Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра Математического моделирования и программного обеспечения

МАТЕМАТИКА 1

Конспект лекций
для студентов специальности
5В070200 – Автоматизация и управление

Алматы 2017

Составители: А.К.Искакова, Э.С.Есботаева. Математика 1. Конспект лекций для студентов специальности 5В070200 – Автоматизация и управление. –Алматы: АУЭС, 2017. - 70 с.

Конспект лекций по дисциплине «Математика 1» для студентов специальности 5В070200 –Автоматизация и управление составлен по программе дисциплины «Математика – 1» в соответствии с общим колличеством кредитов и выбора направления. Обьем и содержание каждого модуля составлены с учетом психологических особенностей обучаемых.

Графики – 13, список литературы – 12.

Рецензент: канд.техн.наук, доцент К.О.Гали

Печатается по плану некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2017 г.

Модуль 1. Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия

Лекция 1. Определители 2-го и 3-го порядка, их свойства. Определители *n*–го порядка. Матрицы и операции над матрицами. Обратная матрица. Ранг матрицы и методы его вычисления

Содержание лекции: определители, их свойства. Матрицы и операции над матрицами, обратная матрица, ранг матрицы и методы его вычисления.
Цель лекции: ознакомить студентов с новыми для них понятиями определителя и матрицы, действиями над ними.

Определитель второго и третьего порядка. Определитель второго порядка, соответствующий таблице элементов $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$, определяется равенством

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Определитель третьего порядка, соответствующий таблице элементов

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

определяется равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}. \qquad (1)$$

(1) - называется правилом треугольников или правилом Саррюса вычисления определителя 3-го порядка.

Количество строк и столбцов определяет порядок определителя. Числа a_{ij}, составляющие определитель, называются его элементами. Индекс i - указывает номер строки; j – номер столбца, на пересечении которых находится данный элемент.

Диагональ, исходящая из левого верхнего угла определителя, называется её главной диагональю (совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$).

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель (n-1)-го порядка, полученный из определителя n-го порядка вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$, называется алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij}:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \qquad (i, j = 1,...,n).$$

*Свойства определителей***.**

1. От перемены местами строк определителя с соответствующими его столбцами (транспонирования) определитель не изменяется.

2. От перемены местами любых двух параллельных строк или столбцов определитель меняет знак.

3. Если элемент какой-либо строки (столбца) определителя умножить на любое число, то весь определитель умножается на это число. Иначе говоря, если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя содержат общий множитель, то этот множитель можно выносить за знак определителя.

4. Определитель не изменяется, если элементы его какой-либо строки (столбца), умноженные на любое число, сложить с соответствующими элементами другой строки (столбца).

5. Определитель, содержащий две одинаковые строки или столбцы, равен нулю. Определитель также равен нулю, если какая-либо строка (столбец) его состоит из одних нулей или если элементы любых двух строк (столбцов) пропорциональны между собой.

6. *Теорема Лапласа*. Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения

$$\Delta_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \qquad (i, j = 1,...,n).$$

Например, для n=3 $\quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$

Если все элементы i-строки или j-столбца определителя, кроме a_{ij}, равны нулю, то, применяя теорему Лапласа, порядок определителя можно понизить на единицу:

$$\Delta_n = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad (i, j = \overline{1,n}).$$

7. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения другой строки (столбца) его равна нулю:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0 \ \ (i \neq k), \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = 0 \ \ (j \neq k), \qquad i, j, k = \overline{1,n}.$$

Определителем n-го порядка называется число Δ_n, представленное в виде квадратной таблицы:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Определитель (2) называется детерминантом и обозначается символом *detA,* тогда $\det A = \Delta_n$. Определитель имеет две диагонали: главную, с элементами $a_{11}, \dots, a_{nn}$, и побочную (вторую) с элементами $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$.

Вычисление определителей n-го порядка методом понижения порядка. Для вычисления определителя произвольного n-го порядка используют теорему Лапласса (1):

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot A_{1k},$$

где $A_{1k} = (-1)^{1+k} M_{1k}$, миноры M_{1k}, являющиеся определителями $(n-1)$-го порядка, получаются из Δ вычеркиванием первой строки и k-го столбца.

Вычисление определителя *n*-го порядка сводится к вычислению *n* определителей $(n-1)$-го порядка. Этот метод понижения порядка не эффективен.

Используя основные свойства определителей, вычисление определителя *n*-го порядка всегда можно свести к вычислению одного определителя $(n-1)$-го порядка, сведя в каком-либо ряду определителя все элементы, кроме одного, к нулю.

Вычисление определителей n-го порядка методом приведения к треугольному виду. Определитель, у которого все элементы, находящиеся выше или ниже главной диагонали, равны нулю, называется *определителем треугольного вида*. В этом случае определитель равен произведению элементов главной диагонали. Приведение любого определителя к треугольному виду всегда возможно.

Матрицы и операции над матрицами. Прямоугольная таблица чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется числовой матрицей размера $m \times n$ или, вкратце, $m \times n$ - матрицей. Она имеет m строк и n столбцов. При $m = n$ матрицу A называют квадратной матрицей n- порядка.

Числа a_{ij} $(i=1, \dots, m; \quad j=1, \dots, n)$, составляющие матрицу, называются ее элементами. Матрица A состоит из mn элементов, каждый из которых снабжен двумя индексами, представляющими собой номера строки и столбца, содержащих данный элемент.

Матрицы обозначаются главными буквами латинского алфавита (например, $A, B, C, \dots$), а их элементы соответствующими малыми буквами. Матрицу вкратце можно записывать в виде: $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ или $A=\left|\left|a_{ij}\right|\right|_{m\times n}$.

Квадратная матрица имеет две диагонали: главную с элементами a_{ii}, $i=\overline{1,n}$ и вторую (побочную).

Матрица, состоящая лишь из одной строки ($m=1$) или из одного столбца ($n=1$), называется соответственно строчной (точка, вектор) или столбцевой (вектор) матрицей.

Одной из основных характеристик квадратной матрицы $(m=n)$ является число

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\Delta_n,$$

называемое определителем или детерминантом матрицы.

При $\det A=0$ имеем так называемую вырожденную (особенную), а при $\det A\neq 0$ - невырожденную (неособенную) матрицу.

Действия над матрицами.

При умножении матрицы на число все ее элементы умножаются на это число:

$$\lambda\left(a_{ij}\right)=\left(\lambda a_{ij}\right).$$

Складывать и вычитать можно только матрицы одинаковых размеров. При этом их соответствующие элементы складываются (вычитаются) между собой:

$$\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\pm\left(b_{ij}\right)_{m\times n}=\left(a_{ij}\pm b_{ij}\right)_{m\times n}.$$

Умножение на число и сложение, вычитание называются линейными действиями. Эти операции обладают свойствами:

а) коммутативности $A+B=B+A$;

б) ассоциативности $(A+B)+C=A+(B+C)$;

в) дистрибутивности $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

Матрицы одинаковых размеров равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие элементы и наоборот:

$$\left(a_{ij}\right)_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)_{m\times n} \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij} \quad \left(i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}\right).$$

Произведение двух матриц с размерами $m \times p$ и $p \times n$ определяется по формуле:

$$\left(a_{ik}\right)_{m\times p} \cdot \left(b_{kj}\right)_{p\times n} = \left(c_{ij}\right)_{m\times n}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \quad \left(i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}\right).$$

Замечание. Число столбцов первой матрицы (первого множителя) должно быть равно числу строк второй матрицы (второго множителя).

Действие сложения матриц удовлетворяет переместительному (коммутативности) закону: $A + B = B + A$.

Умножение матриц не подчиняется переместительному закону, то есть $AB = BA$. Поэтому при умножении матриц делаются оговорки: «слева», «справа».

Произведение матриц соответствующих размеров обладает свойствами:

а) ассоциативности A(BC)=(AB)C;

б) дистрибутивности A(B+C)=AB+AC и (B+C)A=BA+CA.

Ненулевая квадратная матрица называется треугольной, если все ее элементы, расположенные по одну сторону от диагонали, равны нулю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратную матрицу называют диагональной, если у неё все элементы, кроме расположенных на главной диагонали, равны нулю, а среди последних имеется, хотя бы один отличный от нуля элемент.

Если все элементы главной диагонали матрицы равны единице, а все остальные нулю, то приходим к понятию единичной матрицы. Например, единичная матрица 3-порядка имеет вид:

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\det E = 1$ и для квадратной матрицы того же порядка $AE = EA = A$.

Обратная матрица. Квадратные матрицы A и A^{-1}, удовлетворяющие условию:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

называют взаимно обратными. Они обладают свойством рефлексивности: $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$. Только невырожденная матрица может иметь обратную матрицу, так как $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$.

Если для $A = \left(a_{ij}\right)$ обратная матрица существует, то:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(A_{ij}\right)^T = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы и методы его вычисления. Рангом матрицы r(A) называется наибольший порядок порожденных ею определителей, отличных от нуля.

Для нахождения ранга матрицы r(A) формально необходимо рассмотреть все миноры матрицы A, начиная с 1-го порядка, и проверить их на вырожденность.

Метод окаймляющих миноров позволяет сократить эту процедуру. Он состоит в следующем: выбираем любой невырожденный минор 1-го порядка (ненулевой элемент матрицы A). Обозначим его через M_1.

Затем рассматриваем все миноры 2-го порядка, содержащие M_1 (окаймляющие его). Если все они вырождены, то r(A)=1, если нет, то невырожденный минор 2-го порядка обозначаем через M_2 и так далее.

Если у матрицы A есть невырожденный минор k-го порядка и все окаймляющие его миноры (если они есть) вырождены, то r(A)=k, иначе выбираем минор M_{k+1} и продолжаем этот процесс.

Метод элементарных преобразований. Элементарными преобразованиями для матрицы A называются следующие её преобразования:

1) Перестановка строк или столбцов местами.

2) Умножение строки или столбца на ненулевой коэффициент.

3) Прибавление к одной строке или столбцу матрицы другой её строки или столбца, умноженной на некоторое число k.

4) Зачёркивание нулевой строки или столбца матрицы.

Матрица B, полученная из A с помощью элементарных преобразований, называется эквивалентной ей и обозначается в виде $A \sim B$.

Теорема. При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется.

Теорема. Ранг треугольной матрицы равен количеству ее ненулевых строк.

Если равны нулю все определители порядка k, порожденных данной матрицей A, то $r_A < k$.

С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к виду, когда каждый ее ряд будет состоять только из нулей или из нулей и одной единицы. Тогда число оставшихся единиц и определяет ранг исходной матрицы, т.к. полученная матрица будет эквивалентна исходной.

Лекция 2. Системы линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера. Матричная форма записи системы линейных уравнений и ее решение матричным методом. Системы m линейных уравнений с n неизвестными. Однородная система линейных уравнений

Содержание лекции: системы линейных алгебраических уравнений и их решение методом Крамера, матричным методом. Системы *m* линейных уравнений с *n* неизвестными. Однородная система линейных уравнений.
Цель лекции: показать способы решения систем линейных уравнений по правилу Крамера и матричным способом.

Системой из *m* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ называются неизвестными системы, числа a_{ij}, где $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$ называются коэффициентами системы, а числа $b_1, b_2, ..., b_m$ – свободными членами.

Если, хотя бы один из свободных членов не равен нулю $b_i \neq 0$, система называется неоднородной, а в противном случае, т.е. при $b_1 = \cdots = b_m = 0$ - однородной.

Числа $x_1, x_2, ..., x_n$, обращающие все уравнения системы в тождества, называются решением системы.

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет ни одного решения.

Однородная система всегда совместна, так как она имеет нулевое (тривиальное) решение $x_1 = \cdots = x_n = 0$.

Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет более одного решения.

Исследовать систему – это значит определить, совместна ли она и, в случае совместности, определить, сколько решений она имеет.

Расширенной матрицей СЛАУ называется матрица, полученная из матрицы системы приписыванием справа столбца свободных членов.

Теорема Кронекера – Капелли. Система линейных алгебраических уравнений совместна (имеет решение) тогда и только тогда, когда ранг её матрицы равен рангу расширенной матрицы $r(A)=r(\overline{A})$.

Если $r(A) \neq r(\overline{A})$, то СЛАУ решений не имеет.

Для совместных систем линейных уравнений верны следующие теоремы:

1) Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, т.е. $r=n$, то система имеет единственное решение.

2) Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, т.е. $r<n$, то система неопределенная и имеет бесконечное множество решений.

Правило Крамера. Теорема Крамера. Если $m=n$ и $\Delta\neq 0$, то система (1) совместна, имеет единственное решение, определяемое формулами:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \qquad (j = 1,...,n),$$

где Δ_j - определитель, полученный из Δ заменой его j-столбца свободными членами системы: $b_1,\ldots,b_n$.

Матричная форма записи СЛАУ и ее решение матричным методом.

Матрицу $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, составленную из коэффициентов уравнений (1), называют матрицей этой системы.

Рассмотрим матрицы-столбцы $X=\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Система (1) в матричной форме имеет вид:

$$AX = B. \tag{2}$$

Пусть квадратная матрица $A(m=n)$ невырожденная, т.е. $\Delta=\det A\neq 0$. Тогда существует обратная ей матрица, определяемая формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(A_{ij}\right)^T = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Умножив слева обе части равенства (2) на A^{-1}, получим решение матричного уравнения

$$X = A^{-1}B. \tag{4}$$

Вычислив правую часть (4), приравняв элементы неизвестной и найденной матриц, получим решение системы (1) при $m=n$.

Системы m линейных уравнений с n неизвестными. Метод Гаусса. Однородная СЛАУ.

Матричный метод и правило Крамера обладают недостатками:

- во-первых, они применимы только для систем с невырожденной квадратной матрицей и не работают в случае, когда $\Delta=0$;
- во-вторых, с ростом n объём вычислений для этих методов быстро возрастает, и для $n>10$ они уже практически неприменимы.

Для исследования систем линейных уравнений и нахождения их решений можно использовать метод Гаусса.

При решении системы линейных уравнений не нужно отдельно вычислять ранги, а затем их сравнивать. Достаточно сразу применить метод Гаусса. Преобразования Гаусса удобно проводить над матрицей из коэффициентов.

Достоинства метода Гаусса по сравнению с другими методами:

- значительно менее трудоемкий;
- позволяет однозначно установить, совместна система или нет, а в случае совместности найти её решения (единственное или бесконечное множество);
- дает возможность найти максимальное число линейно независимых уравнений – ранг матрицы системы.

Матричный метод и метод Крамера не имеет смысла применять для решения однородных систем с квадратной матрицей A. Поскольку, если A не вырождена, то система имеет единственное тривиальное решение, если же $|A|=0$, то эти методы неприменимы, система имеет бесконечное число решений.

