Коммерциялық емес акционерлік қоғам

АЛМАТЫ ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС УНИВЕРСИТЕТІ

Математика және математикалық үлгілеу кафедрасы

МАТЕМАТИКА 2

5В070200 – Автоматтандыру және басқару мамандығының студенттеріне арналған есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар.
2 бөлімі

Алматы 2019

ҚҰРАСТЫРУШЫЛАР: А.К.Искакова, Э.С.Есботаева. Математика 2. 5В070200 – Автоматтандыру және басқару мамандығының студенттеріне арналған есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар. 2-ші бөлімі. –Алматы: АЭжБУ, 2019. - 32 б.

«Математика 2» пәні бойынша есептеу - сызба жұмыстары 5В070200 – Автоматтандыру және басқару мамандығының студенттеріне арналған. Есептеу - сызба жұмыстары көрсетілген мамандықтың «Математика – 2» пәнінің бағдарламасына сәйкес құрылған. Студенттер, жалпы кредиттің санына сәйкес, таңдап алынған бағыттарына байланысты модульдік жүйе бойынша бұл курсын тындап, білім алады. Әрбір модульдің көлемі мен мазмұны білімалушылардың жастық психологиялық ерекшеліктеріне сай құрылған.

Әдеб.көрсеткіші – 5.

Пікір беруші: Абдулланова Ж.С.

«Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2019 ж. жоспары бойынша басылды.

© «Алматы энергетика және байланыс университеті» КЕАҚ, 2019 ж.

Кіріспе

5В070200 - «Автоматтандыру және басқару» мамандығының студенттеріне арналған «Математика-2» пәні бойынша есептеу-сызба жұмысын жүзеге асыру бойынша әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалардың екінші бөлігі «Көп айнымалы функциялардың дифференциалдық және интегралдық есептеулері» математикалық бөлігін қамтиды.Барлық тапсырмалар негізгі формулаларменқамтамасыз етілген және мысалдар келтірілге.

Ұсынылып отырған әдістемелік нұсқау, күндізгі оқу бөлімінің инженерлік-техникалық мамандықтар студенттеріне арналған, бірақ бұл нұсқаулар жоғары математика курсын қашықтықтан оқып шығатын барлық мамандықтардың студенттері үшін пайдалы болады, сонымен қатар байқауларға дайындалу үшін негіз болып табылады.

Есептік-сызба жұмыстарды студент жуқа дәптерде орындауы керек. Барлық түсіндірулер толық болуы керек және мүмкіндігінше түсінікті тілдежазылуы керек.

1 Есептеу – сызба жұмысы №1

1.1 Көп айнымалы функцияның дифференциалдық есептеулері

Теориялық сұрақтар.

1. Көп айнымалы функциялар. Негізгі ұғымдар. Екі және үш айнымалы функциялардың анықталу облыстары.
2. Көп айнымалы функциялардың дербес және толық өсімшелері.
3. Көп айнымалы функцияның шегі. Екі айнымалы функцияның үзіліссіздігі.
4. Көп айнымалы функцияның туындыларымен дифференциалдары.
5. Көп айнымалы функцияның дербес туындылары. Бірінші ретті дифференциалы.
6. Градиент, бағыт бойынша туынды.
7. Көп айнымалы функцияның жоғары ретті дербес туындылары.
8. Көп айнымалы функцияның аралас жоғары ретті дербес туындылары.
9. Көп айнымалыдан тәуелді күрделі функцияның туындылары.
10. Айқын емес түрде берілген функцияның туындысы.
11. Жазықтық жанама мен нормаль теңдеулері.
12. Көп айнымалы функцияның экстремумы. Негізгі ұғымдар. Экстремумның қажетті және жеткілікті шарттары.
13. Көп айнымалы функцияның ең үлкен жіне ең кіші міндері.

«Көп айнымалы функцияның дифференциалдық есептеулері» есептеусызба жұмыстарды орындауға арналған тапсырмалар.

1 тапсырма. Берілген $z = f(x, y)$ функциясы үшін:

а)бірінші ретті дербес туындыларынтабыңыз $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;

ә) екінші ретті дербес туындыларын табыңыз $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

б) $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ теңдігі орындалатынын көрсетіңіз;

в) dz, $d^2 z$ бірінші және екінші ретті дифференциалдарынтабыңыз.

1.1	$z = e^{2x^2+y^2}$	1.2	$z = 2xy - \frac{y}{x^2}$
1.3	$z = 2x^3 lny - 3xy^6$	1.4	$z = \cos(xy^2 - 5y)$
1.5	$z = \sin(x^3 + 4y)$	1.6	$z = ln(x^2 - 2y)$
1.7	$z = (4xy - 3y^3)^2$	1.8	$z = sin(x^3 - 4xy)$
1.9	$z = (2yx^3 - ysinx)^7$	1.10	$z = (3x^4 - 2y^6)^2$
1.11	$z = e^{3x^2+5y^3}$	1.12	$z = \ln(5xy)$
1.13	$z = \cos(3xy - 5)$	1.14	$z = cos(2x - 7y)$
1.15	$z = \cos(3x^2 + 6xy^3)$	1.16	$z = (2x - 9y)^5$
1.17	$z = (2yx^2 - xy^4)^3$	1.18	$z = (3x^4 - 2y)^5$
1.19	$z = xe^{8y-1}$	1.20	$z = tg(x+y^2)$
1.21	$z = ye^{x^2+5y^3}$	1.22	$z = ye^{2xy^3}$
1.23	$z = \frac{x}{y} + 3x$	1.24	$z = ctg(3x-y^2)$
1.25	$z = cos(x^2 + 4y)$	1.26	$z = \ln(x^3+y^2)$
1.27	$z = (3x - 7y^2)^6$	1.28	$z = (2x + 5y)^3$
1.29	$z = (2x - 5y)^3$	1.30	$z = (x^2y - 7y^3)^7$

2 тапсырма. $u(M) = u(x, y, z)$ функциясының $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктесіндегі градиентін табыңыз.

№	$u(M)$	M_1	№	$u(M)$	M_1
2.1	$x^2y + y^2z + z^2x$	(1,-1,2)	2.16	$\ln(x^3 + y^3 + z + 1)$	(1,3,0)
2.2	$5xy^3z^2$	(2,1,-1)	2.17	$x - 2y + e^z$	(-4,-5,0)
2.3	$\ln(x^2 + y^2 + z^2)$	(-1,2,1)	2.18	$x^4 - 3xyz$	(2,2,-4)
2.4	$z \cdot e^{x^2+y^2+z^2}$	(0,0,0)	2.19	$3x^2y^3z$	(-2,-3,1)
2.5	$\ln(xy + yz + xz)$	(-2,3,-1)	2.20	e^{xy+z^2}	(-5,0,2)

2.6	$\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}$	(1,1,1)	2.21	x^{yz}	(3,1,4)
2.7	x^2y+xz^2-2	(1,1,1)	2.22	$\left(x^2+y^2+z^2\right)^3$	(1,2,-1)
2.8	$xe^y+ye^x-z^2$	(3,0,-2)	2.23	$(x+y)^z$	(1,5,0)
2.9	$3xy^2+z^2-xyz$	(1,2,2)	2.24	x^2y+y^2z-3z	(0,-2,-1)
2.10	$5x^2yz+xy^2z+yz^2$	(1,1,1)	2.25	$\frac{10}{x^2+y^2+z^2+1}$	(-1,2,-2)
2.11	$\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$	(1,2,2)	2.26	$\ln\left(1+x^2-y^2+z^2\right)$	(1,1,1)
2.12	$y^2z-2xyz+z^2$	(3,1,-1)	2.27	$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}-\frac{z}{x}$	(-1,1,1)
2.13	$x^2+y^2+z^2-2xyz$	(1,-1,2)	2.28	x^3+xy^2-6xyz	(1,3,-5)
2.14	$\ln\left(1+x+y^2+z^2\right)$	(1,1,1)	2.29	$\frac{x}{y}-\frac{y}{z}-\frac{x}{z}$	(2,2,2)
2.15	$x^2+2y^2-4z^2-5$	(1,2,1)	2.30	e^{x-yz}	(1,0,3)

3 тапсырма. Берілген $u(x,y,z)$ функциясы дербес туындылы дифференциалдық тендеудің шешімі болатының көрсетіңіз.

