Коммерциялық емес акционерлік қоғам

ҒҰМАРБЕК ДӘУКЕЕВ АТЫНДАҒЫ АЛМАТЫ ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС УНИВЕРСИТЕТІ

Математика және математикалық үлгілеу кафедрасы

Математика-2

Барлық білім беру бағдарламалары студенттері үшін дәрістер жинағы

Алматы 2022

ҚҰРАСТЫРУШЫЛАР: Искакова А.Қ., Рысбекова Г.А. «Математика 2» - барлық білім беру бағдарламалары студенттері үшін дәрістер жинағы. -Алматы: Ғ.Даукеев атындағы АЭжБУ, 2022. – 84 б.

«Математика-2» пәні барлық білім беру бағдарламалары студенттері үшін міндетті оқитын пән болып табылады. «Математика 2» дәрістер жинағында көп айнымалылы функциялар, дифференциалдық теңдеулер және қатарлар теориясы қарастырылады. Дәрістер жинағында жоғары математика курсын оқып – үйренуді жеңілдетуге мүмкіндік беретін және математикалық мәдениетті көтеруге себебкер болатын теориялық материал көп теген есептер және мысалдармен қамтылған.

Әдеб. көрсеткіші – 7 атау.

Пікір беруші: ЭТ кафедрасының доценті Айтжанов Н.М.

«Ғұмарбек Дәукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2022 ж. баспа жоспары бойынша басылады.

МОДУЛЬ 1. КӨП АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯНЫ ДИФФЕРЕН-ЦИАЛДАУ ЖӘНЕ ИНТЕГРАЛДАУ

1-ДӘРІС. Көп айнымалы функция. Анықталу облысы. Көп айнымалы функцияның шегі, үзіліссіздігі. Дербес туындылар. Бетке жанама жазықтық және нормаль. Берілген бағыттағы туынды. Градиент. Толық дифференциал

Функцияның анықталу облысы. Айталық, екі бос емес D және U жиындары берілсін. Егер D жиынында жатқан әрбір (x,y) нақты сандар жұбына белгілі бір ереже бойынша U жиынында жататын тек бір ғана элемент u сәйкес қойылса, онда D жиынында мәндер жиыны U болатын f функциясы берілген деп айтады да $u = f(x,y)$ деп жазады.

D жиыны f функциясының анықталу облысы деп аталады, ал $f(x,y)$ түріндегі барлық сандардан тұратын U жиыны функцияның мәндер жиыны деп аталады.

Әдетте n=2 болғанда R^2 евклид жазықтығында екі айнымалыдан тәуелді функцияларды z=$f(x,y)$ немесе z=z(x,y) немесе z=g(x,y), т.с.с. белгілейді, мұндағы x,y – аргументтер.

Осы сияқты n=3 болғанда R^3 евклид кеңістігінде үш айнымалы функцияларды u=$u(x,y,$z) немесе u=$f(x,y,$z), т.с.с. белгілейді, мұндағы $x,y,$z аргументтер.

Осылайша кез келген ақырлы тәуелсіз айнымалылар $f(x,y,z,\dots,t)$ функциясы анықталады.

Көп айнымалы функцияның шегі, үзіліссіздігі. Айталық z=$f(x,y)$ функциясы R^2 жазықтығындағы D облысында анықталсын және $M_0(x_0\,, y_0\,) \in D$, $\{M_n\} = \{M_n(x_n, y_n\}$, n=1, 2, ... нүктелер жиыны болсын.

Анықтама. Егер M_0 нүктесіне жинақты кез келген $\{M_n\}$ тізбегі үшін оған сәйкес келетін $\{f(M_n)\}$ функция тізбегі b санына жинақты болса, онда b санын $f(M)$ функциясының M_0 нүктесіндегі шегі деп атайды, оны

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = b \qquad \text{немесе} \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = b \qquad \text{белгілейді.}$$

Аргумент өсімшелерін

$$\Delta x = x - x_0, \qquad \Delta y = y - y_0$$

белгілейміз, сәйкес функция өсімшесін

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

белгілейміз.

Δz шамасын функцияның толық өсімшесі немесе өсімшесі деп атайды.

Анықтама. $u = f(x, y)$ функциясын M_0 нүктесінде үзіліссіз деп атайды, егер

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y).$$

Көп айнымалы функцияның дербес туындылары. Бірінші ретті дербес туындылар. $z = f(x, y)$ функциясының тәуелсіз айнымалы x бойынша дербес туындысы деп, y тұрақты болған кезде есептелген ақырлы шекті айтады:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y).$$

Ал y бойынша дербес туынды деп, x тұрақты болған кезде есептелген ақырлы шекті айтады:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y).$$

Дербес туындылар үшін дифференциалдаудың әдеттегі ережелері мен формулалары дұрыс болады.

z$= f(x, y)$ функциясының x және y айнымалылары бойынша алынған дербес туындыларын сәйкес төмендегі символдардың біреуімен белгілейді:

$$z'_x, \quad z'_y \qquad \text{немесе} \qquad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}.$$

$u=f(x,y,z)$ функциясының x,y,z айнымалылары бойынша алынған дербес туындылары деп атап, төмендегі символдардың біреуімен белгілейді:

$$u'_x, \ u'_y, \ u'_z \quad \text{немесе} \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Мысал-1. $u(x, y) = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$ функциясы берілген. Табу керек $\frac{\partial u}{\partial x}$ және $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Шешуі. $u(x, y)$ функциясының айнымалысы x бойынша $\frac{\partial u}{\partial x}$ бірінші ретті дербес туындысын табамыз. Ол үшін y - тұрақты деп қарастырамыз, онда x бойынша функцияның дербес тыуындысы:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x = (x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1)'_x =$$

$$= (x^2)' - 3yx' - 0 - x' + 0 + 0 = 2x - 3y - 1.$$

Енді $u(x,y)$ функциясының айнымалысы y бойынша $\frac{\partial u}{\partial y}$ бірінші ретті дербес туындысын табамыз. Ол үшін x - тұрақты болсын, онда у бойынша функцияның дербес тыуындысы:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u'_y = (x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1)'_y =$$

$$= 0 - 3xy' - 4(y^2)' - 0 - 8y' + 0 = -3x - 8y + 2.$$

Мысал-2. $u(x,y) = x^2y^3$ функцияның барлық бірінші ретті дербес туындылырын табыңыз.

Шешуі. Берілген функция екі айнымалыдан тәуелді, сондықтан u'_x пен u'_y табамыз.

$$u'_x = (x^2y^3)'_x = y^3(x^2)'_x = 2xy^3,$$

$$u'_y = (x^2y^3)'_y = x^2(y^3)'_y = 3x^2y^2.$$

Мысал-3. $z = sin(\,x^3y)$ функциясының барлық бірінші ретті дербес туындылырын табыңыз.

Шешуі. Берілген функцияның x және у бойынша дербес тыуындылары:

$$z'_x = (\sin(x^3y))'_x = \cos(x^3y) \cdot (x^3y\ )'_x =$$

$$= \cos(x^3y) \cdot 3x^2y = 3x^2y\cos(x^3y),$$

$$z'_y = (\sin(x^3y))'_y = \cos(x^3y) \cdot (x^3y\ )'_y =$$

$$= \cos(x^3y) \cdot x^3 = x^3\cos(x^3y).$$

Мысал-4. M(-1;-1) нүктесінде $u(x,y) = x^2y^3 + 2x - 5y^4$ функцияның барлық бірінші ретті дербес туындылырын табыңыз.

Шешуі. Берілген $u(x,y)$ функция x және y айнымалыларынан тәуелді. Функцияның x бойынша дербес тыуындысын анықтап, $x = -1, y = -1$ болғанда мәнін есептейміз:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = (x^2y^3 + 2x - 5y^4)'_x =$$

$$= (2xy^3 + 2)\Big|_{\substack{x=-1\\ y=-1}} = 2 \cdot (-1) \cdot (-1)^3 + 2 = 4.$$

Енді у бойынша дербес тыуындысын анықтап, $x = -1, y = -1$ болғанда мәнін есептейміз:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = (x^2y^3 + 2x - 5y^4)'_y =$$

$$= (3x^2y^2 - 5\cdot 4y^3)|_{\substack{x=-1\\ y=-1}} = 3\cdot(-1)^2\cdot(-1)^2 - 20\cdot(-1)^3 = 23.$$

Мысал-5. $z = e^{x^2+y^2}$ функциясы берілген. Бірінші ретті дербес туындыларын табу керек, яғни $\frac{\partial u}{\partial x}$ және $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Шешуі. Бірінші ретті дербес туындылары:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)'_x = 2xe^{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)'_y = 2ye^{x^2+y^2}.$$

Бетке жанама жазықтық және нормаль.

Анықтама. Беттің M нүктесіндегі жанама жазықтығы деп беттің M нүктесі арқылы жүргізілген барлық қисықтарының жанамалары жататын жазықтықты айтады.

Егер жазықтық $F(x,y,z)=0$ теңдеуі арқылы берілсе және $M(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінде $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M$, $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M$, $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M$ ақырлы және бір мезгілде нөлге айналмаса, онда беттің $M(x_0, y_0, z_0)$ нүктесіндегі жанама жазықтығының теңдеуі:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M (x-x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M (y-y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M (z-z_0) = 0,$$

немесе

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M (x-x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M (y-y_0)$$

түрінде болады.

Анықтама. Беттің M нүктесіндегі нормалі деп беттің M нүктесіндегі жанама жазықтығына перпендикуляр және осы нүкте арқылы өтетін түзуді айтады.

Беттің M нүктедегі нормалінің теңдеуі:

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M} = \frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M} = \frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M}.$$

немесе

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

түрінде болады.

Берілген бағыттағы туынды. Градиент

Анықтама. Егер $f(x,y)$ функциясы дифференциалданатын болса, онда берілген бағыттағы туынды:

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha,$$

мұнда α дегеніміз $\overrightarrow{l}$ векторының Ox осімен жасайтын бұрышы.

Осылайша функция үш айнымалылы $u=f(x,y,z)$ болғанда берілген бағыттағы туынды:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

мұнда $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ дегеніміз $\overrightarrow{l}$ векторының бағыттаушы косинустары.

Анықтама. $z=f(x,y)$ функциясының $M(x,y)$ нүктесіндегі градиенті деп, бастапқы нүктесі M болатын, координаталары z функциясының дербес туындыларына тең болатын векторды айтады:

$$grad\ z=\frac{\partial z}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\bar{j}.$$

$u=f(x,y,z)$ болғанда, яғни функция үш айнымалыдан тәуелді болса, онда функцияның градиенті

$$grad\ u=\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$$

болады.

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктесіндегі градиент ұзындығы:

$$|grad\ u(M_0)|=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}.$$

Мысал-6. $u(M)=x^2-2xy+3z^3$ функциясының $M_0(0,2,1)$ нүктесіндегі градиентінің ұзындығын табыңыз.

Шешуі. Анықтама бойынша

$$grad\, u(M_0) = u'_x(M_0)\bar{i} + u'_y(M_0)\bar{j} + u'_z(M_0)\bar{k}.$$

Нүктедегі дербес туындыларын табамыз:

$u'_x(M_0) = (2x - 2y)|M_0 = 2 \cdot 0 - 2 \cdot 2 = -4,$

$u'_y(M_0) = -2x|M_0 = -2 \cdot 0 = 0,$

$u'_z(M_0) = 9z^2|M_0 = 9 \cdot 1 = 9.$

Онда, $grad\, u(M_0) = -4\bar{i} + 9\bar{k}$, ал градиент ұзындығы:

$$|grad\, u(M_0)| = \sqrt{16 + 81} = \sqrt{97}.$$

2-ДӘРІС. Толық дифференциал және оның дербес туындымен байланысы. Екі айнымалы функцияның экстремумы. Қажетті және жеткілікті шарттар. Екі айнымалы функцияның шектелген тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндері

Толық дифференциал және оның дербес туындымен байланысы.

$z = f(x, y)$ функциясының $M(x, y)$ нүктесіндегі толық дифференциалы деп

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

айырымын айтады, мұндағы Δx және Δy аргументтердің кез келген өсімшелері.

Тәуелсіз айнымалылардың дифференциалдары олардың өсімшелеріне тең болады, яғни

$$dx = \Delta x \qquad \text{және} \qquad dy = \Delta y.$$

$z = f(x, y)$ функциясының 1-ші ретті толық дифференциалы келесі формула бойынша есептеледі:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{2.1}$$

$u = f(x, y, z)$ үш аргументті функцияның 1-ші ретті толық дифференциалы келесі формула бойынша есептеледі:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz. \tag{2.2}$$

Мысал-1. $z(x, y) = x \cdot y^2$ функциясының бірінші ретті дифференциалын табыңыз.

Шешуі. Берілген функцияның дербес туындыларын табамыз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x \cdot y^2)'_x = y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = (x \cdot y^2)'_y = 2xy,$$

Енді (2.1) формуланы қолданамыз:

$$dz = y^2dx + 2xydy.$$

Мысал-2. $u(x, y, z) = 7xz^5 + siny - 2xy^3 + 9$ функциясының бірінші ретті дифференциалын табыңыз.

Шешуі. Дербес туындыларын табамыз:

$$u'_x = (7xz^5 + siny - 2xy^3 + 9)'_x = 7z^5 - 2y^3,$$

$$u'_y = (7xz^5 + siny - 2xy^3 + 9)'_y = cosy - 6xy^2,$$

$$u'_z = (7xz^5 + siny - 2xy^3 + 9)'_z = 35xz^4,$$

онда (2.2) формула бойынша бірінші ретті дифференциалын аламыз:

$$du = (7z^5 - 2y^3)dx + (cosy - 6xy^2)dy + 35xz^4dz.$$

Мысал-3. $u = x^2y^2z^2$ функцияның толық дифференциалын табыңыз.

Шешуі. Барлық 1-ші ретті дербес туындыларын табамыз:

$$u'_x = (x^2y^2z^2)'_x = 2xy^2z^2,$$

$$u'_y = (x^2y^2z^2)'_y = 2yx^2z^2,$$

$$u'_z = (x^2y^2z^2)'_z = 2zx^2y^2.$$

Толық дифференциалының формуласын қолданамыз:

$$du = 2xy^2z^2dx + 2yx^2z^2dy + 2zx^2y^2dz.$$

Мысал-4. $z = arctg\frac{x+y}{x-y}$ функциясы берілген. Бірінші ретті дифференциалын табу керек.

Шешуі. Бірінші ретті дербес туындыларын табамыз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{-2y}{(x-y)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Демек,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}.$$

Мысал-5. $u = x^{y^2 z}$ функциясы берілген. Бірінші ретті дифференциалын табыңыз.

Шешуі: Келесі формуланы қолданамыз:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz,$$

мұнда x бойынша туынды алғанда дәрежелік функцияның туындысын анықтау формуласын қолданамыз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z \cdot x^{y^2 z - 1},$$

Ал y пен z бойынша дербес туындыларды алғанда көрсеткіштік функцияның туындысын анықтау формуласын қолданамыз:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \cdot \ln x \cdot 2yz, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \cdot \ln x \cdot y^2.$$

Демек, бірінші ретті дифференциал тең:

$$du = y^2 z \cdot x^{y^2 z - 1}dx + 2yz \cdot x^{y^2 z} \cdot \ln x dy + y^2 x^{y^2 z} \cdot \ln x dz.$$

Жоғары ретті дифференциалдар. Егер x және y тәуелсіз айнымалылар және $f(x, y)$ функциясының үзіліссіз дербес туындылары бар болса, онда $z = f(x, y)$ функциясының екінші ретті дифференциалы деп оның толық дифференциалының дифференциалын айтады, яғни $d^2z = d(dz)$. Сонда

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2. \tag{2.3}$$

немесе

$$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2. \qquad (2,3^*)$$

Осылайша 3-ші ретті дифференциалдар анықталады:

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3. \qquad (2.4)$$

немесе

$$d^3z = z'''_{xxx}dx^3 + 3z'''_{xxy}dx^2dy + 3z'''_{xyy}dxdy^2 + z'''_{yyy}dy^3. \qquad (2.4^*)$$

т.с.с. жалпы, $d^n z = d(d^{n-1}z)$ формалды түрде бином заңы бойынша жазылатын келесі формуланың көмегімен беріледі:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z.$$

Мысал-6. $z = ln(2x + 5y)$ функциясы берілген. d^2z - екінші ретті дифференциалды табыңыз.

Шешуі: (2.3) формуланы қолданамыз. Ол үшін дербес туындыларын табамыз:

$$z'_x = \left(ln(2x + 5y)\right)'_x = \frac{2}{2x+5y}, \qquad z''_{xx} = \left(\frac{2}{2x+5y}\right)'_x = -\frac{4}{(2x+5y)^2},$$

$$z'_y = \left(ln(2x + 5y)\right)'_y = \frac{5}{2x+5y}, \qquad z''_{yy} = \left(\frac{5}{2x+5y}\right)'_y = -\frac{25}{(2x+5y)^2},$$

$$z''_{xy} = \left(\frac{2}{2x+5y}\right)'_y = -\frac{10}{(2x+5y)^2}.$$

Сонда екінші ретті дифференциал тең:

$$d^2z = -\frac{4dx^2}{(2x+5y)^2} - \frac{20dxdy}{(2x+5y)^2} - \frac{25dy^2}{(2x+5y)^2}.$$

Мысал-7. $z = x^5y^9$ функциясы берілген. Үшінші ретті дифференциалды d^3z - ті табыңыз.

Шешуі: (2.4) формуланы қолданамыз. Ол үшін дербес туындыларын табамыз.