Метод Гаусса для решения однородных систем используется в следующем виде: записываем матрицу системы A и с помощью элементарных преобразований приводим её к треугольному виду. Возможны два случая:

а) $r(A)=n$, система имеет единственное, тривиальное решение;

б) $r(A)<n$, система имеет бесконечно много решений, зависящих от $n-r$ параметров.

Лекция 3. Трехмерное пространство R^3. Векторы, линейные операции над векторами. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис

Содержание лекции: векторы на плоскости и в пространстве, линейные операции над ними, линейная зависимость и независимость векторов, базис. Декартова и полярная системы координат.

Цель лекции: рассмотреть понятия вектора на плоскости и в пространстве, рассмотреть линейные операции над векторами, ввести понятие полярной системы координат.

Пространство, точки которого представляются тройками действительных чисел, называется трехмерным пространством.

Вектором называется направленный отрезок. Величину, характеризующуюся только числовым значением, называют скалярной величиной или скаляром.

Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется нулевым и обозначается $\bar{0}$. Его направление является неопределенным.

Векторы называются коллинеарными, если они параллельны одной прямой, и компланарными, если они параллельны одной плоскости.

Два вектора называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине.

К линейным операциям над векторами относятся: умножение вектора на число и сложение векторов.

Произведением вектора $\vec{a}$ и числа α называется вектор, обозначаемый $\alpha \cdot \vec{a}$ (или $\alpha\,\boldsymbol{a}$), модуль которого равен $|\boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если α>0, и противоположно ему, если α<0.

Суммой векторов $\overline{a_i}$ (i=1÷n) называется вектор, обозначаемый

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i ,$$

начало которого находится в начале первого вектора $\vec{a}_1$, а конец – в конце последнего вектора $\vec{a}_n$, ломаной линии, составленной из последовательности слагаемых векторов (рисунок 1). Это правило сложения называется правилом замыкания ломаной. В случае суммы двух векторов, направленных из одной точки, оно равносильно правилу параллелограмма (рисунок 2).

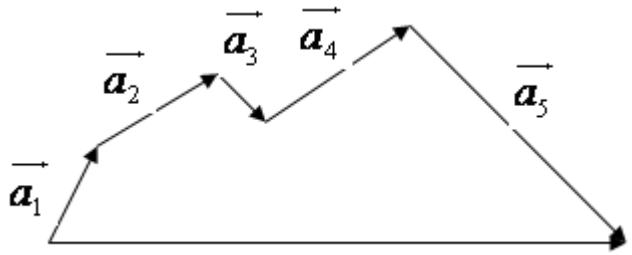

Рисунок 1

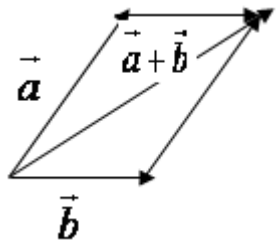

Рисунок 2

Линейная зависимость и независимость векторов. Базис. Длина вектора. Угол между векторами. Прямая *x* с заданным на ней направлением, принимаемым за положительное, называется *осью x***.**

Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось ***x*** называется число, обозначаемое $Пр_x \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\varphi$, где φ(0≤φ≤π) – угол между положительным направлением оси *x* и направлением вектора $\vec{a}$.

Координатами вектора $\vec{a}$ называются его проекции на оси координат *Ox*, *Oy*, *Oz*. Они обозначаются соответственно буквами *x*, *y*, *z*. $\vec{a} = (x, y, z)$.

Проекцию вектора на ось $A_1B_1 = AC = AB\cos\alpha$, или число $a_x = a\cos\alpha$, называют его координатой. Возможны случаи:

- $a_x > 0$, если угол $\alpha = (0x, \bar{a})$ острый (0≤α≤90°, ось и вектор направлены в одну сторону);

- $a_x < 0$, если угол α тупой (90<α≤180°, ось и вектор направлены в противоположные стороны);

- $a_x = 0$, если α=90°, то есть $L \perp Ox$.

Рассматриваемый в соответствующих пространствах вектор может иметь соответственно две или три координаты. Заданный своими координатами вектор и точка записываются в виде соответственно столбцевой и строчной матриц, например, в R^3:

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad A(x_1, y_1, z_1), \quad B(x_2, y_2, z_2).$$

Поэтому все положения матричного исчисления распространяются и на векторы. Если вектор задан координатами своих концов, то

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Вектор полностью и однозначно определяется своими координатами:

$$\bar{a} = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Кроме того, направление вектора обозначают с помощью его так называемого единичного вектора. Единичные векторы координатных осей обозначают через $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ и называют базисными векторами; $\left|\bar{i}\right| = \left|\bar{j}\right| = \left|\bar{k}\right| = 1$. Они попарно перпендикулярны. Их совокупность $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ называют декартовым базисом.

Любой вектор в R^3 может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$\bar{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

Если для системы n векторов $\overrightarrow{a_i}$ равенство $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{a_i} = 0$ верно только в случае, когда $\lambda_i = 0$, то эта система называется линейно независимой**.**

Если же это равенство выполняется для λ_i λ_i, хотя бы одно из которых отлично от нуля, то система векторов $\overrightarrow{a_i}$ называется линейно зависимой. Например, любые коллинеарные векторы, три компланарных вектора, четыре и более векторов в трехмерном пространстве всегда линейно зависимы.

Три упорядоченных линейно независимых вектора $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ в пространстве называется базисом.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов всегда образует базис.

Любой вектор $\vec{a}$ в пространстве можно разложить по базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, т.е. представить $\vec{a}$ в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$\vec{a} = x \cdot \overrightarrow{e_1} + y \cdot \overrightarrow{e_2} + z \cdot \overrightarrow{e_3},$$

где x, y, z являются координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Базис называется ортонормированным, если его векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину. Обозначают такой базис i, j, k, т.е. $\vec{i}(1,0,0)$, $\vec{j}(0,1,0)$, $\vec{k}(0,0,1)$.

Если вектор $\vec{a} = (x, y, z)$, в базисе (i, j, k), то

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Направление вектора $\vec{a}$ определяется углами α, β, γ, образованными им с осями координат Ox, Oy, Oz.

Направляющими косинусами ненулевого вектора $\vec{a}$ называются косинусы углов, образованных этим вектором с осями координат $\mathrm{Ox}, \mathrm{Oy}, \mathrm{Oz}$ (рисунок 3).

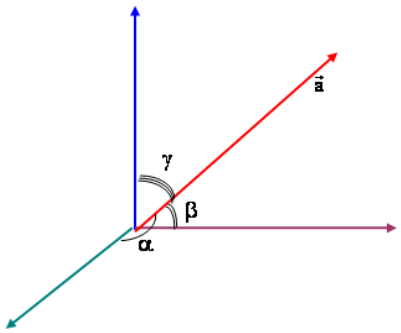

Рисунок 3

Для вектора $\vec{a}$ с координатами (x, y, z) направляющие косинусы записываются в виде:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Направляющие косинусы вектора обладают следующим свойством:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Декартова прямоугольная система координат в пространстве определяется заданием единицы масштаба для измерения длин и трех пересекающихся в точке *O* взаимно-перпендикулярных осей – оси абсцисс (*Ox*), оси ординат (*Oy*), оси аппликат (*Oz*), точка *O* - начало координат.

Для изучения свойств векторов и выполнения действия над ними в одномерном, двумерном R^2 и трехмерном R^3 пространствах выбирают соответствующую прямоугольную декартову систему координат.

Отношением, в котором точка *M* делит отрезок M_1M_2, называется число λ, удовлетворяющее равенству $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$.

Связь между координатами делящей точки $M(x, y, z)$ точек $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и числом λ задается равенствами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{1+\lambda}; \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{1+\lambda}; \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{1+\lambda}.$$

Деление отрезка M_1M_2 будет внутренним, если $\lambda > 0$, и внешним, если $\lambda < 0$. При $\lambda = 1$ точка *M* будет серединой отрезка M_1M_2, $\lambda \neq -1$.

Лекция 4. Скалярное и векторное произведения в R^3. Выражение скалярного и векторного произведений через координаты векторов. Угол между векторами. Смешанное произведение трех векторов. Свойства скалярного, векторного и смешанного произведения векторов. Механические и геометрические смыслы произведений векторов

Содержание лекции: скалярное и векторное произведения, выражение скалярного и векторного произведений через координаты векторов, угол между векторами. Смешанное произведение трех векторов. Свойства скалярного, векторного и смешанного произведения векторов. Механический и геометрический смыслы произведений векторов.

Цель лекции: ввести понятия скалярное, векторное, смешанное произведения, рассмотреть их свойства, показать их механический и геометрический смыслы.

Скалярное произведение. Число $\bar{a}\cdot\bar{b}$, равное произведению модулей двух векторов и косинуса угла между ними, называют скалярным произведением:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = ab\cos\alpha \quad \text{или} \quad \bar{a}\cdot\bar{b} = a\cdot np_a\bar{b} = b\cdot np_b\bar{a}.$$

Базисные векторы попарно перпендикулярны, т.е. $\bar{i}\cdot\bar{j} = \bar{j}\cdot\bar{k} = \bar{k}\cdot\bar{i} = 0$, $\bar{i}\cdot\bar{i} = \bar{j}\cdot\bar{j} = \bar{k}\cdot\bar{k} = 1$.

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left(x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k}\right)\cdot\left(x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}\right)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Длина вектора

$$a=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ .$$

Угол между векторами:

$$\cos\alpha=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{ab}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2+z_2^2\right)}}\ .$$

Отсюда условие перпендикулярности двух векторов имеет вид:

$$\bar{a}\perp\bar{b}\ \Leftrightarrow\ x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

Векторное произведение. Если при наблюдении с конца $\vec{k}$ кратчайший поворот от $\bar{i}$ к $\bar{j}$ совершается против хода часовой стрелки, то говорят, что декартов базис $\left\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\right\}$ составляет правую тройку, а определямая им система координат (x,y,z) правая. В противном случае и тройка векторов, и соответствующая ей система координат левая.

Векторным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{a}\times\bar{b}$ или $\left[\bar{a},\bar{b}\right]$, перпендикулярный к ним обоим, составляющий с векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ правую тройку, модуль которого равен произведению модулей умножаемых векторов и синуса угла между ними:

$$\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=ab\sin\alpha\ .$$

Правило векторного произведения в механике, физике известно под названием правила правого винта, правой руки или правила буравчика. Геометрически $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$ выражает площадь параллелограмма, построенного на векторах-сомножителях: $S=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|_2$. При $\bar{a}\perp b$ параллелограмм превращается в прямоугольник и $S=ab$.

Векторные произведения базисных векторов:

$$\bar{i}\times\bar{i}=\bar{j}\times\bar{j}=\bar{k}\times\bar{k}=\bar{0},\qquad \bar{i}\times\bar{j}=\bar{k},\qquad \bar{j}\times\bar{k}=\bar{i},\qquad \bar{k}\times\bar{i}=\bar{j}\ .$$

Итак,

$$\bar{a}\times\bar{b}=\left(x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k}\right)\times\left(x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}\right),$$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\left(y_1z_2-y_2z_1\right)\bar{i}+\left(z_1x_2-z_2x_1\right)\bar{j}+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)\bar{k}$$

или

$$\bar{a}\times\bar{b}=\bar{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Последнее выражение можно рассматривать как определитель, раскрытый по элементам первой строки:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Свойства векторного произведения:

1) $\left[\bar{a}_1,\bar{a}_2\right]=-\left[\bar{a}_2,\bar{a}_1\right]$;

2) $\left[\lambda\bar{a}_1,\bar{a}_2\right]=\left[\bar{a}_1,\lambda\bar{a}_2\right]=\lambda\left[\bar{a}_1,\bar{a}_2\right]$;

3) $\bar{a}_1\times\bar{a}_2=\bar{0}\Leftrightarrow\bar{a}_1=\lambda\bar{a}_2$;

4) $\left[\bar{a}_1+\bar{a}_2,\bar{a}_3\right]=\left[\bar{a}_1,\bar{a}_3\right]+\left[\bar{a}_2,\bar{a}_3\right]$, $\left[\bar{a}_1,\bar{a}_2+\bar{a}_3\right]=\left[\bar{a}_1,\bar{a}_2\right]+\left[\bar{a}_1,\bar{a}_3\right]$.

Необходимое и достаточное условия коллинеарности двух векторов:

$$\bar{a}\parallel\bar{b}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

Смешанное произведение векторов. Число $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\bar{a}\bar{b}\bar{c}$, равное скалярному произведению любого из трех заданных векторов и векторного произведения двух остальных, называют смешанным (векторно-скалярным) произведением этих векторов.

Формула скалярного произведения:

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}x_3-\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}y_3+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}z_3$$

или

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение равно нулю, если любые два сомножителя в нём коллинеарны. Условие компланарности трех векторов можно представить в виде: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0$. При невыполнении этого условия на данных векторах можно построить параллелепипед. Объем параллелепипеда построенного на этих векторах равен $V=\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|$.

Лекция 5. Аналитическая геометрия. Уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми. Уравнения плоскости и прямой R^3. Взаимное расположение прямой и плоскости в R^3

Содержание лекции: элементы аналитической геометрии: уравнения прямой на плоскости и в пространстве, угол между прямыми, взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

Цель лекции: познакомить с элементами аналитической геометрии.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b,$$

где $k = tg\alpha = \dfrac{y-b}{x}$ - называется угловым коэффициентом.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку (x_0, y_0) с угловым коэффициентом k, имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

С помощью угловых коэффициентов можно определить углы между прямыми.

Теорема. Тангенс угла α между прямыми $L_1 : y = k_1x + b_1$ и $L_2 : y = k_2x + b_2$ определяется формулой:

$$tg\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых: прямые L_1 и L_2 параллельны в том случае, когда $k_1 = k_2$ прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, когда $k_1k_2 = -1$.

Параметрическое уравнение прямой на плоскости имеет вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot l \\ y = y_0 + t \cdot m \end{cases}.$$

Уравнение прямой с направляющим вектором имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.$$

Любой ненулевой вектор ***a***(*l*,*m*) на прямой *L* называется направляющим вектором. Этот вектор является базисным вектором этой прямой.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}.$$

Общее уравнение прямой имеет вид:

$$\mathrm{Ax}+\mathrm{By}+\mathrm{C}=0.$$

Если $B\neq 0$, то $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$, есть уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Если B=0, $\mathrm{A}\neq 0$, то получим: $x=-\frac{C}{A}$ - это уравнение определяет вертикальную прямую, проходящую через точку $x=-\frac{C}{A}$ на оси Ox.

