Коммерциялық емес акционерлік қоғам

АЛМАТЫ ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС УНИВЕРСИТЕТІ

Математика және математикалық үлгілеу кафедрасы

МАТЕМАТИКА 2

5В0702000 - Автоматтандыру және басқару
мамандығы студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындау
бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар
1 бөлім

Алматы 2019

ҚҰРАСТЫРУШЫ: Масанова А.Ж. Математика 2. 5В0702000 - Автоматтандыру және басқару мамандығы студенттеріне арналған есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар. - Алматы: АЭжБУ, 2019. - 27 б.

5В0702000 - Автоматтандыру және басқару мамандығы студенттеріне арналған есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар «Математика 2» пәнінің «Сызықтық алгебра» және «Аналитикалық геометрия» тараулары бойынша №1 есептеу-сызба жұмыстарына тұрады.

Бағдарламаның теориялық сұрақтары енгізілген. Типтік нұсқаның шешімі келтірілген.

Пікір беруші: к.ф.-м.н. Искакова А.К.

«Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2018 ж. жоспары бойынша басылды

Кіріспе

Есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар «Математика 2» пәнінің «Векторлық және сызықтық алгебра» және «Аналитикалық геометрия» бөлімдерінен тұрады.

Теориялық сұрақтар, типтік варианттың тапсырмалары мен шешулері келтірілген. Есептерді «MATHCAD» жүйесінде есептеуге болады.

Әр студенттің вариантының нөмірі топтың тізімі бойынша анықталады. Есептеу-сызба жұмысы оқушы дәптеріне анық орындалуы керек.

№1 есептеу-сызба жұмысы. Векторлық және сызықтық алгебра. Аналитикалық геометрия

Теориялық сұрақтар.

1. Анықтауыштар, олардың қасиеттері және есептелуі.
2. Матрица, олардың қасиеттері және операциялар қолдану.
3. Векторлар және оларға сызықтық амалдар қолдану. Векторлардың сызықтық тәуелділігі. Коллинеар, компланар және ортогональ векторлар.
4. Векторлардың скаляр, векторлық және аралас көбейтіндісі, олардың қолданыстары.
5. Жазықтықтың теңдеуі.
6. Жазықтықтағы және кеңістіктегі түзудің теңдеуі.
7. Екі түзу арасындағы, екі жазықтық арасындағы және жазықтық пен түзу арасындағы бұрыштар.
8. Нүктеден түзуге дейінгі, нүктеден жазықтыққа дейінгі ара қашықтық.
9. Екінші ретті қисықтар (шеңбер, эллипс, гипербола, парабола), олардың қасиеттері, канондық теңдеулері.
10. Екінші ретті беттер.
11. Екінші ретті қисықтың жалпы теңдеуін канондық түрге келтіру.
12. Сызықтық теңдеулер жүйесін шешу тәсілдері (Крамер әдісі, матрицалық әдіс).

Есептік тапсырмалар .

1 - тапсырма. Үшінші ретті анықтауыш берілген:

а) a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} - элементерінің M_{ij} минорын, A_{ij} алгебралық толықтауышын табыңыз;

ә) анықтауышты j-ші бағанның элементтеріне жіктеңіз және есептеңіз;

б) анықтауышты үшбұрыштар (яғни Сарриус) ережесі бойынша есептеңіз.

1.1 $\begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}, i=3, j=2$	1.2 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, i=1, j=3$	1.3 $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, i=2, j=3$
1.4 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}, i=1, j=1$	1.5 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}, i=1, j=3$	1.6 $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, i=2, j=3$
1.7 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix}, i=2, j=1$	1.8 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}, i=3, j=1$	1.9 $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix}, i=2, j=2$
1.10 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}, i=3, j=2$	1.11 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}, i=1, j=3$	1.12 $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}, i=3, j=2$
1.13 $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \\ -4 & 5 & 4 \end{vmatrix}, i=3, j=3$	1.14 $\begin{vmatrix} 5 & 6 & -4 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 9 \end{vmatrix}, i=2, j=3$	1.15 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}, i=3, j=1$
1.16 $\begin{vmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}, i=2, j=2$	1.17 $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, i=1, j=2$	1.18 $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}, i=2, j=3$
1.19 $\begin{vmatrix} 9 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}, i=3, j=1$	1.20 $\begin{vmatrix} -6 & 10 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -8 \end{vmatrix}, i=1, j=3$	1.21 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}, i=1, j=1$

1.22 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix}, i=2, j=1$	1.23 $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 9 \\ 1 & -9 & 7 \\ -3 & 1 & 12 \end{vmatrix}, i=2, j=3$	1.24 $\begin{vmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 10 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 6 \end{vmatrix}, i=1, j=2$
1.25 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, i=3, j=1$	1.26 $\begin{vmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}, i=1, j=2$	1.27 $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -11 \end{vmatrix}, i=3, j=2$
1.28 $\begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 8 \\ -7 & 4 & -1 \end{vmatrix}, i=3, j=1$	1.29 $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 9 & -2 & 9 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix}, i=2, j=1$	1.30 $\begin{vmatrix} 2 & 13 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}, i=1, j=3$

2 - тапсырма. A, B, C матрицалары берілген. Табу керек:

а) AB, BC, BA матрицаларын, егер ондай көбейтінді мүмкін болса. Егер бұл көбейтінділер мүмкін болмаса, себебін түсіндіріп жазыңыз;

ә) A^T, B^T, C^T матрицаларын;

б) A матрицасына кері A^{-1} матрицасын. Нәтижені тексеріңіз.

2.1	$A=\begin{pmatrix} 9 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 1 \\ -3 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$
2.2	$A=\begin{pmatrix} 12 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -4 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
2.3	$A=\begin{pmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -8 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -7 & 1 & 10 \end{pmatrix}$
2.4	$A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -4 \\ 1 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -9 & 1 \\ 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
2.5	$A=\begin{pmatrix} 6 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 6 & -8 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.6	$A=\begin{pmatrix}2&2&2\\-1&4&11\\-2&1&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}7\\-4\\2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&9&-2\\5&1&4\end{pmatrix}$
2.7	$A=\begin{pmatrix}4&-1&2\\3&2&-8\\2&2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}8&3\\-4&2\\0&1\\2&2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&-2\\4&7\end{pmatrix}$
2.8	$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\4&-8&11\\0&2&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5&-3\\-3&9\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2&0&4&9\\11&1&-8&1\end{pmatrix}$
2.9	$A=\begin{pmatrix}-8&2&0\\4&3&2\\3&1&-5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-6&7\\5&2\\1&-3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&8&0\end{pmatrix}$
2.10	$A=\begin{pmatrix}10&-1&3\\2&1&4\\1&0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}15&0&-7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&4\\9&16\\3&8\end{pmatrix}$
2.11	$A=\begin{pmatrix}14&1&-1\\1&2&-4\\7&1&6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&5&8\\3&6&-7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0\\-5\\4\end{pmatrix}$
2.12	$A=\begin{pmatrix}7&4&-1\\8&1&-11\\1&1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}9\\1\\16\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&10&-2\\-3&3&5\end{pmatrix}$
2.13	$A=\begin{pmatrix}1&7&3\\5&-2&0\\3&-2&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&3\\-5&9\\1&1\\1&4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}6&4\\1&1\end{pmatrix}$
2.14	$A=\begin{pmatrix}7&-2&4\\2&-2&1\\3&-4&-4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&13\\4&-6\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}5&-11&10&0\\-3&2&-2&1\end{pmatrix}$
2.15	$A=\begin{pmatrix}-6&1&6\\3&5&-7\\2&0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&8\\0&2\\3&5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}7&1&-5\end{pmatrix}$
2.16	$A=\begin{pmatrix}4&1&-5\\1&-3&6\\-4&1&8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}7&0&4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&2\\5&6\\1&-9\end{pmatrix}$