№	Теңдеу	$u(x,y,z)$
3.1	$x^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$	$u=\frac{y}{x}$
3.2	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=3\left(x^3-y^3\right)$	$u=\ln\frac{x}{y}+x^3-y^3$
3.3	$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$	$u=\ln\left(x^2(y+1)^2\right)$
3.4	$y\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=(1+y\ln x)\frac{\partial u}{\partial x}$	$u=x^y$
3.5	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u$	$u=\frac{xy}{x+y}$
3.6	$x^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$	$u=e^{xy}$

3.7	$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	$u = \sin^2(x - ay)$
3.8	$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	$u = y\sqrt{\frac{y}{x}}$
3.9	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$	$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
3.10	$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	$u = e^{-\cos(x+ay)}$
3.11	$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$	$u = (x-y)(y-z)(z-x)$
3.12	$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$	$u = x \ln \frac{y}{x}$
3.13	$y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = o$	$u = \ln(x^2 + y^2)$
3.14	$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - xy\frac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0$	$u = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$
3.15	$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xyu = 0$	$u = e^{xy}$
3.16	$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$	$u = arctg\frac{x+y}{1-xy}$
3.17	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	$u = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$
3.18	$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$	$u = \frac{2x + 3y}{x^2 + y^2}$
3.19	$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1$	$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
3.20	$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$	$u = (x^2 + y^2)tg\frac{x}{y}$

3.21	$9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$	$u=e^{-(x+3y)}\sin(x+3y)$
3.22	$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$	$u=xe^{y/x}$
3.23	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$	$u=arctg\frac{y}{x}$
3.24	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$	$u=arctg\frac{y}{x}$
3.25	$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$	$u=\ln\left(x+e^{-y}\right)$
3.26	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$	$u=\arcsin\frac{x}{x+y}$
3.27	$\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{y^2}$	$u=\frac{y}{\left(x^2-y^2\right)^5}$
3.28	$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x+y}{x-y}$	$u=\frac{x^2+y^2}{x-y}$
3.29	$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{u}$	$u=\sqrt{2xy+y^2}$
3.30	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$	$u=\ln\left(x^2-y^2\right)$

*4 тапсырма.*Айқын емес түрде берілген $F(x,y,z)=0$ функциясының бірінші ретті туындысын табыңыз.

№	$F(x,y,z)$	№	$F(x,y,z)$
4.1	$xyz+3xy^2-5yz^2$	4.16	$xy^2-z+xyz(z-x)$
4.2	$x^2yz-2xyz^2+3xy^2z$	4.17	$(x+y)z^2+x\left(y^2+z^2\right)$
4.3	$2x^2y^2z-xyz^3+x^2yz^2$	4.18	$x-yz+xyz-xz^2$
4.4	$x^2(y+z)-yz^2+2xyz$	4.19	$x^3y+y^3z+z^3x$
4.5	$(xy-yz)z^2+xy^2z$	4.20	$xy^2+yz^2-zx^2$

4.6	$2xy^2-3xyz+2xz^2$	4.21	$xyz-x^2y-2xy^2$
4.7	$(y+z)xyz-(x+y-z)yz^2$	4.22	$(x-z)y^2+(y-x)z^2$
4.8	$3xyz^2-4xy^2z+x^2y^2$	4.23	$xy^2z+x^2yz+xyz^2$
4.9	$-x^2y+2xyz-3xz^2$	4.24	$(x-yz)x^2-2xyz^2$
4.10	$xyz-z^3+2xy^2$	4.25	$(x+y)z^2+(y+z)x^2$
4.11	$zx(y-x)-2xyz+z^3$	4.26	$(x-yz)z-z(x+y)$
4.12	$x(y^2+z^2)+3xyz-z^3$	4.27	$(x+2y)z^2+3xyz$
4.13	$(y+z)x^2-2xy^2+xyz$	4.28	$x^2yz+y^2xz+z^2xy$
4.14	$xy(z-y)-2x^3+3xy^2$	4.29	$(x-y)x^2+y^2z-2xyz$
4.15	$(x+y)zx^2+2xy^2z-xyz^2$	4.30	$x^3y+y^3z+z^3x$

5 тапсырма. Берілген $t=t_0$ нүктесіндегі $u=u(x,y)$, мұндағы $x=x(t)$, $y=y(t)$ күрделі функцияның $\frac{du}{dx}$ туындысын табыңыз

№	$u=u(x,y),\ x=x(t),\ y=y(t)$
5.1	$u=e^{x-2y},\ x=\sin t,\ y=t^3,\ t_0=0$
5.2	$u=\ln(e^x+e^{-y}),\ x=t^2,\ y=t^3,\ t_0=-1$
5.3	$u=y^x,\ x=\ln(t-1),\ y=e^{t/2},\ t_0=2$
5.4	$u=e^{y-2x+2},\ x=\sin t,\ y=\cos t,\ t_0=\pi/2$
5.5	$u=x^2e^y,\ x=\cos t,\ y=\sin t,\ t_0=\pi$
5.6	$u=\ln(e^x+e^y),\ x=t^2,\ y=t^3,\ t_0=1$
5.7	$u=x^y,\ x=e^t,\ y=\ln t,\ t_0=1$
5.8	$u=e^{y-2x},\ x=\sin t,\ y=t^3,\ t_0=0$
5.9	$u=x^2e^{-y},\ x=\sin t,\ y=\sin^2 t,\ t_0=\pi/2$
5.10	$u=\ln(e^{-x}+e^y),\ x=t^2,\ y=t^3,\ t_0=-1$
5.11	$u=e^{y-2x-1},\ x=\cos t,\ y=\sin t,\ t_0=\pi/2$
5.12	$u=\arcsin(x/y),\ x=\sin t,\ y=\cos t,\ t_0=\pi$

5.13	$u = \arccos\left(\frac{2x}{y}\right),\ x = \sin t,\ y = \cos t,\ t_0 = \pi$
5.14	$u = \frac{x^2}{(y+1)},\ x = 1-2t,\ y = arctgt,\ t_0 = 0$
5.15	$u = x/y,\ x = e^t,\ y = 2-e^{2t},\ t_0 = 0$
5.16	$u = \ln\left(e^{-x} + e^{-2y}\right),\ x = t^2,\ y = t^3/3,\ t_0 = 1$
5.17	$u = \sqrt{x + y^2 + 3},\ x = \ln t,\ y = t^2,\ t_0 = 1$
5.18	$u = \arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right),\ x = \sin t,\ y = \cos t,\ t_0 = \pi$
5.19	$u = y^2/x,\ x = 1-2t,\ y = 1+arctgt,\ t_0 = 0$
5.20	$u = \frac{y}{x} - \frac{x}{y},\ x = \sin t,\ y = \cos t,\ t_0 = \frac{\pi}{4}$
5.21	$u = \sqrt{x^2 + y + 3},\ x = \ln t,\ y = t^2,\ t_0 = 1$
5.22	$u = \arcsin\frac{x}{2y},\ x = \sin t,\ y = \cos t,\ t_0 = \pi$
5.23	$u = \frac{x}{y} - \frac{y}{x},\ x = \sin 2t,\ y = tg^2 t,\ t_0 = \frac{\pi}{4}$
5.24	$u = \sqrt{x + y + 3},\ x = \ln t,\ y = t^2,\ t_0 = 1$
5.25	$u = y/x,\ x = e^t,\ y = 1-e^{2t},\ t_0 = 0$
5.26	$u = \arcsin\left(\frac{2x}{y}\right),\ x = \sin t,\ y = \cos t,\ t_0 = \pi$
5.27	$u = \ln\left(e^{2x} + e^y\right),\ x = t^2,\ y = t^4,\ t_0 = 1$
5.28	$u = arctg(x+y),\ x = t^2 + 2,\ y = 4-t^2,\ t_0 = 1$
5.29	$u = \sqrt{x^2 + y^2 + 3},\ x = \ln t,\ y = t^3,\ t_0 = 1$
5.30	$u = arctg(xy),\ x = t+3,\ y = e^t,\ t_0 = 0$

*6 тапсырма.*Берілген Sкеңістігінің $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктесінен өтетін жанама жазықтығы мен нормалінің теңдеуін жазыңыз.