Вектор $\vec{\mathrm{n}}$**,** перпендикулярный прямой L**,** называется нормальным вектором этой прямой.

Теорема (*о нормальном векторе прямой)*. Вектор $\overline{n}$ с координатами (A,B) является нормальным для прямой L с уравнением $\mathrm{Ax}+\mathrm{By}+\mathrm{C}=0$ на плоскости Oxy.

Следствие 1. Косинус угла φ между прямыми $L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ и $L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ с нормальными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ находится по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}\ \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1}^2+B_1{}^2\sqrt{A_2{}^2+B_2{}^2}}.$$

Следствие 2. Эти прямые перпендикулярны только в том случае, когда

$$\vec{n}_1\vec{n}=A_1A_2+B_1B_2=0.$$

Следствие 3. Эти прямые параллельны только в том случае, когда

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}.$$

Прямые L_1 и L_2 совпадают**,** если $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

Пусть прямая L проходит через точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(A,B)$, тогда ее уравнение имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Это уравнение называется уравнением прямой с нормальным вектором.

*Уравнение прямой в отрезках***.** Пусть прямая L не проходит через начало координат и пересекает оси Ox и Oy в точках с координатами

соответственно $(a,0)$ и $(0,b)$, тогда уравнение этой прямой в отрезках имеет вид: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$

Нормальное уравнение прямой $x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$. Здесь свободный член *p* всегда отрицателен, а выражение $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$, т.к. $\vec{n}$ - единичный вектор.

Чтобы из общего уравнения прямой Ax+By+C=0 получить нормальное уравнение, необходимо умножить его на число $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, где знак λ берется противоположным знаку *C*.

Теорема. Расстояние от точки $M_0(x_{0,}y_0)$ до прямой L: $x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$ определяется формулой: $d = \left|x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta - p\right|$.

Если прямая задана своим общим уравнением, то его предварительно необходимо умножить на λ. Отсюда получаем следующее следствие.

Следствие. Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямой $L: Ax+By+C=0$ определяется формулой:

$$d=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}; \qquad \delta=\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2}+B^2},$$

где величина δ - отклонение точки $M_0(x_0,y_0)$ от прямой $L: Ax+By+C=0$.

Уравнения прямой и плоскости в пространстве. Все уравнения плоскости и прямой в пространстве R^3 с небольшими изменениями повторяют уравнения прямой на плоскости, с добавлением соответствующих координат.

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0.$$

Общее уравнение плоскости имеет вид:

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

где *A, B, C, D = const* $\in$ *R* в пространстве *xyz*.

Вектор $\overline{n}$, перпендикулярный плоскости *P*, называется нормальным вектором этой плоскости.

Теорема о нормальном векторе плоскости. Вектор $\overline{n}$ с координатами (*A,B,C*) является нормальным для плоскости *P* с уравнением *Ax+By+Cz+D*=0 в пространстве *Oxyz*.

Следствие 1**.** Косинус угла между плоскостями:

$$P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$
$$P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

с нормальными векторами $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$ находится по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2{}^2 + B_2{}^2 + C_2{}^2}}.$$

Следствие 2. Эти плоскости перпендикулярны только в том случае, когда

$$\vec{n}_1\vec{n}_2 = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Следствие 3. Эти плоскости параллельны только в том случае, когда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Плоскости P_1 и P_2 совпадают, если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Уравнение плоскости с нормальным вектором:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Теорема 1. Косинус угла φ между прямыми

$$L_1 : \begin{cases} x = x_1 + l_1t \\ y = y_1 + m_1t \\ z = z_1 + n_1t \end{cases}; \qquad L_2 : \begin{cases} x = x_2 + l_2t \\ y = y_2 + m_2t \\ z = z_2 + n_2t \end{cases}$$

в R^3 находится по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1{}^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Эти прямые перпендикулярны только в том случае, когда

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0.$$

Эти прямые параллельны только в том случае, когда

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Эти прямые совпадают, если

$$\frac{l_1}{x_2 - x_1} = \frac{m_1}{y_2 - y_1} = \frac{n_1}{z_2 - z_1}.$$

В последнем случае прямые L_1 и L_2 имеют общую точку.

Теорема 2. Синус угла между прямой**:**

$$L:\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

и плоскостью $P: Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Прямая и плоскость перпендикулярны, если

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Прямая параллельна плоскости только в том случае, когда

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Чтобы найти точку пересечения прямой и плоскости, надо решить систему из 4–х уравнений с 4–мя неизвестными, составленную из уравнения плоскости и трех параметрических уравнений прямой:

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *перпендикулярно плоскости*, имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

Лекция 6. Кривые второго порядка. Общее уравнение кривых второго порядка. Канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы. Фокальные свойства кривых второго порядка

Содержание лекции: кривые второго порядка - эллипс, гипербола, парабола, их канонические уравнения. Фокальные свойства кривых второго порядка.

Цель лекции: познакомить с кривыми второго порядка и их графиками.

Общее уравнение кривой второго порядка. Кривой второго порядка называется множество точек плоскости, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0.$$

Здесь хотя бы одно из чисел a_{11}, a_{12}, a_{22} отлично от нуля. Это уравнение называется общим уравнением кривой второго порядка.

Если на плоскости должным образом выбрать систему координат $O'x'y'$, то в этой системе координат уравнение кривой примет канонический вид одной из кривых, рассмотренных выше (кроме нескольких вырожденных случаев).

Теорема. Для любой кривой второго порядка найдется декартова система координат $O'x'y'$, в которой уравнение кривой примет один из следующих видов (здесь $a, b, p > 0$).

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - эллипс;

2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - гипербола;

3) $y^2 = 2px$ - парабола;

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ - точка O;

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ или $x^2 = -1$ (пустые множества);

6) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ - пара пересекающихся прямых $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ и $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$;

7) $x^2 = a^2$ - пара параллельных прямых $x = \pm a$;

8) $x^2 = 0$ - прямая – ось Oy.

Эллипс, окружность, гипербола, парабола, определяемые в прямоугольной декартовой системе координат $x0y$ алгебраическим уравнением второго порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (1)$$

называются кривыми 2-го порядка; (1) называют их общим уравнением.

По общему уравнению кривые 2-порядка классифицируются следующим образом:

- если $AC - B^2 > 0$, то уравнение (1) принадлежит к эллиптическому типу и определяет эллипс, окружность, точку или мнимую кривую;

- при $AC - B^2 < 0$ (1) относится к гиперболическому типу и представляет гиперболу или пару пересекающихся прямых;

- при $AC - B^2 = 0$ (1) принадлежит параболическому типу и изображает параболу, пару параллельных прямых или мнимую кривую.

Пусть на плоскости $Oxyz$ имеются две точки F_1 и F_2, называемые фокусами на расстоянии 2с друг от друга (2с – фокусное расстояние). Для определенности расположим их на оси Ox симметрично относительно начало координат, т.е. F_1 $(-c,0)$ и F_2 $(c,0)$. Пусть $2a>2c$.

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух выбранных фокусов, постоянна и равна $2a$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Это уравнение называется каноническим уравнением эллипса, а числа a и b его полуосями (большой и малой).

Подставив в каноническое уравнение значение y=0, получим:

$$\frac{x^2}{a^2}=1; \qquad \Rightarrow \qquad x^2=a^2; \qquad x=\pm a,$$

т.е. эллипс пересекает ось Ox в точках с координатами $x=\pm a$. Аналогично проверяется, что ось Oy эллипс пересекает в точках $y=\pm b$. Эти точки пересечения эллипса с осями координат называются вершинами эллипса.

Ось, проходящая через фокусы эллипса (ось Ox), называется его фокальной осью. Число $e=\frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом. У эллипса $0\le e<1$.

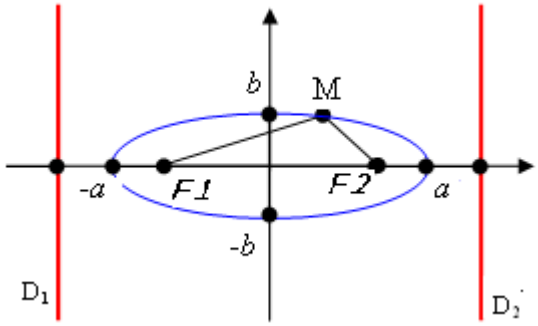

Рисунок 4

Прямые, проходящие перпендикулярно фокальной оси на расстоянии $d=\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}$ от центра эллипса, называются директрисами эллипса, которые на чертеже обозначены через D_1, D_2 (рисунок 4).

В частном случае, когда фокусное расстояние эллипса $2c$=0, два фокуса эллипса совпадают с его центром. При этом $a=b$ и каноническое уравнение эллипса принимает вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad \text{или} \qquad x^2+y^2=a^2.$$

Это уравнение называется каноническим уравнением окружности радиуса a. У окружности эксцентриситет e=0, а директрисы отсутствуют.

Уравнение окружности с радиусом a и с центром в точке $O'(x_0,y_0)$ имеет вид:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2.$$

Эллипсы (в частности, окружности) широко встречаются в природе и технике. Например, планеты вращаются вокруг солнца по эллипсам, в одном из фокусов которых находится солнце.

Пусть на плоскости имеются два фокуса $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ и $a<c$.

Гиперболой называется геометрическое место точек M плоскости, разность расстояний от которых до двух выбранных фокусов постоянна и равна $\pm 2a$.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b=\sqrt{c^2-a^2}$.

Число *a* называется действительной полуосью гиперболы, а число *b* – ее мнимой полуосью (рисунок 5).

Подставив в каноническое уравнение *y*=0, получим $x^2=a^2$, т.е. $x=\pm a$, следовательно, гипербола пересекает ось *Ox* в точках (*a*,0) и (-*a*,0). Эти точки называются вершинами гиперболы.

Подставив в каноническое уравнение *x*=0, получим $-\frac{y^2}{b^2}=1$. Это уравнение решения не имеет, поэтому гипербола с каноническим уравнением с осью *Oy* не пересекается.

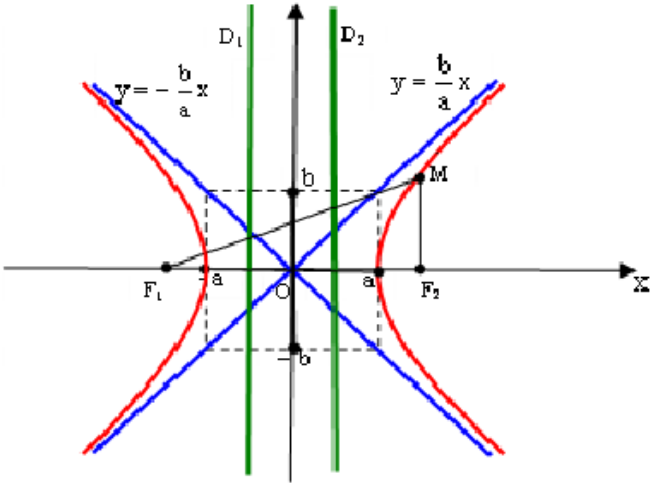

Рисунок 5

Как и у эллипса, точка *O* является центром симметрии гиперболы, а оси *Ox* и *Oy* ее осями симметрии.

Определения эксцентриситета и директрис гиперболы повторяют соответствующие определения для эллипса. Эксцентриситет гиперболы $e>1$.

Прямая *L* называется асимптотой кривой *K*, если расстояние от точки на кривой до этой прямой стремится к нулю при удалении точки вдоль кривой в бесконечность.

Прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами ветвей гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Замечание. Уравнение $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ определяет гиперболу с действительной полуосью *b* и мнимой полуосью *a*, фокусы которой находятся на оси *Oy* в точках (рисунок 6):

$$F_1\left(0,-\sqrt{a^2+b^2}\right),\quad F_2\left(0,\sqrt{a^2+b^2}\right)$$

Эксцентриситет гиперболы равен:

$$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}=\frac{c}{b},$$

а директрисы перпендикулярны оси Oy и находятся на расстоянии

$$d=\frac{b^2}{c}$$

от начала координат. Уравнения асимптот имеют тот же вид:

$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

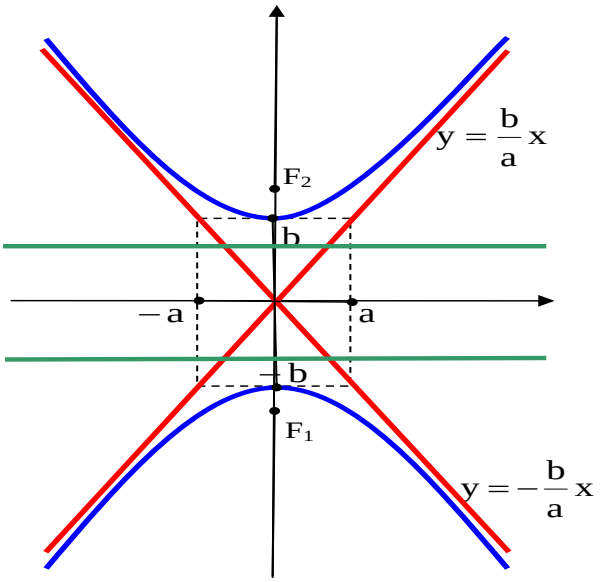

Рисунок 6

Гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

называются сопряженными друг другу.

Параболой называется геометрическое место точек M плоскости, расстояние от которых до фокуса совпадает с расстоянием до директрисы (рисунок 7).

Уравнение $y^2=2px$ называется каноническим уравнением параболы, а число $p>0$ ее параметром.

Парабола проходит через точку O, которая называется ее вершиной. Ось Ox является осью симметрии параболы.

Эксцентриситет параболы всегда считается равным единице. Асимптот у параболы нет.

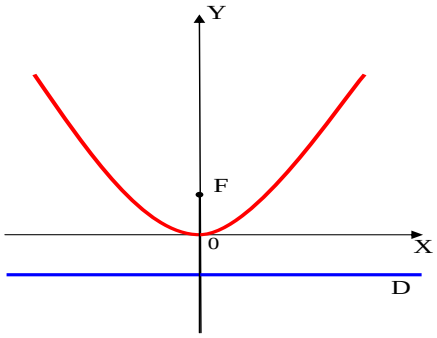

Рисунок 7

Замечание 1. Пусть $p>0$:

а) уравнение

$$x^2=2py$$

определяет параболу с фокусом $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ и директрисой $D: y=-\frac{p}{2}$ (рисунок 8);

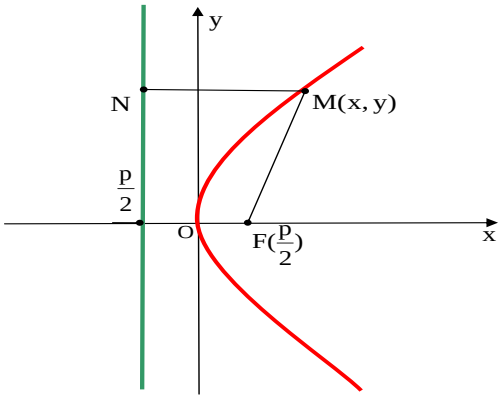

Рисунок 8

в) уравнение

$$y^2 = -2px$$

определяет параболу с фокусом $F\left(-\frac{p}{2},0\right)$ и директрисой $D: x = \frac{p}{2}$ (рисунок 9);

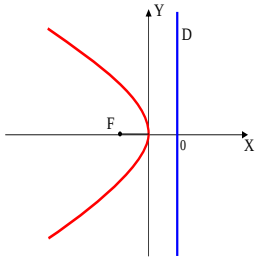

Рисунок 9

с) уравнение

$$x^2 = -2py$$

определяет параболу с фокусом $F\left(0,-\frac{p}{2}\right)$ и директрисой $D: y = \frac{p}{2}$, вершина параболы - в начале координат (рисунок 10).