2.17	$A=\begin{pmatrix}0&6&7\\8&-5&7\\4&2&6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&1&-8\\1&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}$
2.18	$A=\begin{pmatrix}1&0&9\\10&-3&1\\6&3&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\12\\-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1&3&0\\2&5&-5\end{pmatrix}$
2.19	$A=\begin{pmatrix}-10&1&3\\0&4&5\\-2&1&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\\0&1\\2&8\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&4\\5&2\end{pmatrix}$
2.20	$A=\begin{pmatrix}9&3&-1\\-4&1&2\\1&8&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&1\\-8&2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&-3&1&1\\7&9&10&-12\end{pmatrix}$
2.21	$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&7&3\\-5&2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5&1\\-2&5\\3&4\\-6&2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&7&-1\end{pmatrix}$
2.22	$A=\begin{pmatrix}-3&5&8\\0&1&2\\4&-1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6&-2&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&-3\\4&1\\2&-4\end{pmatrix}$
2.23	$A=\begin{pmatrix}5&3&1\\4&-2&0\\1&-4&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&-4&1\\2&6&-3\end{pmatrix},\ =\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$
2.24	$A=\begin{pmatrix}4&4&-4\\3&1&2\\3&5&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2&1&3\\4&-3&0\end{pmatrix}$
2.25	$A=\begin{pmatrix}2&-2&2\\1&1&5\\3&4&6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&-7\\5&2\\3&1\\0&2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&-3\\4&1\end{pmatrix}$
2.26	$A=\begin{pmatrix}3&1&7\\5&0&-1\\1&-3&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5&-2\\3&7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&2&3&5\\-4&1&5&1\end{pmatrix}$

2.27	$A=\begin{pmatrix}8 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -6 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-7 & 0 & 4\end{pmatrix}$
2.28	$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3 & 7 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 1 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$
2.29	$A=\begin{pmatrix}-4 & 4 & 5\\ 3 & 1 & -2\\ 3 & -4 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 6\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2\\ -5\\ 3\end{pmatrix}$
2.30	$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 4 & 2 & -2\\ 1 & 7 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}6 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

3 - тапсырма. A, B, C нүктелері және $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары берілген. Табу керек:

а) $\vec{AB}=\bar{a}$ векторын, ол вектордың ұзындығын және AB кесіндісінің ортасын;

ә) $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларының өзара орналасуын анықтау керек (коллинеарлы, перпендикулярлы немесе олардың арасындағы бұрышты табыңыз);

б) $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларынан құрылған параллелограммның ауданын табыныз;

г) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларын компланарлыққа тексеріңіз.

3.1	$A(6,1,3),\ B(-4,5,0),$ $\bar{b}=(2,-5,8),\ \bar{c}=(3,9,1)$	3.2	$A(4,6,-7),\ B(9,7,-7),$ $\bar{b}(6,3,8),\ \bar{c}=(6,3,6)$
3.3	$A(7,4,8),\ B(1,6,-2),$ $\bar{b}(4,4,3),\ \bar{c}=(2,3,9)$	3.4	$A(-9,8,9),\ B(7,3,-2),$ $\bar{b}(7,2,4),\ \bar{c}=(5,4,-1)$
3.5	$A(3,7,4),\ B(4,-10,9),$ $\bar{b}(6,1,7),\ \bar{c}=(4,5,3)$	3.6	$A(4,6,11),\ B(9,3,-4),$ $\bar{b}(3,9,6),\ \bar{c}=(6,4,2)$
3.7	$A(4,-4,5),\ B(4,7,5),$ $\bar{b}(6,1,6),\ \bar{c}=(0,7,3)$	3.8	$A(3,5,-7),\ B(8,6,1),$ $\bar{b}(2,3,6),\ \bar{c}=(5,4,6)$
3.9	$A(3,-3,5),\ B(6,5,-6),$ $\bar{b}(7,8,3),\ \bar{c}=(1,8,9)$	3.10	$A(5,6,-8),\ B(6,8,7),$ $\bar{b}(1,3,4),\ \bar{c}=(3,6,-2)$
3.11	$A(8,-6,2),\ B(10,7,1),$ $\bar{b}(9,1,8),\ \bar{c}=(6,9,1)$	3.12	$A(5,-3,1),\ B(2,5,7),$ $\bar{b}(2,7,6),\ \bar{c}=(7,1,4)$

3.13	$A(7,4,4),\ B(-5,7,-7),$ $\bar{b}(6,1,5),\ \bar{c}=(1,6,7)$	3.14	$A(3,-5,6),\ B(6,3,9),$ $\bar{b}(7,3,4),\ \bar{c}=(3,2,-4)$
3.15	$A(4,2,7),\ B(-1,0,6),$ $\bar{b}(2,1,8),\ \bar{c}=(5,9,9)$	3.16	$A(6,4,0),\ B(1,-7,8),$ $\bar{b}(2,8,6),\ \bar{c}=(0,6,3)$
3.17	$A(0,4,0),\ B(5,3,-4),$ $\bar{b}(8,5,3),\ \bar{c}=(9,6,9)$	3.18	$A(5,3,8),\ B(-2,5,7),$ $\bar{b}(6,2,4),\ \bar{c}=(7,2,-7)$
3.19	$A(-4,4,3),\ B(8,7,-4),$ $\bar{b}(3,3,4),\ \bar{c}=(5,3,6)$	3.20	$A(4,5,-1),\ B(-6,4,2),$ $\bar{b}(1,9,6),\ \bar{c}=(0,8,6)$
3.21	$A(3,2,7),\ B(4,0,-5),$ $\bar{b}(7,2,6),\ \bar{c}=(5,8,2)$	3.22	$A(2,-6,8),\ B(5,4,8),$ $\bar{b}(8,3,6),\ \bar{c}=(7,4,-4)$
3.23	$A(2,1,-8),\ B(1,4,9),$ $\bar{b}(1,1,10),\ \bar{c}=(5,-3,7)$	3.24	$A(3,1,5),\ B(4,-3,7),$ $\bar{b}(9,3,2),\ \bar{c}=(6,2,-3)$
3.25	$A(2,-1,9),\ B(6,3,7),$ $\bar{b}(6,3,-6),\ \bar{c}=(7,8,3)$	3.26	$A(2,-5,7),\ B(3,4,8),$ $\bar{b}(2,4,2),\ \bar{c}=(0,6,-2)$
3.27	$A(3,-4,5),\ B(4,7,9),$ $\bar{b}(7,1,2),\ \bar{c}=(5,-3,-3)$	3.28	$A(0,4,5),\ B(3,-2,-2),$ $\bar{b}(8,4,4),\ \bar{c}=(0,2,-2)$
3.29	$A(-5,1,0),\ B(7,1,-5),$ $\bar{b}(7,1,6),\ \bar{c}=(5,8,-5)$	3.30	$A(3,-4,5),\ B(1,2,-6),$ $\bar{b}(0,1,8),\ \bar{c}=(7,2,-1)$

4 - тапсырма. A, B нүктелері және $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары берілген.

