{-\infty}^{0}x\cdot e^x dx$	$\int\limits_{-1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{x+1}}$	14.16	$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$	$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$
14.2	$\int\limits_{0}^{+\infty}x\cdot e^x dx$	$\int\limits_{-2}^{0}\frac{dx}{3x+2}$	14.17	$\int\limits_{-\infty}^{0}x^2\cdot e^{x^3}dx$	$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^4}}$
14.3	$\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{xdx}{e^{-2x}}$	$\int\limits_{0}^{e/2}\ln 2x dx$	14.18	$\int\limits_{0}^{+\infty}x\cdot e^{-x^2}dx$	$\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$
14.4	$\int\limits_{0}^{+\infty}x\cdot e^{-x^2}dx$	$\int\limits_{0}^{1}\ln x dx$	14.19	$\int\limits_{-1}^{+\infty}x\cdot e^{-\frac{x}{2}}dx$	$\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}\cdot$
14.5	$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{xdx}{x^4+2x^2+5}$	$\int\limits_{-3}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x+3}}$	14.20	$\int\limits_{0}^{+\infty}x\cdot e^{-x}dx$	$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$
14.6	$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\cdot(1+\ln x)}$	$\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2-x}}$	14.21	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-4x+13}$	$\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$
14.7	$\int\limits_{-1}^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+9}$	$\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x\cdot\sqrt{x}}$	14.22	$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+x}$	$\int\limits_{0}^{\pi/2}tg^2 x dx$

14.8	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+13}$	$\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2}$	14.23	$\int\limits_{2}^{\infty} x\cdot \ln x dx$	$\int\limits_{0}^{1/2} \frac{dx}{x\cdot \ln x}$
14.9	$\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$	$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$	14.24	$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{arctgx}{1+x^2} dx$	$\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 2x}$
14.10	$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{3x^2+1}$	$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$	14.25	$\int\limits_{-\infty}^{0} x\cdot e^{3x} dx$	$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-4x+3}$
14.11	$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\cdot(x+1)}$	$\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$	14.26	$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{4+x^2}} dx$	$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-5x}$
14.12	$\int\limits_{-\infty}^{0} x\cdot e^{3x} dx$	$\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$	14.27	$\int\limits_{-\infty}^{-1} x\cdot e^{2x} dx$	$\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$
14.13	$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$	$\int\limits_{0}^{+1} 2^{-\sqrt{x}}\cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx$	14.28	$\int\limits_{0}^{+\infty} x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$	$\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3}$
14.14	$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}} dx$	$\int\limits_{0}^{+1} e^{-\sqrt{x}}\cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx$	14.29	$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{9x^2+2}}$	$\int\limits_{0}^{4} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}\cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
14.15	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x+13}$	$\int\limits_{0}^{0,5} x\cdot \ln x dx$	14.30	$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10}$	$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^3}$

15. Берілген сызықтармен шектелген D облысының ауданын табыңыз.

15.1	$D:\begin{cases} y=x^2 \\ y=2-x^2 \end{cases}$	15.16	$D:\begin{cases} y=e^{-x},\ y=1 \\ x=\ln 3 \end{cases}$
15.2	$D:\begin{cases} y=\sqrt{x},\ y\geq 0 \\ x=4 \end{cases}$	15.17	$D:\begin{cases} y=\sin^2 x,\ y=0 \\ 0\leq x\leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$
15.3	$D:\begin{cases} x+y=2 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$	15.18	$D:\begin{cases} y=\frac{1}{x},\ y=0 \\ x=1,\ \ x=2 \end{cases}$
15.4	$D:\begin{cases} y=\sin^2 x,\ y=0 \\ 0\leq x\leq \pi \end{cases}$	15.19	$D:\begin{cases} y=tgx,\ y=\sqrt{3} \\ x=0 \end{cases}$
15.5	$D:\begin{cases} y\geq x^2 \\ y\leq 4 \end{cases}$	15.20	$D:\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x \end{cases}$

