Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ имени ГУМАРБЕКА ДАУКЕЕВА

Кафедра математики и математического моделирования

МАТЕМАТИКА 1

Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов всех специальностей

Алматы 2021

СОСТАВИТЕЛЬ: Толеуова Б.Ж. Математика 1: Методические указания и задания к выполнению расчетно-графических работ для студентов всех специальностей. - Алматы: АУЭС, 2021. - 70 стр.

Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ по дисциплине «Математика 1» предназначены для студентов всех специальностей, состоит из трех частей и содержат задания из разделов «Векторная и линейная алгебра. Аналитическая геометрия», «Математический анализ» (предел последовательности, предел, непрерывность, дифференциальное исчисление функции одной переменной), «Интегральное исчисление функции одной переменной». Решение типового варианта приведено полностью. Приведены некоторые теоретические материалы, необходимые в ходе выполнения заданий. Методические указания составлены в соответствии учебной программы.

Табл. 9, библ.назв.-7.

Рецензент: Нысанбаева С.К., PhD, доцент

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи имени Гумарбека Даукеева» на 2020 г.

Введение

Математика играет важную роль в нженерно-технических исследованиях. Она является не только аппаратом количественного расчета, но также методом точного исследования и средством предельно четкой формулировки понятий и проблем. Математические методы стали составной частью любой технической дисциплины. Все это приводит к необходимости усиления прикладной направленности курса математики и повышения уровня фундаментальной математической подготовки студентов.

Методические указания содержат расчетно-графические задания из таких разделов дисциплины «Математика 1», как «Векторная и линейная алгебра. Аналитическая геометрия», «Математический анализ» (предел последовательности, предел, непрерывность, дифференциальное исчисление функции одной переменной), «Интегральное исчисление функции одной переменной». Приведены необходимый теоретический материал и формулы, а также решение типового варианта.

1 Расчетно-графическая работа №1. Векторы и линейная алгебра. Аналитическая геометрия.

Цель: научить студентов решать задачи, связанные с векторами и действиями над ними, прямыми, плоскостями, ознакомить с понятиями матрицы и определителя, и действиями над ними, а также с кривыми второго порядка.

1.1 Теорические вопросы

2. Определители, их свойства. Вычисление определителей.
3. Матрицы, действиями над ними, обратная матрица.
4. Векторы, их длина. Действиями над векторами. Коллинеарность, компланарность и ортогональность векторов. Угол между векторами.
5. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов, их применение.
6. Уравнение прямой на плоскости и в пространстве.
7. Уравнения плоскости.
8. Угол между прямой и плоскостью.
9. Расстояние от точки до прямой и до плоскости.
10. Канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы.
11. Решение систем линейных уравнений методом Крамера и матричным методом.

1.2 Расчётные задания

1. Дан определитель третьего порядка.

а) найти минор M_{ij} и алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij};

б) вычислить определитель, разложив по элементам i-ой строки;

в) вычислить определитель, разложив по элементам j-го столбца;

г) вычислить определитель по правилу Сарриуса (правило треугольников).

Таблица 1

1.1 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, i = 2, j = 1$	1.2 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}, i = 2, j = 3$	1.3 $\begin{vmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}, i = 1, j = 2$
1.4 $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 8 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}, i = 3, j = 1$	1.5 $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, i = 1, j = 2$	1.6 $\begin{vmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}, i = 3, j = 2$
1.7 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \end{vmatrix}, i = 2, j = 1$	1.8 $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{vmatrix}, i = 3, j = 2$	1.9 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}, i = 3, j = 1$
1.10 $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{vmatrix}, i = 3, j = 2$	1.11 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}, i = 2, j = 3$	1.12 $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}, i = 3, j = 1$
1.13 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}, i = 2, j = 3$	1.14 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, i = 1, j = 2$	1.15 $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}, i = 2, j = 1$
1.16 $\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix}, i = 3, j = 1$	1.17 $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}, i = 2, j = 3$	1.18 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}, i = 3, j = 3$
1.19 $\begin{vmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}, i = 3, j = 2$	1.20 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}, i = 1, j = 3$	1.21 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, i = 3, j = 2$
1.22	1.23	1.24

$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}, i = 2, j = 2$	$\begin{vmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}, i = 3, j = 1$	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{vmatrix}, i = 2, j = 1$
1.25 $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix}, i = 2, j = 3$	1.26 $\begin{vmatrix} 8 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \\ 10 & 3 & 2 \end{vmatrix}, i = 1, j = 3$	1.27 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, i = 1, j = 1$
1.28 $\begin{vmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, i = 2, j = 3$	1.29 $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, i = 1, j = 3$	1.30 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 7 \end{vmatrix}, i = 3, j = 2$

2. Даны матрицы *A*, *B*, *C*.

а) возможно ли произведения *AB*, *BC*? Если возможно, то найти эти произведения; если невозможно, то дать объяснение;

б) найти обратную матрицу A^{-1}.

Таблица 2

2.1	$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
2.2	$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$
2.3	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$
2.4	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 7 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$
2.5	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
2.6	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
2.7	$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2.8	$A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 0\\ 4 & 5 & 1\\ -2 & 3 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 2 & -2\\ 3 & 5 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}6\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$
2.9	$A=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 0 & 2 & 6\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-5 & 3 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}8 & -1\\ 3 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}$
2.10	$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 4 & 7\\ -5 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}5 & 4 & -2\end{pmatrix}$
2.11	$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 7\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 5 & 3\\ 1 & 5 & 6 & 1\end{pmatrix}$
2.12	$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -4\\ 2 & -4 & 6\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 1 & 3\\ 2 & 0\\ 7 & 4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}8 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
2.13	$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & 5 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4\\ -3\\ 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & 2 & -4\\ 1 & 3 & 7\end{pmatrix}$
2.14	$A=\begin{pmatrix}6 & 9 & 4\\ -1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 4 & 7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}5\\ -8\\ 1\end{pmatrix}$
2.15	$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 8\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6 & -2 & 4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & -6\\ 7 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$
2.16	$A=\begin{pmatrix}4 & 5 & 1\\ -1 & 0 & 3\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -2\\ 7 & 5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4\end{pmatrix}$
2.17	$A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 6\\ 4 & 3 & -4\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1 & 8\\ 1 & -9 & 2 & 2\end{pmatrix}$
2.18	$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -3\\ 4 & -3 & 2\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 4 & 9\\ 1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}5 & -6\\ 2 & 1\end{pmatrix}$
2.19	$A=\begin{pmatrix}4 & -1 & -2\\ 4 & 3 & 7\\ 2 & 0 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-8\\ 1\\ 9\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}6 & -1 & 5\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$
2.20	$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 6\\ 1 & 7 & 2\\ -2 & 1 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 8 & -4\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2\\ -6\\ 8\end{pmatrix}$

2.21	$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
2.22	$A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -2 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$
2.23	$A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
2.24	$A=\begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & -7 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$
2.25	$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 6 & -9 \end{pmatrix}$
2.26	$A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -4 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 6 & -8 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$
2.27	$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -9 & 1 \\ 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
2.28	$A=\begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -8 \end{pmatrix}$
2.29	$A=\begin{pmatrix} 10 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$
2.30	$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 6 \\ -3 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

3. Даны точки A, B , векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}, \vec{b}$ и $\vec{c}$. Найти

а) длину вектора $\vec{a}$ и середину отрезка AB;

б) проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{c}$;

в) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{b}$ и $\vec{c}$;

г) объем пирамиды, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Таблица 3

3.1 $A(5;-4;3), B(1;2;-8)$, $\vec{b}(0;1;4), \vec{c}(5;2;-3)$	3.2 $A(-3;1;0), B(7;1;-5)$, $\vec{b}(7;1;4), \vec{c}(5;8;-3)$
3.3 $A(0;4;5), B(3;-2;1)$, $\vec{b}(-9;-3;0), \vec{c}(0;2;-2)$	3.4 $A(3;-2;5), B(4;5;7)$, $\vec{b}(5;1;4), \vec{c}(5;-3;-3)$
3.5 $A(2;-3;7), B(3;2;8)$, $\vec{b}(6;4;6), \vec{c}(0;6;-2)$	3.6 $A(2;-1;7), B(6;3;4)$, $\vec{b}(4;5;4), \vec{c}(7;8;5)$
3.7 $A(3;1;7), B(2;-3;9)$, $\vec{b}(9;1;4), \vec{c}(8;2;-3)$	3.8 $A(2;1;-6), B(1;4;9)$, $\vec{b}(1;1;8), \vec{c}(5;-3;9)$
3.9 $A(2;-4;8), B(5;4;7)$, $\vec{b}(6;3;4), \vec{c}(7;2;-2)$	3.10 $A(3;2;5), B(4;0;-8)$, $\vec{b}(7;2;4), \vec{c}(5;8;4)$
3.11 $A(2;3;-1), B(-6;4;2)$, $\vec{b}(2;9;6), \vec{c}(0;6;4)$	3.12 $A(-4;2;3), B(8;7;-2)$, $\vec{b}(5;3;4), \vec{c}(5;-2;3)$
3.13 $A(5;3;6), B(-2;3;5)$, $\vec{b}(6;2;4), \vec{c}(7;2;-7)$	3.14 $A(0;6;0), B(5;3;-4)$, $\vec{b}(8;5;3), \vec{c}(7;8;7)$
3.15 $A(4;2;0), B(1;-7;8)$, $\vec{b}(2;8;6), \vec{c}(0;6;3)$	3.16 $A(4;2;5), B(-1;0;6)$, $\vec{b}(2;1;8), \vec{c}(5;9;9)$
3.17 $A(3;-5;8), B(6;3;9)$, $\vec{b}(7;3;4), \vec{c}(3;2;-2)$	3.18 $A(7;2;2), B(-5;7;-7)$, $\vec{b}(6;1;3), \vec{c}(1;8;7)$
3.19 $A(5;-3;1), B(2;3;7)$, $\vec{b}(2;7;6), \vec{c}(7;6;4)$	3.20 $A(8;-6;4), B(10;5;1)$, $\vec{b}(9;1;8), \vec{c}(4;9;1)$
3.21 $A(5;6;-8), B(8;10;7)$, $\vec{b}(1;3;4), \vec{c}(3;6;-2)$	3.22 $A(1;-1;3), B(6;5;8)$, $\vec{b}(7;8;3), \vec{c}(1;8;9)$
3.23 $A(3;5;-7), B(8;4;1)$, $\vec{b}(2;5;6), \vec{c}(7;6;8)$	3.24 $A(6;-6;5), B(4;9;5)$, $\vec{b}(6;1;4), \vec{c}(0;9;1)$
3.25 $A(4;6;9), B(9;3;-4)$, $\vec{b}(3;7;6), \vec{c}(8;6;4)$	3.26 $A(5;7;4), B(4;-8;9)$, $\vec{b}(8;1;7), \vec{c}(4;5;1)$
3.27 $A(-9;8;9), B(7;1;-2)$, $\vec{b}(7;2;4), \vec{c}(5;2;-1)$	3.28 $A(5;2;6), B(1;8;-2)$, $\vec{b}(4;2;3), \vec{c}(6;1;4)$
3.29 $A(-2;8;9), B(7;5;5)$, $\vec{b}(8;1;6), \vec{c}(6;1;4)$	3.30 $A(-2;7;0), B(6;3;5)$, $\vec{b}(2;-3;8), \vec{c}(3;9;2)$

4. На плоскости даны точки A_1, A_2 и прямая L_1. Написать

а) общее уравнение прямой $L_2 = (A_1A_2)$;

б) уравнение прямой $L_2 = (A_1A_2)$ с угловым коэффициентом;

в) уравнение в отрезках прямой $L_2 = (A_1A_2)$;

г) уравнение прямой L_3, проходящей через точку A_2, перпендикулярно прямой L_1.

Таблица 4

4.1	$A_1(3;1), A_2(2;-3),$ $L_1: x-5y+1=0$	4.2	$A_1(-4;1), A_2(6;2),$ $L_1: 2x-3y-1=0$
4.3	$A_1(-4;7), A_2(2;-13),$ $L_1: 3x-5y+2=0$	4.4	$A_1(5;1), A_2(-4;2),$ $L_1: x-3y-1=0$
4.5	$A_1(2;1), A_2(6;-3),$ $L_1: 4x-5y+1=0$	4.6	$A_1(8;3), A_2(-1;2),$ $L_1: 2x+2y-9=0$
4.7	$A_1(-1;7), A_2(3;-1),$ $L_1: 3x-4y+2=0$	4.8	$A_1(-2;1), A_2(-7;3),$ $L_1: 8x-3y-1=0$
4.9	$A_1(6;1), A_2(5;-3),$ $L_1: x-7y+4=0$	4.10	$A_1(-4;2), A_2(6;1),$ $L_1: 2x-5y+4=0$
4.11	$A_1(-4;3), A_2(2;-2),$ $L_1: 3x-y+2=0$	4.12	$A_1(7;1), A_2(-4;2),$ $L_1: x-y+4=0$
4.13	$A_1(-9;1), A_2(1;-3),$ $L_1: x-5y+1=0$	4.14	$A_1(8;1), A_2(-1;3),$ $L_1: 2x+5y+8=0$
4.15	$A_1(5;7), A_2(3;-1),$ $L_1: 3x-5y+2=0$	4.16	$A_1(-2;7), A_2(-7;-3),$ $L_1: 7x-6y-1=0$
4.17	$A_1(5;1), A_2(7;-3),$ $L_1: x-7y+5=0$	4.18	$A_1(-4;8), A_2(2;1),$ $L_1: 2x-4y-6=0$
4.19	$A_1(-4;4), A_2(9;-2),$ $L_1: x-y+2=0$	4.20	$A_1(7;6), A_2(-4;1),$ $L_1: 2x-y-1=0$
4.21	$A_1(-8;1), A_2(1;-7),$ $L_1: 2x-5y+1=0$	4.22	$A_1(3;1), A_2(-1;-3),$ $L_1: 2x-4y+9=0$
4.23	$A_1(5;1), A_2(6;-1),$ $L_1: x-5y+2=0$	4.24	$A_1(-2;8), A_2(-1;4),$ $L_1: 7x-y+4=0$
4.25	$A_1(-4;2), A_2(9;-2),$ $L_1: 9x-y+2=0$	4.26	$A_1(2;6), A_2(-2;1),$ $L_1: 5x-5y+4=0$
4.27	$A_1(-6;1), A_2(1;-9),$ $L_1: 2x-5y+4=0$	4.28	$A_1(10;1), A_2(-1;5),$ $L_1: x+4y-9=0$
4.29	$A_1(3;1), A_2(1;-1),$ $L_1: x+5y+8=0$	4.30	$A_1(-1;8), A_2(-1;5),$ $L_1: 7x-2y-1=0$

5. Даны точки A_1, A_2, A_3. Написать

а) общее уравнение плоскости $P_1 = (A_1A_2A_3)$;

б) уравнение плоскости P_1 в отрезках;

в) каноническое уравнение прямой $L_1 = (A_2A_3)$;

г) параметрическое уравнение прямой L_1;

д) уравнение прямой, проходящей через точку A_1, перпендикулярно плоскости P_1.

Таблица 5

5.1	$A_1(3;1;5), A_2(2;-3;1),$ $A_3(4;-6;2)$	5.2	$A_1(7;4;1), A_2(1;-4;2),$ $A_3(1;2;7)$
5.3	$A_1(3;4;5), A_2(3;-9;1),$ $A_3(4;5;7)$	5.4	$A_1(-3;4;-2), A_2(9;5;1),$ $A_3(4;-3;-1)$
5.5	$A_1(0;8;5), A_2(3;-2;4),$ $A_3(2;5;6)$	5.6	$A_1(2;5;6), A_2(3;-7;8),$ $A_3(5;4;-2)$
5.7	$A_1(-1;4;2), A_2(1;-9;1),$ $A_3(4;4;7)$	5.8	$A_1(1;9;-1), A_2(2;6;1),$ $A_3(2;8;-6)$
5.9	$A_1(-1;4;5), A_2(3;-5;1),$ $A_3(4;5;2)$	5.10	$A_1(9;5;1), A_2(4;-7;8),$ $A_3(5;2;-2)$
5.11	$A_1(3;7;5), A_2(3;-9;2),$ $A_3(1;5;7)$	5.12	$A_1(1;6;-1), A_2(2;7;1),$ $A_3(2;3;-6)$
5.13	$A_1(0;9;5), A_2(4;-2;4),$ $A_3(2;7;6)$	5.14	$A_1(7;5;-1), A_2(2;-4;1),$ $A_3(3;-2;7)$
5.1	$A_1(3;4;-1), A_2(1;-7;1),$ $A_3(4;3;7)$	5.16	$A_1(-4;4;-2), A_2(8;5;1),$ $A_3(4;-3;-1)$
5.17	$A_1(1;4;1), A_2(1;8;1),$ $A_3(4;3;-6)$	5.18	$A_1(2;-5;6), A_2(3;-2;-7),$ $A_3(-5;4;-2)$
5.19	$A_1(2;4;1), A_2(3;-7;1),$ $A_3(5;3;7)$	5.20	$A_1(3;9;-2), A_2(-2;6;1),$ $A_3(2;8;5)$
5.21	$A_1(1;8;-3), A_2(2;8;1),$ $A_3(6;3;-6)$	5.22	$A_1(1;6;-5), A_2(4;7;1),$ $A_3(1;3;-6)$
5.23	$A_1(8;4;-1), A_2(1;-9;1),$ $A_3(4;2;7)$	5.24	$A_1(8;5;-1), A_2(2;-3;2),$ $A_3(-3;1;7)$
5.25	$A_1(1;4;-2), A_2(9;8;1),$ $A_3(4;-3;-6)$	5.26	$A_1(-4;3;2), A_2(8;5;9),$ $A_3(4;-3;-5)$
5.27	$A_1(2;5;-1), A_2(3;-7;8),$ $A_3(5;3;-2)$	5.28	$A_1(9;-5;6), A_2(3;2;-7),$ $A_3(-5;1;-2)$
5.29	$A_1(1;8;-1), A_2(2;6;1),$ $A_3(2;3;-6)$	5.30	$A_1(3;9;-1), A_2(-4;6;1),$ $A_3(2;7;5)$

6. Решить систем линейных равнений:

а) методом Крамера;

б) матричным методом.

Таблица 6

6.1 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$	6.2 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$	6.3 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

6.4 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$	6.5 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$	6.6 $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$
6.7 $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$	6.8 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33 \\ 7x_1 - 5x_2 = 24 \\ 4x_1 + 11x_3 = 39 \end{cases}$	6.9 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33 \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$
6.10 $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \\ 5x_2 + 4x_3 = -20 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22 \end{cases}$	6.11 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$	6.12 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$
6.13 $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$	6.14 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$	6.15 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases}$
6.16 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$	6.17 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$	6.18 $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$
6.19 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19 \end{cases}$	6.20 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16 \end{cases}$	6.21 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19 \end{cases}$
6.22 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$	6.23 $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_3 = 5 \end{cases}$	6.24 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$
6.25 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$	6.26 $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$	6.27 $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$
6.28 $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 3x_3 = -6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$	6.29 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - 5x_3 = 9 \end{cases}$	6.30 $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10 \end{cases}$

7. Дано: точка A, радиус окружности R, полуоси кривой a и b, директриса кривой D.