№	S	$M_0(x_0, y_0, z_0)$.
6.1	$x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0$	$M_0(2, 1,-1)$
6.2	$x^2 + z^2 - 4y^2 = -2xy$	$M_0(-2, 1,2)$
6.3	$x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z = 7$	$M_0(1, 2,1)$
6.4	$x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4x = 8$	$M_0(-1, 1,2)$
6.5	$2x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y = 13$	$M_0(2, 1,-1)$
6.6	$x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0$	$M_0(2, 1,-1)$
6.7	$x^2 + z^2 - 5yz + 3y = 46$	$M_0(1, 2,-3)$
6.8	$x^2 + y^2 - xz - yz = 0$	$M_0(0, 2,2)$
6.9	$x^2 + y^2 + 2zy - z^2 + y - 2z = 2$	$M_0(1, 1,1)$
6.10	$x^2 + y^2 - z^2 - 2zx + 2x = z$	$M_0(1, 1,1)$
6.11	$z = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - y$	$M_0(-1,-1,-1)$
6.12	$z = y^2 - x^2 + 2xy - 3y$	$M_0(1, -1,1)$
6.13	$z = x^2 - y^2 - 2xy - x - 2y$	$M_0(-1, 1,1)$
6.14	$x^2 - 2y^2 + z^2 + xz - 4y = 13$	$M_0(3, 1,2)$
6.15	$4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z = 9$	$M_0(-1, -2,1)$
6.16	$z = x^2 + y^2 - 3xy - x + y + 2$	$M_0(2, 1,0)$
6.17	$2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz = 3$	$M_0(1, 2,1)$
6.18	$x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14$	$M_0(3, 1,4)$
6.19	$x^2 + y^2 - z^2 + xz + 4y = 4$	$M_0(1, 1,2)$
6.20	$x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4x = -5$	$M_0(-2, 1,0)$
6.21	$x^2 + y^2 - xz + yz - 3x = 11$	$M_0(1, 4,-1)$
6.22	$x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xz = 8$	$M_0(0, 2,0)$
6.23	$x^2 - y^2 - 2z^2 - 2y = 0$	$M_0(-1,-1,1)$

6.24	$x^2 + y^2 - 3z^2 + xy = -2z$	$M_0(1,\ 0,1)$
6.25	$2x^2 - y^2 + z^2 - 6x + 2y + 6 = 0$	$M_0(1,-1,1)$
6.26	$x^2 + y^2 - z^2 + 6xy - z = 8$	$M_0(1,\ 1,0)$
6.27	$z = 2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y + 10$	$M_0(-1,\ 1,3)$
6.28	$z = x^2 + y^2 - 4xy + 3x - 15$	$M_0(-1,\ 3,4)$
6.29	$z = x^2 + 2y^2 + 4xy - 5y - 10$	$M_0(-7,\ 1,8)$
6.30	$z = 2x^2 - 3y^2 + xy + 3x + 1$	$M_0(1,-1,2)$

7 тапсырма. Келесі функцияларды экстремумге зерттеңіз.

7.1	$z = xy(12 - x - y)$	7.2	$z = (x-2)^2 + 2y^2 - 10$
7.3	$z = (x-5)^2 + y^2 + 1$	7.4	$z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$
7.5	$z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$	7.6	$z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$
7.7	$z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$	7.8	$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$
7.9	$z = xy - x^2 - y^2 + 9$	7.10	$z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$
7.11	$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$	7.12	$z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$
7.13	$z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$	7.14	$z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$
7.15	$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$	7.16	$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$
7.17	$z = (x-1)^2 + 2y^2$	7.18	$z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$
7.19	$z = x^2 + 3(y+2)^2$	7.20	$z = 2(x+y) - x^2 - y^2$
7.21	$z = xy - 3x^2 - 2y^2$	7.22	$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$
7.23	$z = x^3 + y^3 - 3xy$	7.24	$z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$
7.25	$z = xy(6 - x - y)$	7.26	$z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$
7.27	$z = 6(x-y) - 3x^2 - 3y^2$	7.28	$z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 2$
7.29	$z = 4(x-y) - x^2 - y^2$	7.30	$z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18 + 2$

«Көпайнымалыфункцияныңдифференциалдықесептеулері» есептеу-графикалықжұмыстардыорындауға арналғантапсырмаларға мысалдар.

1 тапсырма. Берілген $z = f(x, y)$ функциясы үшін:

а) бірінші ретті дербес туындыларын табыңыз $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;

ә) екінші ретті дербес туындыларын табыңыз $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

б) $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ теңдігі орындалатынын көрсетіңіз;

в) dz, $d^2 z$ бірінші және екінші ретті дифференциалдарын табыңыз.

Шешуі.

а) берілген функция күрделі функция, сондықтан оның туындысын табу үшін келесі формуланы қолданамыз $z' = \left(arctgu\right)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$. Бірінші ретті x бойынша дербес туындысын табу үшін y айнымалыны тұрақты деп қарастырамыз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \left(arctg \frac{x}{y} \right)' \Bigg|_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)' \Bigg|_x = \frac{y^2}{y^2+x^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Енді y бойынша бірінші ретті дербес туындысын табу үшін x айнымалыны тұрақты деп қарастырамыз:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \left(arctg \frac{x}{y} \right)' \Bigg|_y = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)' \Bigg|_y = \frac{y^2}{y^2+x^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2};$$

ә)екінші ретті $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ дербес туындыларын табайық. Екінші ретті x бойынша $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ дербес туындысын табу үшін табылған бірінші ретті $\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \frac{y}{x^2+y^2}$ дербес туындысын y айнымалыны тұрақты деп қарастырыпx бойынша тағы бір рет дифференциалдаймыз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = \left(\frac{y}{x^2+y^2} \right)'_x = y \cdot \left(\left(x^2+y^2\right)^{-1} \right)'_x =$$

$$= -y \cdot \left(x^2+y^2\right)^{-2} \cdot (x^2+y^2)'_x = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Осы сияқты, yбойынша екінші ретті $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ дербес туындыны табу үшін, біз табылған бірінші реттіубойынша $\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = -\frac{x}{x^2+y^2} \cdot$ туындысынтағы бір ретубойыншадифференциалдаймыз, берілген функциядағы x айнымалыны тұрақты деп алып