15.6	$D:\begin{cases} y=2x \\ y=\sqrt{x} \end{cases}$	15.21	$D:\begin{cases} y=x^2,\ y=0 \\ x=1 \end{cases}$
15.7	$D:\begin{cases} y=x^3 \\ y=\sqrt{x} \end{cases}$	15.22	$D:\begin{cases} y=\dfrac{10}{1+x^2},\ y=1 \end{cases}$
15.8	$D:\begin{cases} y=\cos^2 x,\ y=0 \\ -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$	15.23	$D:\begin{cases} y=x^2 \\ y=-x \end{cases}$
15.9	$D:\begin{cases} y=\dfrac{5}{1+x^2} \\ y=1 \end{cases}$	15.24	$D:\begin{cases} y=x^2 \\ y=\sqrt{x} \end{cases}$
15.10	$D:\begin{cases} y=\ln x,\ y=0 \\ x=e \end{cases}$	15.25	$D:\begin{cases} y=x^2 \\ y=x \end{cases}$
15.11	$D:\begin{cases} x+y=1 \\ x=0,\ y=0 \end{cases}$	15.26	$D:\begin{cases} y=\ln x \\ y=0 \\ x=e^2 \end{cases}$
15.12	$D:\begin{cases} y=x^2 \\ y=2+x \end{cases}$	15.27	$D:\begin{cases} y=e^{2x} \\ y=1 \\ x=1 \end{cases}$
15.13	$D:\begin{cases} y=\sqrt{x},\ y\ge 0 \\ x=9 \end{cases}$	15.28	$D:\begin{cases} y=\sin 2x,\ y=0 \\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$
15.14	$D:\begin{cases} y=2x^2,\ y=0 \\ x=2 \end{cases}$	15.29	$D:\begin{cases} y\ge x^2 \\ y\le 1 \end{cases}$
15.15	$D:\begin{cases} y\ge x^2 \\ y\le 9 \end{cases}$	15.30	$D:\begin{cases} y=tgx,\ y=1 \\ x=0 \end{cases}$

16. Параметрлік теңдеулермен берілген қисықтың ұзындығын есептеңіз.

16.1	$\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \end{cases} 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$	16.16	$\begin{cases} x=2{,}5(t-\sin t), \\ y=2{,}5(1-\cos t), \end{cases} \dfrac{\pi}{2}\le t\le\pi.$
16.2	$\begin{cases} x=4(2\cos t-\cos 2t), \\ y=4(2\sin t-\sin 2t), \end{cases}$ $0\le t\le\pi.$	16.17	$\begin{cases} x=6(\cos t+t\sin t), \\ y=6(\sin t-t\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le\pi.$

16.3	$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} 0 \le t \le \frac{3\pi}{2}.$	16.18	$\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases} 0 \le t \le \frac{\pi}{6}.$
16.4	$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{4}.$	16.19	$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} 0 \le t \le 2\pi.$
16.5	$\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} 0 \le t \le 2\pi.$	16.20	$\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} 0 \le t \le \frac{\pi}{3}.$
16.6	$\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3}.$	16.21	$\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} 0 \le t \le \pi.$
16.7	$\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t), \\ y = 4(\sin t - t\cos t), \end{cases} 0 \le t \le 2\pi.$	16.22	$\begin{cases} x = 10\cos^3 t, \\ y = 10\sin^3 t, \end{cases} 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$
16.8	$\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t), \\ y = 8(\sin t - t\cos t), \end{cases} 0 \le t \le \frac{\pi}{4}.$	16.23	$\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases} \frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{4}.$
16.9	$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} 0 \le t \le \pi.$	16.24	$\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases} 0 \le t \le \frac{\pi}{4}.$
16.10	$\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t), \end{cases} 0 \le t \le \frac{\pi}{3}.$	16.25	$\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t), \\ y = 2(\sin t - t\cos t), \end{cases} 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$
16.11	$\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \pi \le t \le 2\pi.$	16.26	$\begin{cases} x = 7(t - \sin t), \\ y = 7(1 - \cos t), \end{cases} 0 \le t \le \pi.$
16.12	$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t, \\ y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 2t, \end{cases} \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3}.$	16.27	$\begin{cases} x = 3.5(\cos t + t \cdot \sin t), \\ y = 3.5(\sin t - t \cdot \cos t), \end{cases} 0 \le t \le \frac{\pi}{4}.$
16.13	$\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t, \end{cases} 0 \le t \le \frac{\pi}{3}.$	16.28	$\begin{cases} x = 9\cos^3 t, \\ y = 9\sin^3 t, \end{cases} 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$
16.14	$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \frac{\pi}{2} \le t \le \pi.$	16.29	$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$