Бірінші ретті дербес туындылары:

$$z'_x = (x^5y^9)'_x = 5x^4y^9, \quad z'_y = (x^5y^9)'_y = 9x^5y^8.$$

Екінші ретті дербес туындылары:

$$z''_{xx} = (5x^4y^9)'_x = 20x^3y^9, \quad z''_{yy} = (9x^5y^8)'_y = 72x^5y^7.$$

Үшінші ретті дербес туындылары:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = z'''_{xxx} = (20x^3y^9)'_x = 60x^2y^9,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = z'''_{yyy} = (72x^5y^7)'_y = 504x^5y^6.$$

Аралас дербес туындылары:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = (20x^3y^9)'_y = 180x^3y^8,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (5x^4y^9)'_y = 45x^4y^8,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = (45x^4y^8)'_y = 360x^4y^7.$$

Сонымен, берілген функцияның үшінші ретті дифференциалы тең:

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3 =$$

$$= 60x^2y^9dx^3 + 3 \cdot 180x^3y^8dx^2dy + 3 \cdot 360x^4y^7dxdy^2 + 504x^5y^6dy^3.$$

Екі айнымалы функцияның экстремумы. Егер $z = f(x, y)$ функциясының $M_0(x_0, y_0)$ нүктесіндегі мәні оның осы нүктенің маңайындағы басқа $M(x, y)$ нүктелеріндегі мәндерінен артық (кем) болса, онда $f(x, y)$ функциясының M_0 нүктесінде максимумы (минимумы) бар дейді.

Функцияның максимумы мен минимумын оның экстремумы деп атайды.

Теорема (экстремумның қажетті шарты). Егер дифференциалданатын $z = f(x, y)$ функциясының $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде экстремумы болса, онда осы нүктедегі 1-ші ретті дербес туындылары нөлге тең болады, яғни

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Дербес туындылар нөлге тең болатын нүктелерді стационар нүктелер деп атайды.

Мынадай белгілеулер енгіземіз:

$$A=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2},\quad B=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y},\quad C=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2},$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2.$$

Теорема (экстремумның жеткілікті шарты). Егер $z=f(x,y)$ функциясы үшін

1) $\Delta>0$ болса, функцияның M_0 нүктесінде экстремумы бар және A<0 болса - максимум, ал A>0 болғанда - минимум;

2) егер $\Delta<0$ болса, онда M_0 нүктесінде экстремум жоқ;

3) егер $\Delta=0$ болса, қосымша зерттеулер жүргізу керек.

Мысал-8. $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

Шешуі. Берілген функцияның 1-ші ретті дербес туындылары:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y-3,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=x+2y-6.$$

Экстремумның қажетті шартын пайдаланып стационар нүктелерін табамыз:

$$\begin{cases}2x+y-3=0\\ x+2y-6=0\end{cases}$$

бұдан $x=0,\quad y=3;\quad M(0;3)$ нүктесін аламыз.

M нүктесіндегі 2-ші ретті дербес туындылардың мәндерін табамыз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1$$

және дискриминантын құрамыз:

$$\Delta=AC-B^2=2\cdot 2-1=3>0;\ A>0.$$

Демек, M(0;3) нүктесінде берілген функцияның минимумы болады. Функцияның бұл нүктедегі мәні $z_{\min}=-9$.

Мысал-9. $f(x,y)=x^3+3xy^2-30x-18y$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

Шешуі: Бірінші ретті дербес туындыларын тауып, нөлге теңестіріп, стационар нүктелерін анықтаймыз:

$$f'_x(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 30, \qquad f'_y(x,y) = 6xy - 18.$$

Жүйе құрастырып, стационар нүктелерінің x және y координаталарын табамыз:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10 = 0 \\ xy - 3 = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x^2 + \frac{9}{x^2} - 10 = 0 \\ \quad y = \frac{3}{x} \end{cases}.$$

Соңғы жүйедегі бірінші теңдеуді шешеміз. Бұл биквадрат теңдеуі:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0,$$

$$t = x^2, \quad t^2 - 10t + 9 = 0, \qquad t_{1,2} = \frac{10 \pm 8}{2}.$$

$$t_1 = 9; \;\; x^2 = 9; \quad x_{1,2} = \pm 3;$$

$$t_2 = 1; \;\; x^2 = 1; \quad x_{3,4} = \pm 1.$$

Яғни берілген функцияның стационар нүктелері:

$$P_1(3,1); \;\; P_2(1,3); \;\; P_3(-1,-3); \;\; P_4(-3,-1).$$

Дискриминантты табу үшін бірінші және екінші ретті дербес туындыларын табамыз:

$$f'_x(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 30, \qquad f'_y(x,y) = 6xy - 18.$$

$$A = f''_{xx} = 6x, \quad B = f''_{xy} = 6y, \quad C = f''_{yy} = 6x.$$

Дискриминант тең болады:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 36x^2 - 36y^2 = 36(x^2 - y^2).$$

Осыдан экстремумның жеткілікті шартын қолданып келесі қорытынды жасаймыз:

1) $P_1(3,1)$ нүктесінде анықтауыштың мәні $\Delta = 36 \cdot (9-1) > 0$ оң болғандықтан функцияның экстремумы бар және $A = f''_{xx}(P_1) = 18 > 0$, демек минимум;

2) $P_2(1,3)$ нүктесінде $\Delta = 36 \cdot (1-9) < 0$ теріс болғандықтан бұл нүктеде функцияның экстремумы болмайды;

3) $P_3(-1,-3)$ нүктесінде $\Delta = 36 \cdot (1-9) < 0$ теріс болғандықтан, бұл нүктеде функцияның экстремумы болмайды;

4) $P_4(-3,-1)$ нүктесінде анықтауыштың мәні $\Delta = 36 \cdot (9-1) > 0$ оң болғандықтан, функцияның экстремумы бар және $A = f''_{xx}(P_4) = 6 \cdot (-3) < 0$, демек $P_4(-3,-1)$ максимум нүктесі.

Жауабы. Функцияның екі экстремумы бар:

$$z_{min} = z(3{,}1) = 3^3 + 3 \cdot 3 \cdot 1^2 - 30 \cdot 3 - 18 \cdot 1 = -72.$$

$$z_{max} = z(-3,-1) = (-3)^3 + 3 \cdot (-3) \cdot (-1)^2 - 30 \cdot (-3) - 18 \cdot (-1) = 72.$$

Екі айнымалы функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері. Шектелген тұйық облыста анықталған үзіліссіз функция өзінің ең үлкен және ең кіші мәндерін осы облыстың ішкі нүктелерінде немесе шекаралық нүктелерінде қабылдайды.

Функцияның шектелген тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табу үшін:

1) берілген облысқа кіретін экстремум нүктелерін тауып, осы нүктелердегі функцияның мәндерін есептейміз;

2) облыстың шекарасын түзейтін сызықтар бойында функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін есептейміз;

3) табылған мәндердің ішінен ең үлкені мен кішісін таңдаймыз.

3-ДӘРІС. Еселі интегралдар, олардың негізгі қасиеттері. Декарттық координатада екі еселі интегралды есептеу

Тікбұрышты координаталарда берілген қос интеграл. *D* облысындағы $f(x,y)$ функциясының қос немесе екі еселі интегралы:

$$I = \iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k \ .$$

Қос интегралдың негізгі қасиеттері:

1. $$\iint_D [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]d\sigma = \iint_D f_1(x,y)d\sigma \pm \iint_D f_2(x,y)d\sigma.$$

2. $\iint_D Cf(x,y)d\sigma = C\iint_D f(x,y)\,d\sigma$, мұндағы *C* – тұрақты сан.

3. Егер *D* интегралдау облысы D_1 және D_2 облыстарына бөлінсе, яғни $D=D_1+D_2$ болса, онда

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\,d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\,d\sigma.$$

Тікбұрышты координаталарда қос интегралдың есептелуі

I. Егер $D = \{a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ болса, онда қос интеграл былайша есептеледі:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

және де алдымен ішкі интеграл *y* бойынша (*x*-ті тұрақты деп алып) есептеледі.

II. Егер $D = \{c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$ болса, онда қос интеграл былайша есептеледі:

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

және де алдымен ішкі интеграл *x* бойынша (*y*-ті тұрақты деп алып) есептеледі.

Көрсетілген формулалардың оң жақтары қайталанбалы интегралдар деп аталады.

Мысал-1. Екі еселі интегралды есептеңіз:

$$\iint_D (2x + y^2 - 1)dxdy, \qquad 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 3.$$

Шешуі. Еселі интегралды қайталанбалы интеграл түрінде жазамыз:

$$\iint_D (2x + y^2 - 1)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^3 (2x + y^2 - 1)dy =$$

Алдымен ішкі интегралды *y* бойынша (*x*-ті тұрақты деп алып) есептейміз:

$$= \int_0^1 dx \left\{ 2x \int_0^3 1dy + \int_0^3 y^2 dy - \int_0^3 1dy \right\} =$$

$$= \int_0^1 \left(2xy + \frac{y^3}{3} - y \right)\Bigg|_0^3 dx =$$

Енді алынған функцияны x бойынша интегралдаймыз (сыртқы интегралды есептейміз):

$$= \int_0^1 \left(2 \cdot x \cdot 3 + \frac{27}{3} - 3\right) dx = \int_0^1 (6x + 6) dx = (3x^2 + 6x)|_0^1 = 9.$$

Мысал-2. Екі еселі интегралды есептеңіз

$$\int_1^2 dx \int_x^{x^2} (2x - y) dy.$$

Шешуі. Ішкі интегралды y бойынша (x-ті тұрақты деп алып) есептейміз:

$$\int_1^2 dx \left\{ 2x \int_x^{x^2} dy - \int_x^{x^2} y dy \right\} = \int_1^2 \left\{ 2xy - \frac{y^2}{2} \right\} \Bigg|_{y=x}^{y=x^2} dx.$$

Енді y үшін шектерін қойып, ықшамдап алынған функцияны x бойынша интегралдаймыз, яғни сыртқы интегралды есептейміз:

$$= \int_1^2 \left[\left(2x \cdot x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} \right) - \left(2x \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) \right] dx =$$

$$= \int_1^2 \left[2x^3 - \frac{x^4}{2} - 2x^2 + \frac{x^2}{2} \right] dx = \int_1^2 \left[2x^3 - \frac{x^4}{2} - \frac{3x^2}{2} \right] dx =$$

$$= \left(\frac{2x^4}{4} - \frac{x^5}{2 \cdot 5} - \frac{3x^3}{2 \cdot 3} \right) \Bigg|_{x=1}^{x=2} =$$

$$= \frac{2 \cdot 16}{4} - \frac{32}{10} - \frac{24}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = 8 - 3{,}2 - 4 = 0{,}8.$$

Мысал-3. Екі еселі интегралды есептеңіз:

$$\iint_D 2x^2 y dx dy, \quad 0 \le x \le 1, \quad x \le y \le \sqrt{x}.$$

Шешуі. Еселі интегралды қайталанбалы интеграл түрінде жазып интегралдаймыз:

$$\iint\limits_{D} 2x^2ydxdy = \int\limits_{0}^{1} 2x^2dx \int\limits_{x}^{\sqrt{x}} ydy =$$

$$=01\, 2x^2 \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_{x}^{\sqrt{x}} dx = 01(x^2y^2)|_{x}^{\sqrt{x}}dx =$$

$$\int\limits_{0}^{1} (x^3 - x^4)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{20}.$$

Екі еселі интегралда айнымалыларды ауыстыру

1) Полярлық координаталардағы қос интеграл. Тікбұрышты координаталарымен берілген қос интегралды $x = \rho cos\theta,\ \ y = \rho sin\theta$ өрнектері арқылы байланысатын $\rho,\ \theta$ полярлық координаталарға көшіру келесі формула бойынша орындалады:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta.$$

Полярлық координаталар үшін якобиан:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

Мысал-4. Полярлық координаталарға көшіп $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$ еселі интегралды есептеңіз, мұнда $D = \{x^2 + y^2 \le a^2\}$ облысы шеңбердің 1-ші ширегі.

Шешуі. $x = \rho cos\varphi,\ y = \rho sin\varphi$ арқылы полярлық координаталарға көшеміз. Осыдан $x^2 + y^2 = \rho^2$, яғни $\rho^2 \le a^2$, сонда $0 \le \rho \le a$. Есептің шарты бойынша $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, себебі шеңбер 1-ші ширекте жатады.

$$\iint\limits_{D} \sqrt{x^2 + y^2}dxdy = \iint\limits_{D} \sqrt{\rho^2cos^2\varphi + \rho^2sin^2\varphi} \cdot \rho\ d\rho d\varphi =$$

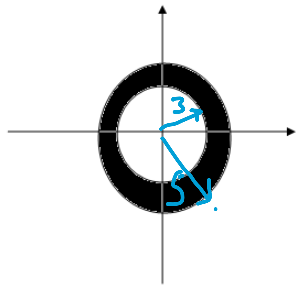
$$= \iint\limits_{D} \sqrt{\rho^2(cos^2\varphi + sin^2\varphi)} \cdot \rho\ d\rho d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a \rho^2 d\rho = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \rho^3\Big|_0^a d\varphi = \frac{a^3}{3}\int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{a^3}{3}\varphi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^3}{6}.$$

Мысал-5. Полярлық координаталарға көшіп $\iint_D \sqrt{x^2+y^2-9}\,dxdy$ интегралды есептеңіз, мұнда D облысы екі шеңберден

$$x^2+y^2=9 \text{ және } x^2+y^2=25$$

құрылған сақина (3.1 сурет).



3.1 сурет

Шешуі. $x=\rho cos\varphi,\ y=\rho sin\varphi$ полярлық координаталарға көшеміз. D облысын қарастырамыз:

$$x^2+y^2=9, \qquad \rho^2=9, \qquad \rho=\pm 3,$$

$$x^2+y^2=25, \qquad \rho^2=25, \qquad \rho=\pm 5,$$

яғни $3 \le \rho \le 5$. Есеп шарты бойынша сақина берілген, яғни $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Берілген $(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-9}$ функция полярлық жүйеде:

$$\sqrt{x^2+y^2-9}=\sqrt{\rho^2-9}$$

тең болады. Интегралды есептейміз:

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2-9}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_3^5 \rho\sqrt{\rho^2-9}\,d\rho =$$

Ішкі интегралды алмастыру әдісімен шешеміз:

$$= \left| \begin{array}{c} t=\rho^2-9, \\ dt=2\rho d\rho, \\ \frac{dt}{2}=\rho d\rho, \\ \rho_1=3, \text{онда } t_1=3^2-9=0 \\ \rho_2=5, \text{онда } t_2=5^2-9=16 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{16} \sqrt{t}\frac{dt}{2} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\frac{2t^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_0^{16} d\varphi =$$

$$= \frac{64}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{64}{3}\varphi\,]_0^{2\pi} = \frac{128\pi}{3}.$$

Мысал-6. Декарттық жүйеде $D = \{x^2 + y^2 = 4x\}$ облысында қос интеграл берілген $\iint_D (x^2 + y^2)dxdy$. Полярлық жүйесіне көшіңіз (екі еселі интегралды есептемей).

Шешуі. Полярлық жүйеге көшеміз, мұнда *D* облысы $x^2 + y^2 = 4x$, осыдан

$$\rho^2 = 4\rho cos\varphi, \qquad \rho = 4cos\varphi, \quad 0 \le \rho \le 4cos\varphi.$$

Онда аламыз:

$$\iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{4cos\varphi} \rho^2 \cdot \rho d\rho.$$

Мысал-7. D: $x^2 + y^2 = 2$ облысында полярлық жүйесіне көшіңіз (екі еселі интегралды есептемей)

$$\iint_D \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^4}\,dxdy.$$

Шешуі. Полярлық жүйеге көшеміз, мұнда *D* облысы - центрі бас нүктеде жатадың радиусы $\mathrm{r} = \sqrt{2}$ тең шеңбер, яғни $0 \le r \le \sqrt{2}$.

D облысы шеңбер болғандықтан $0 \le \varphi \le 2\pi$. Сонда келесі облыс аламыз:

$$D'\colon \{0 \le r \le \sqrt{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}.$$

Интеграл астындағы функция келесі түрге келтіріледі:

$$\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^4} = \sqrt[3]{(r^2)^4} = r^{\frac{8}{3}},$$

сонда

$$\iint_D \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^4}\,dxdy = \begin{vmatrix} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \iint_{D'} r^{8/3}\,rdrd\varphi = \iint_{D'} r^{11/3}\,drd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^{11/3}dr.$$

Мысал-8. D: $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ облысында полярлық жүйесіне көшіңіз (екі еселі интегралды есептемей)

$$\iint_D \sqrt{2x^2+y^2}dxdy\ .$$

Шешуі: D облысы бойынша полярлық координаттар жүйесіне көшеміз:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 = r^2(cos^2\varphi + sin^2\varphi) = r^2 \Rightarrow$$

$$D{:}\, 1 \le x^2+y^2 \le 4 \Rightarrow \quad D'{:}\, 1 \le r^2 \le 4 \Rightarrow \quad D'{:}\begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}.$$

Берілген функцияны полярлық координаттар жүйесінде сипаттаймыз:

$$\sqrt{2x^2+y^2} = \sqrt{2r^2cos^2\varphi + r^2sin^2\varphi} =$$

$$= \sqrt{r^2(cos^2\varphi + cos^2\varphi + sin^2\varphi)} = r\sqrt{1+cos^2\varphi}.$$

Сонда

$$\iint_D \sqrt{2x^2+y^2}dxdy = \iint\limits_{D'} r\cdot\sqrt{1+cos^2\varphi}\cdot \mathrm{r}d\varphi dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 r^2\sqrt{1+cos^2\varphi}dr = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+cos^2\varphi}d\varphi \int\limits_1^2 r^2dr.$$

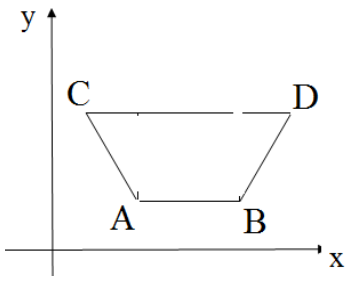
Мысал-9. Төбелерінің координаталары A(4;2), B(6;2), C(2;4), D(8;4) болатын фигураның ауданын есептеңіз. Сызбасын салыңыз.

Шешуі. Бұл фигура - *ABCD* трапециясы, мұндағы *AB* мен *CD* түзулері *OX* осіне параллель трапеция табандары.