а) A және B нүктелері арқылы өтетін L_1 - түзуінің теңдеуін жазыңыз;

ә) A нүктесі арқылы өтетін және b векторына параллель L_2 түзуінің жалпы теңдеуін жазыңыз;

б) A және B нүктелері арқылы өтетін және c векторына параллель P_1 жазықтығының теңдеуін жазыңыз;

в) B нүктесі арқылы өтетін және b,c векторларына параллель P_2 жазықтығының теңдеуін жазыңыз;

г) L_1 және L_2 түзулері арасындағы бұрыштың косинусын табыңыз;

е) P_1 және P_2 жазықтықтары арасындағы бұрыштың косинусын табыңыз;

д) P_1 жазықтығы мен L_1 түзуінің арасындағы бұрыштың синусын табыңыз.

№	A	B	$\mathbf{b}$	$\mathbf{c}$
4.1	$(9,-5,6)$	$(3,2,-7)$	$(-5,1,-2)$	$(3,-7,8)$
4.2	$(-3,1,7)$	$(8,5,-1)$	$(2,-3,2)$	$(0,-9,5)$
4.3	$(4,7,1)$	$(1,6,-3)$	$(8,4,0)$	$(4,2,7)$
4.4	$(0,8,-5)$	$(2,5,6)$	$(3,-2,4)$	$(1,9,-1)$
4.5	$(3,-5,1)$	$(9,1,5)$	$(4,-7,8)$	$(5,2,-2)$

4.6	$(-4,4,-2)$	$(8,5,1)$	$(4,-3,1)$	$(2,8,5)$
4.7	$(1,8,-3)$	$(6,0,3)$	$(4,2,7)$	$(1,9,-1)$
4.8	$(1,9,5)$	$(4,-7,8)$	$(5,2,-2)$	$(3,1,-7)$
4.9	$(3,4,5)$	$(1,-9,3)$	$(4,5,7)$	$(-1,4,5)$
4.10	$(2,7,6)$	$(1,-4,5)$	$(3,7,5)$	$(3,-9,2)$
4.11	$(4,3,-6)$	$(2,-8,1)$	$(1,8,-3)$	$(4,-2,-5)$
4.12	$(8,4,1)$	$(7,3,0)$	$(9,1,-1)$	$(-3,1,7)$
4.13	$(2,5,1)$	$(3,8,-7)$	$(5,3,-2)$	$(9,-5,6)$
4.14	$(1,8,3)$	$(1,-4,1)$	$(-4,3,7)$	$(1,8,-1)$
4.15	$(8,7,-5)$	$(1,8,7)$	$(5,0,-3)$	$(2,6,1)$
4.16	$(3,4,-5)$	$(5,2,1)$	$(9,-5,6)$	$(2,3,-6)$
4.17	$(1,7,0)$	$(0,1,-3)$	$(4,-3,2)$	$(5,3,-2)$
4.18	$(1,7,3)$	$(3,-2,4)$	$(2,-1,5)$	$(8,1,-3)$
4.19	$(2,-3,1)$	$(8,-3,1)$	$(6,1,4)$	$(13,1,-1)$
4.20	$(4,-1,3)$	$(1,7,2)$	$(2,1,0)$	$(5,-6,2)$
4.21	$(1,8,-3)$	$(7,5,0)$	$(6,1,6)$	$(0,1,-1)$
4.22	$(3,8,1)$	$(9,1,-10)$	$(11,7,0)$	$(2,1,5)$
4.23	$(0,-1,3)$	$(1,8,-1)$	$(2,-3,6)$	$(3,0,-4)$
4.24	$(1,2,5)$	$(7,-9,1)$	$(3,-2,1)$	$(1,1,2)$
4.25	$(5,6,4)$	$(0,1,0)$	$(2,1,-1)$	$(3,0,-1)$
4.26	$(1,4,-1)$	$(1,2,-4)$	$(0,3,4)$	$(1,2,-4)$
4.27	$(0,8,2)$	$(1,3,-1)$	$(4,2,-3)$	$(3,7,5)$
4.28	$(1,-2,5)$	$(3,-6,2)$	$(7,8,1)$	$(3,9,-2)$
4.29	$(8,5,-1)$	$(3,-2,0)$	$(9,12,1)$	$(1,-4,5)$
4.30	$(3,-4,0)$	$(0,1,4)$	$(4,5,7)$	$(3,7,-1)$

5 - тапсырма. Теңдеулер жүйесі берілген. Жүйені Крамер әдісімен шешіңіз.

5.1 $\begin{cases} x-2z=1 \\ 2x+y-z=0 \\ x-2y+z=-2 \end{cases}$	5.2 $\begin{cases} x+y-z=36 \\ x+z-y=13 \\ y+z-x=7 \end{cases}$	5.3 $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$
5.4 $\begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1 \\ 7x+9y-9z=5 \end{cases}$	5.5 $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3z=16 \\ 5y-z=10 \end{cases}$	5.6 $\begin{cases} x+y+z=36 \\ 2x-3z=-17 \\ 6x-5z=7 \end{cases}$