а) написать уравнение окружности с центром в точке A, с радиусом R;

б) написать каноническое уравнение эллипса с полуосями a и b, найти фокусы и эксцентриситет;

в) написать каноническое уравнение гиперболы с действительной полуосью a и мнимой полуосью b, найти фокусы, эксцентриситет и написать уравнения асимптот;

г) написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии *Ox* или *Oy*, директрисой *D*, найти фокус;

д) начертить эллипс, гиперболу, параболу.

Таблица 7

7.1	A(2,-4), R=4, a=1, b=3, D: x=-5	7.2	A(-8,2), R=1 , a=6, b=5, D: x=-5
7.3	A(1,-4), R=5, a=8 , b=3, D: y=-6	7.4	A(5,-4), R=2, a=6, b=4, D: y=-2
7.5	A(2,-5), R=7, a=3, b=2, D: x=4	7.6	A(1,8), R=5 , a=3, b=2, D: x=-3
7.7	A(3,-4), R=9, a=7, b=6, D: y=-2	8.8	A(10,1), R=8, a=1, b=6, D: y=-4
7.9	A(5,-4), R=1, a=6, b=4, D: x=-5	7.10	A(6,3), R=8 , a=2, b=3, D: x=-5
7.11	A(1,-3), R=5 , a=8, b=2, D: y=6	7.12	A(5,5), R=2, a=1, b=3, D: y=-7
7.13	A(2,-6), R=7, a=3, b=4, D: x=5	7.14	A(12,6), R=7, a=6, b=2, D: x=-5
7.15	A(3,4), R=9 , a=2, b=6, D: y=-8	7.16	A(0,5), R=4, a=6, b=4, D: y=8
7.17	A(2,-9), R=7, a=5, b=2, D: x=6	7.18	A(-5,0), R=7, a=4, b=5, D: x=1
7.19	A(8,4), R=6 , a=8, b=5, D: y=2	7.20	A(5,1), R=2, a=9, b=1, D: x=-1
7.21	A(5,-4), R=4, a=6, b=4, D: x=1	7.22	A(-3,2), R=4, a=8, b=4, D: y=1
7.23	A(1,8), R=5, a=9, b=4, D: y=-6	7.24	A(9,1), R=6, a=4, b=7, D: x=-3
7.25	A(2,-5), R=7, a=7, b=4, D: x=9	7.26	A(-9,2), R=7, a=1, b=8, D: y=7
7.27	A(7,4), R=5, a=1, b=7, D: y=8	7.28	A(11,-4), R=2, a=2, b=4, D: x=8
7.29	A(-2,5), R=5, a=7, b=1, D: x=8	7.30	A(12,-4), R=7, a=3, b=5, D:y=-9

8. Привести к каноническому вид уравнение кривой второго порядка и начертить.

Таблица 8

8.1	$x^2+8x+2y+20=0$	8.2	$9x^2+4y^2-54x-32y+10=0$
8.3	$x^2+8x+2y+16=0$	8.4	$2x^2-2y^2+2x=0$
8.5	$x^2+2y^2-2x+8y+7=0$	8.6	$-5y^2+x+20y-6=0$
8.7	$4x^2+8x-6y+28=0$	8.8	$x^2+6x-2y+5=0$

8.9	$x^2+9y^2-40x+36y+100=0$	8.10	$16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$
8.11	$4y^2-2x+8y+28=0$	8.12	$9x^2+10y^2+40y-50=0$
8.13	$3x^2-4y^2+18x+20=0$	8.14	$x^2+6x-2y+30=0$
8.15	$y^2+4x+8y+16=0$	8.16	$4y^2+8x+12y+10=0$
8.17	$4x^2+8x+2y+30=0$	8.18	$x^2-4y^2-2x-24y-64=0$
8.19	$y^2-8x+8y+32=0$	8.20	$x^2+y^2-2x+8y+9=0$
8.21	$5x^2+9y^2+30x+18y+9=0$	8.22	$4y^2+8x+16y+30=0$
8.23	$-y^2+8x-2y-9=0$	8.24	$9x^2-y^2-18x-6y-10=0$
8.25	$9x^2-16y^2-36x-64y-127=0$	8.26	$-3y^2+2x-12y+30=0$
8.27	$-y^2+12x-2y-25=0$	8.28	$x^2-y^2-4y-4=0$
8.29	$x^2+y^2+8x-12y+20=0$	8.30	$-5y^2-4x+10y+3=0$

9. Даны комплексные числа z_1 и z_2. Найти:

а) модуль комплексного числа z_1;

б) аргумент комплексного числа z_1;

в) представить комплексное число z_1 в тригонометрической и показательной форме;

г) сумму и произведение комплексных чисел z_1 и z_2;

д) $(z_2)^5$;

е) $\sqrt[3]{z_2}$.

Таблица 9

9.1	$z_1=8i-8;$ $z_2=8\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$	9.2	$z_1=5i+5\sqrt{3};$ $z_2=5(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$
9.3	$z_1=-7i-7;$ $z_2=7\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$	9.4	$z_1=-10;$ $z_2=16(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$
9.5	$z_1=-9+9\sqrt{3}i;$ $z_2=18(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$	9.6	$z_1=3-3i;$ $z_2=3\sqrt{2}(\cos\frac{6\pi}{4}+i\sin\frac{6\pi}{4})$
9.7	$z_1=2i-2\sqrt{3};$ $z_2=4(\cos\pi+i\sin\pi)$	9.8	$z_1=27i-27;$ $z_2=27(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$
9.9	$z_1=-4+4i;$ $z_2=4\sqrt{2}(\cos(-\frac{3\pi}{4})+i\sin(-\frac{3\pi}{4}))$	9.10	$z_1=6+6\sqrt{3}i;$ $z_2=12(\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6})$

9.11	$z_1 = -9\sqrt{3} - 9i;$ $z_2 = 18(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$	9.12	$z_1 = 4 - 4\sqrt{3}i;$ $z_2 = 8(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$
9.13	$z_1 = -4\sqrt{3} - 4i;$ $z_2 = 8(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$	9.14	$z_1 = -5 - 5i;$ $z_2 = 5\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$
9.15	$z_1 = -9i;$ $z_2 = 9(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$	9.16	$z_1 = 3i;$ $z_2 = 3(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$
9.17	$z_1 = \sqrt{3} - 3i;$ $z_2 = 2\sqrt{3}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$	9.18	$z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i;$ $z_2 = 2(\cos\frac{6\pi}{3} + i\sin\frac{6\pi}{3})$
9.19	$z_1 = 3 - \sqrt{3}i;$ $z_2 = 2\sqrt{3}(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6})$	9.20	$z_1 = 8 - 8i;$ $z_2 = 8\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$
9.21	$z_1 = \sqrt{3}i;$ $z_2 = \sqrt{3}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$	9.22	$z_1 = -64;$ $z_2 = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$
9.23	$z_1 = 64i;$ $z_2 = 64(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$	9.24	$z_1 = 3\sqrt{3} - 3i;$ $z_2 = 6(\cos\frac{6\pi}{8} + i\sin\frac{6\pi}{8})$
9.25	$z_1 = 6 + 6i;$ $z_2 = 6\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$	9.26	$z_1 = -5i;$ $z_2 = 5(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$
9.27	$z_1 = \sqrt{3} - \sqrt{3}i;$ $z_2 = 2\sqrt{3}(\cos\frac{8\pi}{6} + i\sin\frac{8\pi}{6})$	9.28	$z_1 = 8 - 8i;$ $z_2 = 8\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$
9.29	$z_1 = \sqrt{3} - i;$ $z_2 = 2(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$	9.30	$z_1 = \sqrt{3}i - 1;$ $z_2 = \sqrt{3}(\cos\frac{10\pi}{6} + i\sin\frac{10\pi}{6})$

1.3 Решение типового варианта.

1. Дан определитель третьего порядка: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $i = 2,\ j = 3$.

а) найти минор M_{ij} и алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij};

б) вычислить определитель, разложив по элементам i-ой строки;

в) вычислить определитель, разложив по элементам j-го столбца;

г) вычислить определитель по правилу Сарриуса (правилу треугольников).

Решение:

а) минор M_{ij} элемента a_{ij} равен определителю, полученному из данного вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца, т.е. чтобы найти минор M_{23} необходимо вычеркнуть 2-ую строку и 3-й столбец данного определителя. Тогда

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -5.$$

Алгебраическое дополнение A_{ij} вычисляем по формуле

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}:$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -1 \cdot (-5) = 5.$$

б) формула вычисления определителя разложением по элементам 2-ой строки имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23}.$$

Значит,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1) \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 11.$$

в) формула вычисления определителя разложением по элементам 3-го столбца имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33}.$$

Значит,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+2 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 11.$$

г) вычисляем определитель по правилу Сарриуса (правилу треугольников):

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 4 \cdot 2 - 3 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \cdot 1$$
$$= 11.$$

2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

а) возможно ли произведения *AB*, *BC*? Если возможно, то найти эти произведения; если невозможно, то дать объяснение;

б) найти обратную матрицу A^{-1}.

Решение:

а) Если количество столбцов матрицы *A* равно количеству строк матрицы *B*, то произведение матриц *A* и *B* возможно. Определим размерность матриц: $A_{3\times3}$, $B_{2\times4}$, $C_{4\times1}$. Т.к. $A_{3\times3} \cdot B_{2\times4} = |3 \neq 2|$, то произведение невозможно. Т.к. $B_{2\times4} \cdot C_{4\times1} = |4 = 4|$, то произведение возможно. Матрица *E,* равная произведению матриц *B* и *C*, содержит столько строк, сколько в матрице *B* и столько столбцов, сколько в матрице *C* столько строк, сколько в матрице: $A_{m\times k} \cdot B_{k\times n} = E_{m\times n}$.

Элемент e_{ij} матрицы *E* равен сумме произведений соответствующих элементов *i*-ой строки матрицы *B* и *j*-го столбца матрицы *C*.

Итак,

$$E = B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

б) Если определитель квадратной матрицы отличен от нуля, то для такой матрицы существует обратная матрица; если равен нулю, обратная матрица не существует. Формула обратной матрицы имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где $|A|$ – определитель матрицы A; A_{ij} – алгебраические дополнения. Вычислим определитель матрицы A:

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 94 \neq 0,$ т.е. A^{-1} существует. Находим алгебраические дополнения матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4, A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5, A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 11,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 20, A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -22, A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 22, A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 4, A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -10$$

$$A^{-1} = \frac{1}{94}\begin{pmatrix} 4 & 5 & 11 \\ 20 & -22 & 8 \\ 22 & 4 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{94} & \frac{5}{94} & \frac{11}{94} \\ \frac{20}{94} & \frac{-22}{94} & \frac{8}{94} \\ \frac{22}{94} & \frac{4}{94} & \frac{-10}{94} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{47} & \frac{5}{94} & \frac{11}{94} \\ \frac{10}{47} & -\frac{11}{47} & \frac{4}{47} \\ \frac{11}{47} & \frac{2}{47} & -\frac{5}{47} \end{pmatrix}.$$

3. Даны точки $A(7, -9, 3)$, $B(1, 0, -5)$, векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b}(1; 0; 5)$ и $\vec{c}(6; 1; -2)$.

Найти:

а) длину вектора $\vec{a}$ и середину отрезка AB;

б) проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{c}$;

в) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{b}$ и $\vec{c}$;

г) объем пирамиды, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Решение:

а) $\vec{a} = (1 - 7, 0 - (-9), -5 - 3) = (-6, 9, -8)$;

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-6)^2 + 9^2 + (-8)^2} = \sqrt{181};$$

Середину отрезка AB обозначим точкой C, тогда:

$$C\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right),$$

т.е. $C\left(\frac{7+1}{2};\ \frac{-9+0}{2};\ \frac{3+(-5)}{2}\right)$, $C(4;\ -4{,}5;\ -1)$.

б) проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{c}$ вычисляют по формуле:

$$\text{Пр}_{\vec{c}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|},$$

где $\vec{a}\cdot\vec{c} = x_1\cdot x_3 + y_1\cdot y_3 + z_1\cdot z_3$ – скалярное произведение.

Если векторы ортогональны, ондтоа $\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$.

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = -6\cdot 6 + 9\cdot 1 + (-8)\cdot(-2) = -11,$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{6^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{41},$$

$$\text{Пр}_{\vec{c}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{-11}{\sqrt{41}} = -\frac{11\sqrt{41}}{41}.$$

в) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равна модулю векторного произведения векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$S_{\text{паралл.}} = |\vec{d}| = |\vec{b}\times\vec{c}|$, где $\vec{b}\times\vec{c}$ – векторное произведение.

$$\bar{b}\times\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}\cdot\bar{i} - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}\cdot\bar{j} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}\cdot\bar{k} = \left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}\right)$$

$$\bar{b}\times\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\cdot\bar{i} - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}\cdot\bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}\cdot\bar{k} = (-5, 32, 1)$$

$$|\vec{d}| = |\vec{b}\times\vec{c}| = |(-5,32,1)| = \sqrt{(-5)^2 + 32^2 + 1^2} = \sqrt{1050}$$

$$S_{\text{паралл.}} = \sqrt{1050} = 5\sqrt{42} \text{ кв.ед.}$$

г) объем пирамиды, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, равен модулю смешанного произведения этих векторов:

$$V_{\text{паралл.}} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|,$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}V_{\text{паралл.}}$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}V_{\text{паралл.}} = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -6 & 9 & -8 \\ 1 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{6}|310| = \frac{310}{6} = \frac{155}{3} = 51\frac{2}{3} \text{ куб. ед.}$$

4. На плоскости даны точки $A_1(4;-2)$, $A_2(8;1)$ и прямая L_1: $x + 4y + 5 = 0$.

Написать:

а) общее уравнение прямой $L_2 = (A_1A_2)$;

б) уравнение прямой $L_2 = (A_1A_2)$ с угловым коэффициентом;

в) уравнение в отрезках прямой $L_2 = (A_1A_2)$;

г) уравнение прямой L_3, проходящей через точку A_2, перпендикулярно прямой L_1.

Решение:

а) уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A_1(x_1;y_1)$ и $A_2(x_2;y_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Получим общее уравнение прямой L_2:

$\frac{x-4}{8-4} = \frac{y-(-2)}{1-(-2)} \Rightarrow \frac{x-4}{4} = \frac{y+2}{3} \Rightarrow 3x - 12 = 4y + 8 \Rightarrow 3x - 4y - 20 = 0$,
A=3, *B*=-4, *C*=-20.

Геометрический смысл коэффициентов *A*, *B* – они являются координатами нормаль-вектора данной прямой: $\vec{n}(3;-4) \perp L_2$;

б) уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид

$$y = kx + b,$$

поэтому преобразуем общее уравнение:

$$3x - 4y - 20 = 0 \Rightarrow 4y = 3x - 20 \Rightarrow y = \frac{3x-20}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - 5, k = \frac{3}{4};$$

в) уравнение в отрезках прямой имеет вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

$$3x - 4y - 20 = 0 \Rightarrow 3x - 4y = 20 \Rightarrow \frac{3x}{20} - \frac{4y}{20} = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{20}{3}} + \frac{y}{-5} = 1,$$

$a = \frac{20}{3}, b = -5$;

г) уравнение прямой L_3, проходящей через точку $A_2(8;1)$, перпендикулярно прямой L_1: $x+4y+5=0$.

д) уравнение прямой, проходящей через точку $(x_1;y_1)$, параллельно вектору $\vec{b}(m;n)$ имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}.$$

Нормаль-вектор $\overrightarrow{n_1}(A;B)=(-1;4)$ прямой L_1 расположен перпендикулярно этой прямой. Т.к. по условию задачи прямые L_1 и L_3 перпендикулярны, то вектор $\overrightarrow{n_1}$ расположен параллельно прямой L_3, т.е. является ее направляющим вектором. Тогда уравнение прямой L_3, проходящей через точку A_2, с направляющим вектором $\overrightarrow{n_1}(-1;4)$ имеет вид:

$$\frac{x-8}{-1}=\frac{y-1}{4} \Rightarrow 4x-32=-y+1 \Rightarrow 4x+y-33=0.$$

5. Даны точки $A_1(1;2;-1), A_2(3;3;2), A_3(2;-3;7)$.
Написать:
а) общее уравнение плоскости $P_1=(A_1A_2A_3)$;
б) уравнение плоскости P_1 в отрезках;
в) каноническое уравнение прямой $L_1=(A_2A_3)$;
г) параметрическое уравнение прямой L_1;
д) уравнение прямой, проходящей через точку A_1, перпендикулярно плоскости P_1.

Решение:
а) уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки
(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Находим уравнение плоскости $P_1=(A_1A_2A_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 3-1 & 3-2 & 2+1 \\ 2-1 & -3-2 & 7+1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$23x-13y-11z-8=0$, (A=23, B=-13, C=-11, D=-8).

Геометрический смысл коэффициентов A, B, C – они являются координатами нормаль-вектора данной плоскости: $\overrightarrow{n_1}(23;-13;-11) \perp P_1$;

б) *уравнение плоскости в отрезках* имеет вид:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Преобразуем общее уравнение плоскости P_1:

$23x - 13y - 11z - 8 = 0 \Rightarrow \quad 23x - 13y - 11z = 8 \Rightarrow$

$$\frac{23x}{8}-\frac{13y}{8}-\frac{11z}{8}=1 \quad \Rightarrow \frac{x}{\frac{8}{23}}+\frac{y}{-\frac{8}{13}}+\frac{z}{-\frac{8}{11}}=1 \Rightarrow$$

$a=\frac{8}{23}$, $b=-\frac{8}{13}$, $c=-\frac{8}{11}$ – отрезки, отсекающие плоскостью на координатных осях;

в) уравнение вида

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

где $\vec{a}(m;n;p)$ - направляющий вектор прямой, называется *каноническим уравнением прямой*.

Используем уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Тогда каноническое уравнение прямой $L_1=(A_2A_3)$ имеет вид:

$$\frac{x-3}{2-3}=\frac{y-3}{-3-3}=\frac{z-2}{7-2} \Rightarrow \frac{x-3}{-1}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z-2}{5};$$

г) уравнение вида

$$\begin{cases} x=mt+x_0, \\ y=nt+y_0, \\ z=pt+z_0 \end{cases}$$

называется *параметрическим уравнением прямой*.