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = \left(-\frac{x}{x^2+y^2} \right)' = -x \cdot \left(\left(x^2+y^2 \right)^{-1} \right)'_x =$$

$$= x \cdot \left(x^2+y^2 \right)^{-2} \cdot (x^2+y^2)'_y = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Екінші ретті аралас $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ туындыны табу үшін айнымалы *x* бойынша $\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \frac{y}{x^2+y^2}$ табылған дербес туындысын *x* бойынша тағы бір рет дифференциалдаймыз, мұндағы *x* айнымалыны тұрақты деп қарастырып:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z'_{xy} = \left(\frac{y}{x^2+y^2} \right)' \Bigg|_y = \frac{y'_y \cdot (x^2+y^2) - y \cdot (x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2};$$

б) $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ теңдігін дәлелдейік. Теңдіктін оң жағындағы $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ мәні(ә) пунктінде табылды. Сол сыяқты екінші ретті аралас $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ туындыны табу үшін айнымалы *y* бойынша $\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = -\frac{x}{x^2+y^2}$ табылған дербес туындысын *x* бойынша бір рет дифференциалдаймыз, мұндағы *y* айнымалыны тұрақты деп қарастырамыз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z'_{yx} = \left(-\frac{x}{x^2+y^2} \right)' = -\frac{x'_x \cdot (x^2+y^2) - x \cdot (x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= -\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Сонымен, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. теңдігін дәлелдедік;

в) $z = f(x, y)$ функциясы үшін бірінші *dz*және екінші $d^2 z$ ретті дифференциалдар формулаларын келтірейік:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\ ,\ d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Бұл формулаларда алдын ала (а), (ә) және (б) пунктерінде табылған дербес туындыларды колданамыз:

$$dz=\frac{y}{x^2+y^2}dx-\frac{x}{x^2+y^2}dy;$$

$$d^2z=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dx^2+2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy+\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dy^2.$$

2 тапсырма. $M_0(0;2;1)$нүктесіндегі $u(x,y,z)=\sqrt{4+x^2+y^2-z}$ функциясының градиентін табыңыз.

Шешуі.Градиент - берілгеннүктедееңжылдамөсуфункциясы-ныңбағытынкөрсетеді. $u=f(x,y,z)$функциясыүшін градиент формуласы:

$$gradu=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

M_0 нүктесіндегі берілген $u=f(x,y,z)$ функциясы үшін градиент келесі формула бойынша есептеледі:

$$grad\ u(M_0)=u'_x(M_0)\bar{i}+u'_y(M_0)\bar{j}+u'_z(M_0)\bar{k}\ .$$

$M_0(0;2;1)$нуктесіндегі $u(x,y,z)=\sqrt{4+x^2+y^2-z}$ функциясының бірінші ретті дербес туындыларының мәндерін табайық:

$$u'_x(M_0)=\left(\sqrt{4+x^2+y^2-z}\right)'_x\Big|_{M_0}=\frac{x}{\sqrt{4+x^2+y^2-z}}\Bigg|_{M_0}=\frac{0}{\sqrt{4+0+4-1}}=0;$$

$$u'_y(M_0)=\left(\sqrt{4+x^2+y^2-z}\right)'_y\Big|_{M_0}=\frac{y}{\sqrt{4+x^2+y^2-z}}\Bigg|_{M_0}=\frac{2}{\sqrt{4+0+4-1}}=\frac{2}{\sqrt{7}};$$

$$u'_z(M_0)=\left(\sqrt{4+x^2+y^2-z}\right)'_z\Big|_{M_0}=\frac{-1}{2\sqrt{4+x^2+y^2-z}}\Bigg|_{M_0}=$$

$$=\frac{-1}{2\sqrt{4+0+4-1}}=-\frac{1}{2\sqrt{7}}.$$

Сонымен,

$$gradu(M_0)=\frac{2}{\sqrt{7}}\vec{j}-\frac{1}{2\sqrt{7}}\bar{k}.$$

*3 тапсырма.*Берілген $z(x,y)=\frac{x^2}{2y}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ функция $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3}{y}$ дифференциалдық теңдеудің шешімі болатының тексеріңіз.

Шешуі. Берілген функцияның *x* және *y* бойынша бірінші ретті дербес тындыларын табайық:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{y}+\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2}{2y^2}+\frac{1}{y^2}.$$

Табылғандарды теңдеудің сол жағына койып ықшамдаймыз:

$$x^2\left(\frac{x}{y}+\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}\right)+y^2\left(-\frac{x^2}{2y^2}+\frac{1}{y^2}\right)=\frac{x^3}{y}$$

немесе

$$\frac{x^3}{y}+\frac{x^2}{2}-1-\frac{x^2}{2}+1=\frac{x^3}{y}.$$

Тепе теңдік орындалды. Қорытынды: берілген $z(x,y)=\frac{x^2}{2y}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ функция дербес туындылы дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады.

*4 тапсырма.*Айқын еместүрде берілген $xe^y+ye^x+ze^x=a$ функцияның бірінші ретті $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындыларын табыңыз.

Шешуі. $F(x,y,z)=0$ теңдеу арқылы айқын емес түрде берілген $z=\varphi(x,y)$екі айнымалыдан тәуелдіфункцияның туындылары келесі формулалар бойынша есептеледі, мұндағы $F(x,y,z)$функциясы *x, y,* z бойынша дифференциалданатың функция:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z};\ \frac{\partial F}{\partial z}\neq 0.$$

Есеп шарты бойынша $F(x,y,z)=xe^y+ye^x+ze^x-a$. Дербес туындыларын табайық:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=e^y+ye^x+ze^x;\quad \frac{\partial F}{\partial y}=xe^y+e^x;\quad \frac{\partial F}{\partial z}=e^x.$$

Осыдан,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^y + ye^x + ze^x}{e^x} = -(e^{y-x} + y + z);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xe^y + e^x}{e^x} = -(xe^{y-x} + 1).$$

5 тапсырма. $t = 0$ нүктесіндегі $u = x^2 + y^2 + xy$ күрделі функциясының $\frac{du}{dt}$ туындысын табыңыз, мұндағы $x = \sin t$, $y = e^t$.

Шешуі. $u = u(x, y)$, мұндағы $x = x(t), y = y(t)$, яғни $u = u(x(t), y(t))$ күрделі функциясы үшін туынды келесі формула бойынша есептеледі:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Берілген $u = x^2 + y^2 + xy$ функциясының x және y бойынша дербес туындысын табайық:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^2 + y^2 + xy)'_x = 2x + y; \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 + y^2 + xy)'_y = 2y + x.$$

Берілген $x = \sin t$, $y = e^t$ функциялардың туындыларын табамыз:

$$\frac{dx}{dt} = (\sin t)' = \cos t; \qquad \frac{dy}{dt} = (e^t)' = e^t.$$

Табылғандарды күрделі функцияның формуласына қойып, ықшамдаймыз:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = (2x + y) \cdot \cos t + (2y + x) \cdot e^t =$$

$$= \left| \begin{matrix} x = \sin t \\ y = e^t \end{matrix} \right| = (2\sin t + e^t) \cdot \cos t + (2e^t + \sin t) \cdot e^t =$$

$$= \sin 2t + e^t(\cos t + \sin t) + 2e^{2t}.$$

Енді күрделі функцияның берілген $t = 0$ нүктесіндегі мәнін табайық:

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0} = [\sin 2t + e^t(\cos t + \sin t) + 2e^{2t}]\Big|_{t=0} = 3.$$

6 тапсырма. Берілген $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ кеңістігінің $M_0(3,4,-5)$ нүктесінен өтетін жанама жазықтығы мен нормалінің теңдеуін жазыңыз.