5.7 $\begin{cases}7x+2y+3z=15\\5x-3y+2z=15\\10x-11y+5z=36\end{cases}$	5.8 $\begin{cases}2x+y+z=2\\4x+2y+2z=4\\5x+y+3z=4\end{cases}$	5.9 $\begin{cases}2x+y=5\\x+3z=16\\5y-z=10\end{cases}$
5.10 $\begin{cases}x+y-2z=6\\2x+3y-7y=16\\5x+2y+z=16\end{cases}$	5.11 $\begin{cases}2x-3y+z=2\\x+5y-4z=-5\\4x+y-3z=-4\end{cases}$	5.12 $\begin{cases}x+y+z=1\\2x+y+2z=1\\x+y+3z=2\end{cases}$
5.13 $\begin{cases}x-3y+4z=1\\5x-2y=2\\-x+2z=-1\end{cases}$	5.14 $\begin{cases}x+y+2z=-1\\2x-y+2z=-4\\4x+y+4z=-2\end{cases}$	5.15 $\begin{cases}2x+y+z=7\\x+2y+z=8\\x+y+2z=9\end{cases}$
5.16 $\begin{cases}x+2y+3z=3\\3x+y+2z=7\\2x+3y+z=2\end{cases}$	5.17 $\begin{cases}4x+2z=2\\2x-2y=-1\\4x-2y+2z=-3\end{cases}$	5.18 $\begin{cases}2x+3y+z=4\\2x+y+3z=0\\3x+2y+z=1\end{cases}$
5.19 $\begin{cases}3x+2z=1\\x-2y=-1\\4x-2y+5z=-3\end{cases}$	5.20 $\begin{cases}3x+5z=1\\x+2y=2\\-3x-3y+5z=-1\end{cases}$	5.21 $\begin{cases}3x+y+z=-4\\-3x+5y+6z=-8\\x-4y-2z=-9\end{cases}$
5.22 $\begin{cases}3x+5z=-2\\x+2y=3\\2x+5z=1\end{cases}$	5.23 $\begin{cases}3x+2y+z=4\\2x+y+3z=0\\2x+3y+z=1\end{cases}$	5.24 $\begin{cases}3x+4y-2z=12\\2x-y-z=6\\3x-2y+4z=-9\end{cases}$
5.25 $\begin{cases}2x-y+2z=8\\x+y+2z=11\\4x+y+4z=22\end{cases}$	5.26 $\begin{cases}4x-2y+5z=-3\\x-2y=-1\\3x+2z=1\end{cases}$	5.27 $\begin{cases}3x-2y-5z=5\\2x+3y-7z=12\\x-2y+3z=-1\end{cases}$
5.28 $\begin{cases}-3x-3y+5z=-1\\x+2y=2\\3x+5z=1\end{cases}$	5.29 $\begin{cases}2x-3y+2z=5\\3x+4y-7z=2\\5x+y-5z=9\end{cases}$	5.30 $\begin{cases}3x-y+z=9\\5x-y+2z=11\\x+2y+4z=19\end{cases}$

6 - тапсырма. Теңдеулер жүйесі берілген. Жүйені матрицалық әдіспен шешіңіз.

6.1 $\begin{cases}3x+4y-2z=12\\2x-y-z=6\\3x-2y+4z=-9\end{cases}$	6.2 $\begin{cases}2x-3y+2z=5\\3x+4y-7z=2\\5x+y-5z=9\end{cases}$	6.3 $\begin{cases}x+y+z=36\\2x-3z=-17\\6x-5z=7\end{cases}$

6.4 $\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 3x+y+2z=7 \\ 2x+3y+z=2 \end{cases}$	6.5 $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ 2x+y+3z=0 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}$	6.6 $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 4x+2y+2z=4 \\ 5x+y+3z=4 \end{cases}$
6.7 $\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ x+5y-4z=-5 \\ 4x+y-3z=-4 \end{cases}$	6.8 $\begin{cases} 7x+2y+3z=15 \\ 5x-3y+2z=15 \\ 10x-11y+5z=36 \end{cases}$	6.9 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=1 \\ x+y+3z=2 \end{cases}$
6.10 $\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$	6.11 $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$	6.12 $\begin{cases} x+y-2z=6 \\ 2x+3y-7y=16 \\ 5x+2y+z=16 \end{cases}$
6.13 $\begin{cases} 4x+2z=2 \\ 2x-2y=-1 \\ 4x-2y+2z=-3 \end{cases}$	6.14 $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3z=16 \\ 5y-z=10 \end{cases}$	6.15 $\begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1 \\ 7x+9y-9z=5 \end{cases}$
6.16 $\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ x+2y+z=8 \\ x+y+2z=9 \end{cases}$	6.17 $\begin{cases} 3x+y+z=-4 \\ -3x+5y+6z=-8 \\ x-4y-2z=-9 \end{cases}$	6.18 $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3z=16 \\ 5y-z=10 \end{cases}$
6.19 $\begin{cases} x-2z=1 \\ 2x+y-z=0 \\ x-2y+z=-2 \end{cases}$	6.20 $\begin{cases} 2x-y+2z=8 \\ x+y+2z=11 \\ 4x+y+4z=22 \end{cases}$	6.21 $\begin{cases} -3x-3y+5z=-1 \\ x+2y=2 \\ 3x+5z=1 \end{cases}$
6.22 $\begin{cases} 3x+5z=1 \\ x+2y=2 \\ -3x-3y+5z=-1 \end{cases}$	6.23 $\begin{cases} 3x-2y-5z=5 \\ 2x+3y-7z=12 \\ x-2y+3z=-1 \end{cases}$	6.24 $\begin{cases} 4x-2y+5z=-3 \\ x-2y=-1 \\ 3x+2z=1 \end{cases}$
6.25 $\begin{cases} x-3y+4z=1 \\ 5x-2y=2 \\ -x+2z=-1 \end{cases}$	6.26 $\begin{cases} 3x-y+z=9 \\ 5x-y+2z=11 \\ x+2y+4z=19 \end{cases}$	6.27 $\begin{cases} 3x+5z=-2 \\ x+2y=3 \\ 2x+5z=1 \end{cases}$
6.2 $\begin{cases} 3x+2y+z=4 \\ 2x+y+3z=0 \\ 2x+3y+z=1 \end{cases}$	6.29 $\begin{cases} x+y-z=36 \\ x+z-y=13 \\ y+z-x=7 \end{cases}$	6.30 $\begin{cases} 3x+2z=1 \\ x-2y=-1 \\ 4x-2y+5z=-3 \end{cases}$

7 - тапсырма. Фокусы $F_1(x,y)$ нүктесі болатын екінші ретті қисық берілген:

а) берілген e_1 эксцентриситеті арқылы эллипстің a, b жарты өстерін тауып, эллипстің канондық теңдеуін жазыңыз. Сызбасын сызыңыз;

ә) берілген e_2 эксцентриситеті арқылы гиперболаның нақты мен жорамал өстерін тауып, гиперболаның канондық теңдеуін жазыңыз. Оның асимптоталарын табыңыз. Сызбасын сызыңыз;

б) берілген фокусы $F_1(x,y)$ нүктесі болатын, төбесі координаталар басында жататын параболаның канондық теңдеуін жазыңыз. Сызбасын сызыңыз.

№	F_1	e_1	e_2	№	F_1	e_1	e_2
7.1	*(1,0)*	0.8	1.2	7.16	*(4,0)*	6/7	1.6
7.2	*(-1,0)*	0.5	1.4	7.17	*(-7,0)*	1/3	6/4
7.3	*(0,2)*	0.75	3/2	7.18	*(0,6)*	4/5	7/4
7.4	*(0,-2)*	2/3	5/4	7.19	*(0,-6)*	5/7	8/5
7.5	*(1.5,0)*	1/3	7/6	7.20	*(4,0)*	0.5	7/4
7.6	*(-1.5,0)*	4/5	1.2	7.21	*(-2,0)*	0.8	6/5
7.7	*(0,3)*	5/7	1.3	7.22	*(0,2)*	0.4	1.3
7.8	*(0,-5)*	6/7	8/5	7.23	*(0,-4)*	0.6	1.5
7.9	*(10,0)*	1/3	7/4	7.24	*(1,0)*	0.8	1.6
7.10	*(-7,0)*	4/5	6/5	7.25	*(-9,0)*	0.5	6/4
7.11	*(0,4)*	5/7	1.3	7.26	*(0,4.2)*	0.75	1.2
7.12	*(0,-4)*	0.5	1.5	7.27	*(0,-2.2)*	2/3	1.4
7.13	*(8,0)*	0.8	1.6	7.28	*(6,0)*	1/3	3/2
7.14	*(0,5)*	0.4	6/4	7.29	*(0,2.5)*	4/5	5/4
7.15	*(-5,0)*	0.6	7/4	7.30	*(-1.5,0)*	5/7	7/6

8 - тапсырма. Екінші ретті қисықтың теңдеуін канондық түрге келтіріп, сызбасын сызыңыз.

