Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра Математика и математическое моделирование

МАТЕМАТИКА 2

Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 5В0702000 - Автоматизация и управление. Часть 1

Алматы 2019

СОСТАВИТЕЛИ: Масанова А.Ж. Математика 2. Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 5В070200 - Автоматизация и управление. Часть 1. – Алматы: АУЭС, 2019. - 30 с.

Методические указания содержат задания к расчетно-графической работе по разделам «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», дисциплины «Математика 2». По РГР даны основные методические указания в виде формул к решению задач первого уровня сложности и решение заданий первого уровня типового варианта. Методические указания предназначены для студентов всех форм обучения специальности 5В070200 - Автоматизация и управление. Представленный материал соответствует разделам.

Библиогр. – 6 названий, 4 рисунка.

Рецензент: к.п.н. Саламатина А.М.

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2019 г.

Введение

Программа по курсу «Математика 2» структурирована в соответствии с действующими учебными планами АУЭС. Все студенты изучают 3 модуля по данному курсу, что соответствует общему количеству кредитов, выделенных в учебных планах. В результате изучения 1 модуля дисциплины студент должен знать основные операции над векторами и матрицами; и уравнения плоскостей и прямых в пространстве, методы решения систем алгебраических уравнений. Методические указания содержат задания к расчетно-графической работе №1 (РГР1) по разделам «Векторная и линейная алгебра», « Аналитическая геометрия» дисциплины «Математика 2». Необходимые теоретические знания приведены в конспекте лекций [3]. По каждому заданию даны основные методические указания в виде формул к решению задач первого уровня сложности и решение заданий первого уровня типового варианта. Все вычисления можно проводить и в программном продукте «MATHCAD» любого уровня.

Вариант задания расчетно-графической работы для студентов, обучающихся по очной форме, определяется по списку группы. Вариант задания расчетно-графической работы (контрольной работы) для студентов, обучающихся дистанционно, определяется как остаток от деления номера студенческой книжки на 30.

1 Расчетно-графическая работа №1. Векторная и линейная алгебра. Аналитическая геометрия

1.1 Теоретические вопросы

1. Определители, их свойства и вычисление.
2. Матрица. Операции над матрицами и ее свойства. Ранг матрицы и его вычисление
3. Векторы. Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов. Коллинеарность, компланарность и ортогональность векторов.
4. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их приложения.
5. Уравнение плоскости.
6. Уравнение прямой в пространстве и на плоскости.
7. Угол между прямыми, плоскостями, прямой и плоскостью.
8. Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости.
9. Кривые второго порядка (окружность, эллипс, гипербола, парабола), их свойства и канонические уравнения.
10. Поверхности второго порядка.
11. Приведение общего уравнения кривых второго порядка к каноническому виду.

12. Методы решения систем линейных уравнений (правило Крамера, матричный способ решения).

1.2 Расчетные задания

Задание 1. Дан определитель третьего порядка.

Требуется:

а) найти все миноры M_{ij} и алгебраические дополнения A_{ij} элементов i-той строки - a_{i1}, a_{i2}, a_{i3};

б) разложить определитель по элементам i-того столбца и вычислить его;

в) вычислить определитель по правилу треугольника (правило Сарриуса).

1.1 $\begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}, i = 3,\ j = 2$	1.2 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, i = 1,\ j = 3$	1.3 $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, i = 2,\ j = 3$
1.4 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}, i = 1,\ j = 1$	1.5 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}, i = 1,\ j = 3$	1.6 $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, i = 2,\ j = 3$
1.7 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix}, i = 2,\ j = 1$	1.8 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}, i = 3,\ j = 1$	1.9 $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix}, i = 2,\ j = 2$
1.10 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}, i = 3,\ j = 2$	1.11 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}, i = 1,\ j = 3$	1.12 $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}, i = 3,\ j = 2$