Сыртқы интегралды *y* айнымалы бойынша алсақ, мына ауданды қарастырамыз (сурет 3.2):

$$D = \{0 \le y \le 4;\ \ AC \le x \le BD\}.$$

AC және *BD* түзулерінің теңдеулерін жазамыз:



Сурет 3.2

$$AC{:}\ \frac{x-4}{2-4} = \frac{y-2}{4-2} \qquad \frac{x-4}{-2} = \frac{y-2}{2}, \quad \text{осыдан} \quad AC{:}\ \ x = -y+6$$

және

$$BD{:}\ \frac{x-6}{8-6} = \frac{y-2}{4-2} \qquad \frac{x-6}{2} = \frac{y-2}{2}, \quad \text{осыдан} \quad BD{:}\ \ x = y+4.$$

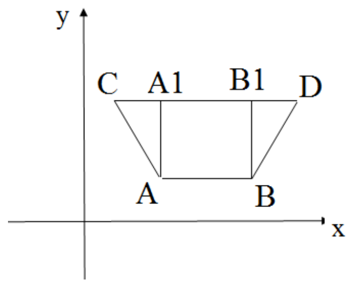
Онда

$$S=\int_{2}^{4}dy\int_{AC}^{BD}dx=\int_{2}^{4}dy\int_{-y+6}^{y+4}dx=$$

$$=\int_{2}^{4}x\rfloor_{x=-y+6}^{x=y+4}dx=\int_{2}^{4}\big(y+4-(-y+6)\big)dy=$$

$$=\int_{2}^{4}(2y-2)dy=\left(\frac{2\cdot y^2}{2}-2y\right)\Bigg|_{2}^{4}=(y^2-2y)\rfloor_2^4=16-8-(4-4)=8.$$

Ескерту. Жоғарыда қарастырылған интегралдау жолын таңдау тиімді (сыртқы интегралды y айнымалы бойынша алу), себебі егер сыртқы интегралды x айнымалысы бойынша алсақ, онда интегралдау облысы $D=D_1+D_2+D_3$ тең болады, мұндағы D_1 облысы - ΔACA_1 үшбұрыш, D_2 облысы - AA_1BB_1 тікбұрыш, D_3 облысы - ΔBDB_1 үшбұрыш.



3.3 сурет

Яғни бір қайталанбалы интегралдын орнына

$$S=\int_{2}^{4}dy\int_{AC}^{BD}dx$$

төбелерінің координаталары A(4;2), B(6;2), C(2;4), D(8;4) болатын $D=D_1+D_2+D_3$ облысына ие трапеция ауданы келесі үш қайталанбалы интеграл арқылы есептеледі:

$$S=\int_{2}^{4}dx\int_{AC}^{A_1C}dy+\int_{4}^{6}dx\int_{AB}^{A_1B_1}dy+\int_{6}^{8}dx\int_{BD}^{B_1D}dy.$$

Мысал-10. Интегралдау ретін өзгертіңіз

$$\int_{-2}^{2}dx\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy.$$

Шешуі. Есеп шарты бойынша ішкі интеграл x бойынша, ал сыртқы интеграл y айнымалы бойынша берілген (сурет 3.4):

$$x=-2;\quad x=2;\; y=0;\; y=\sqrt{4-x^2}.$$

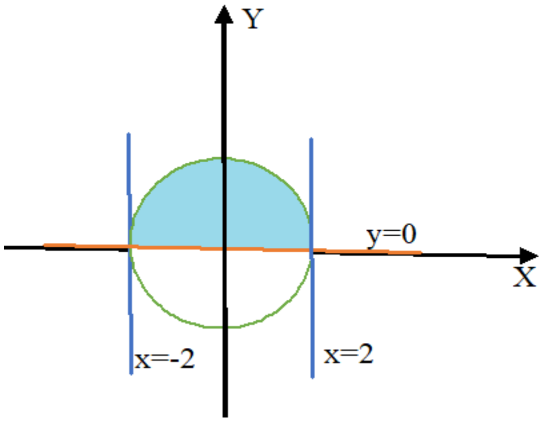
Осыдан аламыз:

$$y = \sqrt{4 - x^2} \implies y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4.$$

Бұл центрі $O(0;0)$ бас нүктеде жататын радиусы $r = 2$ тең шеңбер. Соңғы $x^2 + y^2 = 4$ теңдеуден аламыз: $x = \pm\sqrt{4 - y^2}$.

Реті өзгертілген интеграл мына турде жазылады:

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy = \int_{0}^{2} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx.$$



Сурет 3.4

2) **Қисық сызықты координаталардағы қос интеграл.** Айталық қос интеграл тікбұрышты координаталарымен ***x*=*x*(*u*,*v*)**, ***y*=*y*(*u*,*v*)** өрнектері арқылы байланысатын u, v қисық сызықты координаталарына ауыстырылсын, мұнда x(u,v) және y(u,v) функцияларының uOv жазықтығының D' облысында үзіліссіз дербес туындылары бар және түрлендірудің якобиан деп аталатын анықтауышы D' облысында нөлге тең емес:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (3.1)$$

Сонда

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f[x(u,v),\, y(u,v)]|J|dudv.$$

Мысал-11. $x = u(1 - v),\ y = uv$ функциялары үшін якобианды есептеңіз.

Шешуі. (3.1) формуланы қолданамыз, сонда якобиан тең болады:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial[u(1-v)]}{\partial u} & \dfrac{\partial[u(1-v)]}{\partial v} \\ \dfrac{\partial(uv)}{\partial u} & \dfrac{\partial(uv)}{\partial v} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial[u(1-v)]}{\partial u} \cdot \frac{\partial(uv)}{\partial v} - \frac{\partial[u(1-v)]}{\partial v} \cdot \frac{\partial(uv)}{\partial u} =$$

$$= (1 - v) \cdot u - (-u) \cdot v = u - uv + uv = u.$$

Мысал-12. $x = uv^2,\ y = u^2 + v$ функциялары үшін якобианды есептеңіз.

Шешуі. (3.1) формула бойынша якобиан тең болады:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial(uv^2)]}{\partial u} & \frac{\partial(uv^2)]}{\partial v} \\ \frac{\partial(u^2+v)}{\partial u} & \frac{\partial(u^2+v)}{\partial v} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial(uv^2)}{\partial u} \cdot \frac{\partial(u^2+v)}{\partial v} - \frac{\partial(uv^2)}{\partial v} \cdot \frac{\partial(u^2+v)}{\partial u} =$$

$$= v^2 \cdot 1 - 2uv \cdot 2u = v^2 - 4u^2 v.$$

Мысал-13. $x = cos(uv),\ y = sin(uv)$ функциялары үшін якобианды есептеңіз.

Шешуі. (3.1) формула бойынша якобиан тең болады:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial cos(uv)}{\partial u} & \frac{\partial cos(uv)]}{\partial v} \\ \frac{\partial sin(uv)}{\partial u} & \frac{\partial sin(uv)}{\partial v} \end{vmatrix} =$$

$$= -v \cdot sin(uv) \cdot u \cdot cos(uv) - [-u \cdot sin(uv) \cdot v \cdot cos(uv)] =$$

$$= sin(uv) \cdot cos(uv) \cdot [-uv + uv] = 0.$$

Қос интегралдардың қолданулары

Жазық фигураның ауданын есептеу. D облысымен шектелген жазық фигураның ауданы келесі формула бойынша есептеледі:

$$S = \iint_D dxdy. \qquad (3.2)$$

Мысал-14. D облысы $0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 3$ болатын фигураның ауданын есептеңіз.

Шешуі. D облысымен шектелген жазық фигураның ауданын есептеу үшін (3.2) формуланы қолданамыз:

$$S = \int_0^2 dx \int_1^3 dy = 2\int_0^2 dx = 4.$$

2) Егер D облысы $a \le x \le b, \quad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$ теңсіздіктерімен анықталса, онда

$$S = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy .$$

3) Егер D облысы полярлық координаталарда $\alpha \le \theta \le \beta, \quad \varphi(\theta) \le \rho \le f(\theta)$ теңсіздіктерімен анықталса, онда

$$S = \iint_D \rho \, d\rho \, d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi(\theta)}^{f(\theta)} \rho \, d\rho .$$

Дененің көлемін есептеу. Жоғарыдан z=*f*(x,y) үзіліссіз бетпен, төменнен z=0 жазықтығымен және бүйірінен *XOY* жазықтығында *D* облысын қиятын цилиндрлік бетпен шектелген цилиндрлік дененің көлемі келесі формула бойынша есептеледі:

$$V = \iint_D f(x, y) dxdy .$$

Беттің ауданын есептеу.

а) Егер тегіс бет z=*f*(*x*,*y*) теңдеуі арқылы берілсе, онда беттің ауданы келесі формула бойынша есептеледі:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dxdy ,$$

мұнда *D* берілген беттің *XOY* жазықтығындағы проекциясы.

ә) Егер бет *x*=*f*(y,z) теңдеуі арқылы берілсе, онда

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} \, dydz ,$$

мұнда *D* берілген беттің *YOZ* жазықтығындағы проекциясы.

б) Егер беттің теңдеуі y=*f*(*x*,*z*) түрінде берілсе, онда

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} \, dxdz ,$$

мұнда *D* берілген беттің *XOZ* жазықтығындағы проекциясы.

4-ДӘРІС. Декарттық координатада үш еселі интеграл

$f(x,y,z)$ функциясынан T облысы бойынша алынған үш еселі интеграл келесі түрде белгіленеді:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dV = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta V_k \ .$$

Үш еселі интегралдың негізгі қасиеттері екі еселі интегралдың қасиеттеріне сәйкес болады.

Декарттық координаталарда үш еселі интеграл келесі түрде жазылады:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz \ .$$

Үш еселі интегралдың есептелуі

I. Егер T: $x_1 \le x \le x_2, \quad y_1(x) \le y \le y_2(x),\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$ болса, онда T облысы бойынша алынған үш еселі интеграл келесі формуланың көмегімен есептеледі:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Мысал-1. $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 xyzdz$ үш еселі интегралды есептеңіз.

Шешуі. Есеп шарты бойынша үштік интеграл астында x, y және z функциялар көбейтіндісі берілген, онда

$$\int_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 xyzdz = \int_0^1 xdx \int\limits_0^2 ydy \int\limits_0^3 zdz =$$

$$= \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 \cdot \frac{y^2}{2}\bigg|_0^2 \cdot \frac{z^2}{2}\bigg|_0^3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{9}{2} = \frac{36}{8} = 4{,}5.$$

Мысал-2. $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 (x+y+z)dz$ үш еселі интегралды есептеңіз.

Шешуі. Есеп шарты бойынша үштік интеграл астында x, y және z функциялардың қосындысы берілген. Берілген үштік интегралды біртіндеп z, y, x айнымалылары бойынша интегралдаймыз:

$$\int_0^1 dx\int_0^2 dy\int_0^3 (x+y+z)dz =$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^2 \left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^3 dy = \int_0^1 dx\int_0^2 \left(3x+3y+\frac{9}{2}\right)dy =$$

$$=\int_0^1 \left(3xy+3\cdot\frac{y^2}{2}+\frac{9}{2}y\right)\Big|_0^2 dx = \int_0^1 (6x+6+9)\,dx = \int_0^1 (6x+15)\,dx =$$

$$=\left(\frac{6x^2}{2}+15x\right)\Big|_0^1 = 3+15=18.$$

Мысал-3. Берілген $V=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x,\quad 0\le z\le 1-x-y\}$ облысында үш еселі интегралды есептеңіз:

$$\iiint\limits_V zdxdydz.$$

Шешуі. Берілген үштік интегралды біртіндеп z, y, x айнымалылары бойынша интегралдаймыз:

$$\iiint\limits_V zdxdydz = \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} zdz =$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} \frac{z^2}{2}\Big|_0^{1-x-y} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy =$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x} (1-x-y)^2 d\,(1-x-y) =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1-x-y)^3}{3}\Big|_0^{1-x} dx = \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3 dx = -\frac{(1-x)^4}{24}\Big|_0^1 = \frac{1}{24}.$$

2) Егер үш еселі интегралды есептегенде x,y,z айнымалыларынан $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$ өрнектері арқылы байланысатын u,v,w айнымалыларына көшу керек болса, *Oxyz* кеңістігінің T облысы мен *Ouvw* кеңістігінің T' облысының нүктелерінің арасында өзара бірмәнді және екі

жаққа да үзіліссіз сәйкестік орнатылады да T' облысында J якобианы нөлге айналмайды:

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

онда үш еселі интегралды есептегенде келесі формуланы пайдалану керек:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_T f[x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w)]\cdot|J|dudvdw.$$

3) Үштік интеграл цилиндрлік координаталарда берілген болсын

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z\ \ (0\le\rho<+\infty, 0\le\varphi\le 2\pi,\ -\infty<z<+\infty).$$

Түрлендіру якобианы $J=\rho$ болады және үш еселі интегралдың цилиндрлік координаталардағы формуласы:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_T f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz =$$

$$=.\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \rho\, d\rho \int\limits_{z_1}^{z_2} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)dz.$$

Үш еселі интегралдың қолданылулары

1) T облысында жататын дененің көлемі келесі формула бойынша есептеледі:

$$V=\iiint\limits_T dxdydz.$$

Мысал-4. x=1, x=3, y=0, y=1, z=0, z=2 жазықтықтарымен шектелген V облысы бойынша $\iiint_V (x+3y-2z)dxdydz$ үш еселі интегралдарды есептеңіз.

Шешуі. V облысы «дұрыс», ол - параллелепипед:

$$V: \begin{cases} 1\le x\le 3 \\ 0\le y\le 1. \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$$

Үш еселі интегралда шекараларды ретімен қоюға болады:

$$\iiint_V (x+3y-2z)dxdydz = \int_1^3 dx \int_0^1 dy \int_0^2 (x+3y-2z)dz.$$

Ішкі интеграл z айнымалы бойынша болғандықтан, x және y айнымалыларын тұрақты деп есептейміз:

$$\int_1^3 dx \int_0^1 dy \int_0^2 (x+3y-2z)dz = \int_1^3 dx \int_0^1 \left((x+3y)z - z^2 \Big|_0^2 \right) dy =$$

келесі интеграл y айнымалы бойынша болғандықтан, x айнымалыны тұрақты деп есептейміз:

$$= \int_1^3 dx \int_0^1 (2(x+3y)-4)dy = = \int_1^3 \left(2xy + \frac{6}{2}y^2 - 4y \Big|_0^1 \right) dx =$$

Соңында x-ке тәуелді функция аламыз, яғни оны x бойынша интегралдап жауабын аламыз:

$$= \int_1^3 (2x+3-4)dx = (x^2-x)\Big|_0^3 = 9-1 = 8.$$

Мысал-5. Келесі кеңістіктермен шектелген фигураның көлемін табыңыз:

$$x = \sqrt{y}; \quad x = \sqrt{2y}, \quad z = 0; \quad 2x + z = 4.$$

Шешуі. Дененің көлемі келесі формула бойынша есептеледі:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz.$$

мұндағы V облысы:

$$x = \sqrt{y} \quad \Longrightarrow \quad y = x^2, \qquad x = \sqrt{2y} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^2}{2}.$$

Осыдан

$$\frac{x^2}{2} \le \mathrm{y} \le x^2, \quad z = 0, \quad 2x + z = 4 \quad \Rightarrow \quad z = 4 - 2x,$$

онда

$$0 \le z \le 4 - 2x.$$

Енді, егер $z = 0$ болса, онда

$$2x + 0 = 4 \quad \Rightarrow \quad 2x = 4; \quad x = 2 \text{, яғни } \quad 0 \le x \le 2.$$

Сонымен берілген облысының көлемі:

$$V = \int_0^2 dx \int_{x^2/2}^{x^2} dy \int_0^{4-2x} dz = \int_0^2 dx \int_{x^2/2}^{x^2} (4-2y)dy =$$

$$= \int_0^2 (4-2x)\frac{x^2}{2}dx = \int_0^2 (2x^2 - x^3)dx = \frac{4}{3}.$$

2) Егер дененің тығыздығы айнымалы болса, яғни $\gamma = \gamma(x, y, z)$, онда T облысында жататын дененің массасы келесі формула бойынша есептеледі:

$$M = \iiint_T \gamma(x, y, z)dxdydz.$$

3) Дененің ауырлық центрінің координаталары мына формулалар бойынша анықталады:

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iiint_T \gamma\, xdxdydz, \quad \bar{y} = \frac{1}{M}\iiint_T \gamma\, ydxdydz, \quad \bar{z} = \frac{1}{M}\iiint_T \gamma\, zdxdydz$$

мұндағы $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ - геометриялық ауырлық центрінің координаталары.

4) **Координата осьтеріне қатысты инерция моменттері** сәйкесінше төмендегідей болады:

$$I_x = \iiint_T (y^2 + z^2)dxdydz,$$

$$I_y = \iiint_T (x^2 + z^2)dxdydz.$$

Модуль – 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

5-ДӘРІС. Бірінші ретті жай (қарапайым) дифференциалдық теңдеулер

Көп жағдайларда физикалық құбылыстарды зерттеу кезінде тәуелсіз айнымалы x пен ізделініп отырған функция y арасындағы байланыс белгісіз болады, бірақ осы функция мен оның туындыларының арасындағы байланыс беріледі.

Дифференциалдық есептеуде мынадай есептер шешіледі: кейбір функцияның туындысы белгілі болады да, сол функцияның өзін табу керек.

Туындыға қатысты шешілген бірінші ретті жай (қарапайым) дифференциалдық теңдеу туралы түсінік және оның шешімі

Анықтама. Дифференциалдық теңдеу деп тәуелсіз айнымалы x пен ізделінетін $y = y(x)$ функциясын және оның $y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ туындыларын байланыстыратын теңдеуді атайды:

$$F(x, y, y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0. \qquad (5.1)$$

Анықтама. n–ретті (5.1) дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі (жалпы интегралы) деп тәуелсіз айнымалы x және кез келген n тұрақты саннан тәуелді $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ функциясын айтады.

Бұл жалпы шешім (жалпы интеграл) мына түрде жазылады:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0.$$

Анықтама. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімі деп жалпы шешімінен (жалпы интегралынан) тұрақтылардың белгілі бір мәндерінде алынған шешімін айтады.

Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу үшін бастапқы шарттар беріледі:

$$y_0 = y(x_0), \quad y_0' = y'(x_0), \ldots, {y_0}^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0).$$

Дифференциалдық теңдеудің бастапқы шарттарды қанағаттандыратын шешімін табу есебін Коши есебі деп атайды.