Шешуі. Берілген S кеңістігінің $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінен өтетін нормалінің теңдеуі:

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}}.$$

Берілген S кеңістігінің $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктесінен өтетін жанама жазықтығының теңдеуі:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}(y-y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}(z-z_0)=0.$$

$M_0(3,4,-5)$ нүктесіндегіx,y,z айнымалылары бойынша дербес туындыларын табайық:

$$F'_x(3,4,-5)=(x^2+y^2-z^2)'_x=2x\big|_{M_0}=6;$$

$$F'_y(3,4,-5)=(x^2+y^2-z^2)'_x=2y\big|_{M_0}=8;$$

$$F'_z(3,4,-5)=(x^2+y^2-z^2)'_x=-2z\big|_{M_0}=10.$$

Онда нормаль теңдеуі:

$$\frac{x-3}{6}=\frac{y-4}{8}=\frac{z+5}{10}\text{ ,осыдан}\qquad\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z+5}{5};$$

Жанама жазықтығының теңдеуі:

$$6\cdot(x-3)+8\cdot(y-4)+10\cdot(z+5)=0\text{ осыдан }3x+4y+5z=0.$$

7 тапсырма. $f(x,y)=x^3+y^3+9xy$ функциясын экстремумге зерттеңіз.

Шешуі.Көп айнымалылы функция тек өзінің анықталу облысында экстремумге ие бола алады, яғни бірінші ретті дербес туындылары нөлге тең болатын нүктелерде (экстремумның қажетті шарты).Мұндай нүктелер кризис нүктелер деп аталады. Екі айнымалы $z=f(x,y)$ функциясы үшін кризис нүктелері теңдеулер жүйесінен табылды:

$$\begin{cases}f'_x(x,y)=0;\\ f'_y(x,y)=0.\end{cases}$$

$z=f(x,y)$ функциясы үшін экстремумның жеткілікті шарты екінші ретті анықтауыш арқылы беріледі:

$$\Delta=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=AC-B^2,$$

мұндағы

$$A=f''_{xx}(x_0,y_0);\quad C=f'''_{yy}(x_0,y_0);\quad B=f''_{xy}(x_0,y_0).$$

Айталық

1) Егер $\Delta > 0$, онда $M_0(x_0, y_0)$ нүктесіндеэкстремум бар және $A > 0$ (немесе $C > 0$) болса, онда $M_0(x_0, y_0)$ - минимум нүктесі, ал егер $A < 0$ (немесе $C < 0$) болса, онда $M_0(x_0, y_0)$ - максимум нүктесі.

2) Егер $\Delta < 0$ болса, онда $M_0(x_0, y_0)$ нүктесіндеэкстремум жоқ.

3) Егер $\Delta = 0$ болса, онда қосымша зерттеулер қажет.

Бірінші және екінші дербес туындыларды табайық:

$$f'_x(x, y) = (x^3 + y^3 + 9xy)'_x = 3x^2 + 9y;$$
$$f'_y(x, y) = (x^3 + y^3 + 9xy)'_y = 3y^2 + 9x.$$

Енді дербес туындыларды нөлге теңістіріп кризис нүктелерінің координаталарын табайық:

$$\begin{cases} 3x^2 + 9y = 0 \\ 3y^2 + 9x = 0 \end{cases} \text{немесе} \begin{cases} x^2 + 3y = 0 \\ y^2 + 3x = 0 \end{cases}.$$

Жүйенін бірінші теңдеуінен $y = -\frac{1}{3}x^2$ табамызда, екінші теңдеуге койып келесі теңдеуді аламыз:

$$\left(-\frac{1}{3}x^2\right)^2 + 3x = 0,$$

осыдан $x^4 + 27x = 0$ немесе $x(x^3 + 27) = 0$

Сонымен, $x_1 = 0,\ x_2 = -3$, осыдан табамыз $y_1 = 0,\ y_2 = -3.$ Екі кризис нүктелер координаталары анықталды: $M_1(0;0)$ және $M_2(-3;-3)$. Ал $x^3 + 27 = (x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0$ теңдеуінің комплекс түбірлері ескерілмейді.

Екінші ретті дербес туындылардың $M_1(0;0)$ нүктесіндегі сан мәндері:

$$A_1 = f''_{xx}(0,0) = 0;\quad C_1 = f''_{yy}(0,0) = 0;\quad B_1 = f''_{xy}(0,0) = 9,$$

сонда $\Delta_1 = 0 \cdot 0 - 9^2 = -81 < 0$, яғни $M_1(0;0)$ нүктесінде экстремум жоқ.

Екінші ретті дербес туындылардың $M_2(-3;-3)$ нүктесіндегі сан мәндері:

$$A_2 = f''_{xx}(-3,-3) = 6 \cdot (-3) = -18;\ C_2 = f''_{yy}(-3,-3) = -18;\ B_2 = f''_{xy}(-3,-3) = 9,$$

онда $\Delta_2 = (-18) \cdot (-18) - 9^2 = 243 > 0$, яғни $M_2(-3;-3)$ нүктесінде экстремум бар және $A_2 = -18 < 0$ болғандықтан $M_2(-3;-3)$ нүктесі - максимум нүктесі, сонымен қатар $\max f(x, y) = f(-3;-3) = 27.$

1.2 Көп айнымалы функцияның интегралдық есептеулері

Теориялық сұрақтар.

1. Қос интеграл, оның негізгі қасиеттері.
2. Қос интегралды декарт координаталар жүйесінде есептеу.
3. Қос интегралды поляр координаталар жүйесінде есептеу.
4. Қос интегралды геометрияда қолдану: жазық облыстың ауданы, көлем.
5. Қос интегралдың механикалық қолданулары:пластинка салмағы, статикалық моменттері, салмақ центрі.
6. Үштік интеграл, оның негізгі қасиеттері.
7. Якобиан. Қос және үштікинтегралдарда айнымалыларды алмастыру.
8. Үштік интегралды декарт координаталар жүйесінде есептеу.
9. Үштік интегралды сфералық координаталар жүйесінде есептеу.
10. Үштік интегралдыңқолданулары: дене салмағы, дененің статикалық моменттері, дененің инерция моменттері.

«*Көпайнымалыфункцияныңинтегралдықесептеулері» есептеу-графикалықжұмыстардыорындауға арналғантапсырмаларға мысалдар.*

*8 тапсырма.*Интегралдау ретін өзгертіңіз.

8.1	$\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)dx$	8.16	$\int_{0}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{0} f(x,y)dx$
8.2	$\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx$	8.17	$\int_{1}^{e} dx \int_{\ln x}^{1} f(x,y)dy$
8.3	$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} f(x,y)dy$	8.18	$\int_{0}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2-1}^{1} f(x,y)dy$
8.4	$\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx$	8.19	$\int_{1}^{e} dy \int_{\ln y}^{1} f(x,y)dx$
8.5	$\int_{-1}^{0} dx \int_{\sqrt[3]{x}}^{0} f(x,y)dy$	8.20	$\int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy$
8.6	$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-2-y}^{0} f(x,y)dx$	8.21	$\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} f(x,y)dx$

8.7	$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy$	8.22	$\int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$
8.8	$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx$	8.23	$\int_0^1 dx \int_0^{x^3} f(x,y)dy$
8.9	$\int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$	8.24	$\int_1^2 dx \int_{-\sqrt{2-x}}^{0} f(x,y)dy$
8.10	$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{0} f(x,y)dy$	8.25	$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$
8.11	$\int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$	8.26	$\int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f(x,y)dy$
8.12	$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{0} f(x,y)dy$	8.27	$\int_{-1}^0 dy \int_y^0 f(x,y)dx$
8.13	$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy$	8.28	$\int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f(x,y)dx$
8.14	$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx$	8.29	$\int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^0 f(x,y)dy$
8.15	$\int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy$	8.30	$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-2-y}^{0} f(x,y)dx$

*9 тапсырма.*Интегралдау шектерін анықтап, қос интеграл арқылы ауданды есертеңіз, мұндағы интегралдау D облысы берілген қисықтарымен шектелген.