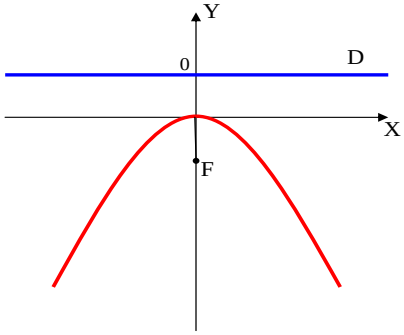

Рисунок 10

Замечание 2. Уравнение $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$ определяет параболу с вершиной в точке $O'(y_0, x_0)$, полученную путем параллельного переноса параболы $y^2 = 2px$. Подобные уравнения:

$$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0);$$

$$(y-y_0)^2 = -2p(x-x_0);$$

$$(x-x_0)^2 = -2p(y-y_0)$$

определяют параболы с вершинами в точке, направление ветвей которых соответствует направлению ветвей парабол из замечания 1.

Связь между декартовыми и полярными координатами:

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = r^2,\ \ tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

Лекция 7. Поверхности второго порядка. Канонические формы уравнений поверхностей второго порядка. Исследование поверхностей методом параллельных сечений

Содержание лекции: поверхности второго порядка, их канонические формы, исследование поверхностей методом параллельных сечений.

Цель лекции: познакомить с цилиндрическими, гиперболическими и коническими поверхностями второго порядка.

Цилиндрические поверхности. Рассмотрим вначале частные виды поверхностей, определяемых в пространстве уравнениями, в которых неизвестные x, y, z присутствуют только в первой или во второй степени.

Пусть в пространстве имеется кривая *K* и прямая *L*.

Определение. Цилиндрической поверхностью (цилиндром) с направляющей *K* и образующей *L* называется геометрическое место точек пространства, лежащих на прямых, проходящих через точки *K* параллельно *L*.

Замечание. Если кривая *K* находится на плоскости *Oxy* и имеет уравнение $F(x, y) = 0$, то это же уравнение определяет в пространстве $Oxyz$ цилиндрическую поверхность с направляющей *K* и образующей *Oz*. В самом деле, если $M_0(x_0, y_0) \in K$, т.е. если $F(x_0, y_0) = 0$, то прямая, проходящая через точку M_0 параллельно *Oz*, имеет параметрические уравнения:

$$L: \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = t \end{cases}.$$

Очевидно, что любая точка этой прямой удовлетворяет уравнению $F(x, y) = 0$. Кроме того, если точка $N_1(x_1, y_1, z_1)$ не лежит на прямой вида L, то точка $M_1(x_1, y_1)$ не принадлежит K, т. к. $F(x_1, y_1) \neq 0$.

Из этого замечания следует, что уравнение любой кривой K второго порядка на плоскости Oxy определяет в пространстве $Oxyz$ одну из восьми цилиндрических поверхностей с образующей Oz. Рассмотрим эти поверхности и их канонические уравнения $(a, b, p > 0)$.

Эллиптический цилиндр имеет направляющей эллипс и каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. В частности, круговой цилиндр: $x^2 + y^2 = a^2$ имеет направляющей окружность.

Гиперболический цилиндр имеет направляющей гиперболу и каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Параболический цилиндр имеет направляющей параболу и каноническое уравнение $y^2 = 2px$.

Уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ определяет ось Oz.

Уравнения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ и $x^2=-1$ - пустое множество.

Уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ - пара пересекающихся по оси Oz плоскостей.

$x^2=a^2$ - пара плоскостей, параллельных Oyz.

$x^2=0$ - плоскость Oyz.

Все перечисленные поверхности называются *цилиндрическими поверхностями второго порядка.*

Конические поверхности. Пусть в пространстве имеется кривая *K* и точка O, не лежащая на *K*.

Определение. Конической поверхностью (конусом) с направляющей *K* и вершиной O называется геометрическое место точек пространства, лежащих на прямых, проходящих через O и пересекающих *K*.

В частности, конические поверхности, рассматриваемые в школьной программе, имели направляющие окружности K, их вершины находились на прямой, проходящей через центр K перпендикулярно плоскости окружности. Заметим, что вершина O любой конической поверхности является ее центром симметрии.

Уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, $(a,b,c>0)$ называется *каноническим уравнением конуса второго порядка.* Проверим, что это уравнение на самом деле определяет коническую поверхность с вершиной O и направляющей – эллипсом, лежащим в плоскости $z=c$.

Чтобы найти линию, лежащую в пересечении конуса второго порядка и плоскости $z=c$, достаточно решить систему из этих двух уравнений, т.е. подставить $z=c$ в уравнение конуса. Получим:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{c^2}{c^2}=0.$$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - каноническое уравнение эллипса. Если точка $M_0(x_0,y_0,c)$ лежит на этом эллипсе, то уравнение прямой, проходящей через точки O и M_0, имеет вид:

$$L:\begin{cases} x=tx_0 \\ y=ty_0 \\ z=tc \end{cases}.$$

Проверим, что любая точка этой прямой лежит на конусе второго порядка; для этого подставим координаты точек прямой в уравнение конуса, получим:

$$\frac{(tx_0)^2}{a^2}+\frac{(ty_0)^2}{b^2}-\frac{(tc)^2}{c^2}=0;$$

$$t^2\left(\frac{x_0{}^2}{a^2}+\frac{y_0{}^2}{b^2}-\frac{c^2}{c^2}\right)=0;\ \text{если}\quad t\neq 0\Rightarrow\frac{x_0{}^2}{a^2}+\frac{y_0{}^2}{b^2}=1,$$

что верно, поскольку (x_0, y_0) удовлетворяет уравнению эллипса.

Заметим, что сечение этого конуса любой плоскостью $y=kx$ или $x=0$, проходящей через ось конуса Oz, дает пару пересекающихся прямых:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2x^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0;\qquad x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Поэтому других точек, кроме как лежащих на прямых вида *L*, поверхность $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ не имеет.

В случае $a=b$ сечение конуса плоскостью $z=c$ дает окружность $x^2+y^2=a^2$. Поэтому в этом случае конус является поверхностью вращения, которая получается в результате вращения пары прямых, лежащих в плоскости *Oxz* вокруг оси *Oz*.

При пересечении конической поверхности второго порядка различными плоскостями линиями пересечения могут оказаться только эллипс, гипербола, парабола, точка, прямая или пара пересекающихся прямых. Поэтому раньше кривые второго порядка называли *коническими сечениями.*

Поверхность, определяемая каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\qquad (a,b,c>0)$$

называется эллипсоидом, а числа a, b, c – его полуосями.

Выясним форму эллипсоида с помощью метода сечений, который состоит в следующем. Находятся линии, лежащие в пересечении исследуемой поверхности различными плоскостями. Эти линии, построенные затем в системе координат *Oxyz*, и определяют форму поверхности.

Найдем линии пересечения эллипсоида с координатными плоскостями:

а) с плоскостью Oxy. Подставив $z=0$ в уравнение эллипсоида, получим

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

это уравнение эллипса с полуосями a и b в плоскости Oxy;

в) с плоскостью Oyz

$$x = 0 \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Это уравнение эллипса с полуосями b и c в плоскости Oyz;

с) с плоскостью Oxz

$$y = 0 \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

что задает эллипс с полуосями a и c в плоскости Oxz.

При желании можно рассмотреть и другие плоскости. Во всех случаях в сечениях получаются эллипсы, точки или пустые множества.

Эллипсоиды используются в различных технических науках. Например, деформации абсолютно упругого тела в данной точке по различным направлениям имеют величины, определяемые так называемым эллипсоидом деформаций.

В случае равенства двух полуосей, например, $a = b$, сечения эллипсоида любой плоскостью $z = z_0$, где $|z_0| < c$ дают окружности. Поэтому такой эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ получается в результате вращения эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, лежащего в плоскости Oxz вокруг оси Oz.

В случае равенства трех полуосей $(a = b = c)$ эллипсоид превращается в сферу радиуса a с центром в начале координат. Ее уравнение: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Гиперболоид. Поверхность, определяемая каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ (a, b, c>0), называется *двуполостным гиперболоидом.*

Выясним ее форму с помощью метода сечений:

а) при $z = 0$ получаем $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$, что определяет пустое множество. Следовательно, с плоскостью Oxy этот гиперболоид не пересекается;

б) при $x = 0$ получаем $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$. Это гипербола, лежащая в плоскости Oyz, с действительной полуосью *c* и мнимой полуосью *b*, ветви которой направлены вдоль оси Oz;

в) при $y = 0$ получим $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$. Это гипербола, лежащая в плоскости Oxz, с действительной полуосью *c* и мнимой полуосью *a*, ветви которой направлены вдоль оси z.

Следовательно, двуполостный гиперболоид имеет вид поверхности, состоящей из двух частей, симметричной относительно точки O, Ox, Oy, Oz, Oxy, Oyz и Oxz.

При $a = b$ сечения гиперболоида плоскостью $z = z_0$, где $|z_0| > c$ определяют окружности, поэтому гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ получается в результате вращения гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, лежащей в плоскости Oxz вокруг Oz.

Поверхность, определяемая каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $(a, b, c > 0)$, называется *однополостным гиперболоидом.*

Определим ее форму с помощью метода сечений:

а) при $z = 0$ получаем уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, которое определяет эллипс с полуосями a и b, лежащего в плоскости Oxy;

б) при $x = 0$ получаем $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Это гипербола, лежащая в плоскости Oyz, с действительной полуосью b и мнимой полуосью c, ветви которой направлены вдоль оси Oy;

в) при y=0 получаем уравнение гиперболы, лежащей в плоскости Oxz с действительной полуосью *a* и мнимой полуосью *c*: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Эта поверхность симметрична относительно точки O.

При $a = b$ однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ получается в результате вращения гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, лежащей в плоскости Oxz вокруг оси Oz.

Двуполостный гиперболоид обладает одним замечательным свойством. Сечение гиперболоида любой касательной к нему плоскостью состоит из двух пересекающихся в точке касания прямых. Например, сечение гиперболоида плоскостью $x = a$ дает:

$$\frac{a^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1; \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Это уравнение определяет две пересекающиеся в точке $(a, 0, 0)$ прямые в плоскости $x = a$.

Поэтому поверхность, имеющую форму однополостного гиперболоида можно целиком составить из прямых линий. Строительные конструкции такой

формы обладают большой прочностью при относительной простоте изготовления. Так, первая телебашня в г.Москве составлена из кусков гиперболоидов, каждый из которых построен из прямолинейных металлических форм.

Поверхность, определяемая каноническим уравнением $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$, $(p,q>0)$, называется *эллиптическим параболоидом*. Определим его форму:

а) при $z=0$ получим $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=0$. Это точка $O(0,0,0)$. Следовательно, параболоид пересекает (касается) плоскость Oxy в точке O;

б) при $x=0$ получаем $\frac{y^2}{2q}=z$, $y^2=2qz$. Это уравнение параболы в плоскости Oyz с параметром q, ветви которой направлены в сторону положительной полуоси Oz;

в) при $y=0$ получаем $\frac{x^2}{2p}=z$, $x^2=2pz$. Это уравнение параболы в плоскости Oxz с параметром p, ветви которой направлены в сторону положительной полуоси Oz.

Плоскости Oxz и Oyz являются плоскостями симметрии эллиптического параболоида, а ось Oz - осью симметрии. При $p=q$ эллиптический параболоид получается в результате вращения параболы $x^2=2pz$, лежащей в плоскости Oxz вокруг оси Oz. У такого эллиптического параболоида все параболы вращения, лежащие в пересечении плоскостей, проходящих через ось Oz, имеют с параболоидом общий фокус – точку $F\left(0,0,\frac{p}{2}\right)$.

Параболоид вращения обладает следующим свойством: если в точку F поместить точечный источник света, то после отражения от параболоида поток света становится параллельным оси Oz. Поэтому светоотражатели во всех фарах, фонарях и прожекторах делают в форме параболоидов вращения.

Параллельный поток света, направленный вдоль оси параболоида вращения после отражения от него, собирается в фокусе парабол – точке F. Поэтому зеркала телескопов – рефлекторов также имеют форму параболоида вращения, в фокусе которого ставится дополнительное зеркало, выводящее поток света в окуляр телескопа. Форму параболоида вращения имеют также все параболические антенны и локаторы.

Поверхность, определяемая каноническим уравнением $\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z$, $(p,q>0)$, называется *гиперболическим параболоидом*:

а) при $z=0$ получаем $\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=0$. Это уравнение двух пересекающихся прямых в плоскости Oxy;

б) при $x=0$ получаем $-\frac{y^2}{2q}=z$; $y^2=-2qz$. Это уравнение параболы в плоскости Oyz, ветви которой направлены вдоль отрицательной полуоси Oz;

в) при $y=0$ получаем уравнение параболы в плоскости Oxz вида $x^2=2pz$, ветви которой направлены вдоль положительной полуоси Oz.

Поверхность такой формы называется *седловой поверхностью*. У этой поверхности Oyz и Oxz - плоскости симметрии, ось Oz - ось симметрии.

Так же, как и однополостный гиперболоид, эллиптический параболоид можно составить из прямых линий. С помощью конструкций в виде гиперболического параболоида, составленных из прямолинейных балок, осуществляют строительство перекрытий больших размеров, например, крыш над стадионами.

Определение. Поверхностью второго порядка называется множество точек пространства, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+b_1x+b_2y+b_3z+c=0.$$

Здесь хотя бы один коэффициент a_{ij} должен быть отличен от нуля.

Заметим, что все, рассмотренные выше поверхности, подходят под это определение. Оказывается, что этими поверхностями и исчерпываются поверхности второго порядка.