Чтобы получить параметрическое уравнение прямой L_1, ее каноническое уравнение приравниваем к параметру t и из полученных уравнений выражаем x, y, z:

$$\frac{x-3}{-1}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z-2}{5}=t \Rightarrow \begin{cases}\frac{x-3}{-1}=t,\\ \frac{y-3}{-6}=t,\\ \frac{z-2}{5}=t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-t+3,\\ y=-6t+3,\\ z=5t+2.\end{cases}$$

д) Нам известно, что $\overrightarrow{n_1}(23;-13;-11)$ – нормаль-вектор плоскости P_1. Т.к. прямая L_2 должна быть перпендикулярна плоскости P_1, то вектор $\overrightarrow{n_1}$ будет ее направляющим вектором. Итак, каноническое уравнение прямой L_2, проходящей через точку A_1, с направляющим вектором $\overrightarrow{n_1}$ по формуле

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

имеет вид:

$$\frac{x-1}{23}=\frac{y-2}{-13}=\frac{z+1}{-11}.$$

6. Дана система линейных уравнений: $\begin{cases}x_1-x_2+5x_3=3,\\ 2x_1-3x_2+4x_3=2,\\ 3x_1-3x_2-x_3=-7.\end{cases}$

Решить:

а) методом Крамера;

б) матричным методом.

Решение:

а) решение системы линейных уравнений $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}$ находим по формулам Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ – основной определитель системы,

Δ_i $(i=1,2,3)$ – вспомогательные определители, полученные путем замены элементов i-ого столбца основного определителя столбцом свободных членов.

Вычислим основной и вспомогательные определители:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & 5\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & -3 & -1\end{vmatrix}=16,\qquad \Delta_1=\begin{vmatrix}3 & -1 & 5\\ 2 & -3 & 4\\ -7 & -3 & -1\end{vmatrix}=-64,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 2 & 4\\ 3 & -7 & -1\end{vmatrix}=-32,\qquad \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & -3 & 2\\ 3 & -3 & -7\end{vmatrix}=16.$$

По формулам Крамера находим:

$$x_1=\frac{-64}{16}=-4,\quad x_2=\frac{-32}{16}=-2,\quad x_3=\frac{16}{16}=1.$$

Ответ: (-4; -2;1);

б) матричное решение системы линейных уравнений имеет вид:

$$X=A^{-1}\cdot B,$$

где $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ – основная матрица системы,

$B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$ – матрица свободных членов,

$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$ –матрица неизвестных.

Т.к. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 5\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & -3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -7\end{pmatrix}$, то обратная матрица имеет вид (см. пункт б) задания 2):

$$A^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}15 & -16 & 11\\ 14 & -16 & 6\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}15 & -16 & 11\\ 14 & -16 & 6\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -7\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}45-32-77\\ 42-32-42\\ 9+0+7\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-64\\ -32\\ 16\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-4\\ -2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Значит, $x_1=-4,\ \ x_2=-2,\ \ x_3=1.$

Ответ: (-4; -2;1).

7. Дано: точка $A(3;-7)$, радиус окружности R=6, полуоси кривой $a = 2$, $b = 3$, директриса кривой D, имеющая уравнение y = -3.

а) написать уравнение окружности с центром в точке A, с радиусом R;

б) написать каноническое уравнение эллипса с полуосями a и b, найти фокусы и эксцентриситет;

в) написать каноническое уравнение гиперболы с действительной полуосью a и мнимой полуосью b, найти фокусы, эксцентриситет и написать уравнения асимптот;

г) написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии *Oy*, директрисой *D*, найти фокус;

д) начертить эллипс, гиперболу, параболу.

Решение:

а) т.к. уравнение окружности с центром в точке $A(x_0; y_0)$, с радиусом R имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

то искомая окружность имеет уравнение $(x - 3)^2 + (y + 7)^2 = 36$;

б) каноническое уравнение эллипса с полуосями a и b имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

значит искомый эллипс имеет уравнение $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Фокусы эллипса:

1) если $a > b$, то $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$,

2) если $b > a$, то $F_1(0; -c)$, $F_2(0; c)$, где $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Эксцентриситеты эллипса: $\varepsilon = \frac{c}{a}$ при $a > b$, $\varepsilon = \frac{c}{b}$ при $b > a$.

Поэтому $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$, $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Фокусы лежат на оси *Oy*: $F_1\left(0; -\sqrt{5}\right)$, $F_2\left(0; \sqrt{5}\right)$.

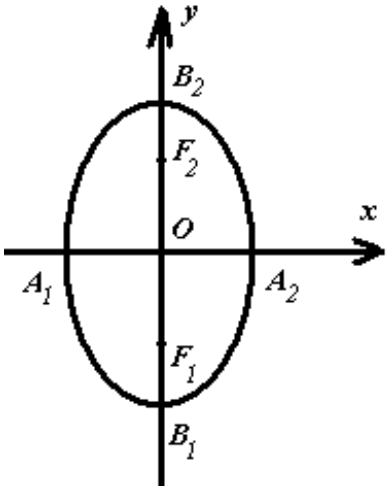

Рисунок 1

в) каноническое уравнение гиперболы с действительной полуосью a и мнимой полуосью b имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

каноническое уравнение гиперболы с действительной полуосью b и мнимой полуосью a имеет вид:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a}$ или $\varepsilon = \frac{c}{b}$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$;

асимптоты $y = \pm\frac{b}{a}x$;

фокусы $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ либо $F_1(0; -c)$, $F_2(0; c)$.

Так как по условию задачи $\mathrm{a} = 2$, $\mathrm{b} = 3$, то каноническое уравнение гиперболы с действительной полуосью a и мнимой полуосью b имеет вид $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, $c = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$, эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$, фокусы $F_1\left(-\sqrt{13}; 0\right)$, $F_2\left(\sqrt{13}; 0\right)$, уравнение асимптот $y = \pm\frac{3}{2}x$.

Гиперболу можно начертить таким образом: сначала начертим прямоугольник со сторонами $x = \pm a$, $y = \pm b$, т.е. $x = \pm 2$, $y = \pm 3$. Проведем диагонали прямоугольника, они являются асимптотами гиперболы, точки пересечения сторон прямоугольника с действительной осью являются вершинами гиперболы.

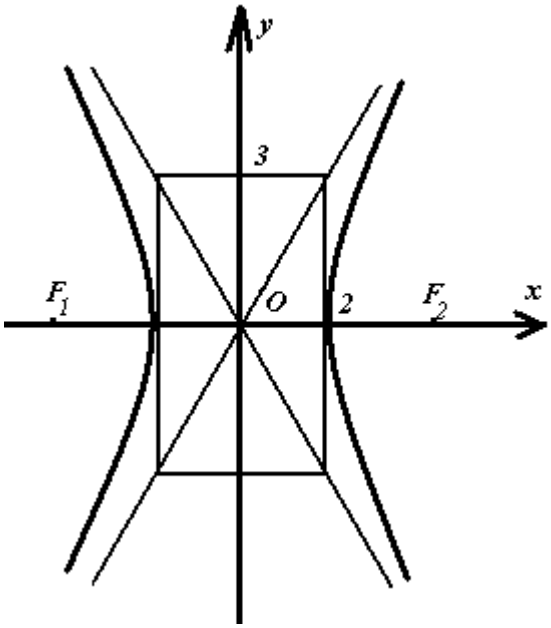

Рисунок 2

г) уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии *Oy* имеет вид:

$$x^2 = 2py,$$

директрисасы имеет уравнение $y = -\frac{p}{2}$. По условию задачи уравнение директрисы $y = -3$, т.е. $-\frac{p}{2} = -3$, $p = 6$. Значит уравнение искомой параболы $x^2 = 12y$. Фокус параболы –точка $F(0; \frac{p}{2})$, лежащая на оси симметрии *Oy*, т.е. $F(0; 3)$.

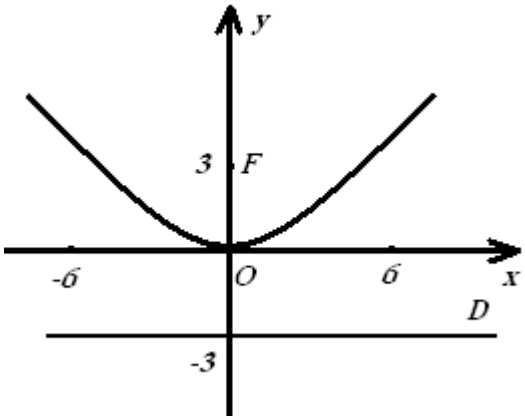

Рисунок 3

8. Привести к каноническому вид уравнение кривой второго порядка и начертить:

$$9x^2 - 16y^2 + 18x - 64y - 19 = 0$$

Решение:

Чтобы привести общее уравнение кривой к каноническому виду, необходимо выделить полный квадрат:

$$(9x^2 + 18x) + (-16y^2 - 64y) - 19 = 0 \to 9(x^2 + 2x) - 16(y^2 + 4y) - 19 = 0.$$

$$9(x^2 + 2x + 1 - 1) - 16(y^2 + 4y + 4 - 4) - 19 = 0;$$

$$9(x^2 + 2x + 1) - 16(y^2 + 4y + 4) - 19 - 9 \cdot 1 - 16 \cdot (-4) = 0;$$

$$9(x+1)^2 - 16(y+2)^2 = -36;$$

$$\frac{(x+1)^2}{-36/9} + \frac{(y+2)^2}{-36/(-16)} = 1; \quad -\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9/4} = 1,$$

Получилось каноническое уравнение гиперболы с центром в точке C(-1;-2), действительной полуосью *b*=3/2 и мнимой полуосью *a*=2.

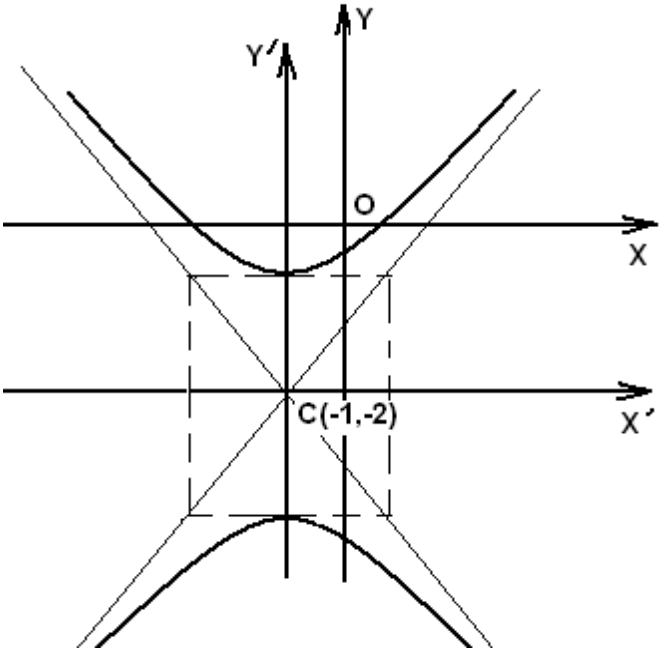

Рисунок 4

9. Даны комплексные числа $z_1 = 9 - 9i$; $z_2 = 9(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

Найти:

а) модуль комплексного числа z_1;

б) аргумент комплексного числа z_1;

в) представить комплексное число z_1 в тригонометрической и показательной форме;

г) сумму и произведение комплексных чисел z_1 и z_2;

д) $(z_2)^5$;

е) $\sqrt[3]{z_2}$.

Решение:

а) модуль комплексного числа $z = \alpha + \beta i$ вычисляется по формуле

$$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\ ,$$

значит $|z_1| = \sqrt{9^2 + (-9)^2} = 9\sqrt{2}$;

б) $\varphi = \arg(z) = arctg\frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \varphi_1 = \arg(z_1) = arctg\frac{-9}{9} = -arctg1 = -\frac{\pi}{4}$;

в) тригонометрическая и показательная формы комплексного числа z:

$$z = \alpha + i\beta = |z|(\cos\varphi + \sin\varphi) = |z|e^{i\varphi};$$

$$z_1 = 9 - 9i = 9\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})) = 9\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}};$$

г) $z_2 = 9(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 9(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$;

$$z_1 + z_2 = 9 - 9i + 9(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = (9 + 9\frac{\sqrt{2}}{2}) + i(9\frac{\sqrt{2}}{2} - 9) \approx 15{,}36 - 2{,}63i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (9 - 9i)\cdot 9(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 81\frac{\sqrt{2}}{2} + i81\frac{\sqrt{2}}{2} - i81\frac{\sqrt{2}}{2} - i^2 81\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 81\frac{\sqrt{2}}{2} - (\sqrt{-1})^2 81\frac{\sqrt{2}}{2} = 81\sqrt{2};$$

д) по формуле

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + \sin n\varphi)$$

вычисляем:

$$z_2^5 = \left(9\sqrt{2}\right)^5(\cos(\frac{5\pi}{4}) + i\sin(\frac{5\pi}{4})) = \left(9\sqrt{2}\right)^5(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2});$$

е) по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), k = 0,1,2,3, \dots, n-1,$$

находим:

$$\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{9\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right),\ k = 0,1,2.$$

$$k = 0: \quad z_1 = \sqrt[3]{9\sqrt{2}}\,(\cos\frac{\frac{\pi}{4}}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}}{3})) = \sqrt[3]{9\sqrt{2}}\,(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}));$$

$$k = 1: \quad z_1 = \sqrt[3]{9\sqrt{2}}\,(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3})) = \sqrt[3]{9\sqrt{2}}\,(\cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}));$$

$$k = 2: \quad z_1 = \sqrt[3]{9\sqrt{2}}\,(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3})) = \sqrt[3]{9\sqrt{2}}\,(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12})).$$

2 Расчетно-графическая работа №2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Цель: научить студентов владеть классическими математическими методами исследования функций. Дать студентам навыки нахождения пределов, производных и дифференциалов первого и высших порядков для сложных и параметрически заданных функций, и уметь использовать полученные знания в изучении дальнейшего курса математики и разделов других спецдисциплин.

2.1 Теоретические вопросы

1. Функция одной переменной. Свойства.
2. Сложная функция, параметрически заданная функция.
3. Числовые оследовательности и их пределы.
4. Предел функции.Замечательные пределы.
5. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация.
6. Производная функции.Дифференцирование параметрически заданной функции.
7. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя.
8. Признаки монотонности функции. Экстремумы функции.
9. Выпуклость, вогнутость графика функции. Точки перегиба.

10. Асимптоты графика функции.

11. Исследование функции с помощью производной. Построение графика функции.

2.2 Расчётные задания

1. Найти предел.

1.1 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$	1.2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$	1.3 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$
1.4 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$	1.5 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+6}{x^2-5x+6}$	1.6 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{12-x-x^2}{x^3-27}$
1.7 $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$	1.8 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$	1.9 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$
1.10 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$	1.11 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$	1.12 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$
1.13 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$	1.14 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$	1.15 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$
1.16 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+7x-2}{3x^2+8x+4}$	1.17 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{3x^2+x-2}$	1.18 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-9x-10}{3x^2+x-2}$
1.19 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}$	1.20 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-x-44}{x^2-x-12}$	1.21 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$
1.22 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+x-5}{x^2-2x+1}$	1.23 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-5x^2+11x-2}{3x^2-x-10}$	1.24 $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2-9x-35}$
1.25 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-6x-45}{2x^2-3x-35}$	1.26 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+8x+15}{x^2-6x-27}$	1.27 $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-2x-35}{2x^2+11x+5}$
1.28 $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2x^2+15x-8}{3x^2+25x+8}$	1.29 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$	1.30 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+10x+3}$

2. Найти предел.

2.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$	2.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}$	2.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{7x^3-2x^2+1}$
2.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$	2.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x-5}{2x^2+x+7}$	2.6 $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^3-7x+2}{x^4+2x-4}$

2.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$	2.8 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+7x-4}{x^5+2x-1}$	2.9 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4-3x+4}{3x^2-2x+1}$
2.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$	2.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-x^6}{x^2-2x+5}$	2.12 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x+7}{3x^4-5x^2+10}$
2.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2-1}$	2.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x-1}{3x^4+2x+5}$	2.15 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2-x}$
2.16 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$	2.17 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3-7x^2+4}{x^4+5x-1}$	2.18 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x+1}{3x^2+2x-5}$
2.19 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$	2.20 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^6-5x^2+2}{2x^3+4x-5}$	2.21 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+2}{x^4+3x^2-9}$
2.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$	2.23 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^7+5x^2-4x}{3x^2+11x-7}$	2.24 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^2-4x+2}{4x^3+2x-5}$
2.25 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$	2.26 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7x^2+6x+9}{1+4x-x^3}$	2.27 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+2x}{x^2+7x+1}$
2.28 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$	2.29 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+x^2-6}{2x^2+3x+1}$	2.30 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2-7x+5}{4x^5-3x^3-1}$

3. Найти предел.

3.1 $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$	3.2 $\lim\limits_{x\to-4}\frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$	3.3 $\lim\limits_{x\to-3}\frac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$
3.4 $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$	3.5 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{4+x}}{3x^2-4x+1}$	3.6 $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$
3.7 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$	3.8 $\lim\limits_{x\to4}\frac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$	3.9 $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$
3.10 $\lim\limits_{x\to-5}\frac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$	3.11 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$	3.12 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x}$
3.13 $\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$	3.14 $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$	3.15 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$
3.16 $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$	3.17 $\lim\limits_{x\to7}\frac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$	3.18 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$

3.19 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$	3.20 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$	3.21 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$
3.22 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$	3.23 $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$	3.24 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$
3.25 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$	3.26 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$	3.27 $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}$
3.28 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{\sqrt{x+8}-3}$	3.29 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$	3.30 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$

4. Найти предел.

4.1а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$	4.2 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x}{\sin x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$	4.3 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{5x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{2x}$
4.4 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{tgx}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^x$	4.5 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{3}{x}}$	4.6 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg3x}{4x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{1}{x}}$
4.7 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x}{\sin 3x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{7/x}$	4.8 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-9x)^{\frac{2}{x}}$	4.9а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2}{1-\cos 4x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{7}{x}\right)^{3x}$
4.10 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^x$	4.11 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x^2}{1-\cos x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{7x}$	4.12 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{tg5x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{9x}$
4.13 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin 5x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{7x}$	4.14 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{tgx}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^{2x}$	4.15 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{tg9x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{7}{x}\right)^{x/6}$

4.16 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg8x}{3x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{3x}{2}\right)^{1/x}$	4.17 а) $\lim\limits_{x\to 0} xctg7x$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-11x)^{2/x}$	4.18 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\sin 3x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-8x)^{\frac{7}{x}}$
4.19 а) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5xctg3x$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{7/x}$	4.20 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{9x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{2/x}$	4.21 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 9x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+7x)^{\frac{2}{x}}$
4.22 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{arctg7x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{2x}{5}\right)^{\frac{2}{x}}$	4.23 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{3x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{9/x}$	4.24 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg9x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{2}{x}}$
4.25 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 5x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{7/x}$	4.26 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{tg7x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{5x/2}$	4.27 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 5x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{7x}$
4.28 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 2x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{6}{x}\right)^{7x}$	4.29 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{tg9x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{5x}$	4.30 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{tg3x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2x}\right)^{2x}$

5. Исследовать функцию на непрерывность.