9.1	$D:\ y=\frac{1}{2}x+2,\ y=0, x=-3, x=2$	9.16	$D: x=2-y-y^2,\ x=2$
9.2	$D: y=4-x^2,\ y=0$	9.17	$D: y=1-x^2,\ y\geq 0$
9.3	$D: y=x^2-1,\ y=3$	9.18	$D: x=y^2,\ x=1$
9.4	$D:\ y=\frac{x^2}{2},\ y=0$	9.19	$D: y=5x,\ y=x,\ x=3$

9.5	$D: y = x,\ y = 0, x = 1$	9.20	$D: y = 2 - x,\ y = x, x \geq 0$
9.6	$D: y^2 = 1 - x,\ x \geq 0$	9.21	$D: y = x^2,\ x = 1,\ x = 2$
9.7	$D: y = x^2 - 3x,\ y = x$	9.22	$D: y = 4 - x^2,\ y = 3x, x \geq 0, y \geq 0$
9.8	$D: y = 2 - x^2,\ y^3 = x^2$	9.23	$D: y^2 = 4x,\ x = 2$
9.9	$D: x = 2 - y^2,\ x = 0$	9.24	$D: y = x^2 - 6x + 5,\ y = 0$
9.10	$D: y = x^3,\ y = 3x$	9.25	$D: y = x^2 + 2,\ x = 3, x \geq 0, y \geq 0$
9.11	$D: y = x^2, y = x,\ x = -\frac{1}{2}$	9.26	$D: y = -x,\ y = 2x - x^2$
9.12	$D: y^2 = x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 4$	9.27	$D: y = -x^2 + 4,\ y = 0$
9.13	$D: y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3,\ y = 0$	9.28	$D: y = 4x,\ x = 1,\ x = 9$
9.14	$D: y = \frac{1}{4}x^3,\ y - x = 0$	9.29	$D: y = x^2,\ y = 2x + 8$
9.15	$D: y = 3 - 2x - x^2,\ y = 1 - x$	9.30	$D: y = x^2,\ x = -1,\ x = 2$

*10 тапсырма.*Қос интегралды есептеңіз.

10.1	$\iint\limits_D \left(x + 3\sqrt{y}\right) dxdy,$ $D: -2 \leq x \leq 0,\ 0 \leq y \leq 1$	10.16	$\iint\limits_D \left(x + y\right)^2 dxdy,$ $D: -1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1$
10.2	$\iint\limits_D \left(2x + 1\right)\sqrt{y}\, dxdy,$ $D: -2 \leq x \leq 0,\ 0 \leq y \leq 1$	10.17	$\iint\limits_D \left(xy^2 + x^3\right) dxdy,$ $D: 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0$
10.3	$\iint\limits_D \left(x + 2\right) y^2 dxdy,$ $D: -3 \leq x \leq -1,\ 0 \leq y \leq 2$	10.18	$\iint\limits_D \left(y + 1\right)\sqrt{x}\, dxdy,$ $D: 0 \leq x \leq 4,\ -1 \leq y \leq 2$
10.4	$\iint\limits_D y\left(1 - 3x\right) dxdy,$ $D: -1/3 \leq x \leq 0,\ 0 \leq y \leq 1$	10.19	$\iint\limits_D \left(x^3 - 2\right)\sqrt{y}\, dxdy,$ $D: 0 \leq x \leq 1,\ \ 4 \leq y \leq 9$
10.5	$\iint\limits_D y^3\left(5 + x\right) dxdy,$ $D: -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$	10.20	$\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy,$ $D: 0 \leq x \leq 1,\ \ -1 \leq y \leq 0$
10.6	$\iint\limits_D \left(1 + x\right)\sqrt{y}\, dxdy,$	10.21	$\iint\limits_D x^3\left(1 + 2y\right) dxdy,$

	$D: 2 \le x \le 3,\ \ 0 \le y \le 1$		$D: -1 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 2$
10.7	$\iint\limits_D (3x+y)\,dxdy,$ $D: 0 \le x \le 1,\ \ -1 \le y \le 1$	10.22	$\iint\limits_D \left(2\sqrt{x}\cdot y+1\right)dxdy,$ $D: 0 \le x \le 1,\ \ -1 \le y \le 1$
10.8	$\iint\limits_D (2-3y)\sqrt[3]{x}\,dxdy,$ $D: 0 \le x \le 1,\ \ -1 \le y \le 0$	10.23	$\iint\limits_D \left(x^2y+y^2\right)dxdy,$ $D: -2 \le x \le 1,\ \ -1 \le y \le 1$
10.9	$\iint\limits_D \left(1-2\sqrt{x}\right)y\,dxdy,$ $D: 0 \le x \le 9,\ \ -2 \le y \le 2$	10.24	$\iint\limits_D (x+2)^2\ y\,dxdy,$ $D: -2 \le x \le -1,\ \ 0 \le y \le 2$
10.10	$\iint\limits_D (1-2y)\sqrt{x}\,dxdy,$ $D: 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1/2$	10.25	$\iint\limits_D (2-x)\sqrt{y}\,dxdy,$ $D: 1 \le x \le 2,\ \ 0 \le y \le 4$
10.11	$\iint\limits_D \left(1+y^2x\right)dxdy,$ $D: -1 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 2$	10.26	$\iint\limits_D \left(x+3\sqrt{y}\right)dxdy,$ $D: -1 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1$
10.12	$\iint\limits_D \left(\sqrt{x}+3xy\right)dxdy,$ $D: 0 \le x \le 1,\ \ -1 \le y \le 2$	10.27	$\iint\limits_D (x+2y)\,dxdy,$ $D: -1 \le x \le 1,\ \ -1 \le y \le 1$
10.13	$\iint\limits_D \left(xy^2+1\right)dxdy,$ $D: -2 \le x \le 2,\ \ 0 \le y \le 2$	10.28	$\iint\limits_D \left(1+3\sqrt{x}\right)y\,dxdy,$ $D: 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1$
10.14	$\iint\limits_D (2x-5)^2\ y\,dxdy,$ $D: -2 \le x \le 1,\ \ -3 \le y \le 3$	10.29	$\iint\limits_D (1+3x)\sqrt{y}dxdy,$ $D: 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1/3$
10.15	$\iint\limits_D \left(5+x^2\right)\sqrt{y}\,dxdy,$ $D: 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1$	10.30	$\iint\limits_D (1-2y)\sqrt{x}\,dxdy,$ $D: 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1/2$

*11 тапсырма.*Поляр жүйесіне көшіп қос интегралды есептеңіз.

11.1	$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy,$ $D: x^2+y^2=2$	11.16	$\iint\limits_D \left(x^2+2y^2\right)dxdy,$ $D: x^2+y^2=9$
11.2	$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+16}\ \ dxdy,$	11.17	$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\ \ dxdy,$