Теорема. Любая поверхность второго порядка в пространстве является одной из следующих поверхностей:

- одной из цилиндрических поверхностей второго порядка;
- конусом второго порядка;
- эллисоидом;
- одно или двуполостным гиперболоидом;
- эллиптическим или гиперболическим параболоидом.

Найдется, такая декартова система координат $O'x'y'z'$, в которой уравнение поверхности принимает канонический вид.

Определение вида поверхности и получение канонического уравнения из общего является довольно сложной процедурой, но в случае отсутствия в уравнении членов с произведениями *xy*, *xz* и *yz* приведение общего уравнения к каноническому достигается (как и для кривых второго порядка) методом выделения полных квадратов и параллельным переносом осей координат.

Пример. Выясним тип, расположение и канонический вид уравнения поверхности второго порядка, заданные уравнением:

$$x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 2x - 12y - 8z - 3 = 0.$$

Преобразуем уравнение, выделив полные квадраты для переменных x, y, z:

$$\left(x^2 + 2x + 1 - 1\right) - 2\left(y^2 + 6y + 9 - 9\right) + 4\left(z^2 - 2z + 1 - 1\right) - 3 = 0;$$

$$(x+1)^2 - 2(y+3)^2 + 4(z-1)^2 = -10;$$

$$\frac{(x+1)^2}{10} - \frac{(y+3)^2}{5} + \frac{(z-1)^2}{2{,}5} = -1.$$

При параллельном переносе системы координат, задаваемом формулами $x' = x + 1$, $y' = y + 3$, $z' = z - 1$, начало новой системы координат $O'x'y'z'$ окажется в точке $O'(-1,-3,1)$, а уравнение поверхности примет канонический вид $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{2{,}5} = -1$. Следовательно, данная поверхность – двуполостный гиперболоид с центром в точке O' и с осью $O'y'$.

Модуль 2. Элементы математического анализа

Лекция 8. Введение в анализ. Предел числовой последовательности. Функция. Предел функции в точке и его свойства

Содержание лекции: введение в математический анализ. Основные понятия - предел числовой последовательности, функция, предел функции в точке и его свойства.

Цель лекции: познакомить с основами математического анализа.

Основные понятия. Понятие множества является одним из основных неопределяемых понятий математики. Под множеством понимают совокупность (собрание, класс, семейство, ...) некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку. Так, можно говорить о множестве

студентов института, о множестве рыб в море, о множестве корней уравнения $x^2 + 2x + x = 0$, о множестве всех натуральных чисел и т. д.

Объекты, из которых состоит множество, называются его элементами. Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита *A,B,...,X,Y,Z,* а их элементы - малыми буквами *a, b,... …,x,y,z*.

Если элемент *x* принадлежит множеству *X,* то записывают $x \in X$; запись $x \notin X$ означает, что элемент *x* не принадлежит множеству *X*.

Множества, элементами которых являются числа, называются числовыми. Примерами числовых множеств являются:

1) $N = \{1; 2; 3; ...; n; ... \}$ - множество натуральных чисел.
2) $Z_0 = \{0; 1; 2; ...; n; ... \}$ - множество целых неотрицательных чисел.
3) $Z=\{0; \pm 1; \pm 2; ...; \pm n ...\}$ - множество целых чисел.
4) $Q = \left\{ \frac{m}{n} : m \in Z, \ n \in N \right\}$ - множество рациональных чисел.
5) R - множество действительных чисел.

Между этими множествами существует соотношение:

$$N \subset Z_0 \subset Z \subset Q \subset R.$$

Множество *R* содержит рациональные и иррациональные числа. Всякое рациональное число выражается или конечной десятичной дробью или бесконечной периодической дробью.

Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными.

Понятие функции. Одним из основных математических понятий является понятие функции. Понятие функции связано с установлением зависимости (связи) между элементами двух множеств.

Множество *X* называется *областью определения* функции *f* и обозначается *D*(*f*). Множество всех $y \in У$ называется *множеством значений* функции *f* и обозначается *E(f).*

Способы задания функций. Пусть задана функция $f : X \to Y$.

Если элементами множеств *X* и *Y* являются действительные числа (т.е. $X \subset R$ и $Y \subset R$), то функцию *f* называют числовой функцией. В дальнейшем будем изучать, как правило, числовые функции, для краткости будем именовать их просто функциями и записывать $y = f(x)$.

Переменная *x* называется при этом аргументом или независимой переменной, а *y* - функцией или зависимой переменной (от *x*). Относительно самих величин *x* и *y* говорят, что они находятся в функциональной зависимости.

Частное значение функции $f(x)$ при $x=a$ записывают так: $f(a)$. Например, если $f(x)=2x^2-3$, то $f(0)=-3$, $f(2)=5$.

Графиком функции $y=f(x)$ называется множество всех точек плоскости *Oxy,* для каждой из которых *x* является значением аргумента, а *y*-соответствующим значением функции.

Чтобы задать функцию $y=f(x)$, необходимо указать правило, позволяющее, зная x, находить соответствующее значение y. Наиболее часто встречаются три способа задания функции: аналитический, табличный, графический.

Аналитический способ: функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений. Например:

$$1)\ S=\pi R^2; \qquad 2)\ y=\begin{cases} x+3 & \text{ïðè} \quad x<2, \\ x & \text{ïðè} \quad x\geq 2 \end{cases}; \qquad 3)\ y^2-3x=0.$$

Если область определения функции $y=f(x)$ не указана, то предполагается, что она совпадает с множеством всех значений аргумента, при которых соответствующая формула имеет смысл. Так, областью определения функции $y=\sqrt{1-x^2}$ является отрезок [-1, 1].

Аналитический способ задания функции является наиболее совершенным, так как к нему приложены методы математического анализа, позволяющие полностью исследовать функцию $y=f(x)$.

Графический способ: задается график функции. Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком - его неточность.

Табличный способ: функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции. Например, известные таблицы значений тригонометрических функций, логарифмические таблицы.

На практике часто приходится пользоваться таблицами значений функций, полученных опытным путем или в результате наблюдений.

Числовая последовательность. Под числовой последовательностью $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ понимается функция

$$x_n = f(n), \tag{1}$$

заданная на множестве N натуральных чисел. Кратко последовательность обозначается в виде $\{x_n\}$ или x_n, $n \in N$. Число x_1 называется первым членом (элементом) последовательности, x_2 - вторым, ... , x_n - общим или n-ным членом последовательности.

Чаще всего последовательность задается формулой его общего члена. Формула (1) позволяет вычислить любой член последовательности по номеру n.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если существует такое число M>0, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство $|x| \leq M$. В противном случае последовательность называется неограниченной.

Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей (неубывающей), если для любого n выполняется неравенство $a_{n+1} > a_n$ $(a_{n+1} \geq a_n)$. Аналогично определяется убывающая (невозрастающая) последовательность.

Все эти последовательности называются монотонными последовательностями.

Если все элементы последовательности $\{x_n\}$ равны одному и тому же числу c, то ее называют постоянной.

Предел числовой последовательности. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n>N$ выполняется неравенство:

$$|x_n - a| < \varepsilon . \qquad (2)$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ (или переменная x_n, пробегающая последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ имеет предел, равный числу a (или x_n стремится к a). Говорят также, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к a.

Выясним геометрический смысл определения предела последовательности. Неравенство (2) равносильно неравенствам:

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \quad \text{или} \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon ,$$

которые показывают, что элемент x_n находится в ε-окрестности точки a. Поэтому определение предела последовательности геометрически можно сформулировать так: число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой ε-окрестности точки a найдется натуральное число N, что все значения x_n, для которых $n>N$, попадут в ε-окрестность точки a.

Ясно, что чем меньше ε, тем больше число N, но в любом случае внутри ε-окрестности точки a находится бесконечное число членов последовательности, а вне ее может быть лишь конечное их число.

Отсюда следует, что сходящаяся последовательность имеет только один предел. Последовательность, не имеющая предела, называется расходящейся.

Предел функции в точке. Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_o, кроме, быть может, самой точки x_o .

Сформулируем два, эквивалентных между собой, определения предела функции в точке.

Определение 1 (на «языке последовательностей» или по Гейне). Число A называется пределом функции $y=f(x)$ в точке x_o, если для любой последовательности допустимых значений аргумента x_n, $n \in N$ $(x_n \neq x_0)$, сходящейся к x_o последовательность соответствующих значений функции $f(x_n)$, $n \in N$, сходится к числу A.

В этом случае пишут

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \ \textit{или} \ f(x) \to A \ \textit{при} \ x \to x_0 .$$

Геометрический смысл предела функции: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ означает, что для всех точек x, достаточно близких к точке x_o, соответствующие значения функции «как угодно мало» отличаются от числа A.

Определение 2 (на «языке $\varepsilon - \delta$», или по Коши). Число A называется пределом функции в точке x_o, если для любого положительного ε

найдется такое положительное число δ, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Записывают

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Односторонние пределы. В определении предела функции $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ считается, что x стремится к x_o любым способом: оставаясь меньшим, чем x_o (слева от x_o), большим, чем x_o (справа от x_o), или колеблясь около точки x_o.

Бывают случаи, когда способ приближения аргумента x к x_o существенно влияет на значение предела функции. Поэтому вводят понятия односторонних пределов.

Число A_1 называется пределом, функции $y=f(x)$ слева *а* точке x_o, если для любого число $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$. Предел слева записывают так: $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ или коротко $f(x_0 - 0) = A_1$ (обозначение Дирихле).

Аналогично определяется предел функции справа: $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$ или коротко: $f(x_0 + 0) = A_2$.

Пределы функции слова и справа называются односторонними пределами. Очевидно, если существует $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, то существуют и оба односторонних предела, причем $A = A_1 = A_2$.

Справедливо и обратное утверждение: если существуют оба предела $f(x_0 - 0) = A_1$ и $f(x_0 + 0) = A_2$ и они равны, то существует предел $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$. Если же $A_1 \neq A_2$, то $\lim_{x \to x_0} f(x)$ не существует.

Предел функции. Пусть функция $y=f(x)$ определена в промежутке $(-\infty, \infty)$. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого положительного числа ε существует такое число $M=M(\varepsilon)>0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x|>M$, выполняется неравенство:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Если $x \to +\infty$, то пишут $A = \lim_{x \to +\infty} f(x)$, если $x \to -\infty$, то $A = \lim_{x \to -\infty} f(x)$.

Геометрический смысл этого определения таков:
для любого $\varepsilon > 0$ существует $M > 0$, что при $x \in (-\infty, -M)$ или $x \in (M, +\infty)$ соответствующие значения функции $f(x)$ попадают в ε-окрестность точки A, т.е. точки графика лежат в полосе шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A + \varepsilon$ и $y = A - \varepsilon$ (рисунок 11).

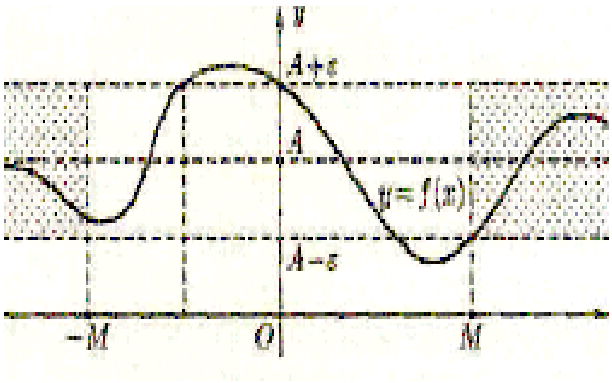

Рисунок 11

Лекция 9. Виды неопределенностей. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства. Замечательные пределы. Эквивалентные бесконечно малые и бесконечно большие, их использование при вычислении пределов. Непрерывность функции в точке и на числовом промежутке. Замечательные пределы. Вычисление пределов

Содержание лекции: виды неопределенностей, бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства, замечательные пределы, непрерывность функции в точке и на числовом промежутке. Вычисление пределов.

Цель лекции: ввести понятия бесконечно малые и бесконечно большие функции, познакомить с замечательными пределами, правилами вычисления пределов.

Бесконечно большая функция. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если для любого числа M>0 существует число $\delta = \delta(M) > 0$, что для всех *x,* удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство |*f*(x)|>*M*. Записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Например, функция $y = \dfrac{1}{x-2}$ - есть бесконечно большая функция при $x \to 2$.

Если *f*(*x*) стремится к бесконечности при $x \to x_0$ и принимает только положительные значения, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$; если только отрицательные значения, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Функция $y = f(x)$, заданная на всей числовой прямой, называется бесконечно большой при $x \to \infty$, если для любого числа *M*>0 найдется такое число *N*=*N*(*M*)>0, что при всех *x*, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$. Например, функция $y = 2^x$ есть бесконечно большая функция при $x \to \infty$.

Бесконечно малые функции. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Аналогично определяется бесконечно малая функция при $x \to x_0 - 0$ и при $x \to x_0 + 0$.

Бесконечно малые функции часто называют бесконечно малыми величинами или бесконечно малыми; обозначают обычно греческими буквами $\alpha,\ \beta$ и т. д.

Примерами бесконечно малых функций служат функции $y = x^2$ при $x \to 0$; $y = x - 2$ при $x \to 2$; $y = \sin x$ при $x \to \pi k,\ k \in Z$.

Функция $y = f(x)$ называется ограниченной сверху на *R*, если найдётся такое число *C*, что для всех *x*, принадлежащих *R*, выполнено неравенство $f(x) \le C$.

Если $f(x) \ge C$ для всех *x*, принадлежащих *R*, то такая функция называется ограниченной снизу на *R*.

Функция, ограниченная сверху и снизу, называется ограниченной**.**

Теорема 1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

Теорема 2. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть функция бесконечно малая.

Следствие 1. Так как всякая бесконечно малая функция ограничена, то из теоремы 2 вытекает: произведение двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

Следствие 2. Произведение бесконечно малой функции на число есть функция бесконечно малая.

Теорема 3. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть функция бесконечно малая.

Теорема 4. Если функция $\alpha(x)$ - бесконечно малая ($\alpha \ne 0$), то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая функция и, наоборот, если функция $\alpha(x)$- бесконечно большая, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно малая.

Связь между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией.

Теорема 5. Если функция $y = f(x)$ имеет предел, равный *A*, то ее можно представить как сумму числа *A* и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, т.е. если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то $f(x) = A + \alpha(x)$.

Теорема 6 *(обратная).* Если функцию $y = f(x)$ можно представить в виде суммы числа *A* и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, то число *A* является пределом функции *f*(*x*) , т.е. если $f(x) - A = \alpha(x)$, то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Основные теоремы о пределах. Рассмотрим теоремы, которые облегчают нахождение пределов функции. В приводимых теоремах будем считать, что пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$ существуют.