Мысал-1. $y = \sin x + \cos x$ функциясының $y'' + y = 0$ ДТ шешімі болатынын анықтаңыз.

Шешуі. $y(x)$ функциясының туындыларын табамыз:

$$y'(x) = \cos x - \sin x,$$

$$y''(x) = -\sin x - \cos x.$$

Берілген $y'' + y = 0$ дифференциалдық теңдеуге қоямыз:

$$-\sin x-\cos x+\sin x+\cos x=0$$

Осыдан $0=0$ тепе-теңдік алдық, яғни $y(x)$ функциясы берілген дифференциалдық теңдеуінін шешімі болады.

Мысал-2. Берілген $y = sin2x$ функция $y''+4y=0$ теңдеуінің шешімі бола ма?

Шешуі. Берілген функцияның екінші ретті туындысын табамыз:

$$y'=2\cos 2x,$$

$$y''=(2\cos 2x)'=-4\sin 2x.$$

Енді $y''=-4\sin 2x$ және $y = sin2x$ берілген теңдеуге қоямыз:

$$y''+4y=-4\sin 2x+4\sin 2x=0,$$

осыдан 0=0 аламыз, яғни $y=sin2x$ функциясы берілген дифференциалдық теңдеуінін шешімі болады.

Айнымалылары ажыратылатын (бөлінетін) дифференциалдық теңдеулер. Айнымалылары бөлінетін дифференциалдық теңдеу деп

$$M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0$$

түрдегі теңдеуді атайды. Бұл теңдеудің жалпы шешімі

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=C.$$

Нормалдық түрде берілген бірінші ретті дифференциалдық теңдеу:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y). \quad (5.2)$$

Егер бұл теңдеудің оң жағының біреуі тек x айнымалыдан, екіншісі тек y айнымалыдан тәуелді болатын екі функцияның көбейтіндісі ретінде жазылса, онда (5.2) теңдеуі айнымалылары бөлінетін (ажыратылатын) теңдеу болады. Демек,

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y),$$

онда (5.2) теңдеуден аламыз:

$$\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx.$$

Бұл айнымалылары бөлінген (ажыратылған) теңдеу және дифференциалдары өзара тең, сондықтан

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C,$$

мұндағы *C* кез келген тұрақты сан, демек бұл өрнек (5.2) теңдеудің жалпы шешімі болады.

Мысал-3. $y' = \frac{x}{y}$ дифференциалдық теңдеуді шешіңіз:

Шешуі. Берілген дифференциалдық теңдеуді келесі түрде жазамыз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

Бұл айнымалылары ажыратылатын (бөлінетін) дифференциалдық теңдеу, енді оны айнымалылары ажыратылған (бөлінген) дифференциалдық теңдеудің түріне келтіреміз:

$$ydy = xdx.$$

Алынған теңдеудің екі жағын интегралдап, жалпы шешімін аламыз:

$$\int ydy = \int xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C.$$

Берілген дифференциалдық теңдеудін жалпы шешімі $y^2 - x^2 = C$.

Мысал-4. $yy' + x = 0$ дифференциалдық теңдеуді шешіңіз.

Шешуі. Айнымалылары ажыратылатын (бөлінетін) дифференциалдық теңдеу:

$$y\frac{dy}{dx} = -x.$$

Осыдан айнымалылары ажыратылған (бөлінген) дифференциалдық теңдеу жазамыз:

$$ydy = -xdx.$$

Интегралдап, жалпы шешімін аламыз:

$$\int ydy = -\int xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C.$$

Сонымен $y^2 + x^2 = C$ – берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі.

Мысал-5. $xy' = 2y$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін (интегралын) табыңыз.

Шешуі. Берілген теңдеуді айнымалылары ажыратылатын түрде жазамыз:

$$x\frac{dy}{dx} = 2y.$$

Айнымалыларды ажыратамыз:

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}.$$

Интегралдап, логарифмдік функцияның қасиеттерін қолданамыз:

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x} \Rightarrow ln\, y = 2\, ln\, x + ln\, C,$$

$$ln\, y - 2\, ln\, x = ln\, C \Rightarrow ln\frac{y}{x^2} = ln\, C.$$

Осыдан $\frac{y}{x^2} = C$ - жалпы шешімі (интегралы).

Мысал-6. $y' = e^{x+y}$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі. $\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y$ - айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу. Осыдан айнымалылары ажыратылған дифференциалдық теңдеу:

$$\frac{dy}{e^y} = e^x dx.$$

Бұдан

$$e^{-y}dy = e^x dx \Rightarrow \int e^{-y}dy = \int e^x dx \ \Rightarrow -e^{-y} = e^x + C.$$

Жалпы шешімі: $e^{-y} + e^x = C$.

Мысал-7. $(1 + y^2)xdx + (1 + x^2)dy = 0$ дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралын табыңыз.

Шешуі.

$(1 + y^2)xdx = -(1 + x^2)dy$ - айнымалылары ажыратылатын (бөлінетін) дифференциалдық теңдеу. Бұдан айнымалылары ажыратылған (бөлінген) дифференциалдық теңдеу:

$$\frac{xdx}{1 + x^2} = -\frac{dy}{1 + y^2}.$$

Бұдан аламыз:

$$\int \frac{xdx}{1 + x^2} = -\int \frac{dy}{1 + y^2}.$$

Интегралдарды есептейміз:

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \left| \begin{matrix} t = 1+x^2 \\ dt = 2xdx \\ \dfrac{dt}{2} = xdx \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} ln\, t + C = \frac{1}{2} ln(1+x^2) + C$$

және

$$-\int \frac{dy}{1+y^2} = -arctgy + C.$$

Онда жалпы шешімі:

$$\frac{1}{2} ln(1+x^2) + arctgy = C.$$

Мысал-8. Коши есебін шешіңіз $(1+y^2)dx - xydy = 0, \qquad y(1) = 0.$

Шешуі. Алдын ала дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табамыз. Ол үшін айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеуден айнымалылары ажыратылған дифференциалдық теңдеу алып, екі жағын интегралдаймыз:

$$(1+y^2)dx = xydy, \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{ydy}{(1+y^2)}.$$

Осыдан

$$\int \frac{dx}{x} = ln\, x + C$$

және

$$\int \frac{ydy}{(1+y^2)} = \left| \begin{matrix} t = 1+y^2 \\ dt = 2ydy \\ \dfrac{dt}{2} = ydy \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} ln\, t + C = \frac{1}{2} ln(1+y^2) + C.$$

Логарифмдік функцияның қасиеттерін қолданамыз:

$$\frac{1}{2} ln(1+y^2) - ln\, x = ln\, C,$$

$$ln \frac{x}{\sqrt{1+y^2}} = ln\, C.$$

Сонымен жалпы шешімін алдық:

$$\frac{x}{\sqrt{1+y^2}} = C.$$

Енді $y(1) = 0$ бастапқы шартты қолданамыз, яғни жалпы шешімінен x=1, y=0 болғанда C мәнін анықтаймыз:

$$\frac{1}{\sqrt{1+0^2}} = C.$$

Осыдан C=1 аламыз, онда

$$\frac{x}{\sqrt{1+y^2}} = 1$$

берілген дифференциалдық теңдеудің дербес шешімі немесе Коши есебінің шешімі.

6-ДӘРІС. Біртекті теңдеулер. Бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу. Бернулли теңдеуі. Толық дифференциалды теңдеулер

Анықтама. Егер $P(x,y)$ пен $Q(x,y)$ функциялары бірдей өлшемді біртекті функциялар болса, демек

$$P(tx,ty) \equiv t^m P(x,y), \qquad Q(tx,ty) \equiv t^m Q(x,y)$$

тепе-теңдіктер орындалса, онда

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{6.1}$$

дифференциалдық теңдеуді біртекті дифференциалдық теңдеу деп атайды.

(6.1)-ші дифференциалдық теңдеуді келесі түріне келтіріп

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

y=tx, $y' = t + x\frac{dt}{dx}$ алмастыруы арқылы айнымалылары бөлінетін теңдеу алуға болады, мұндай теңдеулердің интегралдауы белгілі.

Мысал-1. Біртекті дифференциалдық теңдеудің шешімін табыңыз:

$$xyy' = y^2 + 2x^2.$$

Шешуі. y=tx, $y' = t + x\frac{dt}{dx}$ алмастыруды қолданамыз:

$$x^2t(xdt + tdx) = (t^2x^2 + 2x^2)dx.$$

Айнымалылары бөлінетін теңдеуге келтіреміз:

$$x^3tdt + x^2t^2dx = x^2(t^2+2)dx,$$

$$x^3tdt = x^2(t^2+2)dx - x^2t^2dx,$$

$$x^3tdt = x^2(t^2+2-t^2)dx,$$

$$x^3tdt = 2x^2dx \Rightarrow tdt = \frac{2x^2}{x^3}dx.$$

Интегралдаймыз

$$\frac{t^2}{2} = 2\,ln\,x + ln\,C.$$

Ескі айнымалыларға оралып, жалпы шешімін аламыз:

$$\frac{y^2}{2x^2} = ln|x^2C| \Rightarrow y^2 = 2x^2\,ln|x^2C|.$$

Жалпы шешімі: $y^2 = 2x^2\,ln|x^2C|$.

Бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу. Бернулли теңдеуі. Бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы түрі:

$$a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y + c(x) = 0, \qquad (6.2)$$

мұндағы $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ берілген аралықта үзіліссіз функциялар.

$a(x) \neq 0$ десек, онда бұл теңдеуді мына түрде жазуға болады:

$$y'(x) + p(x)y(\mathrm{x}) = q(x), \qquad (6.3)$$

мұндағы

$$p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}, \qquad q(x) = -\frac{c(x)}{a(x)}.$$

Егер $q(x) \neq 0$, онда (6.3) біртекті емес сызықтық теңдеу деп атайды.

Егер $q(x) = 0$ болса, онда

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0 \qquad (6.4)$$

біртекті сызықтық теңдеу деп атайды.

I. **Тұрақтыны вариациалау әдісі.** (6.3) дифференциалдық теңдеудің шешімін табу керек болса, онда алдымен (6.4) біртекті сызықтық теңдеудің жалпы шешімін табамыз, сонан соң (6.3) біртекті емес сызықтық теңдеудің шешімін табу үшін жалпы шешімдегі кез келген тұрақтыны x айнымалыдан тәуелді $C(x)$ функция деп қарастырамыз да осы $C(x)$ анықтаймыз. Ол үшін

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \qquad (6.5)$$

жоримыз да $C(x)$ функциясын (6.3) теңдеудің шешімі болады деп талап етіп анықтаймыз, сонда

$$C(x) = \int q\,(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1,$$

мұндағы C_1 кез келген тұрақты сан.

$C(x)$ мәнін (6.5) қойып (6.3) теңдеудің жалпы шешімін аламыз:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right).$$

Мысал-2, Тұрақтыны вариациалау әдісімен $y' = yctgx + sin\,x$ дифференциалдық теңдеуді шешіңіз.

Шешуі. Алдымен біртекті сызықтық теңдеуді қарастырамыз: $y' = yctgx$. Бұл теңдеудің жалпы шешімін табамыз:

$$\frac{dy}{dx} = yctgx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = ctgxdx.$$

Енді алынған айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеуді интегралдаймыз:

$$\int \frac{dy}{y} = \int ctgxdx \quad \Rightarrow \quad ln\,y = lnsin\,x + ln\,C.$$

Сонда жалпы шешімі

$$ln\,y = ln|sin\,x \cdot C| \quad \Rightarrow \quad y = C\,sin\,x.$$

Сонымен берілген теңдеудің жалпы шешімін мына түрде іздейміз:

$$y = C(x) \cdot sin\,x.$$

Берілген теңдеу үшін табамыз:

$$y' = C'(\text{x}) \cdot sin\,x + \text{C}(x) \cdot cos\,x.$$

Енді табылған $y = C(x) \cdot sin\,x$ және $y' = C'(\text{x}) \cdot sin\,x + \text{C}(x) \cdot cos\,x$ берілген $y' = yctgx + sin\,x$ теңдеуге қоямыз:

$$C'(\text{x}) \cdot sin\,x + \text{C}(x) \cdot cos\,x = C(x) \cdot sin\,x \cdot ctgx + sin\,x,$$

$$C'(\text{x}) \cdot \sin x + \text{C}(x) \cdot \cos x = C(x) \cdot \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + \sin x,$$

$$C'(\text{x}) \cdot \sin x + \text{C}(x) \cdot \cos x = C(x) \cdot \cos x + \sin x,$$

$$C'(\text{x}) \cdot \sin x = \sin x,$$

$$C'(\text{x}) = \frac{\sin x}{\sin x} \qquad C'(\text{x}) = 1.$$

С(x) табамыз:

$$\int C'(\text{x})dx = \int 1dx \quad \Rightarrow \quad C(\text{x}) = x + C.$$

Онда, берілген теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = C(\text{x}) \cdot \sin x = (x + C) \sin x.$$

II. **Алмастыру әдісі.** Берілген біртекті емес (6.3) теңдеудің шешімін

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

түрде іздейміз, мұндағы $u(x)$ пен $v(x)$ белгісіз функциялар, оларды табу керек. Осы мақсатпен

$$y(x) = u(x) \cdot v(x), \qquad y' = u'v + uv'$$

алмастыруларды (6.3) теңдеуге қоямыз:

$$v(x)\frac{du}{dx} + u(x)\left[\frac{dv}{dx} + p(x)\right] = q(x),$$

бұдан $u(x)$ пен $v(x)$ функцияларын анықтап, $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ қойып, берілген теңдеудің жалпы шешімін аламыз.

Мысал-3. $y' = 2xy = xe^{-x^2}$ дифференциалдық теңдеуді алмастыру әдісімен шешіңіз.

Шешуі. Келесі алмастыруларды қолданамыз:

$$y = u \cdot v, \qquad y' = u'v + v'u.$$

Онда аламыз:

$$u'v + v'u + 2xuv = xe^{-x^2}. \tag{6.6}$$

а) (6.6) теңдеуіндегі бірінші және үшінші қосылғыштарды қарастырамыз:

$$u'v + 2xuv = 0.$$

Осыдан

$$v(u' + 2xu) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u' + 2xu = 0.$$

Бұл айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеуді шешеміз:

$$\frac{du}{dx} = -2xu \qquad \Rightarrow \qquad \frac{du}{u} = -2xdx \qquad \Rightarrow \qquad ln\, u = -\frac{x^2}{2}.$$

Сонда аламыз:

$$u = e^{-x^2}.$$

ә) Енді (6.6) теңдеуінің қалған $v'u = xe^{-x^2}$ мүшелерін қарастырамыз. Анықталған $u = e^{-x^2}$ қоямыз:

$$\frac{dv}{dx} \cdot e^{-x^2} = xe^{-x^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{xe^{-x^2}}{e^{-x^2}} \quad \frac{dv}{dx} = x.$$

Біз айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу алдық: $dv = xdx$. Интегралдап, аламыз: $v = \frac{x^2}{2} + C$. Сонымен, берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = uv = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

II. $y'(x) + p(x)y = q(x)y^n$, мұндағы, $n \neq 0; 1$ түрдегі теңдеуді Бернулли теңдеуі деп атайды.

Егер $n = 0$, болса, онда дифференциалдық теңдеу айнымалылары бөлінетін, ал $n = 1$ тең болса сызықтық дифференциалдық теңдеу болады.

Бернулли теңдеуі $z = y^{-n+1}$ алмастыру арқылы сызықтық теңдеуге түрленеді.

Толық дифференциалды теңдеулер. Егер симметриялы түрде берілген дифференциалдық теңдеуде

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{6.7}$$

дербес туындылары тең болса

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{6.8}$$

онда (6.7) теңдеуді толық дифференциалды теңдеу деп атайды, оны

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y) = 0$$

түрінде жазуға болады. (6.7) теңдеудің жалпы шешімі $u(x,y) = C$, сонда

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P\,(x,y_0)dy+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy, \qquad (6.9)$$

немесе

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P\,(x,y)dy+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy, \qquad (6.10)$$

мұндағы $M(x_0,y_0)$ белгілі нүкте.

Мысал. $\frac{y}{x}dx+(y^3+ln\,x)dy=0$ дифференциалдық теңдеуді шешу керек.

Шешуі. $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ шартты тексереміз, мұнда

$$P(x,y)=\frac{y}{x}; \quad Q(x,y)=y^3+ln\,x.$$

Онда

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\left(\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{1}{x}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=(y^3+ln\,x)'=\frac{1}{x}.$$

Шарт орындалады, яғни берілген теңдеу толық дифференциалды теңдеу. $M(x_0,y_0)$ нүктесінің координаталары $M(1;0)$ тең деп аламыз да берілген теңдеудің шешімін табу үшін (6.9) формуланы қолданамыз.

у=0 болғандықтан $P(x,y_0)=\frac{0}{x}=0$ аламыз, онда

$$u(x,y)=\int_1^x\frac{0}{x}dy+\int_0^y(y^3+ln\,x)dy=\frac{1}{4}y^4+y\,ln\,x=\text{C}.$$

Жалпы шешімі: $\frac{1}{4}y^4+y\,ln\,x=\text{C}.$

7-ДӘРІС. Жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер

Реті бірден үлкен болатын дифференциалдық теңдеулерді жоғары ретті теңдеулер деп атайды.

Дифференциалдық теңдеулер ретін төмендету әдістері

I. *n рет интегралдау әдісі*. *n*-ретті жай (қарапайым) дифференциалдық теңдеуді

$$y^{(n)}=f(x), \qquad (7.1)$$

n рет интегралдап жалпы шешімін аламыз:

$$y(x)=\underbrace{\int\ldots\int}_{n}f(x)dx\ldots dx=C_1\frac{x^{n-!}}{(n-1)!}+C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots C_{n-1}x+C_n.$$

мұндағы $f(x)$ функциясы (a, b) интервалында үзіліссіз, C_i $(i = 1,2, \dots, n)$ - тұрақтылар.