1.13 $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \\ -4 & 5 & 4 \end{vmatrix}, i=3,\ j=3$	1.14 $\begin{vmatrix} 5 & 6 & -4 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 9 \end{vmatrix}, i=2,\ j=3$	1.15 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}, i=3,\ j=1$
1.16 $\begin{vmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}, i=2,\ j=2$	1.17 $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, i=1,\ j=2$	1.18 $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}, i=2,\ j=3$
1.19 $\begin{vmatrix} 9 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}, i=3,\ j=1$	1.20 $\begin{vmatrix} -6 & 10 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -8 \end{vmatrix}, i=1,\ j=3$	1.21 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}, i=1,\ j=1$
1.22 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix}, i=2,\ j=1$	1.23 $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 9 \\ 1 & -9 & 7 \\ -3 & 1 & 12 \end{vmatrix}, i=2,\ j=3$	1.24 $\begin{vmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 10 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 6 \end{vmatrix}, i=1,\ j=2$
1.25 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, i=3,\ j=1$	1.26 $\begin{vmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}, i=1,\ j=2$	1.27 $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -11 \end{vmatrix}, i=3,\ j=2$
1.28 $\begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 8 \\ -7 & 4 & -1 \end{vmatrix}, i=3,\ j=1$	1.29 $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 9 & -2 & 9 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix}, i=2,\ j=1$	1.30 $\begin{vmatrix} 2 & 13 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}, i=1,\ j=3$

Задание 2. Даны матрицы A, B, C.

Требуется найти:

а) произведение матриц AB, BC, BA, если произведения существуют. Если произведение невозможно, то объяснить почему;

б) A^T, B^T, C^T;

в) матрицу A^{-1}, обратную матрице A. Сделать проверку.

2.1	$A=\begin{pmatrix}9 & 2 & -1\\ 2 & -2 & 3\\ 4 & 1 & -4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 5 & 1\\ -3 & 7\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -6 & 1\end{pmatrix}$
2.2	$A=\begin{pmatrix}12 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 9\\ -4 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}10 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$
2.3	$A=\begin{pmatrix}-7 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 0\\ 3 & 2 & -8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -5\\ 0 & 9\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-7 & 1 & 10\end{pmatrix}$
2.4	$A=\begin{pmatrix}5 & 6 & -4\\ 1 & 1 & 8\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & 1 & -4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-9 & 1\\ 2 & 6\\ 1 & 3\end{pmatrix}$
2.5	$A=\begin{pmatrix}6 & 7 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ 3 & -3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6 & -8 & 2\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}9\\ 8\\ 1\end{pmatrix}$
2.6	$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ -1 & 4 & 11\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}7\\ -4\\ 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 9 & -2\\ 5 & 1 & 4\end{pmatrix}$
2.7	$A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 3 & 2 & -8\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}8 & 3\\ -4 & 2\\ 0 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 7\end{pmatrix}$
2.8	$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 4 & -8 & 11\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 9\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 4 & 9\\ 11 & 1 & -8 & 1\end{pmatrix}$
2.9	$A=\begin{pmatrix}-8 & 2 & 0\\ 4 & 3 & 2\\ 3 & 1 & -5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-6 & 7\\ 5 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & 8 & 0\end{pmatrix}$

2.10	$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -7 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 16 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$
2.11	$A = \begin{pmatrix} 14 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 7 & 1 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$
2.12	$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 8 & 1 & -11 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 10 & -2 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
2.13	$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 5 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 9 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2.14	$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 4 & -6 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 5 & -11 & 10 & 0 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
2.15	$A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$
2.16	$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 1 & -3 & 6 \\ -4 & 1 & 8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}$
2.17	$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 \\ 8 & -5 & 7 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$
2.18	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 10 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

2.19	$A = \begin{pmatrix} -10 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
2.20	$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 1 \\ 7 & 9 & 10 & -12 \end{pmatrix}$
2.21	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 7 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 5 \\ 3 & 4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$
2.22	$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$
2.23	$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix},\ = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$
2.24	$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$
2.25	$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
2.26	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 5 \\ -4 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
2.27	$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2.28	$A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\4&2&2\\2&-1&6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3&7&2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}6&-2\\1&-1\\1&4\end{pmatrix}$
2.29	$A=\begin{pmatrix}-4&4&5\\3&1&-2\\3&-4&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&1&4\\2&-1&6\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix}$
2.30	$A=\begin{pmatrix}0&2&1\\4&2&-2\\1&7&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}6&0&1\\-1&1&2\end{pmatrix}$