Теорема. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0}\varphi(x).$$

Теорема справедлива для алгебраической суммы любого конечного числа функций.

Следствие. Функция может иметь только один предел при $x \to x_0$.

Теорема. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x).$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x) = c\lim_{x\to x_0} f(x).$$

Следствие. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^n = (\lim_{x\to x_0} f(x))^n.$$

Теорема. Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi)x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}.$$

Признаки существования пределов. Не всякая функция, даже ограниченная, имеет предел. Например, функция $y = \sin x$ при $x \to \infty$ предела не имеет. Во многих вопросах анализа бывает достаточно только убедиться в существовании предела функции. В таких случаях пользуются признаками существования предела.

Теорема (*о пределе промежуточной функции*). Если функция *f*(*x*) заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $g(x)$, стремящимися к одному и тому же пределу, то она также стремится к этому пределу, т.е. если

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = A, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = A, \qquad \varphi(x) \le f(x) \le g(x),$$

то

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Теорема (о пределе монотонной функции). Если функция *f*(*x*) монотонна и ограничена при $x < x_0$ или при $x > x_0$, то существует соответственно ее левый предел

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$$

или ее правый предел

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0).$$

Если существуют пределы слева и справа, но $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, то точка x_0 называется точкой разрыва первого рода функции $y = f(x)$.

Если хотя бы один из пределов

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x), \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

не существует или равен бесконечности, то точка x_0 называется точкой разрыва второго рода функции $y = f(x)$.

Первый замечательный предел. При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

называемый первым замечательным пределом. Читается: предел отношения синуса к его аргументу равен единице, когда аргумент стремится к нулю.

Следствия первого замечательного предела:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1$. 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arctgx}{x} = 1$. 3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \qquad (1)$$

Если в равенстве

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{положить} \quad x = \frac{1}{t},$$

то оно запишется в виде

$$\lim_{t \to 0} (1 + t)^t = e. \qquad (2)$$

Равенства (1) и (2) называются вторым замечательным пределом. Здесь e=2,718282… – иррациональное число.

Следствия второго замечательного предела:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \log_a e$. 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$, $\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu$.

Сравнение бесконечно малых функций. Как известно, сумма, разность и произведение двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая. Отношение же двух бесконечно малых функций может вести себя различным образом: быть конечным числом, быть бесконечно большой функцией, бесконечно малой или вообще не стремиться ни к какому пределу.

Две бесконечно малые функции сравниваются между собой с помощью их отношения.

Пусть $\alpha=\alpha(x)$ и $\beta=\beta(x)$ есть б.м.ф. при $x\to x_0$, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0}\beta(x)=0.$$

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=A\neq 0$ $(A\in R)$, то α *и* β называются бесконечно малыми одного порядка.

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$, то α называется бесконечно малой более высокого порядка, чем β.

3. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$, то α называется бесконечно малой более низкого порядка, чем β.

4. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}$ не существует, то α *и* β называются несравнимыми бесконечно малыми.

Отметим, что таковы же правила сравнения бесконечно малых функций при $x\to\pm\infty$, $x\to\pm 0$.

Пример. Сравнить порядок функций $\alpha=3x^2$ и $\beta=14x^2$ при $x\to 0$.

Решение: При $x\to 0$ это бесконечно малые функции одного порядка, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{z\to 0}\frac{3x^2}{14x^2}=\frac{3}{14}\neq 0,$$

то есть здесь бесконечно малые функции α *и* β одного порядка и стремятся к нулю с примерно одинаковой скоростью.

Эквивалентные бесконечно малые и основные теоремы о них. Среди бесконечно малых функций одного порядка особую роль играют так называемые эквивалентные бесконечно малые.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, то α *и* β называются эквивалентными бесконечно малыми (при $x \to x_0$) и обозначается $\alpha \sim \beta$.

Например, sin*x*~*x* при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; tg*x*~*x* при $x \to 0$, т.к. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1$.

Теорема 1. Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

Теорема 2. Разность двух эквивалентных бесконечно малых функций есть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждая из них.

Справедливо и обратное утверждение: если разность бесконечно малых функций α *и* β есть бесконечно малая высшего порядка, чем α *или* β, то α *и* β эквивалентные бесконечно малые.

Теорема 3. Сумма конечного числа бесконечно малых функций разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

Непрерывность функции в точке. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_o и в некоторой окрестности этой точки. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (3)$$

Равенство (3) означает выполнение трех условий:

- функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в ее окрестности;
- функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$;
- предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т.е. выполняется равенство (3).

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, то равенство (3) можно записать в виде:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x_0) = f(x_0) \qquad (4)$$

Это означает, что при нахождении предела непрерывной функции $f(x)$ можно перейти к пределу под знаком функции, то есть в функцию $f(x)$ вместо аргумента *x* подставить его предельное значение x_0.

Можно дать еще одно определение непрерывности функции, опираясь на понятия приращения аргумента и функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале (*a;b*). Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a,b)$. Для любого $x \in (a,b)$ разность

$x - x_0$ называется приращением аргумента x в точке x_0 и обозначается Δx («дельта x»), то есть $\Delta x = x - x_0$. Отсюда $x = x_0 + \Delta x$.

Разность соответствующих значений функций $f(x) - f(x_0)$ называется приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается Δy: $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ или $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Запишем равенство (4) в новых обозначениях. Так как условия $x \to x_0$ и $x - x_0 \to 0$ одинаковы, то равенство (3) принимает вид:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$$

или

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 . \qquad (5)$$

Полученное равенство (5) является еще одним определением непрерывности функции в точке: функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в точке x_0 и ее окрестности и выполняется равенство (5), т.е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Исследуя непрерывность функции в точке, применяют либо первое - равенство (4), либо второе - равенство (5) определение.

Непрерывность функции в интервале и на отрезке. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в интервале (a,b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке [a,b], если она непрерывна в интервале (a,b) и в точке x=a непрерывна справа, т.е. $\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$, а в точке x=b непрерывна слева, т.е. $\lim_{x \to b+0} f(x) = f(b)$.

Точки разрыва функции и их классификация. Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются точками разрыва этой функции. Если x=x_o - точка разрыва функции $y = f(x)$, то в ней не выполняется, по крайней мере, одно из условий первого определения непрерывности функции, а именно:

1) Функция определена в окрестности точки x_0, но не определена в самой точке x_0.

2) Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, но не существует предела $y = f(x)$ при $x \to x_0$.

3) Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, существует $\lim_{x \to x_0} f(x)$, но этот предел не равен значению функции в точке x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x).$$

Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода. Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва первого рода функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы слева и справа (односторонние пределы), т.е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2.$$

При этом:

а) если $A_1 = A_2$, то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва;

б) если $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 называется точкой конечного разрыва.

Величину $|A_1 - A_2|$ называют скачком функции в точке разрыва первого рода.

Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва второго рода функции $y = f(x)$, если, по крайней мере, один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности.

Непрерывность элементарных функций. Функции arcsinx, arctgx, arccosx, arcctgx непрерывны при всех значениях *x,* при которых эти функции определены. Таким образом, все основные элементарные функции непрерывны при всех значениях *x*, для которых они определены.

Элементарной называется такая функция, которую можно задать одной формулой, содержащей конечное число арифметических действий и суперпозиций (операции взятия функции от функции) основных элементарных функций. Поэтому из вышесказанного вытекает: *всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена*.

На практике в простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента.

Часто, однако, подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенным выражениям вида $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty, 0^0$, ∞^0, 1^∞. Нахождение предела функции в этих случаях называют раскрытием неопределенности.

Для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, необходимо каждый член выражения разделить на *x* в старшей степени.

Для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$, прежде чем перейти к пределу, необходимо провести алгебраические преобразования, сократить дробь.

Для раскрытия неопределенности вида $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$ необходимо при помощи тождественных преобразований свести их к одному из ранее рассмотренных случаев $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$.

Лекция 10. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Производная функции в точке. Геометрический и механический смыслы производной

Содержание лекции: дифференциальное исчисление функций одной переменной: производная функции в точке, задачи, приводящие к понятию производной, геометрический и механический смыслы производной.

Цель лекции: ввести понятие производная функции, рассмотреть задачи, приводящие к понятию производной, показать геометрический и механический смыслы производной.

Задачи, приводящие к понятию производной. Понятие производной является одним из основных математических понятий. Производная широко используется при решении целого ряда задач математики, физики, других наук, в особенности при изучении скорости разных процессов.

Скорость прямолинейного движения. Пусть материальная точка (некоторое тело) M движется неравномерно по некоторой прямой. Каждому значению времени t соответствует определенное расстояние $OM=S$ до некоторой фиксированной точки O. Это расстояние зависит от истекшего времени t, т.е. $S=S(t)$. Это равенство называют законом движения точки. Требуется найти скорость движения точки.

Если в некоторый момент времени t точка занимает положение M, то в момент времени $t+\Delta t$ (Δt -приращение времени) точка займет положение M_1, где $OM_1=S+\Delta S$ (ΔS - приращение расстояния). Таким образом, перемещение точки M за время Δt будет $\Delta S=S(t+\Delta t)-S(t)$. Отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ выражает среднюю скорость движения точки за время Δt: $V_{ср.}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$.

Средняя скорость зависит от значения Δt: чем меньше Δt, тем точнее средняя скорость выражает скорость движения точки в данный момент времени t.

Предел средней скорости движения при стремлении к нулю промежутка времени Δt называется скоростью движения точки в данный момент времени (или мгновенной скоростью). Обозначив эту скорость через V, получим:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad \text{или} \quad V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Касательная к кривой. Дадим сначала общее определение касательной к кривой. Возьмем на непрерывной кривой L две точки M и M_1 (рисунок 12).

Прямую MM_1, проходящую через эти точки, называют секущей. Пусть точка M_1, двигаясь вдоль кривой L, неограниченно приближается к точке M. Тогда секущая, поворачиваясь около точки M, стремится к некоторому предельному положению MT. Касательной к данной кривой в данной точке M называется предельное положение MT секущей MM_1, проходящей через точку M, когда вторая точка пересечения M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M_1.

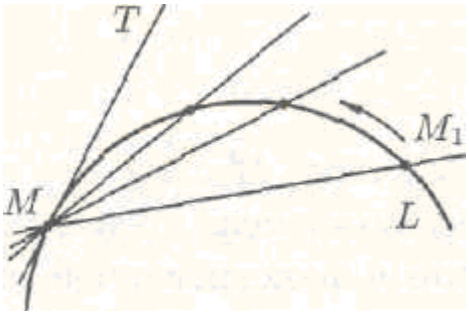

Рисунок 12

Рассмотрим теперь график непрерывной кривой $y=f(x)$, имеющий в точке $M(x,y)$ невертикальную касательную. Найдем ее угловой коэффициент $k=\mathrm{tg}\,\alpha$, где α - угол между касательной и положительным направлением оси Ox.

Для этого проведем через точку M и точку M_1 графика с абсциссой $x+\Delta x$, секущую (рисунок 13).

Обозначим через φ - угол между секущей MM_1 и осью Ox. На рисунке видно, что угловой коэффициент секущей равен:

$$tg\varphi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} => \varphi(\Delta x) = arctg\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции приращение Δy тоже стремится к нулю; поэтому точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M, а секущая MM_1, поворачиваясь около точки M, переходит в касательную. Угол $\varphi \to \alpha$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha$.

Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\alpha$.

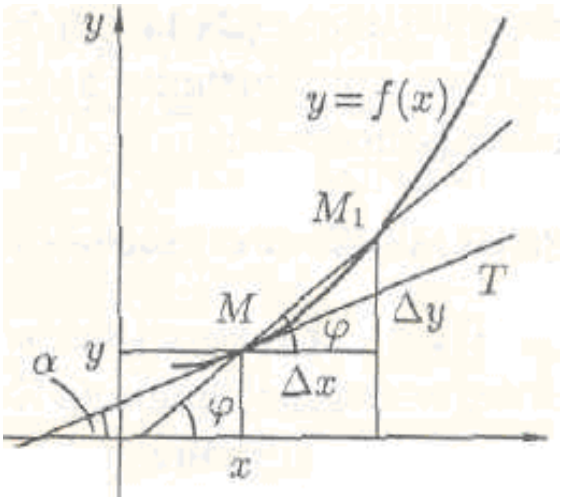

Рисунок 13

Поэтому угловой коэффициент касательной равен:

$$k = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0 x} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x}.$$

Определение производной; ее механический и геометрический смысл. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале (*a*;*b*). Проделаем следующие операции:

- аргументу $x \in (a,b)$ дадим приращение $\Delta x : x + \Delta x \in (a,b)$;
- найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(\ x + \Delta x) - f(x);$$

- составим отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x};$$

- найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$.

Если этот предел существует, то его называют производной функции $y = f(x)$ и обозначают одним из символов:

а) $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$ (по Лагранжу);

б) $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ или $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ (по Лейбницу).

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = y'(x_0).$$

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала (*a*;*b*), называется дифференцируемой в этом интервале; операция нахождения производной функции называется дифференцированием.

Значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается одним из символов: $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$.

В задаче про скорость прямолинейного движения было получено $V = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. Это равенство перепишем в виде $V = S'_t$ т.е. скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути S по времени *t*. В этом заключается *механический смысл* производной.

Обобщая, можно сказать, что если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то производная y' есть скорость протекания этого процесса. В этом состоит *физический смысл* производной.

В задаче про касательную к кривой был найден угловой коэффициент касательной $k = tg\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0 x} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Это равенство перепишем в виде

$f'(x) = tg\alpha = k$, т.е. производная $f'(x)$ в точке *x* равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна *x*. В этом заключается *геометрический смысл* производной.

Производная суммы, разности, произведения и частного функций. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ - две дифференцируемые на некотором интервале (*a;b*) функции.

Теорема. Производная суммы (разности) двух функций $u(x)$ и $v(x)$ равна сумме (разности) производных этих функций:

I. $\left[u(x) + v(x)\right]' = u'(x) + v'(x)$.

II. $\left[u(x) - v(x)\right]' = u'(x) - v'(x)$.

Теорема справедлива для любого конечного числа слагаемых.

Теорема. Производная произведения двух функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго:

$$\left[u(x) \cdot v(x)\right]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Частный случай $\left[cu(x)\right]' = cu'(x), \ (c - const)$.

Теорема. Производная частного двух функций $u(x)$ и $v(x)$, где $v(x) \neq 0$ равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}, \quad (v(x) \neq 0).$$

Уравнение касательной к функции $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0), где $y_0 = f(x_0)$, имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Если производной в точке x_0 не существует $f'(x_0)$, то касательной к графику функции в точке (x_0, y_0) провести нельзя.