16.15	$\begin{cases} x = 3{,}5(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3{,}5(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$	16.30	$\begin{cases} x = 8(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 8(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$

Тапсырманы орындауға арналған әдістемелік нұсқау және типтік нұсқаның шешуі

1-3 тапсырмалардағы интегралдарды интегралдау ережелерін, интегралдар кестесін, интеграл таңбасы астындағы функцияны түрлендіру арқылы табамыз.

1. Интегралды табыңыз: $\int \frac{x^4 - 2\sqrt{x} + 3x\sqrt{x}}{x^3} dx.$

Шешуі:

$$\int \frac{x^4 - 2\sqrt{x} + 3x\sqrt{x}}{x^3} dx = \int \left(\frac{x^4}{x^3} - \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x^3} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{x^3} \right) dx = \int x dx - 2\int x^{-\frac{5}{2}} dx + 3\int x^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \frac{x^{1+1}}{1+1} - 2\frac{x^{-\frac{5}{2}+1}}{-\frac{5}{2}+1} + 3\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^2}{2} - 2\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} + 3\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3x^{\frac{3}{2}}} + 6x^{\frac{1}{2}} + C.$$

2. Интегралды табыңыз: $\int \frac{1}{3^x}\left(e^{x+2} - 2\cdot e^{1-x}\right)dx.$

Шешуі:

$$\int \frac{1}{3^x}\left(e^{x+2} - 2\cdot e^{1-x}\right)dx = \int \left(\frac{e^x \cdot e^2}{3^x} - 2\cdot\frac{e}{3^x e^x} \right) dx = e^2 \cdot \int \left(\frac{e}{3}\right)^x dx - 2\cdot e\cdot \int \left(\frac{1}{3e}\right)^x dx =$$

$$= \frac{e^2 \cdot e^x}{3^x \ln\frac{e}{3}} - 2\cdot\frac{1}{(3e)^x \ln\frac{1}{3e}} + C = \frac{e^{x+2}}{3^x(\ln e - \ln 3)} + \frac{2\cdot e^{1-x}}{3^x(\ln 3 - \ln e)} + C =$$

$$= \frac{e^{x+2}}{3^x(1-\ln 3)} + \frac{2\cdot e^{1-x}}{3^x(1+\ln 3)} + C$$

3. Интегралды табыңыз: $\int \frac{5\cdot\sin 2x}{\cos^2 x} dx.$

Шешуі:

$$\int \frac{5\cdot\sin 2x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{10\cdot\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x} dx = 10\cdot\int tgx dx = -10\ln|\cos x| + C.$$

4. Интегралды табыңыз: $\int \frac{7\cdot\cos^2 3x - 4\cdot\cos 3x}{2\cdot\cos 3x}dx.$

Шешуі:

$$\int \frac{7\cdot\cos^2 3x - 4\cdot\cos 3x}{2\cdot\cos 3x}dx = \int \frac{7\cdot\cos^2 3x}{2\cdot\cos 3x}dx - \int \frac{4\cdot\cos 3x}{2\cdot\cos 3x}dx = \frac{7}{2}\int \cos 3x dx - 2\int dx =$$

$$= \frac{7}{6}\cdot\sin 3x - 2\cdot x + C.$$

5. Интегралды табыңыз: $\int\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2+3}\right)dx.$

Шешуі:

$$\int\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2+3}\right)dx = \int \frac{dx}{x} - 2\cdot\int \frac{dx}{3+x^2} = \ln|x| - \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot arctg\,\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

6. Интегралды табыңыз: $\int (2-3\cdot x)\cdot\sin\frac{x}{4}dx$.