	$D: x^2+y^2=9$		$D: x^2+y^2=4$
11.3	$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dxdy,$ $D: x^2+y^2=1$	11.18	$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\;\,dxdy,$ $D: x^2+y^2=3$
11.4	$\iint\limits_D \sin\left(x^2+y^2\right)dxdy,$ $D: x^2+y^2=\pi/2$	11.19	$\iint\limits_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy,$ $D: 1\le x^2+y^2\le 4$
11.5	$\iint\limits_D e^{3x^2+3y^2}\,dxdy,$ $D: x^2+y^2=5$	11.20	$\iint\limits_D \cos\left(x^2+y^2\right)dxdy,$ $D: x^2+y^2=\pi/2$
11.6	$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy,$ $D: x^2+y^2=5$	11.21	$\iint\limits_D \left(2x^2+y^2\right)dxdy,$ $D: x^2+y^2=2, x\ge 0, y\ge 0$
11.7	$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+5}\;\,dxdy,$ $D: 4\le x^2+y^2\le 11$	11.22	$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2-16}\;\,dxdy,$ $D: x^2+y^2=20, x\ge 0, y\ge 0$
11.8	$\iint\limits_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,$ $D: 1\le x^2+y^2\le 4$	11.23	$\iint\limits_D \sin\left(x^2+y^2\right)dxdy,$ $D: x^2+y^2=\pi/2$
11.9	$\iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,$ $D: 1\le x^2+y^2\le 4$	11.24	$\iint\limits_D y\cos\left(x^2+y^2\right)dxdy,$ $D: x^2+y^2=5$
11.10	$\iint\limits_D x\,\sqrt{x^2+y^2}\;\,dxdy,$ $D: x^2+y^2=16$	11.25	$\iint\limits_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy,$ $D: 1\le x^2+y^2\le 4$
11.11	$\iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,$ $D: 1\le x^2+y^2\le 9, x\ge 0, y\ge 0$	11.26	$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dxdy,$ $D: x^2+y^2=3$

11.12	$\iint\limits_D \left(2x^2+3y^2\right)dxdy,$ $D: x^2+y^2=1$	11.27	$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+4}\ dxdy,$ $D: x^2+y^2=5$
11.13	$\iint\limits_D y\sqrt{x^2+y^2}\ dxdy,$ $D: x^2+y^2=9$	11.28	$\iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy,$ $D: x^2+y^2=1, x\ge 0, y\ge 0$
11.14	$\iint\limits_D x\cdot\sqrt[4]{x^2+y^2}\,dxdy,$ $D: x^2+y^2=25$	11.29	$\iint\limits_D \left(2x^2+3y^2\right)dxdy,$ $D: x^2+y^2=3, x\ge 0, y\ge 0$
11.15	$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\ dxdy,$ $D: x^2+y^2=7,\ x\ge 0, y\ge 0$	11.30	$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\ dxdy,$ $D: x^2+y^2=4$

12 тапсырма. Үштік интегралды есептеңіз, мұндағы V облысы берілген жазықтықтарымен шектелген.

12.1 $\iiint\limits_V \left(x^2+2y^2-z\right)dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 3,\ -1\le z\le 2$	12.2 $\iiint\limits_V x^2yzdxdydz,$ $V: -1\le x\le 2,\ 0\le y\le 2,\ 2\le z\le 3$
12.3 $\iiint\limits_V \left(2x^2+3y+z\right)dxdydz,$ $V: 2\le x\le 3,\ -1\le y\le 2,\ 0\le z\le 4$	12.4 $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 3,\ -1\le y\le 2,\ 0\le z\le 2$
12.5 $\iiint\limits_V x^2y^2zdxdydz;$ $V: -1\le x\le 3,\ 0\le y\le 2,\ -2\le z\le 5$	12.6 $\iiint\limits_V \left(x+y+z\right)dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 3,\ -1\le y\le 0,\ 1\le z\le 2$
12.7 $\iiint\limits_V \left(2x-y^2-z\right)dxdydz;$ $V: 1\le x\le 5,\ 0\le y\le 2,\ -1\le z\le 0$	12.8 $\iiint\limits_V 2xy^2zdxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 3,\ -2\le y\le 0,\ 1\le z\le 2$
12.9 $\iiint\limits_V 5xyz^2dxdydz;$ $V: -1\le x\le 0,\ 2\le y\le 3,\ 1\le z\le 2$	12.10 $\iiint\limits_V \left(x^2+2y^2-z\right)dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 3,\ -1\le z\le 2$

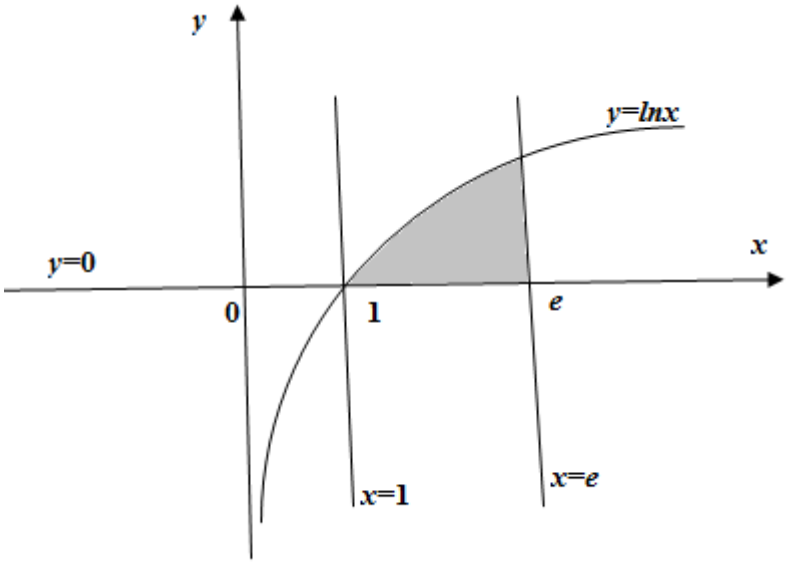
12.11 $\iiint\limits_V (x+2yz)\,dxdydz;$ $V:\ -2\le x\le 0,\ \ 0\le y\le 1,\ \ 0\le z\le 2$	12.12 $\iiint\limits_V (x+yz^2)\,dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 2,\ \ -1\le z\le 3$
12.13 $\iiint\limits_V (xy+3z)\,dxdydz;$ $V:\ -1\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1,\ \ 1\le z\le 2$	12.14 $\iiint\limits_V (xy-z^2)\,dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 2,\ \ 0\le y\le 1,\ \ -1\le z\le 3$
12.15 $\iiint\limits_V (x^3+yz)\,dxdydz;$ $V:\ -1\le x\le 2,\ \ 0\le y\le 1,\ \ 0\le z\le 1$	12.16 $\iiint\limits_V (x^3+y^2-z)\,dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 2,\ \ 1\le y\le 0,\ \ 0\le z\le 1$
12.17 $\iiint\limits_V (2x^2+y-z^3)\,dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 1,\ \ -2\le y\le 1,\ \ 0\le z\le 1$	12.18 $\iiint\limits_V x^2yz^2\,dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 2,\ \ 1\le y\le 2,\ \ -1\le z\le 0$
12.19 $\iiint\limits_V (x+y-z)\,dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 4,\ \ 1\le y\le 3,\ \ -1\le z\le 5$	12.20 $\iiint\limits_V (x+2y+3z^2)\,dxdydz;$ $V:\ -1\le x\le 2,\ \ 0\le y\le 1,\ \ 1\le z\le 2$
12.21 $\iiint\limits_V (3x^2+2y+z)\,dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1,\ \ -1\le z\le 3$	12.22 $\iiint\limits_V (xy-z^3)\,dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 1,\ \ -1\le y\le 2,\ \ 0\le z\le 3$
12.23 $\iiint\limits_V x^3yz\,dxdydz;$ $V:\ 1\le x\le 2,\ \ 1\le y\le 3,\ \ 0\le z\le 1$	12.24 $\iiint\limits_V xy^2z\,dxdydz;$ $V:\ -2\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 3,\ \ 0\le z\le 3$
12.25 $\iiint\limits_V xyz^2\,dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 2,\ \ -1\le y\le 0,\ \ 0\le z\le 4$	12.26 $\iiint\limits_V (x+yz)\,dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 1,\ \ -1\le y\le 4,\ \ 0\le z\le 2$
12.27	12.28

$\iiint\limits_V \left(x+y^2-z^2\right)dxdydz;$ $V:\ -2\le x\le 0,\ 1\le y\le 2,\ 0\le z\le 5$	$\iiint\limits_V \left(x+y+z^2\right)dxdydz;$ $V:\ -1\le x\le 0,\ 0\le y\le 1,\ 2\le z\le 3$
12.29 $\iiint\limits_V \left(x+y^2-2z\right)dxdydz;$ $V:1\le x\le 2,\ -2\le y\le 3,\ 0\le z\le 1$	12.30 $\iiint\limits_V \left(x-y-z\right)dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 1,\ -2\le z\le 1$

«Көпайнымалы функцияның интегралдық есептеулері» есептеу-сызба *жұмыстарды орындауға арналған тарсырмаларға мысалдар*.