5.1 а) $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}$, б) $g(x)=\dfrac{7}{2+x}$	5.2 а) $f(x)=3^{\frac{1}{x-2}}$, б) $g(x)=\dfrac{1}{4-x}$	5.3 а) $f(x)=5^{\frac{1}{x+1}}$, б) $g(x)=\dfrac{1}{x-12}$
5.4 а) $f(x)=7^{\frac{1}{x-4}}$, б) $g(x)=\dfrac{1}{x+12}$	5.5 а) $f(x)=7^{\frac{1}{5+x}}$, б) $g(x)=\dfrac{6}{x-4}$	5.6 а) $f(x)=8^{\frac{1}{x-3}}$, б) $g(x)=\dfrac{5}{x-22}$
5.7 а) $f(x)=9^{\frac{1}{5-x}}$,	5.8 а) $f(x)=9^{\frac{1}{x-7}}$,	5.9 а) $f(x)=9^{\frac{1}{2-x}}$,

б) $g(x)=\dfrac{7}{2x+1}$	б) $g(x)=\dfrac{7}{8-2x}$	б) $g(x)=\dfrac{3}{5x-25}$
5.10 а) $f(x)=16^{\frac{1}{x-2}}$, б) $g(x)=\dfrac{3}{9-3x}$	5.11 а) $f(x)=4^{\frac{1}{3-x}}$, б) $g(x)=\dfrac{6}{x-4}$	5.12 а) $f(x)=3^{\frac{1}{x-4}}$, б) $g(x)=\dfrac{9}{25-5x}$
5.13 а) $f(x)=12^{\frac{1}{x}}$, б) $g(x)=\dfrac{4}{9-x}$	5.14 а) $f(x)=7^{\frac{1}{x-3}}$, б) $g(x)=\dfrac{2}{8-4x}$	5.15 а) $f(x)=3^{\frac{1}{4-x}}$, б) $g(x)=\dfrac{7}{5-x}$
5.16 а) $f(x)=8^{\frac{1}{x-2}}$, б) $g(x)=\dfrac{3}{4-2x}$	5.17 а) $f(x)=8^{\frac{1}{5-x}}$, б) $g(x)=\dfrac{10}{x+5}$	5.18 а) $f(x)=18^{\frac{1}{x}}$, б) $g(x)=\dfrac{12}{8-8x}$
5.19 а) $f(x)=10^{\frac{1}{7-x}}$, б) $g(x)=\dfrac{12}{4x-2}$	5.20 а) $f(x)=11^{\frac{1}{5-x}}$, б) $g(x)=\dfrac{9}{8+2x}$	5.21 а) $f(x)=14^{\frac{1}{6-x}}$, б) $g(x)=\dfrac{3}{2+x}$
5.22 а) $f(x)=15^{\frac{3}{4-x}}$, б) $g(x)=\dfrac{1}{6-2x}$	5.23 а) $f(x)=15^{\frac{1}{8-x}}$, б) $g(x)=\dfrac{10}{x-3}$	5.24 а) $f(x)=19^{\frac{4}{2+x}}$, б) $g(x)=\dfrac{7}{8-2x}$
5.25 а) $f(x)=11^{\frac{1}{4+x}}$, б) $g(x)=\dfrac{1}{9-x}$	5.26 а) $f(x)=5^{\frac{7}{8-x}}$, б) $g(x)=\dfrac{11}{x-15}$	5.27 а) $f(x)=13^{\frac{1}{5+x}}$, б) $g(x)=\dfrac{5}{3-x}$
5.28 а) $f(x)=6^{\frac{9}{4-x}}$, б) $g(x)=\dfrac{1}{2x+5}$	5.29 а) $f(x)=4^{\frac{1}{x-5}}$, б) $g(x)=\dfrac{3}{8-x}$	5.30 а) $f(x)=11^{\frac{2}{x-3}}$, б) $g(x)=\dfrac{16}{x+15}$

6. Найти производную функции.

6.1 а) $f(x)=tg(8x^2+x-5)$, б) $g(x)=\left(e^{\cos x}+3\right)^2$	6.2 а) $f(x)=\cos(3x^2-2)$, б) $g(x)=\dfrac{4x^2}{\cos^2 x}$	6.3 а) $f(x)=e^{7x+x^2}$, б) $g(x)=\dfrac{5x}{tg^2 2x}$

6.4 а) $f(x)=\left(4x+2x^3\right)^{10}$, б) $g(x)=\dfrac{\sin^3 x}{2+3\cos^2 x}$	6.5 а) $f(x)=\sqrt[3]{x^5+10x^2}$, б) $g(x)=2tg^3\left(x^2+1\right)$	6.6 а) $f(x)=arctg\left(x^5+3x\right)$, б) $g(x)=2tg^3x+\lg\cos x$
6.7 а) $f(x)=tg\left(4x^2+x+5\right)$, б) $g(x)=\left(e^{\sin x}+2\right)^4$	6.8 а) $f(x)=\sin\left(3x^2-2x+1\right)$, б) $g(x)=\dfrac{3x^2}{\cos^4 x}$	6.9 а) $f(x)=e^{2x-x^3}$, б) $g(x)=\dfrac{tg^2 2x}{x-5}$
6.10 а) $f(x)=\left(3x^3+7x\right)^{15}$, б) $g(x)=\dfrac{4x^7}{arctg^3x}$	6.11 а) $f(x)=\sqrt[3]{x^8+5x^3}$, б) $g(x)=3ctg^3\left(x^2+1\right)$	6.12 а) $f(x)=arcctg\left(x^4+x\right)$, б) $g(x)=\dfrac{1}{3}tg^2x+\lg\sin x$
6.13 а) $f(x)=tg\left(3x^2+2x-7\right)$, б) $g(x)=\left(6^{\cos x}+3\right)^2$	6.14 а) $f(x)=\cos\left(7x^2-6x+6\right)$, б) $g(x)=\dfrac{2x^7}{\cos^3 x}$	6.15 а) $f(x)=4^{7x+x^2}$, б) $g(x)=\dfrac{1}{2}\sin^2 x+\ln\cos x$
6.16 а) $f(x)=\left(3x^2+8x\right)^{18}$, б) $g(x)=\dfrac{3x^8}{arcctg^3x}$	6.17 а) $f(x)=\sqrt[5]{x^5+10x^2-3}$ б) $g(x)=\dfrac{(7+3x)^4}{\arcsin x}$	6.18 а) $f(x)=arctg\left(x^4+6x\right)$, б) $g(x)=\dfrac{1}{2}\cos^2 x+\ln\sin x$
6.19 а) $f(x)=\sin\left(4x^2+x+5\right)$, б) $g(x)=\left(e^{tgx}+1\right)^4$	6.20 а) $f(x)=ctg\left(3x^2-7x\right)$, б) $g(x)=4tg^5 3x^2$	6.21 а) $f(x)=13^{5x^3+2}$, б) $g(x)=\dfrac{(1+3x)^3}{tg2x}$
6.22 а) $f(x)=\left(9x+3x^5\right)^{12}$, б) $g(x)=\dfrac{\cos^5 x}{1+\sin x}$	6.23 а) $f(x)=\sqrt[7]{x+5x^3}$ б) $g(x)=9\cos^3\left(x^2+6\right)$	6.24 а) $f(x)=\arcsin\left(x^4+7x\right)$, б) $g(x)=\dfrac{1}{5}ctg^5x+\ln\sin x$
6.25 а) $f(x)=\ln\left(6x^2-x^3\right)$,	6.26 а) $f(x)=\cos\left(\sqrt[3]{x}+2\right)$,	6.27 а) $f(x)=e^{2x+9x^3}$,

б) $g(x)=\left(e^{\sqrt{x}}+8\right)^{12}$	б) $g(x)=\dfrac{\left(x+3x^5\right)^2}{\cos x}$	б) $g(x)=\sqrt[6]{(\sin x+2x)^5}$
6.28 а) $f(x)=\sqrt{2x+\cos 5x}$, б) $g(x)=\dfrac{x^2}{\ln\left(5x^3+1\right)}$	6.29 а) $f(x)=\sqrt[3]{\ln x}$, б) $g(x)=2tg(\arcsin 5x)$	6.30 а) $f(x)=arctg(\sin x+2)$, б) $g(x)=3x+\lg(\cos x+4)$

7. Найти производную функции, заданной параметрическими уравнениями.

7.1 $\begin{cases} x=(2t+3)\cos t, \\ y=3t^3 \end{cases}$	7.2 $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=3\sin^2 t \end{cases}$	7.3 $\begin{cases} x=6\cos^3 t, \\ y=2\sin t \end{cases}$
7.4 $\begin{cases} x=1/(t+2), \\ y=t^2/(t+2) \end{cases}$	7.5 $\begin{cases} x=e^{-2t}, \\ y=3te^{4t} \end{cases}$	7.6 $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=\sqrt[5]{t} \end{cases}$
7.7 $\begin{cases} x=2t/\left(t^3+1\right), \\ y=t^2/\left(t^2+1\right) \end{cases}$	7.8 $\begin{cases} x=\sqrt{t^2-1}, \\ y=(t+1)/\sqrt{t^2-1} \end{cases}$	7.9 $\begin{cases} x=4t+2t^2, \\ y=5\sqrt{t^3}-3t^2 \end{cases}$
7.10 $\begin{cases} x=(\ln t)/t, \\ y=\ln t \end{cases}$	7.11 $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t \end{cases}$	7.12 $\begin{cases} x=t^4, \\ y=t\ln t \end{cases}$
7.13 $\begin{cases} x=5\cos^2 t, \\ y=3\sin t \end{cases}$	7.14 $\begin{cases} x=5\cos t, \\ y=3\sin^2 t \end{cases}$	7.15 $\begin{cases} x=arctgt, \\ y=\ln\left(1+t^2\right) \end{cases}$
7.16 $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$	7.17 $\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t) \end{cases}$	7.18 $\begin{cases} x=3(\sin t-\cos t), \\ y=3(\cos t+\sin t) \end{cases}$
7.19 $\begin{cases} x=\sin 2t, \\ y=\cos^2 t \end{cases}$	7.20 $\begin{cases} x=e^{3t}, \\ y=\sqrt{t-1} \end{cases}$	7.21 $\begin{cases} x=(\ln t)/t, \\ y=t^2\ln t \end{cases}$
7.22 $\begin{cases} x=\arccos t, \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$	7.23 $\begin{cases} x=1/(t+1), \\ y=t^2/(t+1) \end{cases}$	7.24 $\begin{cases} x=5\sin 3t, \\ y=3\cos^3 t \end{cases}$
7.25 $\begin{cases} x=e^{-2t}, \\ y=e^{8t}/t \end{cases}$	7.26 $\begin{cases} x=\sqrt[3]{(t-1)^2}, \\ y=\sqrt{t-1} \end{cases}$	7.27 $\begin{cases} x=\ln^2 t, \\ y=t+\ln t \end{cases}$
7.28 $\begin{cases} x=te^t, \\ y=t/e^t \end{cases}$	7.29. $\begin{cases} x=6t^2-4, \\ y=3\sqrt{t^5} \end{cases}$	7.30 $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=\ln t \end{cases}$

8. Найти вторую производную функции $y = f(x)$ в точке x_0 .

8.1 $y = \sin^2 x,$ $x_0 = \pi/4$	8.2 $y = arctgx,$ $x_0 = 1$	8.3 $y = \ln(2 + x^2),$ $x_0 = 0$
8.4 $y = e^x \cos x,$ $x_0 = 0$	8.5 $y = e^x \sin 2x,$ $x_0 = 0$	8.6 $y = e^{-x} \cos x,$ $x_0 = 0$
8.7 $y = \sin 2x,$ $x_0 = \pi$	8.8 $y = (2x+1)^5,$ $x_0 = 1$	8.9 $y = \ln(1 + 2x),$ $x_0 = 2$
8.10 $y = \frac{1}{2} e^x x^2,$ $x_0 = 0$	8.11 $y = \arcsin x,$ $x_0 = 0$	8.12 $y = (5x-4)^5,$ $x_0 = 2$
8.13 $y = x \sin x,$ $x_0 = \frac{\pi}{2}$	8.14 $y = x^2 \ln x,$ $x_0 = \frac{1}{3}$	8.15 $y = x \sin 2x,$ $x_0 = -\frac{\pi}{4}$
8.16 $y = x \cos 2x,$ $x_0 = \frac{\pi}{12}$	8.17 $y = x^4 \ln x,$ $x_0 = 1$	8.18 $y = x + arctgx,$ $x_0 = 1$
8.19 $y = \cos^2 x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$	8.20 $y = \ln(x^2 - 4),$ $x_0 = 3$	8.21 $y = x^2 \cos x,$ $x_0 = \frac{\pi}{2}$
8.22 $y = x \arccos x,$ $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$	8.23 $y = (x+1)\ln(x+1),$ $x_0 = -\frac{1}{2}$	8.24 $y = \ln^3 x,$ $x_0 = 1$
8.25 $y = 2^{7x+5},$ $x_0 = 1$	8.26 $y = (4x-3)^5,$ $x_0 = 1$	8.27 $y = x \arcsin x,$ $x_0 = 2$
8.28 $y = (7x-4)^6,$ $x_0 = 1$	8.29 $y = x \sin 2x,$ $x_0 = \frac{\pi}{4}$	8.30 $y = \sin(x^3 + \pi),$ $x_0 = \sqrt[3]{\pi}$

9. Дана функция $y = f(x)$.

Определить:

а) область определения и точки разрыва;

б) асимптоты графика функции;

в) точки пересечения графика функции с осями координат;

г) четность, нечетность;

д) интервалы монотонности, экстремумы;

е) интервалы вогнутости, выпуклости и точки перегиба;

ж) построить график.

9.1 $y=\frac{x^3+4}{x^2}$	9.2 $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$	9.3 $y=\frac{2}{x^2+2x}$	9.4 $y=\frac{4x^2}{3+x^2}$	9.5 $y=\frac{12x}{x^2+9}$
9.6 $y=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$	9.7 $y=\frac{4-x^3}{x^2}$	9.8 $y=\frac{x^2-4x+1}{x-4}$	9.9 $y=\frac{2x^3+1}{x^2}$	9.10 $y=\frac{(x-1)^2}{x^2}$
9.11 $y=\frac{x^2}{(x-1)^2}$	9.12 $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$	9.13 $y=\frac{12-3x^2}{12+x^2}$	9.1 4 $y=\frac{9+6x-3x^2}{x^2-2x+13}$	9.15 $y=\frac{-8x}{x^2+4}$
9.16 $y=\frac{x-1}{(x+1)^2}$	9.17 $y=\frac{3x^4+1}{x^3}$	9.18 $y=\frac{4x}{(x+1)^2}$	9.19 $y=\frac{8(x-1)}{(x+1)^2}$	9.20 $y=\frac{1-2x^3}{x^2}$
9.21 $y=\frac{4}{x^2+2x-3}$	9.22 $y=\frac{4}{3+2x-x^2}$	9.23 $y=\frac{x^2+2x-7}{x^2+2x-3}$	9.24 $y=\frac{1}{x^4-1}$	9.25 $y=-\left(\frac{x}{x+2}\right)^2$
9.26 $y=\frac{x^3-32}{x^2}$	9.27 $y=\frac{4(x+1)^2}{x^2+2x+4}$	9.28 $y=\frac{3x-2}{x^3}$	9.29 $y=\frac{x^2-6x+9}{(x-1)^2}$	9.30 $y=\frac{x^3-27x+54}{x^3}$

10. Найти предел.

10.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$	10.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$	10.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{3x}$	10.4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{4x+1}\right)^{3x-1}$

10.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}$	10.6 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)^{2x+1}$	10.7 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{5x}$	10.8 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{4x}$
10.9 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+3}{2x-4}\right)^{x+2}$	10.10 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^{x-1}$	10.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-3}{x+4}\right)^{x+3}$	10.12 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{7x+4}\right)^{x}$
10.13 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-5}{3x+4}\right)^{2x}$	10.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{4x-5}\right)^{2x}$	10.15 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{3x+1}\right)^{5x}$	10.16 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-4}{x+6}\right)^{x-1}$
10.17 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{3x+10}\right)^{3x}$	10.18 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{x+4}\right)^{6x+1}$	10.19 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+3}{3x-1}\right)^{2x}$	10.20 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x+5}{x-10}\right)^{5x}$
10.21 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+7}{x+4}\right)^{4x}$	10.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{4x+5}\right)^{3x}$	10.23 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5x-7}{x+6}\right)^{2x}$	10.24 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-4x}{2-x}\right)^{6x}$
10.25 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-2x}{3-x}\right)^{-x}$	10.26 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4+3x}{5+x}\right)^{7x}$	10.27 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-1}{2x+5}\right)^{3x}$	10.28 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{2-10x}\right)^{5x}$
10.29 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{9x-4}\right)^{2x}$	10.30 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+5}{4x-2}\right)^{3x}$		

11. Найти предел, используя правило Лопиталя.

11.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$	11.2 $\lim\limits_{x\to1}\frac{2^{\ln x}-x}{x-1}$	11.3 $\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}$
11.4 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^2-\sin x^2}$	11.5 $\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx-x}{2\sin x+x}$	11.6 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x}$
11.7 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$	11.8 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1-6x)}$	11.9 $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{1-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

11.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$	11.11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}}{1-\cos 5x}$	11.12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi/x}{ctg(\pi x/2)}$
11.13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin 5x)}$	11.14 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{tgx}{tg5x}$	11.15 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{5x}}{\sin x}$
11.16 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctgx}{x^3}$	11.17 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$	11.18 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$
11.19 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^3-1}$	11.20 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{e^x-e^{-x}}$	11.21 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{1-\cos 6x}$
11.22 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{7^x-1}{3^x-1}$	11.23 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 4x}$	11.24 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{2x}}{tg4x}$
11.25 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-4^x}{x\sqrt{1-x^2}}$	11.26 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$	11.27 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(7+x)}{\sqrt[7]{x-3}}$
11.28 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{5-5e^{-3x}}$	11.29 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{9x}-1}{\cos 5x}$	11.30 $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$

12. Исследовать функцию на непрерывность и построить график.