Шешуі:

Бұл интегралға бөліктеп интегралдау формуласын $\int udv = uv - \int vdu$ қолданамыз:

$$\int (2-3\cdot x)\cdot\sin\frac{x}{4}dx = \begin{vmatrix} u = 2-3\cdot x & du = -3\cdot dx \\ dv = \sin\frac{x}{4}dx & v = \int \sin\frac{x}{4}dx = -4\cdot\cos\frac{x}{4} \end{vmatrix} =$$

$$= -4\cdot(2-3\cdot x)\cdot\cos\frac{x}{4} - \int 3\cdot 4\cdot\cos\frac{x}{4}dx = 4(3\cdot x-2)\cdot\cos\frac{x}{4} - 12\cdot\int\cos\frac{x}{4}dx =$$

$$= 4\cdot(3\cdot x-2)\cdot\cos\frac{x}{4} - 48\cdot\sin\frac{x}{4} + C.$$

7. Интегралды табыңыз: $\int \frac{\sqrt{tg3x+4}-7}{\cos^2 3x}dx$.

Шешуі:

Бұл интегралға айнымалыны ауыстыру тәсілін қолданамыз:

$$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{vmatrix} = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt;$$

$$\int \frac{\sqrt{tg3x+4}-7}{\cos^2 3x}dx = \int \frac{\sqrt{tg3x+4}}{\cos^2 3x}dx - \int \frac{7dx}{\cos^2 3x} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\textit{интегралда ауыстыру жасаймыз}: \\ tg3x+4 = t \;\; dt = \frac{3dx}{\cos^2 3x} \;\; \frac{dx}{\cos^2 3x} = \frac{dt}{3} \end{vmatrix} = \int \frac{t^{\frac{1}{2}}dt}{3} - 7\cdot\int \frac{dx}{\cos^2 3x} =$$

$$= \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{3\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)} - \frac{7}{3}\cdot tg3x + C = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3\cdot\frac{3}{2}} + \frac{7}{3}\cdot tg3x + C = \frac{2}{9}\cdot(tg3x+4)^{\frac{3}{2}} +$$

$$+ \frac{7}{3}\cdot tg3x + C.$$

8. Интегралды табыңыз: $\int \frac{(5x+3)dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$.

Шешуі:

Бұл интегралда квадрат үшмүше бар болғандықтан, толық квадратын ажыратамыз:

$$\int \frac{(5x+3)dx}{\sqrt{4x-3-x^2}} = \int \frac{(5x+3)dx}{\sqrt{-\left(x^2-4x+4-4+3\right)}} = \int \frac{(5x+3)dx}{\sqrt{-\left((x-2)^2-1\right)}} =$$

$$= \int \frac{(5x+3)dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \left|\begin{matrix} x-2=t \\ x=t+2 \\ dx=dt \end{matrix}\right| = \int \frac{5\cdot(t+2)+3}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int \frac{5t+13}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int \frac{5tdt}{\sqrt{1-t^2}} + \int \frac{13dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \left|\begin{matrix} 1-t^2=z; & -2tdt=dz \\ tdt=-\frac{dz}{2} & \end{matrix}\right| = -\frac{5}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} + 13\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -5\sqrt{z} + 13\arcsin t + C =$$

$$= -5\sqrt{1-t^2} + 13\arcsin t + C = -5\sqrt{1-(x-2)^2} + 13\arcsin(x-2) + C =$$

$$= -5\sqrt{4x-x^2-3} + 13\arcsin(x-2) + C.$$

9. Интегралды табыңыз: $\int \frac{(2\cdot x-3)dx}{(x-2)(x^2+10)}$.