8 тапсырма. $\int\limits_1^e dx \int\limits_0^{\ln x} f(x,y)dy$ қос интегралдың ретін өзгертіңіз.

Шешуі. $D=\{1\le x\le e,\ 0\le y\le \ln x\}$ интегралдау облысы келесі қисықтармен шектелген $x=1;\ x=e;\ y=0;\ y=\ln x$ (1 сурет).Ішкі интеграл *y* бойынша берілген, сондықтан берілген облысты анықтау үшін штрихтерді жоғарыдан төменге және *Oy* осине параллель жүргіземіз.



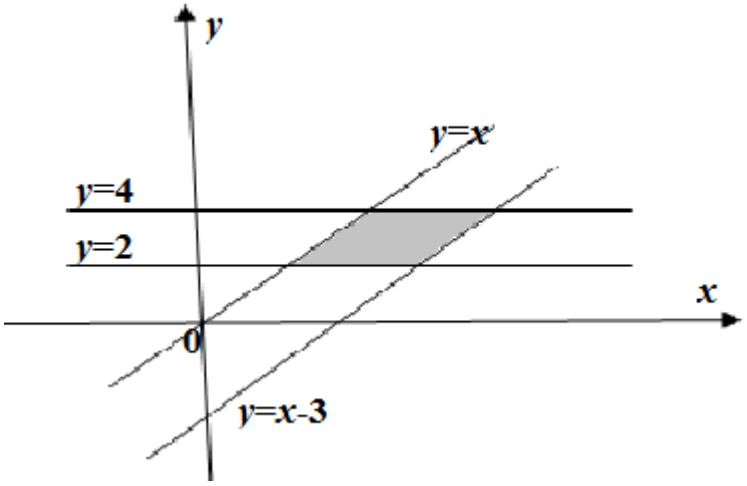
1 сурет

Интегралдау ретін өзгертейік: жаңа интегралдың ішкі интегралы *x* айнымалы бойынша болғандықтан, енді сызбада штрихтерді оңнан солға қарай *Ox* осине параллельжүргіземіз.Штрихтер басталуы жоғарғы, ал аяқталуы интегралдың төменгі шектерін анықтайды.Берілген *D* облысты D_1 облыс деп қарастырамыз: $x=e^y;\ x=e;\ \ y=0;\ y=1.$ Онда

$$\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x,y)dx.$$

9 тапсырма. $y = x;\ y = x-3;\ y = 2;\ y = 4$ қисықтарымен шектелген параллелограмның ауданың қос интеграл арқылы есептеңіз.

Шешуі. Параллелограмның ауданың қос интеграл арқылы есептеу үшін сызбасын салайық (2 сурет).



2 сурет

Параллелограмм түрі қайталану интегралының ішкі интегралы x айнымалы бойыншаны көздейді, сондықтан берілген сызықтардан келесі облыс, яғни интегралдау шектерін аламыз $y = 2;\ y = 4;\ x = y;\ x = y + 3.$ Сонда

$$S = \iint_D dxdy = \int_2^4 dy \int_y^{y+3} dx = \int_2^4 x\Big|_y^{y+3} dx = \int_2^4 (y+3-y)dy = 3\int_2^4 dx = 6.$$

*10 тапсырма.*БерілгенD облыс бойынша қос интегралды есептеңіз

$$\iint_D (x^2 + y)dxdy,\ D = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\},$$

Шешуі. Берілген D облысы тікбұрыш, сондықтан интегралдау ретін таңдау маңызды емес.

$$\iint_D (x^2+y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^2 (x^2+y)dy = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^2 dx =$$

$$= \int_0^1 (2x^2+2)dx = \left(\frac{2x^3}{3} + 2x\right)\Big|_0^1 = \frac{8}{3}.$$

11 тапсырма. Поляр координаталар жүйесіне көшу арқылы қос интегралды есептеңіз

$$\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,\ D=\left\{x^2+y^2=\frac{\pi^2}{9},\ x^2+y^2=\pi^2\right\}.$$

Шешуі. Декарттық жүйесінен поляр координаталар жүйесіне көшу алмастыруларын қолданамыз $x=\rho\cos\varphi;\quad y=\rho\sin\varphi$.Сонда

$$\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy=\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}}\cdot\rho d\rho d\varphi=$$

$$=\iint\limits_D \frac{\sin\rho}{\rho}\cdot\rho d\rho d\varphi=\iint\limits_D \sin\rho d\rho d\varphi=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_{\pi/3}^{\pi}\sin\rho d\rho=$$

$$=\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot(-\cos\rho)\Big|_{\pi/3}^{\pi}=3\pi.$$

*12 тапсырма.V*облысымен анықталған үштік интегралды есептеңіз.

$$\iiint\limits_V (2xy+z)dxdydz,\ \ V=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2,\ 0\le z\le 3\}.$$

Шешуі. *V* облысы дұрыс параллелепипед, сондықтан шектерді ретімен орналастырамыз:

$$\iiint\limits_V (2xy+z)dxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^3 (2xy+z)dz=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2\left(2xyz+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2\left(6xy+\frac{9}{2}\right)dy=\int\limits_0^1\left(3xy^2+\frac{9}{2}y\right)\Bigg|_0^2 dx=$$

$$=\int\limits_0^1 (12x+9)dx=(6x^2+9x)\Big|_0^1=15.$$

Әдебиеттер тізімі

1 Қасеинов К.А.Математика канондары. - Алматы. 2003.

2 Индивидуальные задания по высшей математике: Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ч. 2: Учебное пособие /под редакцией А.П. Рябушко. – Мн.: Вышейшая школа, 2007. - 396 с.

3 Индивидуальные задания по высшей математике: Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. Ч. 3: Учебное пособие /под ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Вышейша яшкола, 2007.- 351 с.

4 Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1,2 части. – М.: Рольф, 2007. – 288 с.

5 Искакова А.Қ., Есботаева Э.С. Математика. 5В070200 – «Автоматтандыру және басқару» мамандығының студенттері үшін дәрістер жинағы.–Алматы: АЭжБУ, 2017. -71б.

Мазмұны

Кіріспе……..……..... 3
1 Есептеу – сызба жұмысы № 1..... 3
1.1 Көп айнымалы функцияның дифференциалдық есептеулері.....
1.2 Көп айнымалы функцияның интегралдық есептеулері..... 19
Әдебиеттер тізімі…….....……...…... 29

2019 ж. Жиынтық жоспары, реті 171

Искакова Ақжолтай Құрмантаевна
Есботаева Эльмира Султанмуратовна

МАТЕМАТИКА 2

5В070200 – Автоматтандыру және басқару
мамандығының студенттеріне арналған есептеу-сызба жұмыстарды
орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар. 2-ші бөлімі

Редактор Ж.Н.Изтелеуова

Стандарттау бойынша маман Г.И.Мухаметсариева

Басуға қол қойылды _____ Пішіні 60х84 1/16
Таралымы 25 дана Баспаханалық қағаз №1
Көлемі 1,81 б.т. Тапсырыс_____ Бағасы 900 тг.

«Алматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірмелі-көбейткіш бюросы
050013, Алматы, Байтұрсынұлы көшесі, 126/1