Задание 3. Даны точки *A, B* и вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Требуется:

а) найти вектор $\vec{AB}=\bar{a}$ и координаты точки середины отрезка AB;

б) определить взаимное расположение векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (коллинеарны, перпендикулярны или угол между ними);

в) найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{b}$ и $\vec{c}$;

г) проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

№	*A*	*B*	***b***	***c***
3.1	$(3,2,-7)$	$(3,-7,8)$	$(9,-5,6)$	$(-5,1,-2)$
3.2	$(8,5,-1)$	$(0,-9,5)$	$(-3,1,7)$	$(2,-3,2)$
3.3	$(1,6,-3)$	$(4,2,7)$	$(4,7,1)$	$(8,4,0)$
3.4	$(2,5,6)$	$(1,9,-1)$	$(0,8,-5)$	$(3,-2,4)$
3.5	$(9,1,5)$	$(5,2,-2)$	$(3,-5,1)$	$(4,-7,8)$
3.6	$(8,5,1)$	$(2,8,5)$	$(-4,4,-2)$	$(4,-3,1)$
3.7	$(6,0,3)$	$(1,9,-1)$	$(1,8,-3)$	$(4,2,7)$
3.8	$(4,-7,8)$	$(3,1,-7)$	$(1,9,5)$	$(5,2,-2)$
3.9	$(1,-9,3)$	$(-1,4,5)$	$(3,4,5)$	$(4,5,7)$
3.10	$(1,-4,5)$	$(3,-9,2)$	$(2,7,6)$	$(3,7,5)$

3.11	$(2,-8,1)$	$(4,-2,-5)$	$(4,3,-6)$	$(1,8,-3)$
3.12	$(7,3,0)$	$(-3,1,7)$	$(8,4,1)$	$(9,1,-1)$
3.13	$(3,8,-7)$	$(9,-5,6)$	$(2,5,1)$	$(5,3,-2)$
3.14	$(1,-4,1)$	$(1,8,-1)$	$(1,8,3)$	$(-4,3,7)$
3.15	$(1,8,7)$	$(2,6,1)$	$(8,7,-5)$	$(5,0,-3)$
3.16	$(5,2,1)$	$(2,3,-6)$	$(3,4,-5)$	$(9,-5,6)$
3.17	$(0,1,-3)$	$(5,3,-2)$	$(1,7,0)$	$(4,-3,2)$
3.18	$(3,-2,4)$	$(8,1,-3)$	$(1,7,3)$	$(2,-1,5)$
3.19	$(8,-3,1)$	$(13,1,-1)$	$(2,-3,1)$	$(6,1,4)$
3.20	$(1,7,2)$	$(5,-6,2)$	$(4,-1,3)$	$(2,1,0)$
3.21	$(7,5,0)$	$(0,1,-1)$	$(1,8,-3)$	$(6,1,6)$
3.22	$(9,1,-10)$	$(2,1,5)$	$(3,8,1)$	$(11,7,0)$
3.23	$(1,8,-1)$	$(3,0,-4)$	$(0,-1,3)$	$(2,-3,6)$
3.24	$(7,-9,1)$	$(1,1,2)$	$(1,2,5)$	$(3,-2,1)$
3.25	$(0,1,0)$	$(3,0,-1)$	$(5,6,4)$	$(2,1,-1)$
3.26	$(1,2,-4)$	$(1,2,-4)$	$(1,4,-1)$	$(0,3,4)$
3.27	$(1,3,-1)$	$(3,7,5)$	$(0,8,2)$	$(4,2,-3)$
3.28	$(3,-6,2)$	$(3,9,-2)$	$(1,-2,5)$	$(7,8,1)$
3.29	$(3,-2,0)$	$(1,-4,5)$	$(8,5,-1)$	$(9,12,1)$
3.30	$(0,1,4)$	$(3,7,-1)$	$(3,-4,0)$	$(4,5,7)$

Задание 4. Даны точки A, B и вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Требуется:

а) составить уравнение прямой, проходящей через точки А и В;

б) составить уравнение прямой L_2, проходящей через точки А и параллельно вектору b;

в) составить уравнение плоскости P_1, проходящей через точки A и B и параллельно вектору c;

г) составить уравнение плоскости P_2, проходящей через точку B и параллельно векторам b,c;

д) найти угол между прямыми L_1, L_2;

е) найти угол между плоскостями P_1, P_2;

д) найти угол между плоскостью P_1 и прямой L_1.