Уравнение нормали к функции $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0), где $y_0 = f(x_0)$, имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Лекция 11. Производная сложной функции. Дифференцирование сложных, неявно и параметрически заданных функций. Дифференциал функции, свойства, приложения. Геометрический смысл дифференциала

Содержание лекции: производные сложной, неявно и параметрически заданных функций. Дифференциал функции, свойства, приложения, геометрический смысл дифференциала.

Цель лекции: ввести понятия производных сложной, неявно и параметрически заданных функций, дифференциала функции.

Производная сложной и обратной функций. Пусть $x = \varphi(t)$, тогда $y = f[\varphi(t)]$ - сложная функция с промежуточным аргументом φ и независимым аргументом *t*.

Теорема. Если функция $x = \varphi(t)$ имеет производную в точке t_0, а функция $y = f(x)$ имеет производную в соответствующей точке $x_0 = \varphi(t_0)$, то сложная функция $y = f[\varphi(t)]$ имеет производную в точке t_0, которая находится по формуле:

$$y'(x_0) = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0) = f'[\varphi(t_0)] \cdot \varphi'(t_0).$$

Теорема. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале (*a*;*b*) и имеет неравную нулю производную $f'(x)$ в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определяемую равенством $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ или $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ в точке x_0 дифференцируема, то в этой точке функция непрерывна.

Определение. Говорят, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, если приращение функции в этой точке представимо в виде:

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где A - некоторое постоянное число, не зависящее от Δx,

$\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Теорема. Чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовала ее конечная производная.

Таблица производных.

1. $(C)' = 0,\ C - const$.

2. $(x^n)' = nx^{n-1}, \quad (n \in R, \quad x > 0)$.

Частный случай: $(x)' = 1,\ \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},\ (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. $(a^x)' = a^x \ln a,\ (0 < a \neq 1),\ \ (e^x)' = e^x$.

4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},\ \ (x > 0,\ 0 < a \neq 1),\ \ (\ln x)' = \frac{1}{x},\ (x > 0)$.

5. $(\sin x)' = \cos x$.

6. $(\cos x)' = -\sin x$.

7. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z)$.

8. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x},\ \ (x \neq \pi k,\ k \in Z)$.

9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\ (|x| < 1)$.

10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\ \ (|x| < 1)$.

11. $(arctgx)' = \frac{1}{1 + x^2}$.

12. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1 + x^2}$.

13. $(shx)' = chx$.

14. $(chx)' = chx$.

15. $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$.

16. $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$.

Производная степенно-показательной функции $f(x) = [u(x)]^{v(x)}$

$$f'(x) = [u(x)]^{v(x)} \left[v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right].$$

Неявно заданная функция. Если функция задана уравнением $y = f(x)$, разрешенным относительно *y,* то функция задана в явном виде (явная функция).

Не всегда легко, а иногда и невозможно разрешить уравнение относительно *y.* Под неявным заданием функции понимают задание функции в виде уравнения *F(x;y)*=0, не разрешенного относительно *y.*

Всякую явно заданную функцию $y = f(x)$ можно записать как неявно заданную уравнением $f(x) - y = 0$, но не наоборот.

Если неявная функция задана уравнением *F(x;y)*=0, то для нахождения производной от *y* по *x* нет необходимости разрешать уравнение относительно *y:* достаточно продифференцировать это уравнение по *x*, рассматривая при этом *y* как функцию *x,* и полученное затем уравнение разрешить относительно *y'.* Производная неявной функции выражается через аргумент *x* и функцию *y.*

Функция, заданная параметрически. Пусть зависимость между аргументом *x* и функцией *y* задана параметрически в виде двух уравнений:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (1)$$

где *t*- вспомогательная переменная, называемая параметром.

Найдем производную y'_x, считая, что функции (1) имеют производные и что функция $x=x(t)$ имеет обратную $t = \varphi(x)$. По правилу дифференцирования обратной функции:

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}. \qquad (2)$$

Функцию $y = f(x)$, определяемую параметрическими уравнениями (1), можно рассматривать как сложную функцию $y=y(t)$, где $t = \varphi(x)$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем: $y'_x = y'_t \cdot t'_x$. С учетом равенства (2) получаем:

$$y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} \quad \text{или} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Полученная формула позволяет находить производную y'_x от функции заданной параметрически, не находя непосредственной зависимости *y* от *x.*

Дифференциал функции. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и в точке $x \in (a,b)$ имеет производную $f'(x) = A \neq 0$, где $|A| < +\infty$. Из определения производной следует, что соответствующие приращения независимой переменной и функции величины, сравнимые при $\Delta x \to 0$, и имеем: $\Delta y = A \cdot \Delta x + o\left(\Delta x\right)_{\Delta x \to 0}$.

Определение. Главную, линейную относительно Δx часть приращения функции $y = f(x)$ называют дифференциалом функции в точке x, соответствующим приращению независимой переменной Δx, и обозначают символом dy или $dy = A \cdot \Delta x = f'(x)\Delta x.$

Положив $f(x) = x$, получим $f'(x) = 1$, следовательно, $dx = \Delta x$, т.е. дифференциал независимой переменной равен сообщаемому ей приращению. Значит, $dy = f'(x)dx = y'dx$, т.е. дифференциал функции равен произведению производной функции и дифференциала аргумента.

Операции нахождения производной и дифференциала функции фактически представляют собой одно и то же действие. Правила нахождения дифференциалов:

$$d\left(\sum_{i=1}^{k} C_i f_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{k} C_i df_i(x), \qquad \forall k \in N, \quad \forall C_i = const;$$

$$d(uv) = vdu + udv;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}; \quad v(x) \neq 0;$$

$$dy = f'(u)du = y'_u du.$$

Дифференциал функции обладает *свойством инвариантности* (неизменности) формы.

Формула вычисления в приближенных вычислениях:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Лекция 12. Производные высших порядков. Формула Тейлора. Правило Лопиталя. Исследование функций и построение их графиков

Производные и дифференциалы высших порядков. Производная дифференцируемой на интервале (a,b) функции $y = f(x)$ представляет собой функцию, определенную на этом интервале.

Если она окажется дифференцируемой на (a,b) или на какой-либо ее части, то от функции $y' = f'(x)$, называемой первой производной, можно найти последующие производные, которые называются производными высших порядков от данной функции.

Вторая производная будет представлять собой производную от первой производной:

$$y'' = (y')' = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

или в виде $$f''(x), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Производной k-го порядка функции называется производная от ее производной (k-1**)** порядка при условии, что эти производные существуют:

$$f^{\kappa}(x) = \left(f^{k-1}(x)\right)', \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

Функция f при этом называется k раз дифференцируемой.

Дифференциалом k-го порядка называется дифференциал от ее дифференциала (k-1) порядка**,** вычисленный в предположении, что dx остается постоянной:

$$d^{\hat{e}} f = d(d^{k-1} f) = f^{(k)}(x)(dx)^k.$$

Производные функции, заданной параметрически $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),$

$\alpha \le t \le \beta$ вычисляются по формулам:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}; \qquad y''_{xx} = \frac{x'_t y''_{tt} - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}$$

или

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Формула Тейлора. Теорема. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную n порядка, тогда найдется многочлен $P_n(x)$ степени не выше n, который удовлетворяет условиям:

$$P_n(x_0) = f(x_0); \qquad P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0); \qquad k = 1,2,\ldots n$$

и имеет вид:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

$P_n(x)$ - называется многочленом Тейлора. Если $R_{n+1}(x)$ остаток, то $R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x)$, и формула Тейлора имеет вид:

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x), \tag{1}$$

где $R_{n+1}(x) = o((x - x_0)^n)$ - остаток в форме Пеано;

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$ - остаток в форме Лагранжа.

Если $x_0=0$, то из формулы (1) получим формулу Маклорена

$$f(x)=F(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}(x), \qquad (2)$$

где $R_{n+1}(x)=o(x^n)$ - остаток в форме Пеано;

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$ - остаток в форме Лагранжа.

Раскрыть неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ можно также с помощью правила Лопиталя.

Правило Лопиталя. Если функции φ(x) и ψ(x) бесконечно малые или бесконечно большие при $x\to a$, дифференцируемы в окрестности точки $x=a$, $\psi'(x)\neq 0$ и существует конечный предел:

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=k,$$

то существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, и они равны: $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$.

*Исследование поведения функций и их графиков***.** Функцию $f(x)$ называют монотонной на (a,b), если для $\forall\, x_1,x_2\in(a,b),\ x_1<x_2$ выполняется одно из условий:

1) $f(x_1)\le f(x_2)$ - неубывающая.
2) $f(x_1)< f(x_2)$ - возрастающая.
3) $f(x_1)\ge f(x_2)$ - невозрастающая.
4) $f(x_1)> f(x_2)$ - убывающая.

Участки области определения функции, где имеют место эти неравенства, называются интервалами монотонности функции. Границами этих интервалов служат так называемые точки локального экстремума (минимума, максимума) функции и точки разрыва функции.

Теорема. Если для дифференцируемой функции $f'(x)>0,\ f'(x)<0,$ $f'(x)=0,\ \forall\, x\in(a,b)$, то функция $f(x)$ соответственно возрастает, убывает, постоянна на (a, b).

Точку x_0 называют точкой локального минимума или максимума функции $f(x)$, если существует любая окрестность $U(x_0)$ этой точки, где соответственно $f(x_0)\le f(x)$ или $f(x_0)\ge f(x),\quad \forall x\in U(x_0)$. Число $f(x_0)$ будем называть соответственно локальным минимумом или локальным максимумом, а вместе локальным экстремумом функции $f(x)$.

Теорема Ферма. Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x и достигает в этой точке локального экстремума, то $f'(x)=0$.

Равенство $f'(x)=0$ является необходимым условием существования локальных экстремумов дифференцируемой функции. Корни этого уравнения называют точками стационарности функции (в бесконечно малой окрестности их функция «постоянна»).

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и $f(a)=f(b)=C$, то найдется, по крайней мере, одна точка $\xi \in (a,b)$ такая, что $f'(\xi)=0$.

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), то существует хотя бы одна точка $\xi \in (a,b)$ такая, что:

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Точки, где производная функции равна нулю или не существует, называются критическими точками функции. Функция может иметь локальные экстремумы только в критических точках.

Интервал $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)=U_\varepsilon(x_0)$ будем называть ε- окрестностью точки x_0. Если существует ε>0 такое, что на интервалах $(x_0-\varepsilon, x_0)$ и $(x_0, x_0+\varepsilon)$ $f'(x)$ имеет постоянные, но разные знаки, то говорят, что при переходе через точку x_0 производная меняет знак.

Теорема. Если при переходе через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак, то x_0 является точкой локального экстремума функции $f(x)$, а именно:

- локального минимума, если $f'(x)$ меняет знак с "-" на "+";
- локального максимума, если - с "+" на "-".

В точке x_0 локального экстремума нет, если при переходе через нее производная не меняет знака.

*Теорема***.** Если в точке стационарности x_0 функция имеет не равную нулю вторую производную, то x_0 является точкой локального экстремума функции *f*(*x*), причем локального минимума, если $f''(x_0)>0$, локального максимума, если $f''(x_0)<0$.

Кривую $y=f(x)$ называют выпуклой в точке x_0, если существует некоторая окрестность этой точки, где касательная расположена выше кривой (ось ординат *Oy* направлена вертикально вверх) и вогнутой - в противном случае.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет не равную нулю вторую производную, то при $f''(x_0) < 0$ кривая $y = f(x)$ выпукла в точке x_0, а при $f''(x_0) > 0$ - вогнута.

Следствие. Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на (*a*,*b*), то промежутки в которых функция $y = f(x)f(x)$ сохраняет знак, есть интервалы выпуклости или вогнутости графика функции.

Границами интервалов выпуклости и вогнутости кривой служат точки перегиба кривой, где кривая и касательная к ней пересекаются. Существует окрестность точки перегиба, где кривая расположена по обе стороны от касательной к ней.

При переходе через точку перегиба вторая производная функции меняет знак, то есть точка $(x_0, f(x_0))$ графика функции, отделяющая его выпуклую часть от вогнутой, называется точкой перегиба.

Если при $x \to a$ $(|a| < +\infty)$ или $x \to \infty$ расстояние между кривой $Г: y = f(x)$ и прямой *L* стремится к нулю, то прямую *L* называют асимптотой кривой *Г*.

Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика непрерывной функции $y = f(x)$, если выполняется хотя бы одно из условий:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \infty; \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = \infty.$$

В остальных случаях асимптота определяется уравнением $y = kx + b$ и при $k \neq 0$ имеем наклонную, а при $k = 0$ горизонтальную асимптоту.

*Теорема***.** Для того чтобы прямая $y = kx + b$ являлась асимптотой кривой $y = f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k; \quad \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = b.$$

Заметим, что прямая $y = b$ только при $|b| < +\infty$ служит горизонтальной асимптотой. Если $b = \infty$ при $k = 0$, то кривая асимптот не имеет.

При решении задач по результатам исследований составляют таблицу, отражающую основные свойства функции, следовательно, особенности ее графика:

- найти область определения функции;
- исследовать функцию на четность и нечетность;
- найти точки пересечения графика функции с осями координат;
- исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва функции (если они существуют) и установить характер разрыва, найти асимптоты функции;
- найти интервалы возрастания и убывания функции и ее экстремумы;

- найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой и точки ее перегиба;
- приближенно («эскизно») построить график функции.

Модуль 3. Интегральное исчисление функции одной переменной

Лекция 13. Первообразная функции. Неопределенный интеграл и его основные свойства. Таблица основных интегралов. Методы интегрирования неопределенных интегралов

Содержание лекции: неопределенный интеграл и его основные свойства, таблица основных интегралов. Методы интегрирования неопределенных интегралов.

Цель лекции: ввести понятие неопределенного интеграла, указать его основные свойства и показать методы интегрирования неопределенных интегралов.

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$. Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество первообразных, причем все первообразные содержатся в выражении $F(x) + \tilde{N}$, где C – постоянная.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных.

Интеграл обозначают: $\int f(x)dx$.

Тогда

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $f(x)$ - подинтегральная функция;

$f(x)dx$ - подинтегральное выражение;

x - интегральная переменная.

Свойства неопределенного интеграла:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \quad d\int f(x)dx = f(x)dx;$

2) $dF(x) = F(x) + C;$

3) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \ k - const$;

4) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Таблица неопределенных интегралов.

I. $\int 0dx = C$.

II. $\int dx = x + C$.

III. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1)$.

IV. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,\ (x \neq 0)$.

V. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 1)$, частный случай $\int e^x dx = e^x + C$.

VI. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

VII. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

VIII. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$.

IX. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C,\ x \neq k\pi,\ k \in Z$.

X. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$.