Шешуі:

Интегралданушы функция – дұрыс рационал бөлшек, оны анықталмаған коэффициенттер тәсілі арқылы жай бөлшектерге жіктейміз:

$$\frac{2x-3}{(x-2)(x^2+10)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+10}.$$

Теңдіктің оң жағындағы бөлшектерді ортақ бөлімге келтіріп, екі жағының алымдарын теңестіреміз:

$$A(x^2+10) + (Bx+C)(x-2) = 2x-3;$$

$x=2$ үшін $14A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{14}$.

Қалған коэффициенттерді анықтау үшін жақшаларды ашамыз және алынған өрнектің екі жағындағы x-тің бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін теңестіреміз:

$$Ax^2+10A+Bx^2+Cx-2Bx-2C=2x-3;$$

$$x^2\,\Big|\; A+B=0;$$

$$x\;\Big|\; C-2B=2\Rightarrow\; B=-\frac{1}{14},\; C=2+\frac{2}{14}=\frac{15}{7}\;.$$

Сонымен, $\dfrac{2x-3}{(x-2)(x^2+10)}=\dfrac{\frac{1}{14}}{x-2}+\dfrac{\frac{15}{7}-\frac{x}{14}}{x^2+10}$.

Демек,

$$\int\frac{(2\cdot x-3)dx}{(x-2)(x^2+10)}=\frac{1}{14}\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{\left(\frac{15}{7}-\frac{x}{14}\right)dx}{x^2+10}=\frac{1}{14}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{15}{7}\int\frac{dx}{x^2+10}-$$

$$-\frac{1}{14}\int\frac{xdx}{x^2+10}=\left|\begin{array}{l}3-\text{интегралда айнымалы ауыстырамыз:}\\ x^2+10=t\quad 2\cdot xdx=dt\quad xdx=\frac{1}{2}dt\end{array}\right|=\frac{1}{14}\ln|x-2|+$$

$$+\frac{15}{7\sqrt{10}}arctg\,\frac{x}{\sqrt{10}}-\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{14}\ln|x-2|+\frac{15\cdot\sqrt{10}}{7\cdot 10}arctg\,\frac{x}{\sqrt{10}}-\frac{1}{28}\ln|t|+C=$$

$$=\frac{1}{14}\ln|x-2|+\frac{3\cdot\sqrt{10}}{14}arctg\,\frac{x}{\sqrt{10}}-\frac{1}{28}\ln\left|x^2+10\right|+C.$$

10. Интегралды табыңыз: $\int\dfrac{\left(2\cdot x^5-6\cdot x+3\right)}{x^2+2\cdot x}dx$.

Шешуі:

Интегралданушы функция бұрыс рационал функция (алымындағы көпмүшенің дәрежесі бөліміндегі көпмүшенің дәрежесінен артық), сондықтан алымын бөліміне «бұрыштап» бөлу арқылы көпмүше мен дұрыс бөлшектің қосындысы түріне келтіреміз:

$$\frac{2x^5-6x+3}{x^2+2x}=2x^3-4x^2+8x-16+\frac{26x+3}{x^2+2x}\;.$$

Дұрыс бөлшекті анықталмаған коэффициенттер тәсілімен жай бөлшектерге жіктейміз (9 тапсырма):

$$\frac{26x+3}{x(x+2)}=\frac{3}{2x}+\frac{49}{2(x+2)}\;.$$

Сонымен,

$$\int\frac{\left(2x^5-6x+3\right)}{x^2+2x}dx=\int\left(2x^3-4x^2+8x-16+\frac{3}{2x}+\frac{49}{2(x+2)}\right)dx=$$

$$=2\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+\frac{8x^2}{2}-16x+\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{49}{2}\ln|x+2|+C=$$

$$=\frac{x^4}{2}-\frac{4x^3}{3}+4x^2-16x+\ln\sqrt{\frac{(x+2)^{49}}{x^3}}+C\ .$$

11. Анықталған интегралды есептеңіз: $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{(x+3)^3}$.