8.1	$-16-4x-64y-64=0$	8.2	$x^2+y^2+8x-12y+20=0$
8.3	$x^2-y^2-4y-4=0$	8.4	$-y^2+12x-2y-25=0$
8.5	$-3y^2+2x-12y+30=0$	8.6	$9x^2-16y^2-36x-64y-127=0$
8.7	$9x^2-y^2-18x-6y-10=0$	8.8	$-y^2+8x-2y-9=0$
8.9	$4y^2+8x+16y+30=0$	8.10	$5x^2+9y^2+30x+18y+9=0$
8.11	$x^2+y^2-2x+8y+9=0$	8.12	$y^2-8x+8y+32=0$
8.13	$x^2-4y^2-2x-24y-64=0$	8.14	$4x^2+8x+2y+30=0$
8.15	$4y^2+8x+12y+10=0$	8.16	$y^2+4x+8y+16=0$
8.17	$x^2+6x-2y+30=0$	8.18	$3x^2-4y^2+18x+20=0$
8.19	$9x^2+10y^2+40y-50=0$	8.20	$4y^2-2x+8y+28=0$
8.21	$16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$	8.22	$x^2+9y^2-40x+36y+100=0$

Типтік варианттың шешуі.

1 - тапсырма. Үшінші ретті анықтауыш берілген:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} \qquad i = 3, \quad j = 2.$$

а) a_{31}, a_{32}, a_{33} элементтерінің M_{ij} минорларын, A_{ij} алгебралық толықтауыштарын табыңыз;

ә) анықтауышты 2-ші бағанның элементтеріне жіктеңіз және есептеңіз;

б) анықтауышты үшбұрыштар (яғни Сарриус) ережесі бойынша есептеңіз.

Шешуі:

а) a_{31} элементінің миноры осы элемент тұрған 3-ші қатар мен 1–ші бағанды сызып тастағаннан пайда болған анықтауыш, сондықтан біз үшінші қатар мен екінші бағанды сызамыз:

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 10 - 4 = 6,$$

Қалған a_{32} және a_{33} элементтерінің минорлары:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 8 = 3, \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3.$$

Алгебралық толықтауышты мына формула бойынша табамыз:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij};$$
$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^{3+1} \cdot 6 = 6;$$
$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^{3+2} \cdot 3 = -3;$$
$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^{3+3} \cdot (-3) = 6A_{ij} = -3;$$

ә) анықтауыштың мәні қандай да бір қатар (баған) элементтері мен олардың сәйкес алгебралық толықтауыштарының көбейтінділерінің қосындысына тең. Біздің жағдайда анықтауышты үшінші қатар элементтеріне жіктейміз, яғни:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot ((-2) \cdot (-5) - 1 \cdot 4) - 2 \cdot (1 \cdot (-5) - (-2) \cdot 4) + 7(1 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2)) =$$

$$= 3 \cdot (10 - 4) - 2 \cdot (-5 + 8) + 7 \cdot (1 - 4) = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 3 + 7 \cdot (-3) = -9.$$

Анықтауышты есептеудің тағы бір жолы - 2-ші баған элементтері бойынша жіктеу:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = (-2)\cdot A_{12} + 1\cdot A_{22} + 2\cdot A_{32} = -2\cdot(-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$1\cdot(-1)^{2+2}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{3+2}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = 2\cdot(-14+15) + 1\cdot(7-12) - 2\cdot(-5+8) =$$

$$2-6-5=-9;$$

б) үшінші ретті анықтауышты Сарриус ережесі бойынша есептейміз:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} - a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} -$$

$$a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33};.$$

немесе мына сұлба бойынша есептейміз:

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot7 + (-2)\cdot(-5)\cdot3 + (-2)\cdot2\cdot4 - 3\cdot1\cdot4 - 2\cdot(-5)\cdot1 - (-2)\cdot(-2)\cdot7 =$$

$$= 7+30-16-12+10-28=-9.$$

2 - тапсырма. A, B, C матрицалары берілген. Табу керек:

а) AB, BC, BA матрицаларын, егер ондай көбейтінді мүмкін болса. Егер бұл көбейтінділер мүмкін болмаса, себебін түсіндіріп жазыңыз;

ә) A^T, B^T, C^T матрицаларын;

б) A матрицасына кері A^{-1} матрицасын. Нәтижені тексеріңіз.

Шешуі:

а) берілген матрицалардың өлшемдері: $A_{3\times3}$, $B_{3\times2}$, $C_{2\times4}$. Екі матрицаның көбейтіндісін табу үшін мына шарт орындалуы қажет: $A_{m\times n}\cdot B_{n\times k} = D_{m\times k}$ $A_{3\times3}\cdot B_{3\times2} = D_{3\times2}$, демек көбейтуге болады. D матрицасының d_{ij} элементтері A матрицасының i-ші қатарының элементтерін B матрицасының j-ші бағанының сәйкес элементтеріне көбейтінділерінің қосындысына тең:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot4+0\cdot(-3)+2\cdot1 & 3\cdot(-3)+0\cdot6+2\cdot7 \\ 1\cdot4+(-1)\cdot(-3)+3\cdot1 & 1\cdot(-3)+(-1)\cdot6+3\cdot7 \\ 4\cdot4+(-1)\cdot(-3)+6\cdot1 & 4\cdot(-3)+(-1)\cdot6+6\cdot7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 10 & 12 \\ 25 & 24 \end{pmatrix}$$

$$B_{3\times2}\cdot C_{2\times4} = F_{3\times4}.$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4\cdot 2+(-3)\cdot 4 & 4\cdot 3+(-3)\cdot(-1) & 4\cdot 7+(-3)\cdot 3 & 4\cdot 1+(-3)\cdot(-6) \\ (-3)\cdot 2+6\cdot 4 & (-3)\cdot 3+6\cdot(-1) & (-3)\cdot 7+6\cdot 3 & (-3)\cdot 1+6\cdot(-6) \\ 1\cdot 2+7\cdot 4 & 1\cdot 3+7\cdot(-1) & 1\cdot 7+7\cdot 3 & 1\cdot 1+7\cdot(-6) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 15 & -37 & 22 \\ 18 & -15 & 39 & -39 \\ 30 & -4 & 14 & 41 \end{pmatrix}.$$

B матрицасының бағандар саны A матрицасының қатарлар санына тең емес, демек $B_{3\times 2} \cdot A_{3\times 3}$ көбейтіндісі мүмкін емес;

ә) матрицаларды транспонирлейміз:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix};$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & 7 \end{pmatrix};$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & -6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \\ -7 & 3 \\ 1 & -6 \end{pmatrix};$$

б) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ квадрат матрицасы үшін $\det A \neq 0$, демек бұл матрица үшін $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ теңдігін қанағаттандыратын A^{-1} кері матрицасы бар.