12.1 $f(x)=\begin{cases} x+4, & x\prec -1,\\ x^2+2, & -1\le x\le 1,\\ 2x, & x\succ 1.\end{cases}$	12.2 $f(x)=\begin{cases} x+4, & x\le 0,\\ (x+1)^2, & 0\prec x\le 2,\\ -x+4, & x\succ 2.\end{cases}$	12.3 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1,\\ x^2+1, & -1\prec x\le 1,\\ -x+3, & x\succ 1.\end{cases}$
12.4 $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0,\\ -(x-1)^2, & 0\prec x\prec 2,\\ x-3, & x\ge 2.\end{cases}$	12.5 $f(x)=\begin{cases} -2(x+1), & x\le -1,\\ (x+1)^2, & -1\prec x\prec 0,\\ x, & x\ge 0.\end{cases}$	12.6 $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0,\\ x^2, & 0\prec x\le 2,\\ x+1, & x\succ 2.\end{cases}$
12.7 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1,\\ 2x, & 1\prec x\le 3,\\ x+2, & x\succ 3.\end{cases}$	12.8 $f(x)=\begin{cases} x-3, & x\prec 0,\\ x+1, & 0\le x\le 4,\\ x+3, & x\succ 4.\end{cases}$	12.9 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}, & x\le 0,\\ 0, & 0\prec x\le 2,\\ x-2, & x\succ 2.\end{cases}$

12.10 $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & x\le 0,\\ x, & 0\prec x\le 1,\\ x+2, & x\succ 1.\end{cases}$	12.11 $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\prec 0,\\ x, & 0\le x\le 2,\\ 0, & x\succ 2.\end{cases}$	12.12 $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le \pi/2,\\ 0, & \pi/2\prec x\prec \pi,\\ 2, & x\ge \pi.\end{cases}$
12.13 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 0,\\ x^2, & 0\prec x\prec 2,\\ 2x, & x\ge 2.\end{cases}$	12.14 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\prec 0,\\ x^2-1, & 0\le x\prec 1,\\ -x, & x\ge 1.\end{cases}$	12.15 $f(x)=\begin{cases} -x, & x\prec 0,\\ x^2+1, & 0\le x\prec 2,\\ 1+x, & x\ge 2.\end{cases}$
12.16 $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 0,\\ 1, & 0\prec x\le 2,\\ x^2-2, & x\succ 2.\end{cases}$	12.17 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\prec 0,\\ \sin x, & 0\le x\prec \pi,\\ 3, & x\ge \pi.\end{cases}$	12.18 $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x\prec -1,\\ x^2+1, & -1\le x\le 2,\\ 2x, & x\succ 2.\end{cases}$
12.19 $f(x)=\begin{cases} 1, & x\le 0,\\ 2^x, & 0\prec x\le 2,\\ x+3, & x\succ 2.\end{cases}$	12.20 $f(x)=\begin{cases} -x+2, & x\le -2,\\ x^3, & -2\prec x\le 1,\\ 2, & x\succ 1.\end{cases}$	12.21 $f(x)=\begin{cases} 3x+4, & x\le -1,\\ x^2-2, & -1\prec x\prec 2,\\ x, & x\ge 2.\end{cases}$
12.22 $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1,\\ (x-2)^2, & 1\prec x\prec 3,\\ -x+6, & x\ge 3.\end{cases}$	12.23 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\prec 1,\\ x^2+2, & 1\le x\le 2,\\ -2x, & x\succ 2.\end{cases}$	12.24 $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\prec -1,\\ x-1, & -1\le x\le 3,\\ -x+5, & x\succ 3.\end{cases}$
12.25 $f(x)=\begin{cases} x, & x\le -2,\\ -x+1, & -2\prec x\le 1,\\ x^2-1, & x\succ 1.\end{cases}$	12.26 $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 0,\\ -x^2+4, & 0\prec x\prec 2,\\ x-2, & x\ge 2.\end{cases}$	12.27 $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1,\\ x^2-1, & -1\prec x\le 2,\\ 2x, & x\succ 2.\end{cases}$
12.28 $f(x)=\begin{cases} -1, & x\prec 0,\\ \cos x, & 0\le x\le \pi,\\ 1-x, & x\succ \pi.\end{cases}$	12.29 $f(x)=\begin{cases} 2, & x\prec -1,\\ 1-x, & -1\le x\le 1,\\ \ln x, & x\succ 1.\end{cases}$	12.30 $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0,\\ x^3, & 0\prec x\le 2,\\ x+4, & x\succ 2.\end{cases}$

2.3 Решение типового варианта.

1. Найти предел: $\lim\limits_{x\to -2}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$.

Решение:

$$\lim_{x\to-2}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(5x+3)}{(x+2)(3x-4)}=\lim_{x\to-2}\frac{5x+3}{3x-4}=\frac{7}{10}=0{,}7.$$

2. Найти предел: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}$.

Решение:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5\left(2+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^4}\right)}{x^2\left(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(2+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^4}\right)}{3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{-\infty}{3}=-\infty.$$

3. Найти предел: $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}$.

Решение:

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{21+x}-5\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}{\left(x^3-64\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\lim_{x\to4}\frac{21+x-25}{\left(x^3-64\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)\left(x^2+4x+16\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\lim_{x\to4}\frac{1}{\left(x^2+4x+16\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\frac{1}{480}.$$

4. Найти предел:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg9x}{8x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{5x}$.

Решение:

а) для того, чтобы избавиться от неопреленности вида $\frac{0}{0}$ применяем первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg9x}{8x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 9x}{\cos 9x}}{8x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{8x}\cdot\frac{1}{\cos 9x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{9x}\cdot\frac{9}{8\cos 9x}=1\cdot\frac{9}{8}=\frac{9}{8};$$

б) для того, чтобы избавиться от неопреленности вида $\left|1^{\infty}\right|$ применяем второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{5x}=\left|1^{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x}{2x-3}-1\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-2x+3}{2x-3}\right)^{5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{3}{2x-3}\cdot 5x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3}{2x-3}\cdot 5x}=e^{\frac{15}{2}}.$$

5. Исследовать функцию на непрерывность:

а) $f(x)=9^{\frac{5}{8-x}}$;

б) $f(x)=\dfrac{4}{5+3x}$.

Решение:

а) функция $f(x)=9^{\frac{5}{8-x}}$ определена в интервалах $x\in(-\infty;8)\cup(8;+\infty)$ и непрерывна. Следовательно, разрыв возможен в точке $x_0=8$. Находим односторонние пределы функции в этой точке:

$$f(8-0)=\lim_{x\to 8-0}9^{\frac{5}{8-x}}=9^{\frac{5}{8-(8-0)}}=9^{\frac{5}{+0}}=9^{+\infty}=+\infty,$$

$$f(8+0)=\lim_{x\to 8+0}9^{\frac{5}{8-x}}=9^{\frac{5}{8-(8+0)}}=9^{\frac{5}{-0}}=9^{-\infty}=\frac{1}{9^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

В точке $x_0=8$ функция терпит бесконечный разрыв, следовательно, $x_0=8$ – точка разрыва второго рода;

б) функция $f(x)=\dfrac{4}{5+3x}$ определена в интервалах $x\in(-\infty;-\frac{5}{3})\cup\left(-\frac{5}{3};+\infty\right)$ и непрерывна. Следовательно, разрыв возможен в точке $x_0=-\frac{5}{3}$. Находим односторонние пределы функции в этой точке:

$$f(-\frac{5}{3}-0)=\lim_{x\to-\frac{5}{3}-0}\frac{4}{5+3x}=\frac{4}{5+3\cdot\left(-\frac{5}{3}-0\right)}=\frac{4}{5-5-0}=\frac{4}{-0}=-\infty,$$

$$f(-\frac{5}{3}+0)=\lim_{x\to-\frac{5}{3}+0}\frac{4}{5+3x}=\frac{4}{5+3\cdot\left(-\frac{5}{3}+0\right)}=\frac{4}{5-5+0}=\frac{4}{+0}=+\infty,$$

т.е. в точке $x_0=-\frac{5}{3}$ функция терпит бесконечный разрыв. Следовательно, $x_0=-\frac{5}{3}$ – точка разрыва второго рода.

6. Найти производную функции:

а) $y=ln(4x^2-5x+2^{-3x})$;

б) $y=\dfrac{ctg^5 3x}{x+2}$.

Решение:

а) по формуле $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$ находим:

$$y'=\frac{(4x^2-5x+2^{-3x})'}{4x^2-5x+2^{-3x}}=\frac{8x-5+2^{-3x}\ln2\cdot(-3)}{4x^2-5x+2^{-3x}}=$$
$$=\frac{8x-5-3\cdot2^{-3x}\ln2}{4x^2-5x+2^{-3x}};$$

б) производную числителя данной функции находим следующим образом:

$$(ctg^5 3x)'=\left|\begin{matrix}\text{замена:}\\ u=ctg3x;\\ t=3x\end{matrix}\right|=(u^5)'_u\cdot(ctgt)'_{tu}\cdot(3x)'=$$
$$=5u^4\cdot\frac{-1}{sin^2t}\cdot3=-5ctg^4 3x\frac{3}{sin^2 3x}=-\frac{15ctg^4 3x}{sin^2 3x};$$

$$y' = \left(\frac{ctg^5 3x}{x+2}\right)' = \frac{(ctg^5 3x)' \cdot (x+2) - (x+2)' \cdot ctg^5 3x}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{-\frac{15ctg^4 3x}{sin^2 3\text{x}} \cdot (x+2) - 1 \cdot ctg^5 3x}{(x+2)^2} = \frac{\frac{-15(x+2)ctg^4 3x}{\sin^2 3x} - ctg^5 3x}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{-15(x+2)ctg^4 3x - \sin^2 3x \cdot ctg^5 3x}{(x+2)^2 \sin^2 3x}.$$

7. Найти производную функции, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3t^4 - t^2, \\ y = t^3 - 5. \end{cases}$$

Решение:

производную функции, заданной параметрическими уравнениями, находят по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Тогда для искомой функции $\begin{cases} x'_t = 12t^3 - 2t, \\ y'_t = 3t^2, \end{cases}$ т.е.

$$y'_x = \frac{3t^2}{12t^3 - 2t} = \frac{3t^2}{2t\left(6t^2 - 1\right)} = \frac{3t}{2\left(6t^2 - 1\right)}.$$

8. Найти вторую производную функции $y = \ln^3 x$ в точке $x_0 = 1$.

Решение:

$$y' = \left(\ln^3 x\right)' = 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{3\ln^2 x}{x},$$

$$y'' = \left(\frac{3\ln^2 x}{x}\right)' = 3 \cdot \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln^2 x}{x^2} = 3 \cdot \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{3\ln x\left(2 - \ln x\right)}{x^2},$$

$$y''(1) = \frac{3\ln 1\left(2 - \ln 1\right)}{1^2} = 0.$$

9. Дана функция $y=\dfrac{x^2+1}{3x}$. Определить

а) область определения и точки разрыва;
б) асимптоты графика функции;
в) точки пересечения графика функции с осями координат;
г) четность, нечетность;
д) интервалы монотонности, экстремумы;
е) интервалы вогнутости, выпуклости и точки перегиба;
ж) построить график.

Решение:

а) $x=0$ - точка разрыва, в области определения функция непрерывна: $x\neq 0 \Leftrightarrow D(y):(-\infty;\ 0)\cup(0;+\infty)$. Находим односторонние пределы функции в точке разрыва:

$$\lim_{x\to -0}\frac{x^2+1}{3x}=-\infty,\ \lim_{x\to +0}\frac{x^2+1}{3x}=+\infty;$$

б) если $f(x_0\pm 0)=\pm\infty$, то прямая $x=x_0$ является вертикальной асимптотой, значит $x=0$ - вертикальная асимптота.

Прямая $y=kx+b$ – наклонная асимптота, где

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{3x^2}=\frac{1}{3},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{3x}-\frac{x}{3}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x}=0.$$

Значит, $y=\dfrac{1}{3}x$ – наклонная асимптота;

в) при $x=0$ график функции $y=f(x)$ не имеет пересечение с осью *0x*, так как $D(y):(-\infty;\ 0)\cup(0;+\infty)$. При $y=0$ график функции $y=f(x)$ не имеет пересечение с осью *0y*, так как $y=\dfrac{x^2+1}{3x}\neq 0$;

г) $y(-x)=\frac{(-x)^2+1}{3(-x)}=-\frac{x^2+1}{3x}=-y(x)$, т.е. функция нечетная, график симметричен относительно начала координат. Т.к. при $x>0$ $y>0$, то график расположен в первой и третьей четвертях. Функция непериодическая. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{3x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+1\right)'}{(3x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{3}=+\infty$ – функция неограниченно возрастает.

д) $y'=\left(\frac{x^2+1}{3x}\right)'=\frac{1}{3}\cdot\frac{2x^2-x^2-1}{x^2}=\frac{x^2-1}{3x^2}$,

$y'=0 \Rightarrow x_1=-1,\ \ x_2=1$ – стационарные точки. В области определения функции y' существует. Исследуем изменения знака производной функции в каждом интервале:

в интервале $0<x<1$ $y'<0$, значит функция убывает,

в интервале $1<x<+\infty$ $y'>0$, значит функция возрастает;

в точке $x=1$ имеем локальный минимум: $y(1)=\frac{1+1}{3}=\frac{2}{3}$,

в интервале $-\infty<x<-1$ $y'>0$, значит функция возрастает,

в интервале $-1<x<0$, то $y'<0$, значит функция убывает,

в точке $x=-1$ имеем локальный максимум: $y(-1)=-\frac{2}{3}$;

е) $y''=\left(\frac{x^2-1}{3x^2}\right)'=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{2}{3x^3}$, $y''\neq 0$. Вторая производная существует в области определения:

при $x\in(0;+\infty)$ $y''>0$, значит график выпуклый вниз;

при $x\in(-\infty;0)$ $y''<0$, значит график выпуклый вверх; точек перегиба нет.

ж) график функции $y=\frac{x^2+1}{3x}$ показан на рисунке 5.

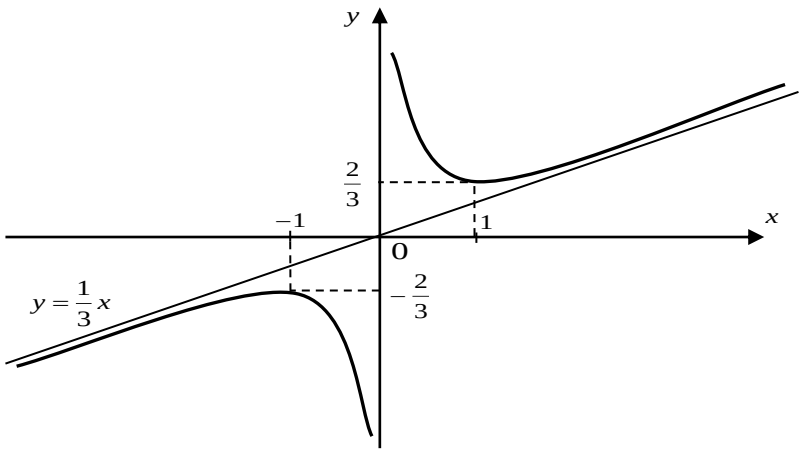

Рисунок 5

10. Найти предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$.

Решение:

при значении $x=\infty$ получается неопределенность вида $\left|\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right|$. В начале, для раскрытия неопределенности в основании степени $\left|\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right|$ применяется свойство эквивалентности бесконечно больших функций, и далее, используется свойство показательной функции:

$$a^{\infty}=\begin{cases}0, \text{ при } a<1\\ \infty, \text{ при } a>1\end{cases}:$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}=\left|\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{5x}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}=\left(\frac{2}{5}\right)^{\infty}=\left|\frac{2}{5}<1\right|=0.$$

11. Найти предел, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{x\sin 7x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Решение:

а) правило Лопиталя применяется для неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{x\sin 7x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 7x)'}{(x\sin 7x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{7\sin 7x}{\sin 7x+7x\cos 7x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(7\sin 7x)'}{(\sin 7x+7x\cos 7x)'}==\lim_{x\to 0}\frac{49\cos 7x}{7\cos 7x+7(\cos 7x-x\sin 7x)}=\frac{49}{14}=\frac{7}{2};$$

б) при значении $x=0$ получается неопределенность вида $\infty-\infty$, тогда дроби приводятся к общему знаменателю и, далее, используется свойства эквивалентности бесконечно малых величин:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=|\infty-\infty|=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\cdot\sin^2 x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\cdot x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-\sin^2 x)'}{(x^4)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{6x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{6x^2}=\frac{1}{3}.$$

12. Исследовать на непрерывность и построить график функции

$$f(x)=\begin{cases}2x, & x\le -1,\\ x^2-3, & -1<x\le 2,\\ 5-x, & x>2.\end{cases}$$

Решение: так как функция задана тремя формулами, разрыв может случиться в точках $x=-1$ и $x=2$, т.е. в местах «стыка» двух линий. Находим односторонние пределы функции в точке $x=-1$:

$$f(-1-0) = \lim_{x \to -1-0} 2x = 2(-1-0) = -2\,,$$

$$f(-1+0) = \lim_{x \to -1+0} (x^2 - 3) = -2\,.$$

Так как односторонние пределы функции в точке $x = -1$ стремятся к одному и тому числу, то в этой точке функция не разрывна.

Находим односторонние пределы функции в точке $x = 2$:

$$f(2-0) = \lim_{x \to 2-0} (x^2 - 3) = 1\,,$$

$$f(2+0) = \lim_{x \to 2+0} (5 - x) = 3\,.$$

Так как односторонние пределы функции в точке $\boldsymbol{x} = 2$ стремятся к разным числам (не к бесконечности), то в этой точке функция терпит разрыв первого рода, а скачок равен 3-1=2.

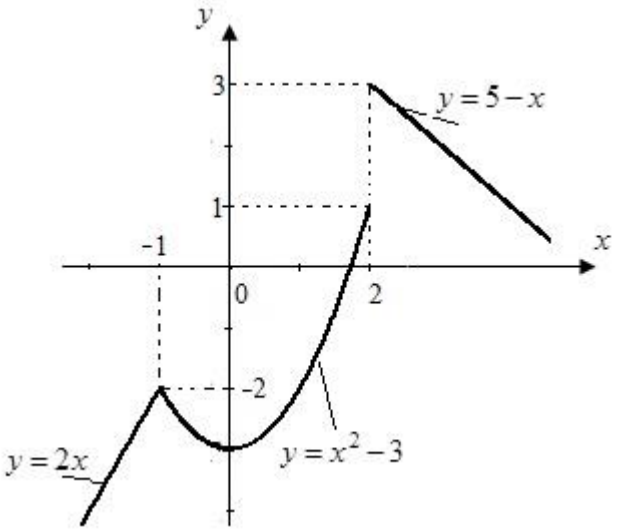

Рисунок 6

3 Расчетно-графическая работа №3. Интегральное исчисление функции одной переменной.

Цель: освоение основных методов интегрирования при нахождении неопределенных и определенных интегралов, их приложений в геометрических и физических задачах.

3.1 Теоретические вопросы

1. Первообразная. Неопределенный интеграл, его свойства.
2. Таблица интегралов.
3. Разложение дробно-рациональной функции на простейшие дроби. Интегрирование дробно-рациональной функции.
4. Интегрирование иррациональной функции.
5. Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная подстановка.
6. Определенный интеграл и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Применение определенного интеграла.
7. Метод замены переменной в неопределенном и определенном интегралах.
8. Метод интегрирования по частям в определенном и неопределенном интегралах.