XI. $\int ctgx dx = \ln|\sin x|,\ x \neq k\pi,\ k \in Z$.

XII. $\int shx dx = chx + C$.

XIII. $\int chx dx = shx + C$.

XIV. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.

XV. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$.

XVI. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$.

XVII. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + C \\ -arctgx + C \end{cases}$.

XVIII. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{a} + C \\ -\arccos\frac{x}{a} + C \end{cases}.$

XIX. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a} arcctg\frac{x}{a} + C \end{cases}.$

XX. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

XXI. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm \alpha}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm \alpha}\right| + C.$

Методы интегрирования неопределенных интегралов. Метод замены переменных.

XVII. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \begin{cases} arctgx + C \\ -arctgx + C \end{cases}.$

XVIII. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{a} + C \\ -\arccos\frac{x}{a} + C \end{cases}.$

XIX. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a} arcctg\frac{x}{a} + C \end{cases}.$

XX. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

XXI. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm \alpha}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm \alpha}\right| + C.$

Методы интегрирования неопределенных интегралов. Метод замены переменных.

Теорема. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и непрерывна на интервале T, а на множестве значений функции *X* определена функция $f(x)$. Если на множестве *X* существует первообразная *F*(*x*) функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то на множестве T существует и первообразная $F(\varphi(t))$ функции $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ и

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

Вычислив интеграл по формуле (1) по переменной *t,* необходимо вернуться к старой переменной *x.*

Интегрирование по частям.

Теорема. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы на множестве *X* и существует интеграл $\int v du$, то на этом множестве *X* существует интеграл $\int u dv$ и справедливо:

$$\int u dv = uv - \int v du. \qquad (2)$$

Формула (2) называется формулой интегрирования по частям.

Лекция 14. Интегрирование классов дробно-рациональных и иррациональных функций. Интегрирование тригонометрических выражений

Содержание лекции: интегрирование дробно-рациональных, иррациональных функций и тригонометрических выражений.

Цель лекции: рассмотреть методы интегрирования дробно-рациональных, иррациональных функций и тригонометрических выражений.

Интегрирование рациональных функций. Рациональной дробью называется дробь вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x),\ Q(x)$ - многочлены. Рациональная дробью называется правильной, если степень многочлена $P(x)$ ниже степени многочлена $Q(x)$, в противном случае дробь называется неправильной.

Простейшими (элементарными) дробями называются правильные дроби вида:

$$\frac{A}{(x-a)^n}; \qquad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}; \quad n=1,2,\ldots,$$

где A, M, N, a, p, q - действительные числа, $p^2-4q<0$.

I. При n=1 $\quad \int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C$.

При n>1 $\quad \int \frac{A}{(x-a)^n}d(x-a) = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C$.

II. При $n=1,\ \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx,\ (x^2+px+q)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}$, тогда

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}}dx = \left| \begin{array}{l} t = x+\frac{p}{2} \\ dt = dx \\ \frac{4q-p^2}{4} = a^2 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2N-MP}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

При n>1 имеем $J_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$. Интегрируя по частям, получим рекурентную формулу:

$$J_n = \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) \cdot J_{n-1}, n = 2,3\ldots.$$

Если в выражении $\frac{P(x)}{Q(x)}$ старшая степень многочлена P(x) больше старшей степени многочлена Q(x), то есть задана неправильная дробь, то, разделив $P(x)$ на $Q(x)$, выделим целую часть $S(x)$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

где $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ - правильная рациональная функция, которую можно разложить на простые дроби.

Тогда

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int S(x)dx + \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} dx.$$

Интегрирование иррациональных функции.

I. Интегралы вида:

$$\int R(x, \sqrt[n]{x^m}, \sqrt[s]{\tilde{o}^r})dx$$

подстановкой $x = t^k$ сводятся к интегралам рациональной дроби от t,

где R - рациональная функция своих аргументов,

k – общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \frac{r}{s}$ подынтегральной функции,

$dx = kt^{k-1}dt$.

II. Интегралы вида:

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right]dx$$

сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k,$$

где k – общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \frac{r}{s}$.

III. *Интегрирование иррациональных функций с помощью тригонометрических подстановок*. Интегралы вида

1) $R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$; 2) $\int R(x,\ \sqrt{a^2+x^2})dx$; 3) $R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$

приводятся к интегралам от рациональной относительно *sint* и *cost* функции с помощью тригонометрических подстановок:

- для первого интеграла $x = a\ sin.t$ (или $x = acos\ t$);
- для второго интеграла $x = tg\ t$ (или $x = a\ ctg\ t$);
- для третьего интеграла $x = a\ sec\ t$ (или $acosec\ t$) $x = \dfrac{a}{\cos t}$.

IV. *Интегралы от дифференциальных биномов* $\int x^m(a+bx^n)dx$,

где m, n, p – рациональные числа;

a, b – const.

П.Л.Чебышев доказал, что интегралы от дифференцированных биномов выражаются через элементарные функции только в 3-х случаях:

1) P – целое число (P>0, P<0, P=0), применяется подстановка $x = t^s$, где s – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n.

2) $\dfrac{m+1}{n}$ - целое число, применяется подстановка $a+bx^n = t^s$, где s – знаменатель дроби P.

3) $\dfrac{m+1}{n}+P$ – целое число, применяется подстановка $ax^{-n}+b = t^s$, где s – знаменатель дроби P.

V. Интегралы вида $\int \dfrac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+C}}$ с помощью подстановки $x-\alpha = \dfrac{1}{t}$ и путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена приводятся к табличным интегралам.

Интегрирование тригонометрических выражений. Универсальная подстановка. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ приводятся к интегралу от рациональной функции подстановкой:

$$tg\frac{x}{2} = t \quad (-\pi < x < \pi); \quad \frac{x}{2} = arctgt; \quad x = 2arctgt; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2};$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

где R – рациональная функция.

Частные подстановки. Существует три случая, в которых легко можно избежать универсальную тригонометрическую подстановку.

1) Если выполняется равенство $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, т.е функция нечетна относительно синуса, то используется подстановка $\cos x = t$.

2) Если выполняется равенство $R(\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, т.е функция нечетна относительно косинуса, то используется подстановка $\sin x = t$.

3) Если выполняется равенство $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, т.е. функция четная относительно синуса и косинуса, то применяется подстановка $tgx = t$. При этом применяются формулы:

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Лекция 15. Определенный интеграл. Свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы

Содержание лекции: определенный интеграл, его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы.

Цель лекции: ввести понятия определенного интеграла, рассмотреть его свойства, формулу Ньютона-Лейбница, приложения определенного интеграла, несобственные интегралы.

Определенный интеграл. Пусть на отрезке [*a,b*] определена функция $f(x)$. Разобъем отрезок [*a,b*] на *n* произвольных частей точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b,$$

выберем на каждом элементарном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ произвольную точку $E_к$ и найдем длину каждого такого отрезка: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке [*a,b*] называется сумма вида $\sigma = \sum_{к=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$. Причем, эта сумма имеет конечный предел *J*, если для каждого ε>0 найдется такое число $\delta > 0$, что при $\max \Delta x_k < \delta$ неравенство $|\delta - J| < \varepsilon$ выполняется при любом выборе чисел $\xi_к$.

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке [*a,b*] называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков ($\max \Delta x_k$) стремится к нулю.

$$J = \int_{\grave{a}}^{b} f(x)dx = \lim_{\max \Delta X_{\hat{e}} \to 0} \sigma = \lim_{\max \Delta X_{\hat{e}} \to 0} \sum_{\kappa=1}^{n} f(\xi_{\kappa})\Delta X_{\kappa} .$$

Теорема существования определенного интеграла. Если функция $f(x)$ непрерывна на [*a,b*], то предел интегральной суммы существует и не зависит от способа разбиения отрезка [*a,b*] на элементарные отрезки и от выбора точек ξ_{κ}.

Числа *a* и *b* соответственно называются нижним и верхним пределами интегрирования.

Если $f(x) > 0$ на [*a,b*], то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции, фигуры, ограниченной линиями $y = f(x),\ x = a,\ x = b,\ y = 0$.

Основные свойства определенного интеграла:

1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

2) $\int_a^a f(x)dx = 0$.

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

4) $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$.

5) $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$,

где С – постоянная.

6) Оценки определенного интеграла:

Если $m \le f(x) \le M$ на [*a,b*], то $m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$.

Правила вычисления определенных интегралов.

1. Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная $f(x)$.

2. Интегрирование по частям:

$$\int_a^b udv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu,$$

где $u = u(x),\ v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции отрезка $[a,b]$.

3. Замена переменной:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

где $x = \varphi(t)$ функция, непрерывная вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $\alpha \le t \le \beta$, $f(\varphi(t))$ – функция непрерывная на $[\alpha, \beta]$.

4. Если $f(x)$ – нечетная функция, т.е. $f(-x) = -f(x)$, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

Если $f(x)$ - четная функция, т.е. $f(-x) = f(x)$, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

Геометрические приложения определенного интеграла.

1. *Вычисление площадей плоских фигур.* Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Если $f(x) \ge 0$ на $[a,b]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 0$, $x = a$, $x = b$, равна интегралу:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Если $f(x) \le 0$ на $[a,b]$, то площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле:

$$S = -\int_a^b f(x)dx \quad \text{или} \quad S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

Если кривая $y = f(x)$ пересекает ось Ox, то сегмент $[a,b]$ надо разбить на части, в пределах которых функция не меняет знака, и к каждой из части применить ту из формул, которая ей соответствует.

2. *Вычисление площади в полярных координатах.* Пусть требуется определить площадь сектора OAB, ограниченного лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и

кривой AB, заданной в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, где $r(\varphi)$-функция, непрерывная на отрезке $[\alpha;\beta]$.

Разобьем отрезок $[\alpha;\beta]$ на n частей точками:

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_k < \ldots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$$

и положим $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$, $k = 1,\ldots,n$. Наибольшую из этих разностей обозначим через $\lambda = \max\Delta\varphi$. Разобьем данный сектор на n частей лучами $\varphi = \varphi_k$ $(k = 1,2,\ldots,n-1)$.

Заменим k-ый элементарный сектор круговым сектором радиуса $r(\xi_k)$, где $\xi_k \in [\varphi_{k-1};\varphi_k]$.

Тогда сумма $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} r^2(\xi)\Delta\varphi$ - это приближенно площадь сектора OAB. Отсюда:

$$S = \frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} r^2(\xi)\Delta\varphi = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi .$$

3. *Вычисление длины дуги***.** Пусть дуга AB задана уравнением $y = f(x)$, $x \in [a;b]$, где $f(x)$ - функция, имеющая на отрезке $[a,b]$ непрерывную производную.

Длиной дуги AB называется предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда длина наибольшего звена стремится к нулю.

Найдем длину дуги AB. Впишем в дугу AB ломаную линию $M_0M_1\ldots M_n$. Пусть абсциссы точек M_0, M_1, ..., M_n соответственно $a = x_0$, x_1, ..., $x_n = b$ (ординаты этих точек обозначим соответственно через y_0, y_1, ..., y_n). Имеем разбиение отрезка $[a,b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1};x_k]$, $k = 1,2,\ldots,n-1$. Длина отрезка $[x_{k-1};x_k]$ равна $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1,\ldots,n$. Пусть $\lambda = \max\Delta x_k$. Через Δy_k обозначим приращение функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_{k-1};x_k]$. По теореме Пифагора $M_{k-1}M_k = \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k$, и, следовательно, длина ломаной линии $M_0M_1\ldots M_n$:

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k .$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим формулу вычисления длины дуги:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx .$$

Отсюда длина дуги AM, где $M(x; y)$ - переменная точка дуги AB,

$$l = l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2}\,dx .$$

Поэтому

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + y'^2} ,$$

откуда получаем формулу дифференциала дуги

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}\,dx \quad \text{или} \quad dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} .$$

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, причем функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ имеют непрерывные производные $x'(t)$ и $y'(t)$ в $[\alpha; \beta]$, то путем замены переменной $x = x(t)$ в (1) получим:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt .$$

Если кривая AB задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$ $(\alpha \le \varphi \le \beta)$, то получим:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi .$$

2. *Вычисление площади поверхности вращения*. Пусть нам дана поверхность, образованная вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox. Площадь этой поверхности на участке $a \le x \le b$ вычисляют по формуле:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx .$$

3. *Вычисление объема тела вращения.* Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$.

В этом случае произвольное сечение тела плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс, есть круг, площадь которого:

$$Q = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2 .$$

Применяя общую формулу для вычисления объема

$$V = \int_a^b Q(x)dx,$$

получим общую формулу для вычисления объема тела вращения:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Несобственные интегралы. Интегралы с бесконечными пределами. Если функция $f(x)$ непрерывна при $a \le x \le \infty$, то по определению:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Если существует конечный предел в правой части формулы (1), то несобственный интеграл называется сходящимися, если этот предел не существует, то расходящимся.

Геометрически несобственный интеграл (1) в случае $f(x) > 0$ есть площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямой $x=a$ и осью OX (асимптотой).

Аналогично определяются несобственные интегралы:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to -\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b \to +\infty} \int_c^в f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Признаки сходимости и расходимости приведем для интегралов вида (1).

1. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{к \to +\infty} F(x) = F(+\infty)$, то несобственный интеграл (1) сходится и равен:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a).$$

Если же $\lim\limits_{V \to +\infty} F(x)$ не существует, то несобственный интеграл (1) – расходится.

2. Пусть при $a \le x < +\infty$ имеем $0 \le f(x) \le g(x)$. Если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится и несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} f(x)dx$, причем:

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

Если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ (признак сравнения).

3. Если при $a \le x < +\infty$ для функций $f(x) > 0,\ g(x) > 0$ существует конечный предел $\lim\limits_{x \ge +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \ne 0$, то несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно (предельный признак сравнения).

4. Если сходится несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ (последний интеграл называется в этом случае абсолютно сходящимся).

5. Если при $x \to +\infty$ функция $f(x) > 0$ является бесконечно малой порядка α по сравнению с функцией $\frac{1}{x}$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Сводный план 2017 г., поз. 216

Искакова Ақжолтай Қурмантаевна
Есботаева Эльмира Султанмуратовна

МАТЕМАТИКА 1

Конспект лекций
для студентов специальности 5В070200 – Автоматизация и управление

Редактор Л.Т.Сластихина
Специалист по стандартизации Н.К.Молдабекова

Подписано в печать _____ Формат 60х84 1/16
Тираж 20 экз. Бумага типографическая №1
Обьем 4,25 уч.-изд.л. Заказ_____ Цена 2125 тг.

Копировально - множительное бюро
некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013 Алматы, ул. Байтурсынова, 126