Кері матрицаны табу формуласы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

мұндағы A_{ij} – алгебралық толықтауыштар:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 6 & 10 & -7 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Тексереміз:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 6 & 10 & -7 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 6 & 10 & -7 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 - тапсырма. $A(-2,7,0)$, $B(-6,3,-1)$, $C(1,0,1)$, $\vec{b} = (-3,4,1)$, $\vec{c} = (9,-1,0)$ берілген. Табу керек:

а) $\vec{AB} = \bar{a}$ векторын, ол вектордың ұзындығын және AB кесіндісінің ортасын;

ә) $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларының өзара орналасуын анықтау керек (коллинеарлы, перпендикулярлы немесе олардың арасындағы бұрышты табыңыз);

б) $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларынан құрылған параллелограммның ауданын табыныз;

г) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларын компланарлыққа тексеріңіз.

Шешуі:

а) егер $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ болса, онда:

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1);$$

$$\vec{a} = \vec{AB} = ((-6)-(-2), 3-7, -1-0) = (-4,-4,-1).$$

Егер $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$ болса, онда $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$,

$$\left|\vec{a}\right|=\left|(-4,4,-1)\right|=\sqrt{(-4)^2+(-4)^2+(-1)^2}=\sqrt{16+16+1}=\sqrt{33}.$$

$C-AB$ кесіндісінің ортасы: $C\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2},\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$.

Біздің жағдайда: $C\left(\dfrac{-2-6}{2};\ \dfrac{7+3}{2};\ \dfrac{0-1}{2}\right)=\left(-4;\ 5;\ -\dfrac{1}{2}\right)$;

ә) егер $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$, $\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$ болса, онда *скалярлық көбейтіндісі*:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z=(-4)\cdot(-3)+(-4)\cdot 4+(-1)\cdot 1=12-16-1=-5.$$

Векторлық көбейтіндісі:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_t\\ b_x & b_y & b_t\end{vmatrix};$$

$$\left[\vec{b},\vec{c}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 4 & 1\\ 9 & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 9 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 9 & -1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+9\vec{j}-33\vec{k}=(1,\ 9,\ -33);$$

Аралас көбейтіндісі:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix},\ \text{демек}\ \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}-4 & -4 & -1\\ -3 & 4 & 1\\ 9 & -1 & 0\end{vmatrix}=-7.$$

Егер $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$, $\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$ векторлары *коллинеарлы* болса, онда олардың координаталары пропорцианал болу керек:

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\ \Leftrightarrow\ \bar{a}\,//\,\bar{b}.$$

Егер $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$, $\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$ векторлары *перпендикуляр* болса, онда

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0\ \Leftrightarrow\ \bar{a}\perp\bar{b}.$$

$\bar{a}=(-4,-4,-1)$, $\bar{b}=(-3,4,1)$ векторлары коллинеарлы да, перпендикуляр да емес, себебі:

$$\frac{-4}{-3} \neq \frac{-4}{4} \neq \frac{-1}{1};$$
$$\bar{a}\,\bar{b} = (-4,-4,-1)\cdot(-3,4,1) = 12-16-1 = -5 \neq 0.$$

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ *векторларының арасындағы бұрыш о*сы векторлардың скаляр көбейтіндісі мен олардың ұзындықтары арқылы өрнектеледі:

$$\cos\bar{a}\,\bar{b} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|a|\cdot|b|},$$

$$\cos\bar{a}\,\bar{b} = \frac{(-4,-4,-1)\cdot(-3,4,1)}{\sqrt{(-4)^2+(-4)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+4^2+1^2}} = \frac{-5}{\sqrt{33}\sqrt{26}};$$

б) $\vec{b}$=(-3,4,1) және $\vec{c}$=(9,-1,0) векторларында құрылған параллелограммның ауданы осы вектордың векторлық көбейтіндісінен алынған вектордың ұзындығы ретінде анықталады [4]:

$$\bar{b}\times\bar{c} = [\bar{b},\bar{c}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 4 & 1 \\ 9 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 9 & 0 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 9 & -1 \end{vmatrix}\bar{k} =$$

$$= \bar{i} + 9\bar{j} - 33\bar{k} = (1,9,-33);$$

$$|\bar{b}\times\bar{c}| = |(1,9,-33)| = \sqrt{1^2+9^2+(-33)^2} = \sqrt{1171};$$

г) егер $\bar{a} = (-4,-4,-1)$, $\vec{b}$=(-3,4,1) и $\vec{c}$=(9,-1,0) үш векторы бір жазықтықта жатса және олардың аралас көбейтінділері нолге тең болса, онда осы векторлар *компаланарлы* болады:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix};$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} -4 & -4 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 9 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$ – компланарлы емес.

4 - тапсырма. *A*, *B* нүктелері және $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар берілген:

а) *A* және *B* нүктелері арқылы өтетін L_1 - түзудің теңдеуін жазыңыз;

ә) A нүктесі арқылы өтетін және b векторына параллель L_2 түзуінің жалпы теңдеуін жазыңыз;

б) A мен B нүктелері арқылы өтетін және c векторына параллель P_1 жазықтығының теңдеуін жазыңыз;

в) B нүктесі арқылы өтетін және b,c векторларына параллель P_2 жазықтығының теңдеуін жазыңыз;

г) L_1 және L_2 түзулері арасындағы бұрыштың косинусын табыңыз;

е) P_1 және P_2 жазықтықтары арасындағы бұрыштың косинусын табыңыз;

д) P_1 жазықтығы мен L_1 түзуінің арасындағы бұрыштың синусын табыңыз.

Шешуі:

а) екі нүкте арқылы өтетін L_1 теңдеуінің канондық теңдеуі векторлардың коллинеарлық шартынан анықталады

AK=(x-4,y+3,z-2) және AB=(1-4,0+0,z-2)=(-3,0,-2), мына түрде жазылады:

$$L_1: \quad \frac{x-4}{-3}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-2}{-2} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} \,//\, \overrightarrow{AB};$$

ә) A нүктесі арқылы өтетін және $\vec{b}=(5,-2,4)$ векторына параллель L_2 теңдеуінің канондық теңдеуі векторлардың коллинеарлық шартынан анықталады $\vec{b}=(5,-2,4)$ және *AK=(x-4,y+3,z-2)* мына түрде жазылады [2] :

$$L_2: \frac{x-4}{5}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-2}{4} \Leftrightarrow \vec{b} \,//\, \overrightarrow{AK};$$

б) *A(4,-3,2), B(1,0,0)* нүктелері арқылы өтетін және $\vec{c}=(-3,1,5)$ векторына параллель P_1 жазықтығының теңдеуі *AK=(x-4,y+3,z-2), AB=(-3,0+0,-2), c=(-3,1,5)* үш вектордың *компланарлық* шартынан шығады:

$$P_1: \begin{vmatrix} x-4 & y+3 & z-2 \\ -3 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AB}, \vec{c} \,//\, P_1.$$