3.1 Расчётные задания

1. Вынести функцию $f(x)$ из-под знака дифференциала

№	$d(f(x))$	№	$d(f(x))$	№	$d(f(x))$
1.1	$d\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$	1.2	$d\left(\sqrt[4]{2x+5}\right)$	1.3	$d\left(\ln(2-x)\right)$
1.4	$d\left(\cos(3x-1)\right)$	1.5	$d\left(2^{\sin 2x}\right)$	1.6	$d(\sin(4x-5))$
1.7	$d\left(\arcsin(2x-1)\right)$	1.8	$d\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^7}}\right)$	1.9	$d\left(arctg(2x+5)\right)$
1.10	$d\left(e^{\cos 2x}\right)$	1.11	$d\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$	1.12	$d\left(\sqrt[3]{x+35}\right)$
1.13	$d\left(\ln(2x+7)\right)$	1.14	$d\left(2\cos(4x+1)\right)$	1.15	$d\left(3^{\sin 5x}\right)$
1.16	$d(2\sin(x+6))$	1.17	$d\left(e^{tg\,2x}\right)$	1.18	$d\left(\arcsin(x-2)\right)$
1.19	$d\left(arctg(3x+15)\right)$	1.20	$d\left(\arccos(2x-1)\right)$	1.21	$d\left(\frac{25}{\sqrt[3]{x^{10}}}\right)$
1.22	$d\left(\arcsin(2x+5)\right)$	1.23	$d\left(e^{x^2+2}\right)$	1.24	$d\left(\frac{2}{\sqrt{x^2-16}}\right)$

1.25	$d\left(\sqrt[5]{3x-5}\right)$	1.26	$d\left(\ln(2-3x)\right)$	1.27	$d(3\sin(4x+25))$
1.28	$d\left(5^{\sin 2x}\right)$	1.29	$d\left(4\cos(5x-2)\right)$	1.30	$d\left(\arccos(x+3)\right)$

2. Внести функцию $f(x)$ под знак дифференциала.

№	$f(x)$	№	$f(x)$	№	$f(x)$
2.1	$\frac{5}{x^3}$	2.2	$\sin(3x+5)$	2.3	3^{2x+1}
2.4	$\cos(3-2x)$	2.5	$\frac{1}{x\ln x}$	2.6	$tg(6x-2)$
2.7	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	2.8	$ctg(x+2)$	2.9	$\frac{2}{\sqrt[3]{3-x}}$
2.10	$(2x-1)^7$	2.11	$\frac{15}{(x+2)^3}$	2.12	5^{-2x+1}
2.13	$3\sin(5x+9)$	2.14	$\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$	2.15	$5\cos(3+4x)$
2.16	$(2+12x)^4$	2.17	$tg(6-2x)$	2.18	$\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$
2.19	$-ctg(x-2)$	2.20	$\frac{2}{\sqrt[3]{3+2x}}$	2.21	$\frac{3}{(2x-1)^2}$
2.22	$\frac{1}{\sqrt{4-2x}}$	2.23	4^{2x-15}	2.24	$-\sin(2x-5)$
2.25	$(2x+4)^9$	2.26	$\frac{1}{(2x-1)\ln(2x-1)}$	2.27	$7\cos(5x-1)$
2.28	3^{5-x}	2.29	$-tg(x-2)$	2.30	$ctg(5x+2)$

3. Найти неопределенный интеграл.

3.1 а) $\int \frac{1-5x^3+9\sqrt[4]{x^5}}{x^4}dx$ б) $\int 2^x(3^x-8^x)\,dx$	3.2 а) $\int \frac{\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+x^5}{x^2}dx$ б) $\int 3^x(5-7^{-x})\,dx$	3.3 а) $\int \frac{\left(\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}\right)^2}{x}dx$ б) $\int 7^{-x}\left(\sqrt{7^{4x}}+5^x\right)dx$
3.4 а) $\int\left(x\sqrt[3]{5x}-3\right)^3dx$ б) $\int e^{-x}(2^x-3e^{x+3})\,dx$	3.5 а) $\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{x+2}{x}\right)dx$ б) $\int e^x(5^x-\pi^x)\,dx$	3.6 а) $\int \frac{\left(2-x^{\frac{1}{3}}\right)^3}{x}dx$ б) $\int 5^{-x}(4-3^{x+2})\,dx$
3.7 а) $\int \frac{\sqrt{x^3}-2x^2+3x^4}{x}dx$ б) $\int 3^{-x}(7+2^{x+1})\,dx$	3.8 а) $\int\left(x^3-\frac{2}{\sqrt[3]{x^5}}\right)\sqrt[3]{x}dx$ б) $\int(e^x+e^{2x})^2\,dx$	3.9 а) $\int\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}}+\frac{7}{x^4}-x\right)dx$ б) $\int(e^x-2e^{-3x})^2\,dx$

3.10 а) $\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$ б) $\int e^x\cdot\sqrt{2^{3x}}\,dx$	3.11 а) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3 dx$ б) $\int 5^x\cdot 3^{2-4x}\,dx$	3.12 а) $\int\left(9x-\frac{4\sqrt{x}}{x^2}\right)dx$ б) $\int \pi^x\cdot e^{3x+4}dx$
3.13 а) $\int\left(\sqrt{\frac{x}{9}}-\sqrt[3]{x}\right)^2 dx$ б) $\int(5^x-2\cdot 5^{-x})^2\,dx$	3.14 а) $\int\frac{x^3-3\sqrt{x^5}}{\sqrt{x}}dx$ б) $\int 3^{-x}(4+5^{x+2})\,dx$	3.15 а) $\int\frac{x^4-2x-\sqrt{x}}{x^2}dx$ б) $\int(5^{x+1}-5^{-3x})^2dx$
3.16 а) $\int\left(x^2+\sqrt[4]{3x}\right)\sqrt{x}dx$ б) $\int\frac{2^x+3^x}{2^{3x-5}}dx$	3.17 а) $\int\frac{\left(\frac{x}{2}-\sqrt{6x}\right)^2}{x}dx$ б) $\int\frac{2^{2x-4}+3^{-x}}{2^{x-5}}dx$	3.18 а) $\int\frac{(x-2)^3}{\sqrt{x}}dx$ б) $\int\left(5\cdot 3^{\frac{x}{2}}-3^{-2x}\right)^2 dx$
3.19 а) $\int\frac{(2x+5)^3}{x^2}dx$ б) $\int 4^x(7+2^{-x})\,dx$	3.20 а) $\int\frac{\left(x-\frac{2}{x}\right)^2}{\sqrt{x}}dx$ б) $\int e^x(1-5\cdot e^{3-6x})dx$	3.21 а) $\int\frac{\left(8x+\frac{3}{x}\right)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$ б) $\int 2^{-x}(3-10^{x+2})dx$
3.22 а) $\int\frac{\left(4-\sqrt[3]{x}\right)^3}{x^2}dx$ б) $\int\pi^{2x}\left(\frac{4}{3^x}-6^{x+2}\right)dx$	3.23 а) $\int\frac{(2x+3)^3}{x^3}dx$ б) $\int\frac{1}{2^x}(e^x-5\cdot e^{-x})\,dx$	3.24 а) $\int\frac{x^3-2\sqrt{x}+x\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx$ б) $\int(e^x-e^{-3x})^2\,dx$
3.25 а) $\int\frac{(4-3x)^3}{\sqrt{x}}dx$ б) $\int(e^x-e^{-2x})^3\,dx$	3.26 а) $\int\frac{\left(x+\frac{3}{x}\right)^2}{\sqrt[4]{x}}dx$ б) $\int(e^x+2^{-3x})^2\,dx$	3.27 а) $\int\frac{\left(2-5\sqrt{x^3}\right)^3}{x^2}dx$ б) $\int 3^x(9+5^{-3x})\,dx$
3.28 а) $\int\frac{\left(7\sqrt{x}-4\right)^2}{x^3}dx$ б) $\int\frac{3^{-x}+4^{x+2}}{2^{3x-1}}dx$	3.29 а) $\int\frac{x^4+11\sqrt{x}+3x}{\sqrt{x^3}}dx$ б) $\int(e^x+3e^{2x})^3\,dx$	3.30 а) $\int\frac{\left(1+6\sqrt{x^3}\right)^3}{x^4}dx$ б) $\int\frac{e^{x+1}+9e^{-3x}}{e^x}dx$

4. Найти неопределенный интеграл.

4.1	$\int\frac{dx}{3\sqrt{9-x^2}}$	4.2	$\int\frac{7dx}{\sqrt{x^2+9}}$	4.3	$\int\frac{5dx}{\sqrt{x^2-9}}$
4.4	$\int\frac{dx}{\sqrt{3x-x^2}}$	4.5	$\int\frac{dx}{\sqrt{5+x^2}}$	4.6	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}$
4.7	$\int\frac{dx}{3x^2+1}$	4.8	$\int\frac{dx}{3x^2-1}$	4.9	$\int\frac{dx}{1-3x^2}$
4.10	$\int\frac{dx}{4-5x^2}$	4.11	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$	4.12	$\int\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

4.13	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$	4.14	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$	4.15	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$
4.16	$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-27}}$	4.17	$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8}}$	4.18	$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
4.19	$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$	4.20	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+9x^2}}$	4.21	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$
4.22	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}$	4.23	$\int \frac{\sqrt{x^2-3}}{x^2-3}dx$	4.24	$\int \frac{\sqrt{x^2+3}}{2x^2+6}dx$
4.25	$\int \frac{x^{2+}\sqrt{x^2-4}}{x^2-4}dx$	4.26	$\int \frac{\sqrt{x^2+9}-x^2}{x^2+9}dx$	4.27	$\int \left(x^2-5\right)^{-\frac{1}{2}}dx$
4.28	$\int \left(x^2+5\right)^{-\frac{1}{2}}dx$	4.29	$\int \left(3-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx$	4.30	$\int \left(x^2+25\right)^{-\frac{1}{2}}dx$

5. Найти неопределенный интеграл.

5.1	$\int \left(\frac{5}{9+x^2}\right)dx$	5.2	$\int \left(\frac{7}{3-x^2}-\frac{4}{5+x^2}\right)dx$	5.3	$\int \frac{dx}{1-7x^2}$
5.4	$\int \frac{dx}{3x^2+2}$	5.5	$\int \frac{dx}{2x^2-3}$	5.6	$\int \frac{dx}{3+7x^2}$
5.7	$\int \frac{2}{2x^2-1}dx$	5.8	$\int \frac{dx}{5-3x^2}$	5.9	$\int \frac{dx}{3x^2-2}$
5.10	$\int \left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^2+2}\right)dx$	5.11	$\int \left(\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^2-2}\right)dx$	5.12	$\int \left(\frac{5}{x^2-3}-\frac{7}{x^2+3}\right)dx$
5.13	$\int \frac{dx}{4x^2+1}$	5.14	$\int \left(\frac{3}{x^2-5}-\frac{2}{x^2+3}\right)dx$	5.15	$\int \frac{dx}{4x^2-1}$
5.16	$\int \left(\frac{3}{4-x^2}-\frac{4}{1+x^2}\right)dx$	5.17	$\int \left(\frac{7}{9-x^2}+\frac{4}{25+x^2}\right)dx$	5.18	$\int \frac{dx}{4x^2+25}$
5.19	$\int \frac{dx}{16-27x^2}$	5.20	$\int \frac{2}{25x^2-1}dx$	5.21	$\int \frac{dx}{63+7x^2}$
5.22	$\int \frac{dx}{25x^2-36}$	5.23	$\int \left(\frac{5}{x^2+36}\right)dx$	5.24	$\int \frac{6dx}{36x^2-25}$
5.25	$\int \left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^2+4}\right)dx$	5.26	$\int \left(\frac{2}{9+x^2}+\frac{4}{4-x^2}\right)dx$	5.27	$\int \frac{dx}{49x^2+16}$
5.28	$\int \frac{dx}{4x^2-1}$	5.29	$\int \frac{dx}{64x^2+1}$	5.30	$\int \left(\frac{7}{81-x^2}\right)dx$

6. Найти неопределенный интеграл.

6.1	$\int(\cos 2x-3\sin x)dx$	6.2	$\int\frac{dx}{\cos^2 3x}$	6.3	$\int\frac{dx}{1-\sin^2 5x}$
6.4	$\int tg^2 2xdx$	6.5	$\int\left(e^{5x}-3e^{-x}+4e^{\frac{x}{2}}\right)dx$	6.6	$\int\left(e^{4x}-2e^{-3x}\right)^2 dx$
6.7	$\int\sin(2x+3)dx$	6.8	$\int\frac{2^{3x}-3^x}{3^{2x}}dx$	6.9	$\int\frac{\left(e^{-x}+5\right)^2}{e^x}dx$
6.10	$\int\left(\sqrt[3]{e^x}-x\right)dx$	6.11	$\int\frac{dx}{\sqrt{e^{3x}}}$	6.12	$\int\frac{dx}{\sqrt{6e^{5x-1}}}$
6.13	$\int(\cos x+\sin x)^2 dx$	6.14	$\int(\cos x-\sin x)^2 dx$	6.15	$\int(\cos 3x+\sin 3x)^2 dx$
6.16	$\int(\cos 2x-\sin 2x)^2 d$	6.17	$\int\frac{dx}{\sin^2 5x}$	6.18	$\int\frac{dx}{\cos^2(x/3)}$
6.19	$\int\cos(1-5x)dx$	6.20	$\int\sin^2 xdx$	6.21	$\int\cos^2 xdx$
6.22	$\int\left(\cos\frac{x}{3}-\sin\frac{x}{2}\right)dx$	6.23	$\int\cos x(1-25\cos x)dx$	6.24	$\int\frac{5^{2x}-3^{-x}}{2^x}dx$
6.25	$\int\frac{5^{2x-1}-5^{2-2x}}{4^x}dx$	6.26	$\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^{2x}}dx$	6.27	$\int\frac{e^{x+1}+e^{1-x}}{e^x}dx$
6.28	$\int\left(\cos\frac{x}{3}-5\sin\frac{x}{2}\right)^2 dx$	6.29	$\int\sin x(3+\cos x)dx$	6.30	$\int\sin^2 xdx$

7. Найти неопределенный интеграл.

7.1	$\int\frac{dx}{x-5}$	7.2	$\int\frac{x}{(x+3)^2}dx$	7.3	$\int\frac{dx}{3x+1}$
7.4	$\int\frac{dx}{5-7x}$	7.5	$\int\frac{dx}{\sqrt{x+9}}$	7.6	$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$
7.7	$\int(x-a)^4 dx$	7.8	$\int\sqrt[5]{(x+3)}^4 dx$	7.9	$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^4}}$
7.10	$\int\frac{dx}{(x+1)\cdot\sqrt{2x+2}}$	7.11	$\int\sqrt[3]{(x+2)}^5 dx$	7.12	$\int\sqrt{\frac{7}{(x-2)^5}}dx$
7.13	$\int\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x+1}}\right)^5 dx$	7.14	$\int\sqrt{\frac{5}{(x-2)^7}}dx$	7.15	$\int\sqrt[4]{(x+a)^5}dx$
7.16	$\int\frac{x}{(x-3)^5}dx$	7.17	$\int\frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$	7.18	$\int\frac{1-2x}{\sqrt{x+1}}dx$
7.19	$\int\frac{x}{(x-2)^3 dx}$	7.20	$\int\frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$	7.21	$\int\frac{x}{(x-3)^5}dx$

7.22	$\int \frac{dx}{x-5}$	7.23	$\int \frac{x}{(x-3)^2}dx$	7.24	$\int \frac{dx}{3x+1}$
7.25	$\int \frac{dx}{(x+25)\cdot\sqrt{x+25}}$	7.26	$\int \sqrt[3]{(x+2)^5}dx$	7.27	$\int \sqrt{\frac{1}{(x-21)^5}}dx$
7.28	$\int \frac{dx}{(25x+1)\cdot\sqrt{25x+1}}$	7.29	$\int \sqrt[3]{(x+25)^7}dx$	7.30	$\int \frac{3dx}{(x-5)^3}$

8. Найти неопределенный интеграл методом подведения под знак дифференциала.

8.1	$\int e^{x^2}\cdot xdx$	8.2	$\int e^{-x^2}\cdot xdx$	8.3	$\int e^{5x^2}\cdot xdx$
8.4	$\int e^{\frac{x^2}{2}}\cdot xdx$	8.5	$\int e^{x^2+3}\cdot xdx$	8.6	$\int e^{1-3x^2}\cdot xdx$
8.7	$\int x\cdot\sqrt{x^2+1}dx$	8.8	$\int x\cdot\sqrt[3]{(x^2+3)^4}dx$	8.9	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}}$
8.10	$\int \frac{xdx}{x^2+10}$	8.11	$\int \frac{e^x dx}{e^x+5}$	8.12	$\int e^x\cdot\sqrt{3e^x-7dx}$
8.13	$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-5}}$	8.14	$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+10}$	8.15	$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$
8.16	$\int \frac{dx}{x\cdot\ln^3 x}$	8.17	$\int \frac{dx}{x\cdot\ln x}$	8.18	$\int tgxdx$
8.19	$\int ctgxdx$	8.20	$\int \cos x\cdot\sqrt{\sin x}dx$	8.21	$\int e^{-x^3}\cdot x^2dx$
8.22	$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-4}$	8.23	$\int \frac{dx}{x\cdot(\ln^2 x+1)}$	8.24	$\int x\cdot\sqrt{(x^2+3)^5}dx$
8.25	$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$	8.26	$\int 4^{\cos x}\sin xdx$	8.27	$\int \frac{\cos x}{2+3\sin x}dx$
8.28	$\int \frac{x^2}{1-x^3}dx$	8.29	$\int \frac{6^x}{1-6^x}dx$	8.30	$\int \frac{e^x}{(e^x-1)^2}dx$

9. Найти неопределенный интеграл.

9.1	$\int \frac{dx}{x^2+8x+5}$	9.2	$\int \frac{dx}{x^2-x+1}$	9.3	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$
9.4	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+11}}$	9.5	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+1}}$	9.6	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$
9.7	$\int \frac{dx}{\sqrt{2-2x-x^2}}$	9.8	$\int \frac{xdx}{x^2+2x+5}$	9.9	$\int \frac{(x-1)dx}{x^2-2x+5}$

9.10	$\int \frac{1-x}{x^2-x+1}dx$	9.11	$\int \frac{dx}{x^2+x+2}$	9.12	$\int \frac{dx}{x+(x+1)^2}$
9.13	$\int \frac{3x+1}{(x-2)^2+(x+1)}dx$	9.14	$\int \frac{x^2+7}{x^2+4}dx$	9.15	$\int \frac{dx}{x+x^2+3}$
9.16	$\int \frac{x+1}{x+(x^2+3)}dx$	9.17	$\int \frac{dx}{x^3+1}$	9.18	$\int \frac{dx}{x^3-8}$
9.19	$\int \frac{x}{x^2+6x-1}dx$	9.20	$\int \frac{x}{x^2-4x+1}dx$	9.21	$\int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2+6x-5}}dx$
9.22	$\int \frac{1-2x}{x^2-6x+10}dx$	9.23	$\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$	9.24	$\int \frac{dx}{2x^2-3x+1}$
9.25	$\int \frac{dx}{5x-x^2-6}$	9.26	$\int \frac{(2x-3)dx}{4+3x-x^2}$	9.27	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$
9.28	$\int \frac{dx}{x^2+x-3}$	9.29	$\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx$	9.30	$\int \frac{dx}{x^2+8x+7}$

10. Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям.