II. Берілген теңдеудің алғашқы бірнеше ретті туындылары жоқ:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Бұл теңдеуде $z = y^{(k)}$ алмастыру жасаймыз. Сонда

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0.$$

Реті $n - k$ болатын дифференциалдық теңдеу алдық. Бұл теңдеудің шешімі:

$$z = \varphi(x, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \dots, \mathrm{C}_{n-k}).$$

Енді z орнына қайтадан алмастыруды қойсақ (7.1) түріндегі дифференциалдық теңдеу аламыз, мұны интегралдап берілген теңдеудің жалпы шешімін аламыз.

III. *Берілген теңдеуде тәуелсіз айнымалы болмайды*

$$F(y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \qquad (7.2)$$

Бұл теңдеудің ретін төмендету үшін

$$y' = z(y), \qquad y'' = z\frac{dz}{dy}, \qquad y''' = z^2\frac{d^2z}{dy^2} + z\left(\frac{dz}{dy}\right)^2,$$

т.с.с. алмастыруларды (7.2) теңдеуге қойып $n - 1$ ретті

$$F(y, z, \dots, z^{(n-1)}(y)) = 0$$

аламыз. Бұл теңдеудің жалпы шешімі

$$\Phi(y, z, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \dots, \mathrm{C}_{n-1}) = 0$$

немесе

$$\Phi(y, y', \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \dots, \mathrm{C}_{n-1}) = 0.$$

Сызықтық дифференциалдық теңдеулер. n ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу жалпы түрде былай жазылады:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x). \qquad (7.3)$$

Егер $f(x) \neq 0$, онда теңдеуді біртекті емес деп атайды, ал $f(x) = 0$ болса, онда теңдеуді біртекті немесе (7.3) теңдеуге сәйкес келетін біртекті теңдеу деп атайды:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0. \qquad (7.4)$$

Егер $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ (2) теңдеудің шешімдері болса, онда

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) \qquad (7.5)$$

осы теңдеудің шешімі болады, мұндағы $C_1, C_2, \ldots, C_n$ кез келген тұрақты сандар.

Айталық $n-1$ рет дифференциалданатын функциялар берілсін $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$. Осы функциялар және онын туындыларынан құрылған анықтауышты вронскиан немесе Вронскийдің анықтауышы деп атайды:

$$W(x) \equiv W[y_1, y_2 \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (7.6)$$

(7.4) теңдеудің кез келген n сызықтық тәуелсіз дербес шешімдер жүйесін осы теңдеудің фундаменталдық жүйесі деп атайды.

Егер $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ функциялары (7.4) теңдеудің фундаменталды жүйесі болса, онда (7.5) өрнек осы теңдеудің жалпы шешімі болады.

(7.4) теңдеудің вронскианы немесе Лиувилль–Остроградский формуласы:

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} P_1(x)dx}.$$

Біртекті емес (7.3) теңдеудің шешімін тұрақтыны вариациялау әдісімен (Лагранж әдісімен) табуға болады.

Сызықты дифференциалдық теңдеудің коэффиценттері тұрақты болған жағдайды қарастырамыз:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0, \qquad (7.7)$$

мұндағы $a_1, a_2, \ldots a_n$ –қайсыбір нақты сандар.

(7.7) теңдеуде $y = e^{kx}$ $(k - const)$. Туындыларын табамыз:

$$y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}, \ldots, y^{(n)} = k^n e^{kx}.$$

Анықталған $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ мәндерін (7.7) теңдеуге қойып $e^{kx} \neq 0$ қысқартқан соң

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \qquad (7.8)$$

аламыз. (7.8) теңдеуді (7.7) дифференциалдық теңдеудің сипаттаушы теңдеуі деп атайды.

Сипаттаушы теңдеу түбірлердің мүмкін болатын мәндерін қарастырамыз:

1**)** (7.8) теңдеу түбірлері әртүрлі нақты сандар болсын. Онда (7.7) теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}+\ldots+c_ne^{k_nx}.$$

2) (7.8) теңдеу түбірлері нақты сандар, сонымен қатар еселі түбірлері бар, онда жалпы шешімі:

$$y = c_1e^{kx} + c_2xe^{kx}+\ldots+c_{m-1}x^{m-1}e^{kx} + c_{m+1}e^{k_{m+1}x}+\ldots+c_ne^{k_nx}.$$

3) (7.8) теңдеу түбірлері ішінде комплекс сандар бар, ал қалған түбірлер нақты және әртүрлі сандар болсын, онда жалпы шешімі:

$$y = c_1e^{a_1x}\cos\beta_1 x + c_2e^{a_2x}\cos\beta_2 x + c_3e^{a_3x}\cos\beta_3 x +$$

$$+c_4e^{a_4x}\cos\beta_4 x + c_5e^{k_5x}+\ldots+c_ne^{k_nx}.$$

8-Дәріс. Коэффициенттері тұрақты екінші ретті біртекті емес дифференциалдық теңдеулер. Оң жағы арнайы түрде берілген біртекті емес теңдеудің дербес шешімі (квазикөпмүшелік жағдай). Дербес шешім таңдау әдісі (белгісіз коэффициенттер әдісі) және вариациялау әдісі

Коэффициенттері тұрақты оң жағы арнайы түрде берілген екінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеу:

$$y'' + py' + qy = f(x). \tag{8.1}$$

Оған сәйкес сызықты бір текті дифференциалдық теңдеу:

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{8.2}$$

(8.1) теңдеудің жалпы шешімін табу үшін алдымен (8.2) теңдеуінің y_0 жалпы шешімін, содан кейін (8.1) теңдеуінің $y*$ дербес шешімін табу керек. Олардың қосындысы - (8.1) екінші ретті сызықты біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі болып табылады:

$$y = y_0 + y^*,$$

мұндағы y_0 - бір текті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі, $y*$ - бір текті емес дифференциалдық теңдеудің дербес шешімі.

Дербес шешімді табудың екі әдісін қарастырайық - дербес шешімді таңдау әдісі (белгісіз коэффициенттер әдісі немесе Лагранж әдісі) және тұрақтыларды вариациялау әдісі.

Анықталмаған коэффициенттер әдісі келесі жағдайлар үшін (8.1) теңдеудің дербес шешімін табуға мүмкіндік береді. Егер (8.1) теңдеудің оң жағы келесі түрде берілсе:

$$f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x], \tag{8.3}$$

мұндағы α және β - нақты сандар, $P_n(x)$ және $Q_m(x)$ - нақты коэффициенттері бар сәйкесінше n және m дәрежелі көпмүшелер, онда

$$y^* = x^s e^{\alpha x}[M_k(x) \cos \beta x + N_k(x) \sin \beta x], \tag{8.4}$$

мұндағы $M_k(x), N_k(x)$ - белгісіз әріптік коэффициенттері бар k дәрежелі көпмүшеліктер (k-дегеніміз n және m дәрежелерінің ең үлкені), ал s дегеніміз $\alpha+\beta i$ сипаттамалық *теңдеудің* түбірлерінің қатарына кіретін еселік.

$M_k(x), N_k(x)$ көпмүшеліктердің коэффициенттерін табу үшін (8.4) ізделінді дербес шешімі (8.1) дифференциалдық теңдеудің сол жағына қойылады және тиісті ықшамдау амалдары орындалады; содан кейін алынған теңдікте сол және оң жақ бөліктердегі ұқсас мүшелердегі коэффициенттерді теңестіреді, бұл осы коэффициенттерді анықтайтын ізделінді коэффициенттерге қатысты сызықтық теңдеулер жүйесін береді.

Айталық, (8.2) біртекті дифференциалдық теңдеуге сәйкес келетін сипаттаушы теңдеу берілсін:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

$f(x)$ функциясының кейбір ерекше жағдайлары үшін y^* дербес шешімінің түрлерін қарастырайық:

1) егер $\underbrace{\alpha = 0, \beta = 0}_{\alpha+\beta i=0}$, онда $f(x) = P_n(x)$ және дербес шешімін келесі түрде іздейміз:

$$y^* = x^s(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n),$$

мұндағы s дегеніміз нөл сипаттамалық теңдеудің түбірлерінің қатарына кіретін еселік;

2) егер $\underbrace{\beta = 0}_{\alpha+\beta i=\alpha}$, онда $f(x) = e^{\alpha x}P_n x$ және дербес шешімін келесі түрде іздейміз:

$$y^* = x^s e^{\alpha x}(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n),$$

мұндағы s дегеніміз α сипаттамалық теңдеудің түбірлерінің қатарына кіретін еселік;

3) егер $\underbrace{\alpha = 0}_{\alpha+\beta i=\beta i}$, n=m=0, онда $f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$ және дербес шешімін келесі түрде іздейміз:

$$y^* = x^s(A_0\cos\beta x + B_0\sin\beta x),$$

мұндағы s дегеніміз βi сипаттамалық теңдеудің түбірлерінің қатарына кіретін еселік;

Ескерту. Егер (8.1) теңдеудің оң жақ бөлігі келесі функцияларының қосындысы болса:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_r(x),$$

онда алдымен $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_r(x)$ функцияларына сәйкес келетін y_1*,...,y_r* дербес шешімдерін табу керек. Сонда (8.1) теңдеудің дербес шешімі келесі түрінде жазылады

$$y^* = y_1^* + y_2^* + \cdots + y_r^*.$$

Мысал-1 (белгісіз коэффициенттер әдісі). Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз $y'' + 8y' + 16y = -10e^{-4x}$.

Шешуі. Жалпы шешімін келесі түрде іздейміз:

$$y = y_0 + y^*,$$

мұндағы y_0 - бір текті $y'' + 8y' + 16y = 0$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі, $y*$ - бір текті емес $y'' + 8y' + 16y = -10e^{-4x}$ дифференциалдық теңдеудің дербес шешімі.

1) y_0 табайық. Бір текті $y'' + 8y' + 16y = 0$ дифференциалдық теңдеудің сипаттаушы теңідеуінің $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$ екі еселі түбірлері бар $\lambda_1 = \lambda_2 = -4$. Бұл бірінші жағдай, сонда бір текті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі:

$$y_0 = (C_1 + C_2x)e^{-4x}.$$

2) Енді $y*$ дербес шешімін табайық. Есеп шарты бойынша берілген теңдеудің $y'' + 8y' + 16y = -10e^{-4x}$ оң жағында:

$$f(x) = -10e^{-4x}.$$

(8.3) бойынша $n = 0,\ P_0 = -10,\ \alpha = -4,\ \beta = 0$ болатының анықтаймыз, ал $\alpha + \beta i = -4$ тең болғандықтан s=2, себебі сипаттаушы теңдеунің екі еселі $\lambda_1 = \lambda_2$ түбірлері де -4 санына тең және $f(x)$ функциясында көпмүшелік берілмеген, яғни $k = 0$, онда $y*$ дербес шешімі:

$$y^* = x^s e^{\alpha x}[M_k(x)\cos\beta x + N_k(x)\sin\beta x] \qquad (8.4)$$

түріне сәйкес келесі түрде ізделінеді:

$$y^* = Ax^2e^{-4x},$$

мұндағы A – анықталмаған коэффициент.

Енді y^* функциясының y'^* және y''^* туындыларын табамыз:

$$y'^* = (-4Ax^2 + 2Ax)e^{-4x},$$

$$y''^* = (16Ax^2 - 16Ax + 2A)e^{-4x}.$$

Табылған $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ және y^* өрнектерін берілген $y'' + 8y' + 16y = -10e^{-4x}$ теңдеуге қоямыз:

$$(16Ax^2 - 16Ax + 2A)e^{-4x} + 8(-4Ax^2 + 2Ax)e^{-4x} + 16Ax^2e^{-4x} = -10e^{-4x}.$$

Ықшамдап аламыз:

$$2Ae^{-4x} = -10e^{-4x}.$$

Екі жағын $e^{-4x} \neq 0$ қысқартып аламыз: $2A = -10$. Енді анықталмаған коэффициент A табамыз: $2A = -10$, осыдан $A = -5$. Ізделінді дербес шешімі:

$$y^* = -5\,x^2e^{-4x},$$

ал берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі тең:

$$y = y_0 + y^* = (C_1 + C_2x)e^{-4x} - 5x^2e^{-4x}.$$

Тұрақтыларды вариациялау әдісі. Сызықтық біртекті емес теңдеуді шешудің жалпы әдісі (8.1) дифференциалдық теңдеуді - тұрақтыларды вариациялау әдісі.

Айталық y_1 және y_2 (8.3) біртекті теңдеудің сызықтық тәуелсіз дербес шешімдері болсын. Онда (9.1) біртекті емес теңдеудің жалпы шешімін келесі түрде іздеу керек

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2, \tag{8.5}$$

мұндағы $C_1(x)$ және $C_2(x)$ функциялары келесі теңдеулер жүйесінен анықталады:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases} \tag{8.6}$$

Алгебралық теңдеулер жүйесін шеше отырып аламыз:

$$C_1'(x) = \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)}, \qquad C_2'(x) = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)}, \tag{8.7}$$

мұндағы $W(y_1. y_2) = \begin{vmatrix} y_1 y_2 \\ y_1' y_2' \end{vmatrix}$ анықтауышы y_1 және y_2 шешімдері үшін құрастырылған Вронскийдің анықтауышы (вронскиан).

(8.7) теңдіктерді интегралдап, аламыз:

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx + C_1, \qquad C_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx + C_2.$$

Содан кейін табылған $C_1(x)$, $C_2(x)$ функцияларын (8.5) арақатынасына қойып, (8.1) сызықтық біртекті емес теңдеудің жалпы шешімін аламыз.

Мысал-2. **(**Тұрақтыларды вариациялау (Лагранж) әдісі). Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз

$$y'' + 4y = tg2x.$$

Шешуі. Берілген теңдеудің $y''+4y=0$ біртекті теңдеуін шешеміз. Оның сипаттаушы теңдеуі: $\lambda^2 + 4 = 0$ келесі түбірлерге ие $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Онда біртекті теңдеуідің жалпы шешімі: $y=C_1 cos2x+C_2 sin2x$. Вариациялау әдісін қолдану үшін біртекті емес теңдеудің жалпы шешімін келесі түрде іздеу керек:

$$y=C_1(x)cos2x+C_2(x)sin2x.$$

Енді $C_1(x)$, $C_2(x)$ анықтау үшін жүйе келесі түрде жазылады:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0, \\ -2C_1'(x)\sin 2x + 2C_2'(x)\cos 2x = tg2x. \end{cases}$$

Бұдан аламыз:

$$C_1'(x) = -\frac{\sin 2x \cdot tg2x}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2}\frac{\sin^2 2x}{\cos 2x},$$

$$C_2'(x) = \frac{\cos 2x \cdot tg2x}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Интегралдап $C_1(x)$, $C_2(x)$ анықтаймыз:

$$C_1'(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x} dx + C_1 = \frac{1}{2}\int \left(\cos 2x - \frac{1}{\cos 2x}\right) dx + C_1 =$$

$$=\frac{1}{4}sin\,2\,x-\frac{1}{4}ln\left|tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C_1,$$

$$C_2(x)=\frac{1}{2}\int sin\,2\,xdx+C_2=-\frac{1}{4}cos\,2\,x+C_2.$$

Анықталған $C_1(x)$, $C_2(x)$ біртекті емес теңдеудің жалпы шешіміне $y=C_1(x)cos2x+C_2(x)sin2x$ қоямыз, сонда берілген теңдеудің жалпы шешімі тең:

$$y=\left[\frac{1}{4}sin\,2\,x-\frac{1}{4}ln\left|tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C_1\right]cos\,2\,x+\left(-\frac{1}{4}cos\,2\,x+C_2\right)sin\,2\,x=$$

$$=C_1\,cos\,2\,x+C_2\,sin\,2\,x-\frac{1}{4}cos\,2\,x\,ln\left|tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

9-ДӘРІС. *n*-ретті коэффициенттері тұрақты біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеулер. Дифференциалдық теңдеулер жүйесі. Жүйені бір *n*-ретті теңдеуге келтіру әдісі, интегралданатын комбинация әдісі

Коэфициенттері тұрақты n-ретті біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеу берілсін:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=f(x), \qquad (9.1)$$

мұндағы $a_n-const.$

(9.1) теңдеуге сәйкес біртекті теңдеу

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=0. \qquad (9.2)$$

Біртекті емес теңдеудің жалпы шешімі (9.2) теңдеудің жалпы шешімімен біртекті емес (9.1) теңдеудің қайсыбір дербес шешімінің қосындысы түрінде өрнектеледі. Жалпы жағдайда (9.1) теңдеудің жалпы шешімін (9.2) дифференциалдық теңдеудің шешімінен тұрақтыларды варияциалау әдісімен табуға болады.

(9.1) теңдеудің жалпы шешімін

$$y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2+\ldots+C_n(x)y_n \qquad (9.3)$$

түрде іздейміз. Белгісіз $c_i(x)$ функцияларды

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2{}^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

теңдеулер жүйесінен анықтаймыз да, оны (9.3) қойып (9.1) теңдеудің жалпы шешімін табамыз.

***n*-ретті коэффициенттері тұрақты оң жағы арнайы түрде берілген дифференциалдық теңдеулер.** Қайсыбір жағдайда (ұ.1) теңдеудің оң жағы белгілі бір түрде берілсе, оның дербес шешімін белгісіз коэффициенттер әдісімен табу ыңғайлы.

I. Айталық (9.1) теңдеудің оң жағы

$$f(x) = P_n(x)e^{ax}$$

түрде берілсін. Сонымен қатар a саны сипаттаушы теңдеудің еселігі s $(s \geq 1)$ болатын түбірі болсын, онда (9.1) теңдеудің дербес шешімі:

$$y*(x) = x^s Q_n(x)e^{ax}$$

түрде ізделінеді, $Q_n(x)$ көпмүшесінің коэффициенттері белгісіз коэффициенттер әдісімен анықталады.

II. (9.1) теңдеудің оң жағы мына түрде берілсін

$$f(x) = P(x)e^{ax} \cos\beta\, x + Q(x)e^{ax} \sin\beta\, x =$$

$$= e^{ax}[P(x) \cos\beta\, x + Q(x) \sin\beta\, x],$$

мұндағы $P(x)$ және $Q(x)$ көпмүшелер.