Шешуі:

$$\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{(x+3)^3}=\int\limits_{-1}^{2}\frac{d(x+3)}{(x+3)^3}=\int\limits_{-1}^{2}(x+3)^{-3}d(x+3)=\frac{(x+3)^{-3+1}}{-2}\Big|_{-1}^{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{4}\right)=\frac{21}{200}.$$

12. Интегралды табыңыз: $\int\limits_{1}^{e}(x+1)\cdot\ln x dx$.

Шешуі:

Бөліктеп интегралдау формуласын қолданамыз:

$$\int\limits_{1}^{e}(x+1)\cdot\ln x dx=\begin{vmatrix}u=\ln x,\quad du=\dfrac{dx}{x}\\ dv=(x+1)dx,\quad v=\dfrac{x^2}{2}+x\end{vmatrix}=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\cdot\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\frac{dx}{x}=$$

$$=\int\limits_{1}^{e}(x+1)\cdot\ln x dx=\begin{vmatrix}u=\ln x,\quad du=\dfrac{dx}{x}\\ dv=(x+1)dx,\quad v=\dfrac{x^2}{2}+x\end{vmatrix}=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\cdot\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\frac{dx}{x}=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\cdot\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e\frac{x}{2}dx-\int\limits_1^e dx=\frac{e^2}{2}+e-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e-x\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}+e-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}-e+1=$$

$$=\frac{e^2}{4}+\frac{5}{4}.$$

13. Интегралды табыңыз: $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+1}}$.

Шешуі:

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+1}} = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{x}=t, \quad x=\frac{1}{t}, \quad dx=-\frac{dt}{t^2} \\ при \quad x=\sqrt{3}, \quad t=\frac{1}{\sqrt{3}} \\ при \quad x=\sqrt{8}, \quad t=\frac{1}{\sqrt{8}} \end{array} \right| = -\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{8}}} \frac{dt}{t^2\cdot\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} = \int_{\frac{1}{\sqrt{8}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= \ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| \Big|_{\frac{1}{\sqrt{8}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \ln\left|\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{1+\frac{1}{3}}\right| - \ln\left|\frac{1}{\sqrt{8}}+\sqrt{1+\frac{1}{8}}\right| = \ln\frac{1+2}{\sqrt{3}} - \ln\frac{1+3}{\sqrt{8}} =$$

$$= \ln\frac{3}{\sqrt{3}} - \ln\frac{4}{2\sqrt{2}} = \ln\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

14. Интегралды есептеңіз (немесе жинақсыз екендігін дәлелдеңіз):

а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$; *б)* $\int_0^2 \frac{dx}{2-x}$.

Шешуі:

а) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+4+5-4} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+2)^2+1} = arctg(x+2)\Big|_{-\infty}^{\infty} =$$

$$= arctg\,\infty - arctg\,(-\infty) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi,$$

демек интеграл жинақты.

б) $$\int_0^2 \frac{dx}{2-x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{2-x} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\ln|2-x|\Big|_0^{2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln 2 - \ln(2-2+\varepsilon)) = \infty,$$

демек интеграл жинақсыз.

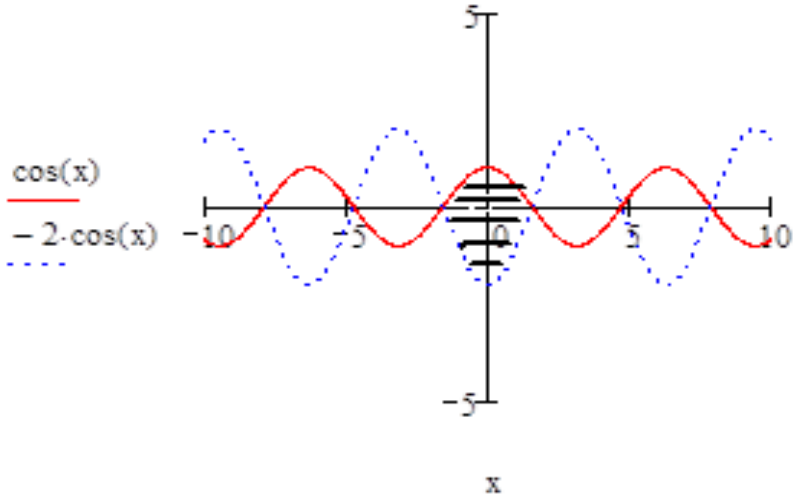
15. $y=\cos x, \quad y=-2\cos x, \quad -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ сызықтарымен шектелген D облысының ауданын табыңыз.