10.1	$\int x\cdot e^{2x}dx$	10.2	$\int (x-1)\cdot e^{-x}dx$	10.3	$\int (2x+5)\cdot e^{\frac{x}{3}}dx$
10.4	$\int x^2\cdot e^{x}dx$	10.5	$\int x\cdot 3^{x}dx$	10.6	$\int x\cdot \ln x dx$
10.7	$\int x\cdot \ln 5x dx$	10.8	$\int \sqrt{x}\cdot \ln x dx$	10.9	$\int (\ln x-2\ln^2 x)dx$
10.10	$\int \frac{\ln x}{x^2}dx$	10.11	$\int x\cdot arctgx dx$	10.12	$\int x\cdot \cos x dx$
10.13	$\int x\cdot \sin x dx$	10.14	$\int x\cdot \cos 3x dx$	10.15	$\int x\cdot \sin\frac{x}{2}dx$
10.16	$\int x\cdot \cos\frac{x}{3}dx$	10.17	$\int x\cdot \sin 5x dx$	10.18	$\int x^2\cdot e^{-x}dx$
10.19	$\int x\cdot 5^{x}dx$	10.20	$\int \frac{x}{2^x}dx$	10.21	$\int x^2\sqrt{e^x}dx$
10.22	$\int x\cdot e^{-3x}dx$	10.23	$\int x\cdot \sin\frac{x}{3}dx$	10.24	$\int x\cdot e^{\frac{x}{2}}dx$
10.25	$\int \sqrt[3]{x}\ln x dx$	10.26	$\int (x+5)3^{x}dx$	10.27	$\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$
10.28	$\int x\cdot \sin 3x dx$	10.29	$\int \frac{x}{7^x}dx$	10.30	$\int x\sqrt{e^x}dx$

11. Найти неопределенный интеграл, выделив целую часть неправильной дробно-рациональной функции.

11.1	$\int \frac{3x^2+1}{x^2+25}dx$	11.2	$\int \frac{x^2-3+2x+6}{x^2-9}dx$	11.3	$\int \frac{x^3}{x^2+9}dx$
11.4	$\int \frac{x^3}{x^2+9}dx$	11.5	$\int \frac{x^2+1}{x^2+5}dx$	11.6	$\int \frac{2x^2-2}{x^2-16}dx$
11.7	$\int \frac{x^2+1}{x^2-25}dx$	11.8	$\int \frac{x^2+2}{x^2-1}dx$	11.9	$\int \frac{x^2+2x+4}{x^2+2x-1}dx$
11.10	$\int \frac{x^2+2}{x^2-1}dx$	11.11	$\int \frac{3x^2+1}{x^2+6x+25}dx$	11.12	$\int \frac{x^2+x-2}{x^2-8x+20}dx$
11.13	$\int \frac{x^2+2}{x^2-6x+10}dx$	11.14	$\int \frac{x^2+7}{x^2+4}dx$	11.15	$\int \frac{x^4}{x^2+9}dx$
11.16	$\int \frac{x^2+2x}{x^2-8x+25}dx$	11.17	$\int \frac{x^2+1}{x^2+4x+5}dx$	11.18	$\int \frac{x^2+2}{x^2-4x+13}dx$
11.19	$\int \frac{x^3}{x^2-1}dx$	11.20	$\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$	11.21	$\int \frac{x^3}{x^3+8}dx$
11.22	$\int \frac{x^2+3}{x^2+9}dx$	11.23	$\int \frac{3x^2+2x+1}{x^2+25}dx$	11.24	$\int \frac{x^2-4x+2}{x^2-1}dx$
11.25	$\int \frac{x^2+2}{x^2+6x-1}dx$	11.26	$\int \frac{x^2+2x+16}{x^2-9}dx$	11.27	$\int \frac{x^2+x+1}{x^2+5}dx$
11.28	$\int \frac{3x^2+1}{x^2-2x+26}dx$	11.29	$\int \frac{x^3+2x}{x^2+49}dx$	11.30	$\int \frac{x^2-3+2x}{x^2-9}dx$

12. Найти неопределенный интеграл правильной дробно-рациональной функции.

12.1	$\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)}$	12.2	$\int \frac{(x+1)}{(x-3)^2(x+4)}dx$	12.3	$\int \frac{(x-1)}{(x+2)^2(x-3)}dx$
12.4	$\int \frac{(x+1)}{x^2(x+3)}dx$	12.5	$\int \frac{x-7}{(x+5)(x-4)^3}dx$	12.6	$\int \frac{(x-14)dx}{(x+2)^2(x+3)}$
12.7	$\int \frac{(2x+1)}{(x+3)^2(x+4)}dx$	12.8	$\int \frac{(2x-1)}{(x+2)^2(2x-3)}dx$	12.9	$\int \frac{(2x+11)}{x^2(x+3)}dx$
12.10	$\int \frac{(x-1)dx}{(x-2)^3(x+3)}$	12.11	$\int \frac{dx}{x^2(x+2)}$	12.12	$\int \frac{dx}{x\cdot(x+1)^2}$
12.13	$\int \frac{3x+1}{(x-2)^2\cdot(x+1)}dx$	12.14	$\int \frac{x^2+7}{(x^2+4)(x-1)}dx$	12.15	$\int \frac{dx}{x\cdot(x^2+3)}$
12.16	$\int \frac{x^2+1}{x\cdot(x^2+3)}dx$	12.17	$\int \frac{dx}{x^3+1}$	12.18	$\int \frac{dx}{x^3-8}$

12.19	$\int \frac{x^3}{x^4-1}dx$	12.20	$\int \frac{x^2}{(x^3+1)(x+1)}dx$	12.21	$\int \frac{(4x+1)}{x^2(x+3)}dx$
12.22	$\int \frac{2x-7}{(x-5)(x-4)^3}dx$	12.23	$\int \frac{(x+12)}{(x-3)^3(x+4)}dx$	12.24	$\int \frac{(2x+1)dx}{(x-2)^3(x+3)}$
12.25	$\int \frac{(3x-1)}{(x+2)^3(x-3)}dx$	12.26	$\int \frac{(x+1)}{x(x+3)^2}dx$	12.27	$\int \frac{3x-7}{(x+5)^2(x-4)}dx$
12.28	$\int \frac{(5x+1)}{x^3(x+3)}dx$	12.29	$\int \frac{(2x-1)}{(x-3)(x+4)^2}dx$	12.30	$\int \frac{(x-1)}{(x+2)(x-3)^2}dx$

13. Найти неопределенный интеграл.

13.1	$\int\left(5\cdot\cos x-\frac{7}{\sin^2 x}\right)dx$	13.2	$\int\left(3\cdot\sin x+\frac{2}{\cos^2 x}\right)dx$
13.3	$\int \frac{\sin^2 x-3\cdot\sin x-\frac{5}{\sin x}}{\sin x}dx$	13.4	$\int \frac{5\cdot\sin 2x-5\cdot tgx}{\sin x\cdot\cos x}dx$
13.5	$\int \frac{\cos 2x-5\cdot\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$	13.6	$\int \frac{1+5\cdot\cos^3 x}{\cos^2 2x}dx$
13.7	$\int \frac{1-3\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$	13.8	$\int \frac{2+\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$
13.9	$\int\left(5\cdot\sin x-\frac{4}{\cos^2 x}\right)dx$	13.10	$\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}dx$
13.11	$\int \frac{\sin 2x}{\sin^3 x}dx$	13.12	$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx$
13.13	$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}dx$	13.14	$\int (1-\cos 2x-11\sin x)\,dx$
13.15	$\int \frac{\cos^2 x+5\cdot\cos x}{\cos x}dx$	13.16	$\int \frac{\mathbf{\cos 2x-\cos^2 x}}{\mathbf{\sin^4 x}}\mathbf{dx}$
13.17	$\int (8+\cos 2x-3\sin^2 x)\,dx$	13.18	$\int\left(\frac{\sin x}{2}+\frac{7}{\cos^2 x}\right)dx$
13.19	$\int \frac{ctgx}{\sin x\cdot\cos x}dx$	13.20	$\int \frac{tgx}{\sin 2x}dx$
13.21	$\int \frac{ctgx}{\sin 2x}dx$	13.22	$\int \frac{\cos 2x+\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$
13.23	$\int ctg^2 x dx$	13.24	$\int \frac{9\sin^2 x-3\sin x}{\sin x}dx$
13.25	$\int\left(1+tg^2 x\right)dx$	13.26	$\int \frac{\cos 2x-\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$
13.27	$\int \frac{\cos^2 x+5\cdot\cos x}{\cos x}dx$	13.28	$\int \frac{4\sin^2 x-5\cos^2 x}{\sin^2 x}dx$

13.29	$\int \frac{7\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} dx$	13.30	$\int \frac{5\sin 2x}{\cos^3 x} dx$

14. Найти неопределенный интеграл с помощью универсальной тригонометрической подстановки.

14.1	$\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}$	14.2	$\int \frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}$
14.3	$\int \frac{dx}{5+3\sin x-5\cos x}$	14.4	$\int \frac{3\sin x-2\cos x}{1+\cos x} dx$
14.5	$\int \frac{dx}{3+2\sin x-\cos x}$	14.6	$\int \frac{dx}{10\sin x+5\cos x}$
14.7	$\int \frac{dx}{5-3\cos x}$	14.8	$\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$
14.9	$\int \frac{dx}{3+5\cos x}$	14.10	$\int \frac{dx}{3+2\sin x+3\cos x}$
14.11	$\int \frac{dx}{5+4\sin x}$	14.12	$\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$
14.13	$\int \frac{dx}{7+3\sin x}$	14.14	$\int \frac{dx}{8+4\cos x}$
14.15	$\int \frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}$	14.16	$\int \frac{dx}{7\sin x-3\cos x}$
14.17	$\int \frac{dx}{3-4\sin x}$	14.18	$\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$
14.19	$\int \frac{dx}{5+4\sin x+3\cos x}$	14.20	$\int \frac{7+6\sin x-5\cos x}{1+\cos x} dx$
14.21	$\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$	14.22	$\int \frac{6\sin x+\cos x}{1+\cos x} dx$
14.23	$\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$	14.24	$\int \frac{dx}{5+3\cos x}$
14.25	$\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x}$	14.26	$\int \frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}$
14.27	$\int \frac{dx}{7-3\sin x+\cos x}$	14.28.	$\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$
14.29	$\int \frac{dx}{3\sin x-\cos x}$	14.30	$\int \frac{dx}{2+\sin x-3\cos x}$

15. Вычислить определенный интеграл.

15.1	$\int\limits_{-1}^{2} x^4 dx$	15.2	$\int\limits_{0}^{1} \left(\sqrt{x-1}\right)^2 dx$	15.3	$\int\limits_{3}^{10} \sqrt[3]{x-2}dx$
15.4	$\int\limits_{1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$	15.5	$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$	15.6	$\int\limits_{-\frac{\pi}{8}}^{0} \frac{dx}{\cos^2 2x}$
15.7	$\int\limits_{0}^{1} \frac{x+2}{x+1} dx$	15.8	$\int\limits_{0.5}^{1} e^{-2x+1} dx$	15.9	$\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln x}{x} dx$
15.10	$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} x \sin x^2 dx$	15.11	$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$	15.12	$\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2}$
15.13	$\int\limits_{0.5}^{1} \frac{dx}{(x+1)^2}$	15.14	$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{0} \cos^2 t dt$	15.15	$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$
15.16	$\int\limits_{0}^{\pi} \left[\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 dx$	15.17	$\int\limits_{-1}^{-0.5} \frac{x^2-1}{x^4} dx$	15.18	$\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$
15.19	$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{0} \sin^2 t dt$	15.20	$\int\limits_{0}^{7} \sqrt[3]{x+1} dx$	15.21	$\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x-1)^3}$
15.22	$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$	15.23	$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^2+1}{x^4} dx$	15.24	$\int\limits_{0}^{16} \sqrt[4]{x^5} dx$
15.25	$\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)}$	15.26	$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} tg\,\frac{x}{2} dx$	15.27	$\int\limits_{0.5}^{1} \frac{dx}{(2x+1)^3}$
15.28	$\int\limits_{0.25}^{1} \frac{dx}{(4x+1)^2}$	15.29	$\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+4x+5}$	15.30	$\int\limits_{\frac{1}{3}}^{2} \frac{x^2+1}{x^4} dx$

16. Вычислить определенный интеграл, используя метод замены переменной.

16.1	$\int\limits_{0}^{2} x^3 \cdot e^{x^2} dx$	16.2	$\int\limits_{0}^{0.5} x^3 \cdot e^{-x^4} dx$
16.3	$\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} x^3 \cdot e^{-x^2} dx$	16.4	$\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{1+\sqrt{2x-1}}$

16.5	$\int_1^e \frac{dx}{x\cdot(\ln^2 x+1)}$	16.6	$\int_0^3 \frac{dx}{1+\sqrt{5x+1}}$
16.7	$\int_1^6 \frac{dx}{x+\sqrt{3x-2}}$	16.8	$\int_4^9 e^{-2\sqrt{x}}dx$
16.9	$\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$	16.10	$\int_1^6 \frac{\sqrt{x+3}}{4+\sqrt{x+3}}dx$
16.11	$\int_{\ln 1}^{\frac{\ln 3}{2}} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$	16.12	$\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5+4x}}$
16.13	$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\cdot\ln^3 x}$	16.14	$\int_0^1 x^2\sqrt{9-x^3}\,dx$
16.15	$\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$	16.16	$\int_1^{\ln^2 2} e^{-\sqrt{x}}dx$
16.17	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4+3\cos x}x^2$	16.18	$\int_0^4 \sqrt{x}\cdot e^{-\sqrt{x}}dx$
16.19	$\int_0^1 x^3\cdot e^{x^2}dx$	16.20	$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{x^4+2x^2+25}$
16.21	$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$	16.22	$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln^3 x}}$
16.23	$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+1}}$	16.24	$\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x+2e^{-x}}$
16.25	$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$	16.26	$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{x^4+12x^2+225}$
16.27	$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+4}}$	16.28	$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln^5 x}}$
16.29	$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln^5 x}}$	16.30	$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

17. Вычислить определенный интеграл методом интегрирования по частям.

17.1	$\int_2^3 x\ln(x-1)dx$	17.2	$\int_{-2}^0 x^2e^{-x/2}dx$	17.3	$\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^2cosxdx$

17.4	$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$	17.5	$\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$	17.6	$\int_1^2 (x-1)\ln(x) dx$
17.7	$\int_{-1/2}^{0} x e^{-2x} dx$	17.8	$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx$	17.9	$\int_{-2/3}^{-1/3} x^2 e^{-3x} dx$
17.10	$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$	17.11	$\int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln(x) dx$	17.12	$\int_0^1 arctg\sqrt{x} dx$
17.13	$\int_0^{\pi} (x+2)\cos\frac{x}{2} dx$	17.14	$\int_0^{\pi/8} x^2 \sin 4x dx$	17.15	$\int_1^3 x^2 \ln(x) dx$
17.16	$\int_0^1 (x+3) arctgx$	17.17	$\int_{3/2}^{2} arctg(2x-3) dx$	17.18	$\int_0^{\pi/2} (x+3)\sin x dx$
17.19	$\int_1^e x \ln^2(x) dx$	17.20	$\int_{-3}^{0} (x-2) e^{-\frac{x}{3}} dx$	17.21	$\int_0^{\pi/9} \frac{x dx}{\cos^2 3x}$
17.22	$\int_0^1 x arcsin 9x dx$	17.23	$\int_1^{\sqrt{3}} arctg\frac{1}{x} dx$	17.24	$\int_{-1}^{0} x\ln(1-x) dx$
17.25	$\int_0^1 x arccos 4x dx$	17.26	$\int_1^2 \ln(3x+2) dx$	17.27	$\int_0^4 x^3\sqrt{x^2+9} dx$
17.28	$\int_{-1}^{0} (x+1) e^{-2x} dx$	17.29	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 sinx dx$	17.30	$\int_0^1 x arctg 7x dx$

18. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

18.1	$y = x^2,\ y = 4$	18.11	$y = \sqrt{x}, y = x^2.$	18.21	$y = \frac{x^2}{2},\ y = 2x + \frac{5}{2}$
18.2	$y^2 = 16x,\ y = x$	18.12	$y^2 = x,\ y = x^2$	18.22	$y = x^2,\ y = 1 - x^2$
18.3	$y = x^2 - 5,$ $y = x - 3$	18.13	$y = \cos^2 x,$ $y = 0, x = 0$	18.23	$y = x^2 - 2x,\ y - 3 = 0$
18.4	$y = x^2 - 1,\ y = x + 1$	18.14	$y = tgx,\ y = \sqrt{3},$ $x = 0$	18.24	$y = x^2 - 1,$ $y = x + 3$
18.5	$y = ctgx,\ y = -1,$ $x = 0$	18.15	$y = -2x^2 + 3x + 6,$ $y = x + 2$	18.25	$y = 4x - x^2,\ y = x$
18.6	$x = y^2, x = 1.$	18.16	$y = (x-1)^2,$ $y = x + 1.$	18.26	$y = 2x^2, y = x,$ $x = -3$
18.7	$y = x^2 + 2x,$ $y = x + 2$	18.17	$y^2 = 4x,\ x^2 = 4y$	18.27	$y = -x^2,$ $y = -x - 2$
18.8	$y = \frac{x^2}{9},\ y = \frac{x}{3} + 2$	18.18	$y = tgx,\ y = -1,$ $x = 0$	18.28	$y = x^2,\ y = \frac{x^2}{2},$ $y = 5.$
18.9	$y = x^2 - x,\ y = 0,$ $x = 2.$	18.19	$y = x^2 + 4x,$ $y = 2x + 4$	18.29	$y = ctgx,\ y = 1,$ $x = \frac{\pi}{2}$

18.10	$y = tg2x,\ y = 1,$ $x = 0$	18.20	$y = x^2 + x,$ $y = x + 1$	18.30	$y = \sin x\,, y = 1,$ $x = -\frac{\pi}{3}.$

3.3 Решение типового варианта.