Төмендегі жағдайлар мүмкін:

1) $\alpha \pm \beta i$ саны (9.2) теңдеудің сипаттаушы теңдеуінің түбірлері болмайды, онда (8.1) теңдеудің дербес шешімі:

$$y*(x) = [U(x) \cos\beta\, x + V(x) \sin\beta\, x]e^{ax}$$

түрде ізделінеді, мұндағы $U(x)$ пен $V(x)$ көпмүшелер дәрежелері $P(x)$ пен $Q(x)$ көпмүшелер дәрежесінің ең үлкеніне тең, ал коэффициенттері белгісіз, олар жоғарыдағы I пунктте келтірілген әдіспен анықталады.

2) $a \pm \beta i$ саны сипаттаушы теңдеудің еселігі μ болатын түбірлері болсын, онда дербес шешімі:

$$y*(x) = x^{\mu}[U(x) \cos\beta\, x + V(x) \sin\beta\, x]$$

түрде ізделінеді, мұндағы $U(x)$ пен $V(x)$ көпмүшелер коэффициенттері жоғарғыдай анықталады.

Жүйені бір *n*-ретті теңдеуге келтіру әдісі, интегралданатын комбинация әдісі. *Жүйені бір n-ретті теңдеуге келтіру әдісі.* Нормалдық дифференциалдық теңдеулер жүйесін

$$\begin{gathered} y_1'(x) = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{gathered} \tag{9.4}$$

n ретті дифференциалдық теңдеуіне $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ келтіруге болады. Осы теңдеуді шешу арқылы берілген нормалдық дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешуге болады.

Интегралданатын комбинация әдісі. (9.4) нормалдық дифференциалдық теңдеулер жүйеден интегралданатын теңдеу алып, оны интегралдаған соң жүйенің бірінші интегралын табу. Егер (9.4) жүйенің n тәуелсіз бірінші интегралдары табылса, онда олардың жиынтығы жүйенің жалпы интегралын анықтайды. Ол үшін (9.4) жүйені келесі түрде жазу ыңғайлы

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \ldots, y_n)} = \frac{dx}{1}.$$

Коэффициенттері тұрақты сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесі. Эйлер тәсілі. Коэффициенттері тұрақты біртекті n ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесі мына турде жазылады:

$$\begin{gathered} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{gathered}$$

немесе матрицалық турде

$$X' = AX,$$

мұндағы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Фундаменталды шешімдер жүйесін табу үшін сызықты алгебра әдістерін қолданамыз. Сипаттаушы теңдеунен

$$det(A - \lambda E) = 0$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ түбірлерін табамыз, әр λ үшін оған сәйкес келетін $X^{(\lambda)}$ дербес шешімі анықталады. Жүйенің жалпы шешімі келесі түрде болады

$$X = \sum_{k=1}^{s} C_k X^{(\lambda_k)}.$$

Үш жағдай болуы мұмкін: λ еселігі бірге тең нақты түбір; λ еселігі бірге тең комплекс түбір; λ еселігі $r \geq 2$ түбір.

Модуль-3. ҚАТАРЛАР ТЕОРИЯСЫ

10-ДӘРІС. Сандық қатар. Қатардың жинақтылығы және қосындысы. Жинақтылықтың қажетті белгісі. Мүшелері оң қатарлар, олардың жинақталу белгілері. Меншіксіз интеграл ұғымы

Анықтама.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (10.1)$$

түріндегі өрнекті сандық қатар дейміз, мұндағы $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ - қатардың мүшелері, a_n – сандық қатардың жалпы мүшесі.

Анықтама. Дербес қосындылар деп

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \dots, \quad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \dots$$

қосындыларды атайды, ал S_n – сандық қатарының n-ші дербес қосындысы деп аталады.

Мысал-1. Сандық қатар берілсін:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (2n - 1).$$

Алғашқы үш мүшесін және n-ші дербес қосындысын табыңыз.

Шешуі. Есеп шарты бойынша $a_n = 2n - 1$. Енді n-ге мәндер беріп, біртіндеп мүшелерін анықтаймыз:

$n = 1$ тең болғанда $a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$;

$n = 2$ тең болғанда $a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$;

$n = 3$ тең болғанда $a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$.

Сонымен

$$a_1 = 1; a_2 = 3; a_3 = 5, \dots, a_n = 2n - 1, \dots$$

Дербес қосындылары:

$S_1 = a_1 = 1,$

$S_2 = a_1 + a_2 = 1 + 3 = 4,$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 3 + 5 = 9,$

$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1).$

Анықтама. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ шегі бар болып әрі S-ке тең болса, яғни

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \tag{10.2}$$

онда (10.1) қатар жинақты, ал S – оның қосындысы деп аталады.

Егер $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ табылмаса, онда (10.1) қатар жинақсыз қатар деп аталады.

Мысал-2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі: қатардың жалпы мүшесін $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ анықталмаған коэффициенттер тәсілімен жай бөлшектерге жіктейміз:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1},$$

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2},$$

осыдан аламыз:

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

n-ші дербес қосындысын табамыз

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n =$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Егер (10.2) орындалса, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ шегі бар болса, онда қатар жинақты және қосындысы S-ке тең болады:

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

Қорытынды: қатар жинақты, қосындысы $S=\frac{1}{2}$ тең.

Мысал-3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Берілген қатардың $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$ жалпы мүшесін анықталмаған коэффициенттер әдісін қолданып жай бөлшектерге бөлеміз:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1},$$

онда $An+A+Bn=1$. Осыдан $\mathrm{A}=1$, $B=-1$. Қатарды келесі түрде жазамыз:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Қатар мүшелерін табамыз:

$$a_1=1-\frac{1}{2},\quad a_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\quad a_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},$$

$$a_4=\frac{1}{4}-\frac{1}{5},\ \ldots,\ a_{n-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},\quad a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Қатардың n-ші дербес қосындысы:

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Сонымен

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

және

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1,$$

демек қатар жинақты, оның қосындысы $S = 1$.

Теорема (қатар жинақтылығының қажетті белгісі). Егер (10.1) қатары жинақты болса, онда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Кері тұжырым әрдайым орындалмайды.

Теорема (қатар жинақсыздығының жеткілікті белгісі). Егер

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

болса, онда (10.1) қатары жинақсыз.

Мысал-4. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, қатар жинақтылығының қажетті белгісі орындалады, бірақ қатар жинақсыз, өйткені бұл гармониялық қатар. Белгі қажетті, бірақ жеткіліксіз.

Мысал-5. $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \ldots + \frac{n}{2n+1} + \ldots$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Жинақтылықтың қажетті шарты орындалмайды, қатар жинақсыз.

I. **Геометриялық қатар**

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n, \qquad \begin{cases} q < 1, \text{онда қатар жинақты,} \\ \text{q} \geq 1, \text{онда қатар жинақсыз.} \end{cases}$$

Жинақты геометриялық қатарларға мысалдар:	Жинақсыз геометриялық қатарларға мысалдар:
1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \quad q = \frac{1}{3} < 1$	1) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad q = \frac{3}{2} > 1$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^{n}$ $\quad q=\frac{2}{7}<1$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^{n}$ $\quad q=\frac{5}{4}>1$

II. **Дирихле қатары**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\qquad \begin{cases} p>1, \text{онда қатар жинақты,}\\ p\le 1, \text{онда қатар жинақсыз.}\end{cases}$$

Дирихле қатары үшін $p=1$ болғанда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ гармониялық жинақсыз қатар аламыз.

Жинақты Дирихле қатарларына мысалдар:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ $\quad p=2>1$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$ $\quad p=5>1$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$ $\quad p=\frac{5}{3}>1$

Жинақсыз Дирихле қатарларына мысалдар:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\quad p=\frac{1}{2}<1$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ $\quad p=\frac{2}{3}<1$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{n^5}}$ $\quad p=\frac{5}{6}<1$

Мүшелері оң қатарлар, олардың жинақталу белгілері. Оң мүшелі қатарлар берілсін

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{10.3}$$

және

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n. \tag{10.4}$$

Салыстыру белгілері

Теорема (салыстырудың бірінші белгісі). Қайсыбір нөмірден бастап мына теңсіздік $a_n\le b_n$ орындалсын. Осыдан

а) егер (10.4) қатар жинақты болса, онда (10.3) қатар да жинақты,

ә) егер (10.3) қатар жинақсыз болса, онда (10.4) қатар да жинақсыз.

Теорема (салыстырудың екінші (шектік) белгісі). Егер

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=q$$

ақырлы шегі бар болып, әрі q оң сан болса, яғни $0<q<+\infty$, онда (10.3) және (10.4) қатарлары екеуі де жинақты немесе екеуі де жинақсыз.

Ескерту. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ шегі санға тең болуы үшін бұл қатынастың үлкен дәрежелері тең болуы тиіс.

Ескерту. Көп қатарлардың жинақты, жинақсыздығын Дирихле қатарымен салыстыра отырып, анықтауға болады:

Мысал-6. Жалпы мүшесі $a_n = \frac{1}{3\cdot 4^n+5}$ тең болатын қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Салыстырудың шектік белгісін қолданамыз. a_n жалпы мүшесінің бөлімінде 4^n көрсеткіштік функция берілген, сондықтан геометриялық қатарлардан $b_n = \frac{1}{4^n}$ қосымша қатарын таңдаймыз. Бұл қатар жинақты $q = \frac{1}{4} < 1$ - кемімелі геометриялық прогрессия.

Шекке көшеміз:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{3\cdot 4^n + 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+\frac{5}{4^n}} = \frac{1}{3} > 0.$$

Қорытынды: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ шек бар және қосымша $b_n = \frac{1}{4^n}$ қатар жинақты, сондықтан берілген қатар да жинақты.

Мысал-7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+4}{n(2n-5)}$ қатарын жинақтылыққа зерттеу керек.

Шешуі. Салыстырудың шектік белгісін қолданамыз. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ шегі санға тең болуы үшін a_n және b_n-дердің үлкен дәрежелері тең болуы тиіс.

Қосымша Дирихле қатарын таңдаймыз. Берілген қатардың $a_n = \frac{5n+4}{2n^2-5n}$ жалпы мүшесінің үлкен дәрежесі 2 тең. Қатынастың үлкен дәрежелері тең болуы үшін қосымша Дирихле қатарының үлкен дәрежесі де $p = 2 - 1 = 1$ болу керек. Осыдан келесі Дирихле қатарын аламыз $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - бұл жинақсыз гармониялық қатар.

Шекке көшеміз:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n+4}{2n^2-5n} \cdot \frac{n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+4n}{2n^2-5n} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \frac{5}{2} > 0.$$

Қорытынды: шек бар, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - қосымша гармониялық қатары жинақсыз, сондықтан берілген қатар да жинақсыз.

Мысал-8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{9n^4-7}$ қатарын жинақтылыққа зерттеу керек.

Шешуі. Салыстырудың шектік белгісін қолданамыз. Қосымша қатар таңдаймыз, мұнда $p = 4 - 1 = 3 > 1$ болу керек, яғни келесі Дирихле қатарын аламыз $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ - бұл қатар жинақты.

Шекке көшеміз:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{9n^4-7}\cdot\frac{n^3}{1}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\frac{1}{9}>0.$$

Қорытынды: шек оң сан және $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ - қосымша Дирихле қатары жинақты, сондықтан берілген қатар да жинақты.

Даламбер белгісі. Есептер шығару барысында қажетті факториалды түрлендіру амалдарды келтірейік:

1) $5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=3!\cdot 4\cdot 5=4!\cdot 5$

2) $(n+2)!=n!\cdot(n+1)\cdot(n+2)=(n+1)!\cdot(n+2)$

3) $(3n+2)!=(3n)!\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)=(3n+1)!\cdot(3n+2)$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}$

$a_n=\frac{n^2}{(n+1)!};\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{(n+2)!}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^2}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{n^2}=$

$=\frac{(n+1)^2}{(n+1)!(n+2)}\cdot\frac{(n+1)!}{n^2}=$

$=\frac{(n+1)^2}{(n+2)n^2}.$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{(2n+3)!}$

$a_n=\frac{4n-1}{(2n+3)!},\ a_{n+1}=\frac{4(n+1)-1}{[2(n+1)+3]!}=\frac{4n+3}{(2n+5)!}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4n+3}{(2n+5)!}\cdot\frac{(2n+3)!}{4n-1}=$

$=\frac{4n+3}{(2n+3)!(2n+4)(2n+5)}\cdot\frac{(2n+3)!}{4n-1}=$

$=\frac{4n+3}{(2n+4)(2n+5)}\cdot\frac{1}{4n-1}.$

Теорема (Даламбер белгісі). Сандық (10.1) қатары үшін $a_n>0$ болсын және

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$$

шегі бар болсын, онда

егер q<1 болса, қатар жинақты,

егер q>1 болса, қатар жинақсыз,

егер q=1 болса, қосымша зерттеулер қажет.

Мысал-9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2}{n!}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Берілген қатардың жалпы мүшесі $a_n=\frac{5n^2}{n!}$. Даламбер белгісін қолдану үшін a_{n+1} мүшесін анықтаймыз:

$$a_{n+1} = \frac{5(n+1)^2}{(n+1)!},$$

онда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{5n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n!\,(n+1)} \cdot \frac{n!}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)} \cdot \frac{1}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = 0 < 1 \text{ - қатар жинақты.}$$

Мысал-10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+11}{2^n}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Даламбер белгісі үшін

$$a_n = \frac{n+11}{2^n}, \qquad a_{n+1} = \frac{n+12}{2^{n+1}} = \frac{n+12}{2^n \cdot 2}$$

болады, онда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+12}{2^n \cdot 2} \cdot \frac{2^n}{n+11} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+12}{2} \cdot \frac{1}{n+11} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \frac{1}{2} < 1 \text{ - қатар жинақты.}$$

Коши белгілері

Теорема (Кошидың радикалдық (шектік) белгісі). Егер кейбір $n = n_0$ нөмірінен бастап $a_n > 0$ және

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

болса, онда

егер q<1 болса, берілген қатар жинақты,

егер q>1 болса, берілген қатар жинақсыз болады,

егер q=1 болса, қосымша зерттеулер қажет.

Мысал-11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-3}{2n+1}\right)^n$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Қатардың жалпы мүшесі $a_n = \left(\frac{n-3}{2n+1}\right)^n$, онда Кошидың радикалдық белгісі бойынша

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-3}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{2n+1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \frac{1}{2} < 1 \text{ - қатар жинақты.}$$

Мысал-12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ қатарды жинақтылыққа зерттеніз.

Шешуі. Қатардың жалпы мүшесі $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, онда Кошидың радикалдық белгісі бойынша

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e>1$$ - қатар жинақсыз.

Мысал-13. Қошидың радикалдық белгісін қолданып $\sum_{n=1}^{\infty}\left(sin\frac{\pi}{2n+9}\right)^{n}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Берілген қатар үшін Қошидың радикалдық белгісін қолданамыз:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(sin\frac{\pi}{2n+9}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(sin\frac{\pi}{2n+9}\right)=sin\frac{\pi}{\infty}=sin\,0=0<1.$$

Қорытынды: берілген қатар жинақты.

Меншіксіз интеграл ұғымы

Анықтама. Айталық, $f(x)$ функциясы $[a,+\infty)$ аралығында анықталған және кез келген $[a, b]$ кесіндісінде интегралданады (b>a). Онда, егер шекті шек

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

бар болса, оны бірінші текті меншіксіз интеграл деп атап, былай белгілейді

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Сонымен

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Бұл жағдайда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интеграл бар немесе жинақты дейді.

Егер шек болмаса, онда меншіксіз интегралды жинақсыз дейді. Дәл осылай меншіксіз интегралды $(-\infty,a]$ аралығында енгізуге болады.

Теорема (Кошидың интегралдық белгісі). (10.1) қатарының мүшелері монотонды кемімелі болсын, яғни $a_1>a_2>\ldots>a_n>\ldots$ және $x\geq a\geq 1$ болғанда үзіліссіз функциясы үшін $f(n)=a_n$ орындалсын. Онда (10.1) қатары мен

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

меншіксіз интегралы бір мезгілде жинақты немесе жинақсыз болады.

Мысал-14. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{ln\, n}}$ қатарды жинақтылыққа зерттеу керек.

Шешуі. Кошидың интегралдық белгісін қолданамыз. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{ln\, x}} dx$ меншіксіз интегралын жинақтылыққа зерттейміз:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{ln\, x}} dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{1}{x\sqrt{ln\, x}} dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = ln\, x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ x_1 = 2; t_1 = ln\, 2 \\ x_2 = b; t_2 = ln\, b \end{matrix} \right| = \lim_{b\to\infty} \int_{ln\, 2}^{ln\, b} \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{t}\Big|_{ln\, 2}^{ln\, b} = \lim_{b\to\infty} 2(\sqrt{ln\, b} - \sqrt{ln\, 2}\ ) = \infty.$$

Жауабы: интеграл жинақсыз, онда берілген қатар да жинақсыз.

Мысал-15. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\, ln^2\, n}$ қатарды жинақтылыққа зерттеу керек.

Шешуі. Кошидың интегралдық белгісін қолданамыз. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x\, ln^2\, x} dx$ меншіксіз интегралын жинақтылыққа зерттейміз:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\, ln^2\, x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{1}{x\, ln^2\, x} dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = ln\, x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ x_1 = 2; t_1 = ln\, 2 \\ x_2 = b; t_1 = ln\, b \end{matrix} \right| = \lim_{b\to\infty} \int_{ln\, 2}^{ln\, b} \frac{dt}{t^2} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_{ln\, 2}^{ln\, b} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{ln\, b} + \frac{1}{ln\, 2}\right) = -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{ln\, 2} = \frac{1}{ln\, 2}.$$

Жауабы. Меншікті интеграл жинақты, онда берілген қатар да жинақты.

11-ДӘРІС. Таңбасы кезектесетін (ауыспалы таңбалы) қатар. Лейбниц белгісі. Абсолют және шартты жинақтылық

Мүшелерінің таңбасы әртүрлі болатын сандық қатары берілсін.

Анықтама. Мүшелерінің таңбалары кезектесіп отыратын сандық қатар

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \qquad (11.1)$$

ауыспалы таңбалы сандық қатар деп аталады, мұндағы $a_1, a_2, a_3, \ldots$ – оң сандар.

Теорема (Лейбниц теоремасы). Егер

1) $|a_1| > |a_2| > \ldots > |a_n| > \ldots$ – қатар мүшелері монотонды кемімелі сандық тізбек құрайтын,

2) жинақтылықтың $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ қажетті шарты орындалса,

онда ауыспалы таңбалы (11.1) қатар жинақты.