Шешуі:

D фигурасын сызамыз (2 сурет):

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos x - (-2\cos x)]dx = 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 3\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 3\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= 3\left(\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right) = 6\sin\frac{\pi}{2} = 6 \ (кв.бірл).$$



2 сурет

16 Параметрлік теңдеулермен берілген қисықтың ұзындығын есептеңіз:

$$\begin{cases} x = 4\cdot(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 4\cdot(2\sin t - \sin 2t) \end{cases};$$

$$0 \le t \le \pi \ .$$

Шешуі:

Қисықтың ұзындығын мына формула бойынша есептейміз:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt \ .$$

$$x'(t) = (4(2\cos t - \cos 2t))' = 4\cdot(-2\sin t + 2\sin 2t);$$

$$y'(t) = (4(2\sin t - \sin 2t))' = 4(2\cos t - 2\cos 2t);$$

$$x'^2(t) + y'^2(t) = (8(-\sin t + \sin 2t))^2 + (8(\cos t - \cos 2t))^2 =$$

$$= 64(\sin^2 t - 2\sin t\cdot\sin 2t + \sin^2 2t + \cos^2 t - 2\cos t\cdot\cos 2t + \cos^2 2t) =$$

$$= 64(2 - 2\cos t) = 128(1 - \cos t) = 128\cdot 2\cdot\sin^2\frac{t}{2};$$

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{128\cdot 2\cdot\sin^2\frac{t}{2}}\, dt = 16\int_0^{\pi} \sin\frac{t}{2} = -32\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} = 32.$$

Әдебиеттер тізімі

1 Хасеинов К.А. Математика канондары. – Алматы, 2004.

2 Айдос Е.Ж. Жоғары математика.–Алматы, 2004.

3 Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1,2. 2005.

4 Индивидуальные задания по высшей математике: Комплексные числа.

5 Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ч.2: Учеб. пособие под ред. А.П. Рябушко – Мн. : Выш.шк., 2007.

6 Искакова А.Қ., Есботаева Э.С. Математика 1. 5В070200 Атоматтандыру және басқару мамандығының студенттері үшін дәрістер жинағы. Алматы: АЭжБУ. 2017.

Мазмұны

Кіріспе..... 3
№1 есептеу-сызба жұмысы. Талдауға кіріспе. Шектер теориясы..... 3
Тапсырмалар..... 3
Типтік нұсқаның шешуі..... 10
№2 есептеу-сызба жұмысы. Бір айнымалы функцияның дифференциал дық есептеуі. Тапсырмалар..... 12
Типтік нұсқаның шешуі..... 16
№3 есептеу-сызба жұмысы. Бір айнымалы функцияның интегралдық есептеуі. Тапсырмалар..... 21
Типтік нұсқаның шешуі..... 37
Әдебиеттер тізімі..... 44

2018 ж. Жиынтық жоспары, реті 170

Искакова Ақжолтай Құрмантаевна
Есботаева Эльмира Султанмуратовна

МАТЕМАТИКА 1

5В070200 – Автоматтандыру және басқару
мамандығының студенттеріне арналған есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар

Редакторы Ж.Н.Изтелеуова
Стандарттау бойынша маман Н.Қ.Молдабекова

Басуға қол қойылды _____ Пішіні 60х84 1/16
Таралымы 80 дана Баспаханалық қағаз №1
Көлемі 2,75 б.т. Тапсырыс__ Бағасы 1380 тг.

«Алматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірмелі-көбейткіш бюросы
050013, Алматы, Байтұрсынұлы көшесі, 126