1. Вынести функцию $f(x) = 5\cos 7x$ из под знака дифференциала.
Решение:
по формуле

$$d(f(x)) = f'(x)dx$$

находим

$$d(5\cos 7x) = (5\cos 7x)'dx = -35\sin 7xdx.$$

2. Внести функцию $f(x) = 4x^7$ под знака дифференциала.
Решение:
используем формулу

$$f(x)dx = d\big(F(x)\big),$$

где *F(x)* – первообразная функции *f(x)*:

$$4x^7dx = d\left(\frac{4x^8}{8}\right) = d\left(\frac{x^8}{2}\right).$$

Задания 3-7 выполняются непосредственным интегрированием, т.е. применением правил интегрирования, таблицу интегралов, преобразованием интегрируемой функции.

3-7. Найти неопределённый интеграл.

3. а) $\int \frac{\left(7-\sqrt[3]{x}\right)^2}{x^3}dx$;
б) $\int 3^x(2^{2x-4} + 5^x)\,dx$.

Решение:

а) $\int \frac{\left(7-\sqrt[3]{x}\right)^2}{x^3}dx = \int \frac{49-14\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x^3}dx = \int\left(\frac{49}{x^3} - \frac{14\sqrt[3]{x}}{x^3} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^3}\right)dx =$
$\int\left(49x^{-3} - 14x^{-\frac{8}{3}} + x^{-\frac{7}{3}}\right)dx = \frac{49x^{-2}}{-2} - \frac{14x^{-\frac{5}{3}}}{-\frac{5}{3}} + \frac{x^{-\frac{4}{3}}}{-\frac{4}{3}} + C = -\frac{49}{2x^2} +$
$+\frac{42}{5x\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{4x\sqrt[3]{x}} + C.$

б) $\int 3^x(2^{2x-4} + 5^x)\,dx = \int(3^x \cdot 2^{2x-4} + 3^x \cdot 5^x)\,dx = \int(3^x \cdot 2^{2x} \cdot 2^{-4} +$
$+15^x)\,dx = \int(12^x \cdot 2^{-4} + 15^x)\,dx = \int\left(\frac{1}{16}\cdot 12^x + 15^x\right)dx = \frac{12^x}{16ln12} + \frac{15^x}{ln15} + C.$

4. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{\sqrt{x^2+5}}{2x^2+10}$ dx.

Решение:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+5}}{2x^2+10}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}} = \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)+C$$

5. Найти неопределенный интеграл $\int \left(\frac{6}{2x^2+9} + \frac{12}{2x^2-9}\right) dx.$

Решение:

$$\int\left(\frac{6}{2x^2+9}+\frac{12}{2x^2-9}\right)dx = \int\frac{6dx}{2\left(x^2+\frac{9}{2}\right)} + \int\frac{12dx}{2\left(x^2-\frac{9}{2}\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{2}}}arctg\frac{x}{\sqrt{\frac{9}{2}}} +$$

$$+\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{9}{2}}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{9}{2}}-x}{\sqrt{\frac{9}{2}}+x}\right| + C = \frac{\sqrt{2}}{6}arctg\frac{\sqrt{2}x}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}\ln\left|\frac{3-\sqrt{2}x}{3+\sqrt{2}x}\right| + C\,.$$

6. Найти неопределенный интеграл $\int(\sin 2x + 4)^2\, dx.$

Решение:

$$\int(\sin 2x+4)^2\,dx = \int(\sin^2 2x + 8\sin 2x + 16)dx =$$

$$= \int\left(\frac{1-\cos 4x}{2} + +8\sin 2x + 16\right)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) =$$

$$= -4\cos 2x + 16x = 16{,}5x - \frac{1}{8}\sin 4x - -4\cos 2x + C.$$

7. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{(5+7x)\cdot\sqrt[3]{(5+7x)^2}}.$

Решение:

$$\int \frac{dx}{(5+7x)\cdot\sqrt[3]{(5+7x)^2}} = \int \frac{dx}{(5+7x)^{\frac{5}{3}}} = \int(5+7x)^{-\frac{5}{3}}dx = \frac{1}{7}\cdot\frac{(5+3x)^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} +$$

$$+C = -\frac{3}{14}(5+3x)^{-\frac{2}{3}} + C.$$

Интеграл в задании 7 нашли по формуле $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C \quad a\neq 0$.

8. Найти неопределенный интеграл методом подведения под знак дифференциала: $\int e^{x^5} x^4 dx$.

Решение: такой интеграл решается с помощью формулы подведения (внесения) функции под знак дифференциала, в частности, с помощью формулы

$$\int \frac{u'(x)dx}{u(x)} = \ln|u(x)| + C .$$

Например, $\int \frac{dx}{x+8} = \int \frac{d(x+8)}{x+8} = \ln|x+8| + C$.

Применяем этот метод данному интегралу:

$$\int e^{x^5} x^4 dx = \left| \begin{matrix} x^5 = t, \ \ 5x^4 dx = dt, \\ x^4 dx = \frac{dt}{5} \end{matrix} \right| = \int e^t \frac{dt}{5} = \frac{1}{5} e^t + C = \frac{1}{5} e^{x^5} + C.$$

9. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+1}}$.

Решение:

интегралы вида $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

находят методом выделения полного квадрата:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \quad \text{или}$$

$$ax^2 + bx + c = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

$$\int \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{\mathbf{x^2 - 6x + 1}}} = \left|\mathbf{x^2 - 6x + 1 = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 1 = (x - 3)^2 - 8}\right| =$$

$$= \int \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{\mathbf{(x-3)^2 - 8}}} = \mathbf{ln}\left|\mathbf{(x-3)} + \sqrt{\mathbf{(x-3)^2 - 8}}\right| + \mathbf{C} =$$

$$= \ln\left|x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 1}\right| + C.$$

10. Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям: $\int(2x-7)\sin 5xdx$.

Решение:

в интегралах вида $\int x^n e^{ax}dx$, $\int x^n \sin axdx$, $\int x^n \cos axdx$ рекомендуется ввести замену $u = x^n$, $dv = \{e^{ax}dx,\ \sin axdx,\ \cos axdx\}$, а в интегралах вида $\int x^n \ln^m axdx$, $\int x^n \arcsin axdx$, $\int x^n \arccos axdx$, $\int x^n arctg\, axdx$, $\int x^n arcctg\, axdx$ рекомендуется ввести замену

$$u = \{ln^m ax,\ \ arcsin ax,\ \ arccos ax\},\ dv = x^n dx,\ v = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

$$\int(2x-7)\sin 5xdx = \begin{vmatrix} u = 2x-7 & dv = \sin 5xdx \\ du = 2dx & v = -\frac{1}{5}\cos 5x \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{5}(2x--7)\cos 5x + \frac{2}{5}\int \cos 5xdx = -\frac{1}{5}(2x-7)\cos 5x + \frac{2}{5}sin5x + C.$$

11. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x^2+9x-5}{x^2-2}dx$.

Решение:

интегралы такого вида находят путем выделения целой части дроби, разделив «уголком» многочлен числителя многочлен знаменателя:

$$\int \frac{x^2+9x-5}{x^2-2}dx = \left|\frac{x^2+9x-5}{x^2-2} = 1 + \frac{9x-3}{x^2-2} = 1 + \frac{9x}{x^2-2} - \frac{2}{x^2-2}\right| =$$

$$= \int\left(1 + \frac{9x}{x^2-2} - \frac{2}{x^2-2}\right)dx = \int dx + \int \frac{9x}{x^2-2}dx - 2\int \frac{dx}{x^2-2} =$$

$$= x + 9\int \frac{d\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x^2-2} - \frac{2}{2\sqrt{2}}ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + C = x + \frac{9}{2}\int \frac{d(x^2-2)}{x^2-2} -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + C = x + \frac{9}{2}ln|x^2-2| - \frac{1}{\sqrt{2}}ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + C.$$

12. Найти неопределенный интеграл правильной дробно-рациональной функции: $\int \frac{3x+4}{(x-1)(x-7)^2} dx$.

Решение:

чтобы найти интегралы такого вида, необходимо интегрируемую функцию разложить на простейшие. Необходимо предварительно изучить метод неопределенных коэффициентов или метод пробных точек для разложения правильной дробно-рациональной функции.

Разложение правильной дробно-рациональной функции на простейшие дроби имеет вид:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}, \text{ где } \quad n > m.$$

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \\ \ldots + \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + bx + c)} + \ldots + \frac{M_rx + N_r}{(x^2 + bx + c)^r},$$

если $a_0x^n + \ldots + a_n = a_0(x-a)^k \ldots (x^2 + bx + c)^r \ldots$

$$\frac{3x+4}{(x-1)(x-7)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-7} + \frac{C}{(x-7)^2} = \frac{A(x-7)^2 + B(x-1)(x-4) + C(x-1)}{(x-1)(x-7)^2} \quad \Rightarrow$$

$$A(x-7)^2 + B(x-1)(x-4) + C(x-1) = 3x + 4$$

$$x = 1: \quad 36A = 7, \quad A = \frac{7}{36},$$
$$x = 7: \quad 18B + 6C = 25,$$
$$x^2| \qquad A + B = 0$$

Из этой системы найдем неопределенные коэффициенты:

$$A=\frac{7}{36},\ \ B=-\frac{7}{36},\ \ C=\frac{4}{19}.$$

Тогда

$$\frac{3x+4}{(x-1)(x-7)^2}=\frac{\frac{7}{36}}{x-1}+\frac{-\frac{7}{36}}{x-7}+\frac{\frac{4}{19}}{(x-7)^2},$$

$$\int\frac{3x+4}{(x-1)(x-7)^2}dx=\int\left(\frac{\frac{7}{36}}{x-1}+\frac{-\frac{7}{36}}{x-7}+\frac{\frac{4}{19}}{(x-7)^2}\right)dx=$$

$$=\frac{7}{36}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{7}{36}\int\frac{dx}{x-7}+\frac{4}{19}\int\frac{dx}{(x-7)^2}=\frac{7}{36}ln|x-1|-$$

$$-\frac{7}{36}ln|x-7|-\frac{4}{19}\cdot\frac{1}{x-7}+C=\frac{7}{36}ln\left|\frac{x-1}{x-7}\right|-\frac{4}{19(x-7)}+C.$$

13. Найти неопределенный интеграл $\int\frac{1+cos^2x}{1+cos\,2x}dx$.

Решение:

$$\int\frac{1+cos^2x}{1+cos\,2x}dx=|1+\cos 2\mathrm{x}=2\cos^2\mathrm{x}|=\int\frac{1+\cos^2\mathrm{x}}{2\cos^2\mathrm{x}}\mathrm{dx}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{\cos^2x}+\int dx\right)=\frac{1}{2}(tgx+x)+C.$$

14. Найти неопределенный интеграл с помощью универсальной тригонометрической подстановки: $\int\frac{2\sin x}{3-\cos x}dx$.

Решение:

к интегралу $\int R(\sin x,\cos x)dx$ применяем универсальную подстановку:

$tg\frac{x}{2}=t$,

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x=2arctgt,dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

$$\int \frac{2\sin x}{3-\cos x}dx = \int \frac{2\cdot\frac{2t}{1+t^2}}{3-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{\frac{4t}{1+t^2}}{\frac{4t^2+2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{4t}{4t^2+2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = 4\int \frac{t}{(2t^2+1)(1+t^2)}dt.$$

Интегрируемую функцию методом неопределенных коэффициентов разложим на простейшие дроби:

$$\frac{t}{(2t^2+1)(1+t^2)} = \frac{At+B}{2t^2+1} + \frac{Ct+D}{1+t^2} = \frac{(At+B)(1+t^2)+(Ct+D)(2t^2+1)}{(2t^2+1)(1+t^2)} \Rightarrow$$

$$(At+B)(1+t^2)+(Ct+D)(2t^2+1) = t$$

$$\begin{array}{c|c} t^3 & A+2C=0 \\ t^2 & B+2D=0 \\ t^1 & A+C=1 \\ t^0 & B+D=0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A=2, \\ B=0, \\ C=-1, \\ D=0. \end{array}$$

Тогда

$$\int \frac{2\sin x}{3-\cos x}dx = 4\int \frac{t}{(2t^2+1)(1+t^2)}dt = 4\int\left(\frac{2t}{2t^2+1} - \frac{t}{1+t^2}\right)dt =$$

$$4\left(\int \frac{2t}{2t^2+1}dt - \int \frac{t}{1+t^2}dt\right) = 4\left(\int \frac{d(t^2)}{2t^2+1} - \int \frac{d\left(\frac{t^2}{2}\right)}{1+t^2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\int \frac{d(2t^2+1)}{2t^2+1} -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2)}{1+t^2}\right) = 2\big(ln(2t^2+1) - ln(t^2+1)\big) + C = 2ln\frac{2t^2+1}{t^2+1} + C =$$

$$ln\left(\frac{2t^2+1}{t^2+1}\right)^2 + C = ln\left(\frac{2tg^2\frac{x}{2}+1}{tg^2\frac{x}{2}+1}\right)^2 + C.$$

15. Вычислить определенный интеграл: $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{(x+3)^3}$.

Решение:

вычисляем по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{(x+3)^3} = \int_{-1}^{2}\frac{d(x+3)}{(x+3)^3} = \int_{-1}^{2}(x+3)^{-3}d(x+3) = \left.\frac{(x+3)^{-3+1}}{-2}\right|_{-1}^{2} = -\frac{1}{2}\left[(2+3)^{-2} - (-1+3)^{-2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(5^{-2} - 2^{-2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{4}\right) = \frac{21}{200}\ .$$

16. Вычислить определенный интеграл, используя метод замены переменной: $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx$.

Решение:

в определенном интеграле используется метод замены переменной и формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = 2\cos t, \quad dx = -2\sin t\,dt\ , \\ x = 0 \ \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}\ , \\ x = 1 \ \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{3} \end{array} \right| = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4-4\cos^2 t}\cdot(-2\sin t)dt =$$

$$= -4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \cdot (\sin t)^2\,dt = -4\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 2t}{2}\cdot dt = -2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 2t)dt = -2\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi\right)\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

17. Вычислить определенный интеграл методом интегрирования по частям: $\int_0^1 x\cos 2x\,dx$.

Решение:

$$\int_0^1 xcos2xdx = \left| \begin{array}{c} x = u, \ \ dx = du, \\ cos2xdx = dv, \quad v = \dfrac{1}{2}sin2x \end{array} \right| = \frac{1}{2}xsin2x\Big|_0^1 -$$

$$-\int_0^1 \frac{1}{2}sin2xdx = \frac{\sin 2}{2} + \frac{1}{4}cos2x\Big|_0^1 = \frac{\sin 2}{2} + \frac{1}{4}(\cos 2 - \cos 0) =$$

$$= \frac{\sin 2}{2} + \frac{1}{4}(\cos 2 - 1).$$

18. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:

$$D: \quad y = \cos x, \quad y = -2\cos x, \qquad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}.$$

Решение:

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos x - (-2\cos x)]dx = \ = 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 3\sin x\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 3\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 3\left(\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right) = 6\sin\frac{\pi}{2} = 6.$$

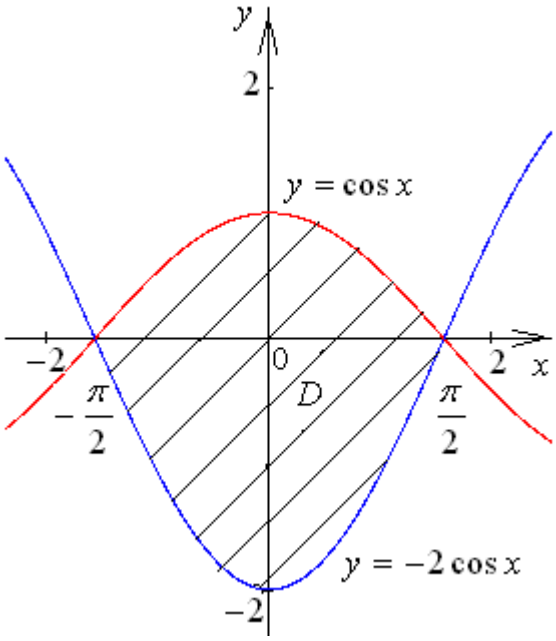

Рисунок 7

3.4 Дополнительный материал

3.4.1 Эквивалентные бесконечно малые

$\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, т.е. $x\to a$, $a\le\infty$, $\alpha(x)$ – бесконечно малая		
1 $\sin\alpha(x)\approx\alpha(x)$	5 $a^{\alpha(x)}-1\approx\alpha(x)\ln a$	9 $\ln(1+\alpha(x))\approx\alpha(x)$
2 $tg\alpha(x)\approx\alpha(x)$	6 $e^{\alpha(x)}-1\approx\alpha(x)$	10 $(1+\alpha(x))^a-1\approx a\cdot\alpha(x)$
3 $\arcsin\alpha(x)\approx\alpha(x)$	7 $1-\cos\alpha(x)\approx\dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$	11 $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\approx\dfrac{\alpha(x)}{n}$
4 $arctg\alpha(x)\approx\alpha(x)$	8 $\log_a(1+\alpha(x))\approx\dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$	

3.4.2 Производные основных элементарных функций

1 $(x^n)' = nx^{n-1}$	7 $(\cos x)' = -\sin x$	13 $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$
2 $(a^x)' = a^x \ln a$	8 $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	14 $(shx)' = chx$
3 $(e^x)' = e^x$	9 $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	15 $(chx)' = shx$
4 $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	10 $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	16 $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$
5 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	11 $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	17 $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$
6 $(\sin x)' = \cos x$	12 $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$	

3.4.3 Интегралы основных элементарных функций

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $(\alpha \neq -1)$	11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	11′. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$
3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	12. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$
4 $\int \cos x dx = \sin x + C$	13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	13′. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$	14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$
7. $\int tgx dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	15. $\int shx dx = chx + C$
8. $\int ctgx dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	16. $\int chx dx = shx + C$
9. $\int e^x dx = e^x + C$	17. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$
10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	18. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$

Список литературы

1. Хасеинов К.А. Каноны математики. –Алматы: MMIV, 2004.
2. Мустахишев К.М., Атабай Б.Ж. Математика 1. Конспект лекций для студентов специальностей 050717 – Теплоэнергетика, 050718 – Электроэнергетика, 050719 – Радиотехника, электроника и телекоммуникации.
3. Индивидуальные задания по высшей математике: Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения ч. 2: Учеб. пособие /под ред. А.П. Рябушко – Мн.: Выш.шк.,2009.-396 с.
4. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). – М.: Высшая школа, 2008. –176 с.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч.1– М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и Образование, 2003.
6. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике.– Москва: Издательство АСТ, 2019.– 703 с.

Содержание

Сводный план 2020, поз. 94

Толеуова Багила Жаксылыковна

МАТЕМАТИКА 1

Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов всех специальностей

Редактор: Е.Т.Данько
Специалист по стандартизации: Е.Т.Данько

Подписано в печать 31/03/2021
Тираж 25 экз.
Объем 4.2 уч.- изд. лист

Формат 60x84 1/16
Бумага типографская №1
Заказ 51 Цена 2100 тг

Копировально-множительное бюро
некоммерческое акционерное общество
«Алматинский университет энергетики и связи имени Гумарбека Даукеева»
050013, Алматы, Байтурсынова, 126