Ізделінді P_1 жазықтығының жалпы теңдеуі

$$2(x-4)+2(y+3)-3(z-2)=0;$$

в) *A(4,-3,2)* нүктесі арқылы өтетін және $\vec{b}=(5,-2,4)$, $\vec{c}=(-3,1,5)$ векторларына параллель P_2 жазықтығының теңдеуі *AK=(x-4,y+3,z-2),* $\vec{b}$, $\vec{c}$ - үш вектордың *компланарлық* шартынан шығады:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+3 & z-2 \\ 5 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0;$$

$$P_2: -14(x-4)-37(y+3)-(z-2)=0;$$

г) L_1 , L_2 түзулерінің арасындағы бұрыш олардың бағыттаушы q_1 ,q_2 векторларының арасындағы бұрыш арқылы анықталады:

$$L_1: \quad \frac{x-4}{-3}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-2}{-2} \ // \overrightarrow{q_1}=(-3{,}3{,}-2)\ ;$$

$$L_2: \quad \frac{x-4}{5}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-2}{4} // \quad \overrightarrow{q_2}=(5{,}-2{,}4);$$

$$\cos(L_1L_2)=\cos(q_1q_2)=\frac{\vec{q}_1\cdot\vec{q}_2}{|q_1|\cdot|q_2|}=\frac{-3\cdot5+3\cdot(-2)+(-2)\cdot4}{\sqrt{9+9+4}\sqrt{25+4+16}}=\frac{-29}{\sqrt{22}\sqrt{45}}\ ;$$

д) P_1 және P_2 жазықтықтарының арасындағы бұрыш олардың n_1 *=(2,2,-3)*, n_2*=(-14,-37,-1)* нормаль векторларының арасындағы бұрыш арқылы анықталады

$$P_1: 2(x-4)+2(y+3)-3(z-2)=0 \perp \overrightarrow{n_1}=(2{,}2{,}-3);$$

$$P_2: -14(x-4)-37(y+3)-(z-2)=0 \perp \overrightarrow{n_1}=(-14{,}-37{,}-1);$$

$$\cos(L_1L_2)=\cos(q_1q_2)=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|n_1|\cdot|n_2|}=\frac{2\cdot(-14)+2\cdot(-37)+(-3)\cdot(-1)}{\sqrt{4+4+1}\sqrt{14^2+37^2+1}}=\frac{-99}{\sqrt{9}\sqrt{19363}}\ ;$$

е) $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ түзуі мен $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтығы арасындағы бұрыштың синусын келесі формуламен есептелінеді [5]:

$$\sin\left(L,\ ^\wedge P\right)=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\ .$$

Біздің жағдайда, P_2 жазықтығы мен L_1: түзуі арасындағы бұрыш

$$L_1: \quad \frac{x-4}{-3}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-2}{-2} \ // \overrightarrow{q_1}=(-3{,}3{,}-2);$$

$$P_2: -14(x-4)-37(y+3)-(z-2)=0 \perp \overrightarrow{n_1}=(-14{,}-37{,}-1);$$

$$\cos(L_1P_2)=\sin(\vec{q}_1\vec{n}_2)=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|n_1|\cdot|n_2|}=\frac{-3\cdot(-14)+3\cdot(-37)+(-2)\cdot(-1)}{\sqrt{9+9+4}\sqrt{14^2+37^2+1}}=\frac{1445}{\sqrt{22}\sqrt{19363}}.$$

5 - тапсырма. $\begin{cases}3x_1+5x_2+2x_3=-1\\ \quad -2x_2+x_3=1\\ x_1+2x_2+x_3=2\end{cases}$ теңдеулер жүйесі берілген. Жүйені Крамер әдісімен шешіңіз.

Шешуі: жүйенің негізгі анықтауышын есептеңіз:

$$\begin{vmatrix}3 & 5 & 2\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-3\neq0,$$ демек жүйе үйлесімді.

Жүйе үш белгісізді сызықтық біртекті емес үш теңдеуден тұрады, демек ол жалғыз шешімге ие болады.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$ жүйесі үшін төрт анықтауышын есептеңіз.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Крамер формулалары: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}; \; x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}; \; x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$.

Біздің жағдайда: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 21, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6, \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -15,$

$\Delta = -3$ болғандықтан, $x_1 = -7, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 5$.

Жауабы: $(-7, 2, 5)$.

6 - тапсырма. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -1 \\ \quad -2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ теңдеулер жүйесі берілген. Жүйені матрицалық әдіспен шешіңіз.

Шешуі: берілген жүйе үшін мына матрицаларды енгіземіз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Жүйенің матрицалық түрде жазылуы $AX = B$, ал оның шешімі

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Берілген жүйенің матрицалары: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Жүйенің матрицалық әдіспен берілуі:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ 0x_1 - 2x_2 + 1x_3 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot X = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -1 \\ 0x_1 - 2x_2 + 1x_3 = 1 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 2 \end{cases}.$$

A матрицасының элементтерінің алгебралық толықтауыштарын табамыз:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad .$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6.$$

Сонда $A^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$

Жүйенің матрицалық шешуі:

$$X = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ -6 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

7 - тапсырма. Фокусы $F_1(0,-3)$ нүктесі болатын екінші ретті қисық *берілген:*

а) берілген $\mathcal{E}_1=0.6$ эксцентриситеті арқылы эллипстің a, b жарты өстерін тауып, эллипстің канондық теңдеуін жазыңыз. Сызбасын сызыңыз;

ә) берілген $\mathcal{E}_2=3/2$ эксцентриситеті арқылы гиперболаның нақты мен жорамал өстерін тауып, гиперболаның канондық теңдеуін жазыңыз. Оның асимптоталарын табыңыз. Сызбасын сызыңыз;

б) берілген фокусы $F_1(0,-3)$ нүктесі болатын, төбесі координаталар басында жататын параболаның канондық теңдеуін жазыңыз. Сызбасын сызыңыз.

Шешуі:

а) эллипстің эксцентриситеті $\mathcal{E}_1=0.6<1$ және эллипстің канондық теңдеуі:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Егер фокустың координаталары *Ох өсінде* орналасса, онда:

$$\boldsymbol{a>b}, \; c = \sqrt{a^2 - b^2}, \; F_1(c;0), \; F_2(-c;0), \; \varepsilon = \frac{c}{a},$$

мұндағы $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Егер фокустың координаталары *Оу өсінде* орналасса, онда:

$$\boldsymbol{b>a}, \; F_1(0;c), \; F_2(0;-c), \; \varepsilon = \frac{c}{b},$$

мұндағы $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

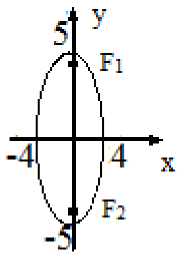
Біздің жағдайда $F_1(0,-3)$ фокус *Oy* өсінде орналасқандықтан, ($F_2(0,3)$) және эллипстің жарты өстерін былай анықтаймыз:

$c=3$, $\mathcal{E}_1=0.6=3/b$. Бұдан $b=3/0.6=5$; $a^2=b^2-c^2=25-9=16$.