Екі шарттың біреуі орындалмаса, онда (11.1) қатар жинақсыз.

Мысал-1. Ауыспалы таңбалы $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \cdots (-1)^{n+1}\frac{1}{2n} + \ldots$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі: Лейбниц белгісін қолданамыз. Ол үшін бірінші шартын тексереміз $|a_1| > |a_2| > \ldots > |a_n| > \ldots$ аламыз:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \cdots > \frac{1}{2n} > \ldots,$$

яғни Лейбниц белгісінің бірінші шарты орындалады.

Екінші шартын тексереміз: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = 0$, яғни Лейбниц белгісінің екінші шарты да орындалады.

Қорытынды: берілген қатар Лейбниц бойынша жинақты.

Мысал-2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Лейбниц белгісін қолданамыз:

1) шартын тексереміз, ол үшін бір неше мүшелерін анықтаймыз:

$$|a_1| = \left|\frac{1}{1^2+1}\right| = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$|a_2| = \left|\frac{2}{2^2+1}\right| = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

$$|a_3| = \left|\frac{3}{3^2+1}\right| = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

… … … … …

$$|a_n| = \left|\frac{n}{n^2+1}\right|, \ldots$$

$0{,}5 > 0{,}4 > 0{,}3 > \ldots$ болғандықтан $|a_1| > |a_2| > \ldots > |a_n| > \ldots$ теңсіздіктері орындалады, яғни Лейбниц белгісінің бірінші шарты орындалады.

Енді 2-ші шартын тексереміз:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = 0,$$

яғни Лейбниц белгісінің 2-ші шарты да орындалады. Сонымен, берілген қатар Лейбниц бойынша жинақты.

Мысал-3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Лейбниц белгісінің 1-ші шарты орындалады:

$$1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{9} > \frac{1}{27} > \ldots$$

және

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 0$$

болғандықтан, Лейбниц белгісінің 2-ші шарты да орындалады, яғни берілген қатар Лейбниц бойынша жинақты.

Мысал-4. Қатарды жинақтылыққа зерттеңіз

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}.$$

Шешуі. Лейбниц белгісінің 1-ші шарты орындалмайды. Себебі

$$|a_1| > |a_2| > |a_3| > \ldots$$

болуы тиіс, ал берілген қатар бойынша

$$|a_1| = 1, |a_2| = 1, |a_3| = 1, \ldots,$$

яғни

$$|a_1| = |a_2| = |a_3| = \ldots$$

және

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} |(-1)^{n-1}| = 1 \neq 0$$

болғандықтан, Лейбниц белгісінің 2-ші шарты да орындалмайды. Берілген қатар жинақсыз.

Қатарлардың абсолютті және шартты жинақтылығы. Айнымалы таңбалы қатар берілсін

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n. \qquad (11.2)$$

Мүшелерінің абсолют шамаларынан құрылған қатарды қарастырамыз:

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + \cdots + |a_n| + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|. \qquad (11.3)$$

Теорема. Егер абсолют шамалардан құрылған (11.3) қатар жинақты болса, онда айнымалы таңбалы (11.2) қатар абсолютті жинақты.

Егер (11.2) қатар Лейбниц белгісі бойынша жинақты болып, ал абсолют шамалардан құрылған (11.3) қатар жинақсыз болса, онда берілген қатар шартты жинақты.

Мысал-5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+7}}$ қатарын абсолютті немесе шартты жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі: Абсолют шамалардан қатар құрамыз:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+7}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+7}}.$$

1) берілген қатарды Лейбниц бойынша жинақтылыққа зерттейміз:

$$\frac{1}{\sqrt{8}} > \frac{1}{\sqrt{15}} > \frac{1}{\sqrt{34}} > \ldots \quad \text{және} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+7}} = 0,$$

яғни қатар Лейбниц бойынша жинақты.

2) Абсолют шамалардан құрылған қатарды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+7}}$ жинақтылыққа шектік салыстыру белгі бойынша зерттейміз. Ол үшін қосымша Дирихле қатарын таңдаймыз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}} \quad p = \frac{3}{2} - 0 > 1 \text{ – жинақты Дирихле қатары.}$$

Шарттық (радикалдық) салыстыру белгісін қолданамыз:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+7}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^3}{n^3+7}} = 1 > 0,$$

демек қосымша қатармен бірге $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+7}}$ қатары да жинақты.

Қорытынды: берілген қатар Лейбниц бойынша жинақты және абсолют шамалардан құрылған қатар да жинақты, онда берілген қатар абсолютті жинақты.

Мысал-6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n^2-3}{4n^3+5n^2-1}$ қатарды абсолютті немесе шартты жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі: Абсолют шамалардан қатар құрамыз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-3}{4n^3+5n^2-1}$.

1) берілген қатарды Лейбниц бойынша жинақтылыққа зерттейміз:

$$\frac{1}{8} > \frac{5}{51} > \frac{15}{152} > \ldots \quad \text{және} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3}{4n^3+5n^2-1} = 0,$$

яғни қатар Лейбниц бойынша жинақты.

2) Абсолют шамалардан құрылған қатарды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-3}{4n^3+5n^2-1}$ жинақтылыққа шектік салыстыру белгі бойынша гармониялық жинақсыз $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ қатармен салыстырамыз, себебі $p = 3 - 2 = 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3}{4n^3+5n^2-1} \cdot \frac{n}{1} = \frac{1}{2} > 0,$$

қосымша қатармен бірге абсолют шамасы бойынша алынған қатар да жинақсыз.

Қорытынды: берілген қатар Лейбниц бойынша жинақты, бірақ абсолют шамалардан құрылған қатар жинақсыз, сондықтан берілген қатар шартты жинақты.

Мысал-7. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2^n}$ қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Берілген қатарды Лейбниц бойынша жинақтылыққа зерттейміз:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{2^3} > \ldots \quad \text{және} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0,$$

яғни қатар Лейбниц бойынша жинақты. Абсолют шамалардан қатар құрамыз:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Бұл қатар еселігі $q = \frac{1}{2} < 1$ болатын геометриялық жинақты қатар.

Қорытынды: берілген қатар Лейбниц бойынша жинақты және абсолют шамалардан құрылған қатар да жинақты, онда берілген қатар абсолютті жинақты.

Айнымалы таңбалы қатарлардың кейбір қасиеттері:

1. Егер $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютті жинақты болса, онда оның шексіз көп мүшелерінің орындарын алмастырғаннан кейін алынған қатар да абсолютті жинақты әрі оның қосындысы алғашқы қатардың қосындысына тең болады.

2. Егер $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары шартты жинақты болса, оның шексіз көп мүшелерінің орындарын алмастырғаннан кейін оның қосындысы өзгеруі мүмкін. Дербес жағдайда мүшелерінің орындарын алмастырғаннан кейін шартты жинақты қатар жинақсыз қатарға айналуы мүмкін.

3. Егер

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots$$

және

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_n + \cdots$$

қатарлары абсолютті жинақты, ал қосындылары сәйкесінше S_1 және S_2 болса, онда

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \ldots + (a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1) + \ldots$$

қатары да абсолютті жинақты болады. Бұл қатар қатарлардың Коши бойынша көбейтіндісі болады. Оның қосындысы S_1S_2 тең.

12-ДӘРІС. Функционалдық қатарлар. Дәрежелік қатар. Абель теоремасы. Жинақталу радиусы. Жинақталу интервалы мен облысы

$u_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,n,\ldots)$ функциялары D облысында анықталған болсын, онда

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \qquad (12.1)$$

қатары функционалдық қатар деп аталады.

Егер $x = x_0$ болғанда

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \qquad (12.2)$$

сандық қатары жинақталса, онда (12.1) қатар $x = x_0$ нүктесінде жинақты, ал x_0 – жинақтылық нүктесі деп аталады.

Анықтама. (12.1) қатар жинақты болатын барлық жинақтылық нүктелер жиыны функционалдық қатардың жинақталу облысы деп аталады.

(12.1)-ші қатардың алғашқы n мүшесінің қосындысы

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$$

болса, онда

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

мұндағы $R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots$ – қатардың қалдығы, $S(x)$ – қатардың қосындысы деп аталады.

$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$ функционалдық қатары үшін x-тің анықталу облысында

$$|u_1(x)| \leq \alpha_1, \qquad |u_2(x)| \leq \alpha_2, \ldots, \qquad |u_n(x)| \leq \alpha_n, \ldots$$

теңсіздіктері орындалатындай

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots$$

жинақты оң сандық қатар табылса, онда берілген қатар x-тің анықталу облысында жинақты болады.

Мысал-1. $1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots + \frac{1}{n^x} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ дәрежелік қатарының жинақталу облысын табыңыз.

Шешуі. Берілген қатар - Дирихле қатары, онда анықтама бойынша қорытынды жасаймыз:

$x = 1$ болса, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \ldots$ берілген қатар гармониялық жинақсыз қатар болады, яғни $x \leq 1$ болса, берілген қатар жинақсыз, ал $x > 1$ болса, берілген қатар жинақты болады.

Мысал-2. $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2+x^4} + \frac{1}{3+x^6} + \ldots + \frac{1}{n+x^{2n}} + \ldots$ қатарының жинақталу облысын табыңыз.

Шешуі. Жинақтылықтың қажетті белгісі орындалады:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+x^{2n}} = 0.$$

Енді келесі жағдайларды қарастырайық. Айталық $|x| \leq 1$ болсын. Шектік салыстыру белгісін қолданамыз: $v_n = \frac{1}{n}$ қосымша гармониялық жинақсыз қатармен салыстырамыз:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n + x^{2n}} : \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n + x^{2n}} = 1.$$

Демек, шектік салыстыру белгісі бойынша берілген қатар жинақсыз.

Егер $|x| > 1$ болса, онда берілген қатардың мүшелерін шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның мүшелерімен салыстырамыз:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} + \ldots + \frac{1}{x^{2n}} + \ldots$$

Берілген қатардың мүшелері кемімелі геометриялық прогрессияның мүшелерінен $|x| > 1$ кіші, демек қатар жинақты. Сондықтан, берілген қатар үшін жинақталу облысы $-1 < x \leq 1$.

Дәрежелік қатарлар. Абель теоремасы. Жинақталу радиусы. Жинақталу интервалы мен облысы

Анықтама. Дәрежелік қатар деп

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

түріндегі қатарды атайды, мұндағы $a_0, a_1, \dots, a_n$ - коэфициенттер, x_0 – кез келген сан.

Егер $x_0 = 0$ болса, онда

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \qquad (12.3)$$

түріндегі дәрежелік қатарды аламыз.

Абель теоремасы. 1) Егер (12.3) дәрежелік қатар кейбір $x = x_1 \neq 0$ мәнінде жинақталса, онда $|x| < |x_1|$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x-тер үшін қатар абсолютті жинақты;

2) Егер (12.3) дәрежелік қатар $x = x_2$ мәнінде жинақсыз болса, онда $|x| > |x_2|$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x-тер үшін қатар жинақсыз.

Айталық, (12.3) дәрежелік қатар $|x| < R$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x-тер үшін жинақты, ал $|x| > R$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x-тер үшін жинақсыз болсын. Бұл теріс емес R саны дәрежелік қатардың жинақталу радиусы, ал (-R,R) аралығы жинақталу интервалы деп аталады.

Жинақталу радиусы

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (12.4)$$

немесе

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \qquad (12.5)$$

формулаларымен есептеледі, ал жинақталу интервалы центрі $x = x_0$ болатын $(x_0 - R; x_0 + R)$ интервалы болады.

Ескерту.

1) Егер $R = 0$ болса, онда қатар тек бір $x = x_0$ нүктесінде жинақты.

2) Егер $R = \infty$ болса, онда қатар барлық $-\infty < x < +\infty$ жазықтықта жинақты.

3) Егер $R = a$ болса, онда қатар $|x - x_0| < a$ интервалында жинақты және берілген қатарды интервалдың шекті $x = x_1$ және $x = x_2$ нүктелерінде де жинақтылыққа зерттеу керек.

Мысал-3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{n}}x^n$ қатарының жинақталу облысын табу керек.

Шешуі. 1) Берілген қатардың радиусын табу үшін (12.4) формуланы қолданамыз:

$$a_n = \frac{3^n}{\sqrt{n}}, \qquad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+1}},$$

онда

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n}{\sqrt{n}} : \frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{3^{n+1}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{3\sqrt{n}} = \frac{1}{3},$$

демек, $|x| < \frac{1}{3}$ немесе $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ жинақталу интервалы болады.

2) Енді интервалдың шекаралық нүктелерінде қатардың жинақтылығын зерттейік.

Айталық $x = \frac{1}{3}$ болсын, онда келесі қатар аламыз:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{n}}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{n}}\frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Бұл жинақсыз қатар, себебі $p = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} < 1$ және

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

қатары жинақсыз Дирихле қатары.

Енді $x = -\frac{1}{3}$ болсын, онда

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

ауыспалы таңбалы қатар аламыз. Лейбниц белгісі бойынша мүшелері моготонды кемімелі және жинақтылықтың қажетті шарты орындалады:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

демек қатар жинақты.

Жауабы: берілген қатардың жинақталу радиусы $R = \frac{1}{3}$, жинақталу облысы $-\frac{1}{3} \le x < \frac{1}{3}$.

Мысал-4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n}}{n^2 \cdot 3^n}$ дәрежелік қатарының радиусы мен жинақтылық облысын табыңыз.

Шешуі. 1) Жинақтылық радиусын табу үшін $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ формуланы қолданамыз:

$$a_n = \frac{1}{n^2 \cdot 3^n}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}},$$

онда

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n^2 \cdot 3^n}\cdot\frac{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}{1}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n+1)^2 \cdot 3}{1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2 \cdot 3}{n^2}\right| = 3.$$

Қатар $|x+2| = \sqrt{3}$ шеңберде жинақталады немесе

$$-\sqrt{3} < x+2 < \sqrt{3} \qquad \text{осыдан} \qquad -\sqrt{3}-2 < x < \sqrt{3}-2.$$

2) Берілген қатарды интервалдың шеткі $x = -\sqrt{3}-2$ және $x = \sqrt{3}-2$ нүктелерінде жинақтылыққа зерттейміз, мұнда $x+2$-нің дәрежесі жұп болғандықтан:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(x+2)^{2n}}{n^2 \cdot 3^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Бұл оң таңбалы жинақты Дирихле қатары, себебі $p = 2 > 1$. Осыдан берілген қатар абсолютті жинақты.

Жауабы: $R = 3$, жинақтылық облысы $[-\sqrt{3}-2; \sqrt{3}-2]$

Мысал-5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)x^n}{n!}$ қатарының радиусы мен жинақтылық интервалын табыңыз.

Шешуі. Жинақтылық радиусын табу үшін $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ формуласын қолданамыз:

$$a_n = \frac{3n+1}{n!}, \qquad a_{n+1} = \frac{3(n+1)+1}{(n+1)!} = \frac{3n+4}{(n+1)!}.$$

Онда

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3n+1}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{3n+4}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3n+1)(n+1)}{3n+4}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)(n+1)}{3n+4} = \infty.$$

Жауабы: қатар барлық жазықтықта жинақты $-\infty < x < +\infty$.

Мысал-6. $\sum_{n=1}^{\infty} n!\,(x-i)^n$ қатарының жинақтылық интервалын табыңыз.

Шешуі. Жинақтылық радиусын табу үшін Даламбер белгісін қолданамыз:

$$a_n = n!, \qquad a_{n+1} = (n+1)!$$

Онда

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{1}\cdot\frac{1}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Яғни $|x - i| = 0$. Жауабы: қатар $x = i$ нүктесінде ғана жинақталады.

13-ДӘРІС. Функцияны дәрежелік қатарға жіктеу

$x = a$ нүктесінің аймағында n ретті туындысы бар кез келген функцияны Тейлор формуласы арқылы жіктеуге болады

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n,$$

мұндағы R_n – қалдық

$$R_n = \frac{f^{(n)}[a + \theta(x-a)]}{n!}\cdot(x-a)^n, 0 < \theta < 1.$$

Егер $f(x)$ функцияның $x = a$ нүктесінің аймағында кез келген туындысы бар болса және осы аймақта $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ болса, онда $f(x)$ функциясы келесі Тейлор қатарымен өрнектеледі:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Берілген аймақтың барлық X нүктелері үшін келесі тұжырым дұрыс болады: *егер функция кейбір аралықта жинақты болатын дәрежелік қатарға жіктелсе онда ол қатар берілген функцияның Тейлор қатары болады.*

Басқаша айтқанда, *егер функцияны қандай да бір әдіспен дәрежелік қатарға жіктесек, онда жіктелінген қатар міндетті түрде берілген функцияның Тейлор қатары болады.*

Бұл бір мәнділік қасиетін элементар функцияларды дәрежелік қатарға жіктегенде келесі бес негізгі жіктеулерге сүйеніп қолданған ыңғайлы:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad R = \infty;$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = \infty;$$

$$cos\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad R = \infty;$$

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n, \quad R = 1;$$

$$ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad R = 1.$$

Мысал-1. $y = e^{-x^3}$ функциясын қатарға жіктеңіз.

Шешуі. Келесі формуланы қолданамыз:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Берілген $y = e^{-x^3}$ функциясы үшін:

$$y = e^{-x^3} = 1 + \frac{(-x^3)^1}{1!} + \frac{(-x^3)^2}{2!} + \ldots + \frac{(-x^3)^n}{n!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^3)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{3n}.$$

барлық x үшін қатар жинақты.

Мысал-2. $y = shx$ функциясын қатарға жіктеңіз.

Шешуі. Гиперболалық синус функциясын Эйлер формуласына келтіріп, келесі формуланы аламыз:

$$y = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}.$$

e^x функциясын қатарға жіктеу формуласын қолданамыз:

$$y = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Қатар барлық x үшін жинақты.

Мысал-3. $y = cos^2 x$ функциясын қатарға жіктеңіз.

Шешуі. Мектеп курсынан белгілі косинус функциясының дәрежесін төмендету формуласын қолданамыз:

$$cos^2x = \frac{1}{2}(1 + cos\,2\,x).$$

Және косинус функциясын қатарға жіктеу формуланы қолданамыз:

$$cos\,x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Сонда аламыз:

$$y = cos^2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos\,2\,x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-1}}{(2n)!} \cdot x^{2n}.$$

Барлық x үшін қатар жинақты.

Мысал-4. $y = \frac{1}{1+x^2}$ функциясын қатарға жіктеңіз.

Шешуі. Берілген функцияны келесі түрге келтіреміз:

$$y = \frac{1}{1 + x^2} = (1 + x^2)^{-1}.$$

Бұл функция үшін қолданылатың формула:

$$(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n.$$

Есеп шарты бойынша $m = -1$ болғандықтан

$$(-1)(-2) \cdot \ldots \cdot (-n) = (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = (-1)n!$$

ескеріп, аламыз:

$$y = \frac{1}{1 + x^2} = (1 + x^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)(-2)\ldots(-n)}{n!} \cdot (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Бұл қатар $|x| < 1$ үшін жинақты.

Мысал-5. $y = cos\, x$ функциясын $a = \frac{\pi}{3}$ нүктесінде қатарға жіктеңіз.

Шешуі. Берілген функция үшін келесі тригонометриялық формуланы қолданамыз:

$$cos(\,\alpha + \beta) = cos\, \alpha \cdot cos\, \beta - sin\, \alpha \cdot sin\, \beta,$$

мұндағы

$$\alpha = x - \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{3}.$$

Онда аламыз:

$$y = cos\, x = cos\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} - sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Енді

$$cos\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

және

$$sin\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

формулаларды қолданамыз:

$$y = cos\, x = \frac{1}{2}\sum_{n=}^{\infty} \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n}}{(2n)!}(-1)^n - \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n.$$

14-ДӘРІС. Дәрежелік қатарды мүшелеп дифференцилдау және интегралдау

Дәрежелік қатарды өзінің жинақталу интервалында мүшелеп интегралдауға және дифференциалдауға болады және де мұндай операциялар қатардың жинақталу радиусын өзгертпейді.

Көбіне алдымен функцияның туындысын қатарға жіктеп, сонан соң мүшелеп интегралдау арқылы функция үшін қатар алу қолайлы.

Егер функцияны қатарға жіктеуді негізгі жіктеулерге келтіру қиын болса, онда берілген нүктеде функцияның туындылар тізбегінің мәнін есептеуге тура келеді. Егер бірінші есептеулер бойынша олардың заңдылығын анықтау қиын болса, онда көршілес туындыларды байланыстыратын сонан соң жалпы мүшенің туындысын табуға келетін реккуренттік қатысты іздеуге тырысу керек.

Дәрежелік қатарды мүшелеп дифференцилдауға мысалдар қарастырайық.

Мысал-1. $y = arctgx$ жинақтылық аймағын анықтаңыз:

Шешуі. Берілген функцияның туындысын табамыз:

$$y' = (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ал бұл функцияны қатарға жіктесек:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Осыдан

$$y = arctgx = C + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Тұрақты C-ны табу үшін, $x = 0$ деп аламыз, онда $arctg0 = 0$, $C = 0$ бұдан:

$$arctgx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Қатар $|x| \leq 1$ үшін жинақты.

Мысал-2.$y = sin(\alpha\, arcsin\, x)$ жинақтылық аймағын анықтаңыз:

Шешуі. Берілген функцияны дифференциалдаймыз:

$$y' = cos(\alpha\, arcsin\, x) \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\sqrt{1-x^2} \cdot y' = cos(\alpha\, arcsin\, x) \cdot \alpha.$$

Екінші рет дифференциалдасақ, онда

$$\sqrt{1-x^2} \cdot y'' - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} y' = -sin(\alpha\, arcsin\, x) \cdot \frac{\alpha^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

немесе

$$(1-x^2) \cdot y'' - xy' = -\alpha^2 y.$$

Лейбниц формуласын пайдаланып, екі жағынан *n* ретті туындысын табамыз:

$$(1-x^2) \cdot y^{(n+2)} - 2nxy^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} - xy^{(n+10}ny^{(n)} = -\alpha^2 y^{(n)}.$$

Енді $x = 0$ теңдікке қойсақ, мынаны аламыз:

$$y^{(n+2)}(0) = (n^2 - \alpha^2) \cdot y^{(n)}(0),$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = \alpha.$$

Сондықтан

$$y^{(2n)}(0) = 0,$$

$$y^{(2n+1)}(0) = [(2n-1)^2 - \alpha^2]\ldots[3^2 - \alpha^2][1^2 - \alpha^2] \cdot \alpha.$$

Сонымен

$$sin(\alpha\, arcsin\, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(1^2 - \alpha^2)(3^2 - \alpha^2)\ldots[(2n-1)^2 - \alpha^2]}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Қатар $|x| \leq 1$ үшін жинақты.

Мысал-3. $y = 5^x$ функциясын x-тің дәрежелері бойынша жіктеңіз.

Шешуі. $5^x = e^{ln 5^x} = e^{x ln 5}$ болғандықтан, функциясының жіктелуіне x-тің орнына $xln5$ функциясын аламыз:

$$5^x = xln5 = 1 + x\, ln\, 5 + \frac{x^2\, ln^2\, 5}{2!} + \frac{x^3\, ln^3\, 5}{3!} + \ldots + \frac{x^n \cdot ln^n\, 5}{n!} + \ldots$$

Дәрежелік қатарларды анықталған интегралдарды есептегенде қолдану үшін біз интеграл астындағы функцияны дәрежелік қатарға жіктеп (немесе оның бір бөлігін), содан кейін мүшелеп интегралдаймыз.

Мүшелеп интегралдау орынды болуы үшін дәрежелік қатар интегралдау кесіндісінде бірқалыпты жинақталуы жеткілікті.

Дәрежелік қатарды мүшелеп интегралдауға мысал қарастырайық.

Мысал-4. $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ интегралын 0,001 дәлдікке дейін есептеңіз.

Шешімі. Берілген интеграл астындағы $e^{-\frac{x^2}{2}}$ функцияны келесі формуланы қолданып

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

қатарға жіктеп және мүшелеп интегралдасақ, алатынымыз:

$$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384} - \ldots\right) dx =$$

$$= 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{336} + \frac{1}{3456} - \ldots \approx 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{336} \approx 0{,}854.$$

Жіктелген қатардың бесінші мүшесі $\frac{1}{3456} = 0{,}00029 < 0{,}001$ дәлдіктен кіші болғандықтан, қателік бесінші алынып тасталған мүшеден артық емес.

15-ДӘРІС. Фурье қатарлары

Негізгі тригонометриялық функциялар бойынша Фурье қатары. Негізгі тригонометриялық функциялар жүйесі деп $[-\pi, \pi]$ аралығында анықталған

$$1, cosx, sinx, cos2x, sin2x, \dots , cosnx, sinnx, \dots \tag{15.1}$$

функциялар жүйесін айтады.

Функциялық қатарды

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos n\, x + b_n \sin n\, x + \dots$$

немесе

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\, x + b_n \sin n\, x) \tag{15.2}$$

тригонометриялық қатар деп, ал $a_0, a_n, b_n (n = 1,2, \dots)$ тұрақты сандарды тригонометриялық қатардың коэффициенттері деп атайды.

Егер (15.2) қатар жинақты болса, оның қосындысы $f(x)$ функциясы периоды 2π болатын периодты функция, себебі $\sin n\, x, \cos n\, x$ функцияларының периоды 2π.

Негізгі тригонометриялық (15.1) функциялар жүйесі $[-\pi, \pi]$ кесіндісінде ортогоналды:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos n\, x dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin n\, x dx = 0, \quad n = 1,2, \dots,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos n\, x \cos m\, x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin n\, x \sin m\, x dx = 0, \quad n \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos n\, x \sin m\, x dx = 0, \quad m, n, = 0,1,2, \dots .$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 n\, x dx = \pi, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 n\, x dx = \pi, \qquad n = 1,2, \dots$$

Периоды 2ℓ функцияларды Фурье қатарына жіктеу. Егер периоды $2l$ болатын $f(x)$ периодты функциясы құрама-үзіліссіз болса және құрама-үзіліссіз туындысы бар болса (үзіліс нүктелерінде функцияның мәні оң және сол шектік мәндерінің арифметикалық орта мәніне тең деп есептейміз), онда оны барлық нақты сан осінде осы функцияға жинақталатын Фурье қатарына жіктеуге болады:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\,x+b_n\sin n\,x).$$

Периоды 2ℓ функциялар үшін Фурье қатары:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right),$$

мұндағы a_0, a_n, b_n сандар Фурье қатарының коэффициенттері.

Фурье қатарының коэффициенттері келесі формулалар бойынша есептелінеді:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx;\quad n=1,2,\dots$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx;\quad n=1,2,\dots$$

Коэффициенттерді есептеу барысында мынаны ескерген жөн: интегралдау кесіндісі ретінде $[-l,l]$ кесіндісін ғана емес, сонымен қатар ұзындығы периоды $2l$-ге тең болатын кез келген кесіндісін алуға болады.

$f(x)$ функциясы жұп немесе тақ болған жағдайда, Фурье коэффициенттері үшін формулалар ықшамдалады:

жұп функция үшін Фурье коэффициенттері:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx;\qquad n=0,1,2,\dots$$

$$b_n=0;$$

тақ функция үшін Фурье коэффициенттері:

$$a_n=0,$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx;\qquad n=1,2,\dots$$

Фурье қатары $f(x)$ функциясына жинақтылығын бермейтіндіктен қатарға “~” белгіні қояды:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x).$$

Фурье қатары жинақты және қосындысы $f(x)$ функциясы болуы үшін оған бірнеше шектеулер қойылады.

Егер $f(x)$ функциясы берілген аралықта не үзіліссіз, не саны шекті бірінші текті үзіліс нүктелері бар және $(-\pi, \pi)$ аралығын саны шекті аралықтарға бөлгенде әрбір аралықта ол монотонды функция болса, онда $f(x)$ функциясын $(-\pi, \pi)$ аралығында Дирихле шарттарын қанағаттандырады дейді.

Дирихле теоремасы. Егер $(-\pi, \pi)$ аралығында берілген $f(x)$ функциясы Дирихле шарттарын қанағаттандырса, оның Фурье қатары $(-\pi, \pi)$ аралықта жинақты және оның қосындысы $S(x)$ үзіліссіз нүктелерде $f(x)$ функциясына, ал үзіліс нүктелерінде оң жақ және сол жақ шектерінің арифметикалық ортасына тең.

Периоды 2π функцияларды Фурье қатарына жіктеу. Егер $f(x)$ функциясы $[-\pi, \pi]$ кесіндісінде анықталған жұп функция интегралданатын болса, онда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx\,.$$

$f(x)$ тақ функция болса, яғни $f(-x) = -f(x)$. Онда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0.$$

Айталық, $f(x)$ функциясы $[-\pi, \pi]$ кесіндісінде анықталған жұп функция болсын, онда $f(x) \sin n x$ тақ функция, ал $f(x) \cos n x$ жұп функция болады және

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \cos n x dx,$$

$$b_n = 0.$$

Сондықтан $f(x)$ функциясы $[-\pi, \pi]$ кесіндісінде жұп функция болса Фурье қатарының жазылуы

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\, x.$$

Енді $f(x)$ функциясы $[-\pi, \pi]$ аралығында тақ функция болсын, онда $f(x) \cos n\, x$ тақ, ал $f(x) \sin n\, x$ жұп функция болады да Фурье қатары

$$a_0 = 0,$$

$$a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin n\, x dx.$$

Сәйкес $f(x)$ функциясы $[-\pi, \pi]$ кесіндісінде тақ функция болса, онда Фурье қатарының жазылуы:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\, x.$$

Сонымен, жұп функциялар Фурье қатарына косинустар бойынша, тақ функциялар тек синустар бойынша жіктеледі.

Периодсыз функцияларды да Фурье қатарына жіктеуге болады. Бұл жағдайда есеп мына түрде қойылады: $f(x)$ функциясын (a,b) интервалында Фурье қатарына жіктеңіз. Бұны (a,b) интервалында берілген $f(x)$ функциясымен сәйкес келетін, периоды $(b - a)$ тең, периодты функцияны Фурье қатарына жіктеу деген мағынада түсіну керек.

Фурье қатарларына мысалдар келтірейік.

Мысал-1. (1,3) интервалында *y*=*x* функциясын Фурье қатарына жіктеңіз.

Шешуі. Есеп шартында интервалдың беруіне сай функция периоды тең болады $2l = 3 - 1 = 2$.

$$a_n = \int_1^3 x \cdot \cos \pi\, n x dx = \begin{vmatrix} u = x, \;\; du = dx \\ dv = \cos \pi n x dx \\ v = \dfrac{1}{\pi n} \sin \pi n x \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi n} x \cdot \sin \pi n x \Big|_1^3 - \frac{1}{\pi n} \int_1^3 \sin \pi n x dx = \begin{vmatrix} \sin \pi n = 0 \\ \cos \pi n = \pm 1 \\ n = 1,2, \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

$n > 0$ болғанда $a_0 = 4$, себебі

$$a_0 = \int_1^3 x \cdot cos\,\pi \cdot 0xdx = \frac{x^2}{2}\bigg|_1^3 = 4.$$

$$b_n = \int_1^3 x\,sin\,\pi\,nxdx = \frac{2 \cdot (-1)^{n-1}}{\pi n}.$$

Бұдан (1, 3) интервалында *y*=*x* функциясының Фурье қатарына жіктелуі:

$$x = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n-1}}{\pi n} sin\,\pi\,nx.$$

Кейде есеп келесі түрде қойылады: $f(x)$ функциясын $(0, l)$ интервалында косинус (синус) бойынша жіктеңіз. Бұл $(0, l)$ интервалында берілген $f(x)$ функциясымен сәйкес келетін, периоды $2l$ тең, периодты жұп (тақ) функцияны қатарға жіктеуді білдіреді.

Мысал-2. $(0, \pi)$ интервалында $y = x^2$ функциясын косинустар бойынша қатарға жіктеңіз.

Шешуі. Есеп шарты бойынша $y = x^2$ функциясы косинустар бойынша қатарға жіктеледі, сондақтан $b_n = 0$.

$n > 0$ болған кезде $(0, \pi)$ интервалында

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cdot cos\,n\,xdx = \frac{4(-1)^{n-1}}{n^2},$$

$$a_0 = \frac{2}{3}\pi^2,$$

онда

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,cos\,n\,x}{n^2}.$$

Дербес жағдайда, $x = 0$ және $x = \pi$ деп есептеп, аламыз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Мысал-3. $(0, \pi)$ интералында $y = x^2$ функциясын синустар бойынша қатарға жіктеңіз.

Шешуі. $(0, \pi)$ интервалында

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cdot \sin n\,x dx = -\,2\pi\frac{(-1)^n}{n} + \frac{4(-1)^n}{\pi n^3},$$

онда $(0, \pi)$ интералында $y = x^2$ функциясының синустар бойынша қатарға жіктелуі:

$$y = x^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-2\pi\frac{(-1)^n}{n} + \frac{4(-1)^n}{\pi n^3}\right)\sin n\,x.$$

Мысал-4. $y = |\sin x|$ функциясын Фурье қатарына жіктеңіз.

Шешуі. Периоды $2l = \pi$, функция – жұп, яғни $b_n = 0$. Келесі формулаларды қолданамыз:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx; \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Онда $n = 0$ үшін

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin x| \cdot \cos 0\,dx = \frac{2}{\pi},$$

$n = 1,2,\ldots$.шін a_n табамыз:

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x \cdot \cos 2\,nx dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1} - \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{4}{\pi(4n^2-1)}; \qquad n = 1,2,\ldots$$

Фурье қатарының жазылуы:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\,x + b_n\sin n\,x).$$

Берілген $y = |\sin x|$ функциясы үшін аламыз:

$$y = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(4n^2-1)}\cos n\,x.$$

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Сағынтаев С.С., Сағынтаева С.С. Жоғары математика: Оқулық. - Алматы: АЭжБУ, 2020. - 609 б.

2. ИскаковаА.Қ., Сатыгулова С., Айтжанов С.Е. Математикалық анализ 1. Оқу құралы. Әл Фараби атындағы ҚҰу. -Алматы: Қазақ университеті, 2020. - 236 бет. ISBN 978-601-04-4714-1.

3. Байсалова М.Ж., Тілепиев М.Ш. Математика. Теориясы және есептер жинағы. 2 бөлім: Оқулық. – Алматы, АЭжБУ, 2020. - 188 б.

4. Жоғары математика бойынша жеке тапсырмалар. Комплекс сандар. Анықталмаған және анықталған интегралдар. Бірнеше айнымалдар функциялдары. Қарапайым, дифференциалды теңдеулер: Оқу құралы/ А.П.Рябушко, В.В.Бархатов, В.В.Державец, И.Е. Юруть; А.П. Рябушконың жалпы редакциясымен. Орыс тілінен аударған Б.М.Семкұл. – Қарағанды: Қазақстан-Ресей ун-ті баспасы, 2011.– 491 бет.

5. Айдос Е.Ж. Жоғары математика. – Алматы: «Иль-Тех-Кітап», 2004.

6. Сайт Қазақстан электронды оқулықтары https://mhelp.kz/skachat-elektronnye-uchebniki-kazahstan/

7. do.gendocs.ru – әр түрлі пәндер бойынша көптеген дәрістер, баяндамалар мен анықтамалықтар бар оқу порталы.

Мазмұны

2022 ж. жиынтық жоспары, реті 163

Искакова Ақжолтай Құрмантаевна
Рысбекова Гульбану Амирбековна

МАТЕМАТИКА-2

Барлық білім беру бағдарламалары студенттері үшін
дәрістер жинағы

Редактор: Изтелеуова Ж.Н.
Стандарттау бойынша маман: Ануарбек Ж.А.

Басылымға қол қойылды __.__.__. Пішімі 60х84 1/16
Таралымы 100 дана. Баспаханалық қағаз№ 1
Көлемі – 5,2 оқу- бас.ә. Тапсырыс Бағасы 2600 тг.

Ғұмарбек Дәукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс
университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірме – көбейту бюросы
050013 Алматы, Байтұрсынұлы көшесі, 126/1