Сонымен, эллипстің жарты өстері: $a=4$, $b=5$ және оның канондық теңдеуі:

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Сызбасы 1 суретте кескінделген.



1сурет

б) гиперболаның эксцентриситеті $\mathcal{E}_2=3/2>1$. Егер гиперболаның фокусының координаталары $F_{1,2}(\pm c,0)$ *Ox өсінде* орналасса, онда в гиперболаның канондық теңдеуінде a - *нақты* жарты ось және b - *жорамал* жарты ось:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \;\; c = \sqrt{a^2 + b^2}; \;\; F_1(c;0); \quad F_2(-c;0); \;\; \varepsilon = \frac{c}{a} .$$

Егер гиперболаның фокусының координаталары $F_{1,2}(0,\pm c)$ *Oy өсінде* орналасса, онда b - *Oy* осі бойынша *нақты* жарты ось және a - *жорамал* жарты ось *Ox* өсінде орналасса, онда *түйіндес* гиперболаның канондық теңдеуінде:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1; \;\; c = \sqrt{a^2 + b^2}; \;\; F_1(0;c); \quad F_2(0;-c;); \;\; \varepsilon = \frac{c}{b} .$$

Екі гиперболаның асимптоталары: $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Біздің жағдайда $F_1(0,-3)$ - фокус *Oy* өсінде орналасқандықтан, екінші фокустың координаталары - $F_2(0,3)$. Әрі қарай келесі шамаларды анықтаймыз

$c=3$; $\mathcal{E}_2=3/2=3/b$.

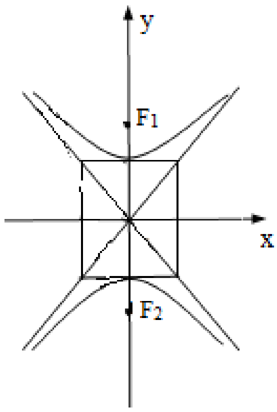
Бұдан нақты жарты ось $b=2$ - *Oy* өсінде орналады. Жорамал жарты ось: $a^2= c^2 - b^2=9-4=5$ *Ox* осі бойынша.

Гиперболаның канондық теңдеуі және асимптоталарының теңдеуі:

$$-\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{2^2}=1;$$

$$y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}x.$$

Гиперболаны салу үшін алдымен қабырғалары $x=\pm a$, $y=\pm b$ $(x=\pm\sqrt{5},\ y=\pm 2).$ болатын тіктөртбұрыш сызамыз. Гиперболаның төбелері тіктөртбұрыш қабырғаларының *Oy* осімен қиылысу нүктесінде орналасады (гиперболаның нақты осі). Гиперболаның асимптоталары $y=\pm b/ax$ - тіктөртбұрыштың диагональдары болады. Гиперболаның сұлбалық графигі 2 суретте көрсетілген;



2 сурет

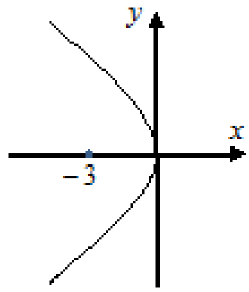
в) парабола эксцентриситеті $\mathcal{E}=1$. Егер парабола $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ фокусы *Ox* осінде орналасса, параболаның канондық теңдеуі $y^2=2px$.

Егер парабола $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$ фокусы *Oy* осінде орналасса, параболаның канондық теңдеуі - $x^2=2py$, мұндағы *p* – параболаның параметрі.

Біздің жағдайда $F_1(0,-3)$ – фокусы *Oy* осінде орналасқандықтан $p/2=-3$, парабола теңдеуі:

$$x^2=2(-6)y=-12y.$$

Параболаның сұлбалық графигі 3 суретте кескінделген.



3 сурет

8 - тапсырма. Екінші ретті қисықтың теңдеуін канондық түрге келтіріп, сызбасын сызыңыз: $x^2-2y^2-4y-6=0$.

Шешуі:

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ – симметрия центрі (x_0,y_0) нүктесі болатын эллипс.

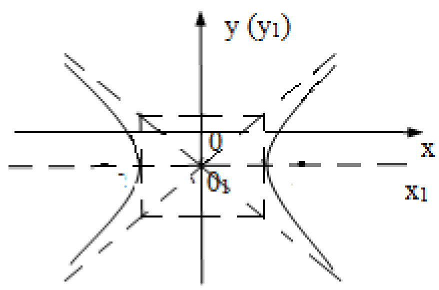
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=-1$ – симметрия центрі (x_0,y_0) нүктесі болатын гипербола.

$(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$, $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)^2$ – төбесі (x_0,y_0) нүктеде жатқан парабола.

Қисықты канондық түрге келтіру үшін толық квадратын ажыратамыз:

$x^2-2(y^2+2y+1-1)-6=0$, $x^2-2(y+1)^2-2\cdot(-1)-6=0$, $x^2-2(y+1)^2=4$

$\frac{x^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{2}=1$, симметрия центрі $(0,-1)$ нүктесі, жартыөстері $a=2$, $b=\sqrt{2}$ болатын гипербола. Осьтерді параллель көшіреміз: $x=x_1$, $y+1=y_1$, сонда теңдеу $\frac{x_1^2}{4}-\frac{y_1^2}{2}=1$ түрге келеді. Оның графигі 4 суретте кескінделген.



4 сурет

Әдебиеттер тізімі

1 Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И. Е. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Выш. Шк., 2000. – 303 с.: ил.

2 Мустахишев К.М., Атабай Б.Ж. Математика 1. Дәрістер жинағы. - Алматы: АЭжБУ, 2013- 48 б.

3 Индивидуальные задания по высшей математике: Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения ч.2: Учеб. пособие/ под ред. А.П. Рябушко. – Мн.:Выш.шк., 2000. - 396 с.

4 Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч.1– М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и Образование, 2003.

5 Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В., Хейнман В.Б. Сборник задач по линейной алгебре. – Мн.: Выш. школа, 1980.

6 Сағынтаев С., Сағынтаева С. Жоғарғы математика: Оқулық. - Астана: ҚазЭҚСХУ БПО, 2015. -545 б.

Мазмұны

Жиынтық жоспар 2019 ж., бап. 169

Масанова Аида Жайлауовна

МАТЕМАТИКА 2

5В0702000 - Автоматтандыру және басқару
мамандығы студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындау
бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар
1 бөлім

Редакторы Ж.М. Изтелеуова
Стандарттау бойынша маман Г.И. Мухаметсариева

Басуға « ___» ____2019 ж. қол қойылды.   Пішімі 60х84 1/16
Таралымы 25 дана.   Баспаханалық қағаз №1
Көлемі 2,0 оқу-бас. ә.   Тапсырыс №__ Бағасы 1000 тг.

«Алматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірмелі-көбейткіш бюросы
050013, Алматы, Байтұрсынұлы көшесі, 126/1