№	A	B	$\mathbf{b}$	$\mathbf{c}$
4.1	$(9,-5,6)$	$(3,2,-7)$	$(-5,1,-2)$	$(3,-7,8)$
4.2	$(-3,1,7)$	$(8,5,-1)$	$(2,-3,2)$	$(0,-9,5)$
4.3	$(4,7,1)$	$(1,6,-3)$	$(8,4,0)$	$(4,2,7)$
4.4	$(0,8,-5)$	$(2,5,6)$	$(3,-2,4)$	$(1,9,-1)$
4.5	$(3,-5,1)$	$(9,1,5)$	$(4,-7,8)$	$(5,2,-2)$
4.6	$(-4,4,-2)$	$(8,5,1)$	$(4,-3,1)$	$(2,8,5)$
4.7	$(1,8,-3)$	$(6,0,3)$	$(4,2,7)$	$(1,9,-1)$
4.8	$(1,9,5)$	$(4,-7,8)$	$(5,2,-2)$	$(3,1,-7)$
4.9	$(3,4,5)$	$(1,-9,3)$	$(4,5,7)$	$(-1,4,5)$
4.10	$(2,7,6)$	$(1,-4,5)$	$(3,7,5)$	$(3,-9,2)$
4.11	$(4,3,-6)$	$(2,-8,1)$	$(1,8,-3)$	$(4,-2,-5)$
4.12	$(8,4,1)$	$(7,3,0)$	$(9,1,-1)$	$(-3,1,7)$
4.13	$(2,5,1)$	$(3,8,-7)$	$(5,3,-2)$	$(9,-5,6)$
4.14	$(1,8,3)$	$(1,-4,1)$	$(-4,3,7)$	$(1,8,-1)$
4.15	$(8,7,-5)$	$(1,8,7)$	$(5,0,-3)$	$(2,6,1)$
4.16	$(3,4,-5)$	$(5,2,1)$	$(9,-5,6)$	$(2,3,-6)$
4.17	$(1,7,0)$	$(0,1,-3)$	$(4,-3,2)$	$(5,3,-2)$
4.18	$(1,7,3)$	$(3,-2,4)$	$(2,-1,5)$	$(8,1,-3)$
4.19	$(2,-3,1)$	$(8,-3,1)$	$(6,1,4)$	$(13,1,-1)$

4.20	$(4,-1,3)$	$(1,7,2)$	$(2,1,0)$	$(5,-6,2)$
4.21	$(1,8,-3)$	$(7,5,0)$	$(6,1,6)$	$(0,1,-1)$
4.22	$(3,8,1)$	$(9,1,-10)$	$(11,7,0)$	$(2,1,5)$
4.23	$(0,-1,3)$	$(1,8,-1)$	$(2,-3,6)$	$(3,0,-4)$
4.24	$(1,2,5)$	$(7,-9,1)$	$(3,-2,1)$	$(1,1,2)$
4.25	$(5,6,4)$	$(0,1,0)$	$(2,1,-1)$	$(3,0,-1)$
4.26	$(1,4,-1)$	$(1,2,-4)$	$(0,3,4)$	$(1,2,-4)$
4.27	$(0,8,2)$	$(1,3,-1)$	$(4,2,-3)$	$(3,7,5)$
4.28	$(1,-2,5)$	$(3,-6,2)$	$(7,8,1)$	$(3,9,-2)$
4.29	$(8,5,-1)$	$(3,-2,0)$	$(9,12,1)$	$(1,-4,5)$
4.30	$(3,-4,0)$	$(0,1,4)$	$(4,5,7)$	$(3,7,-1)$

Задание 5. Дана система уравнений. Требуется решить систему методом Крамера.

5.1 $\begin{cases} x-2z=1 \\ 2x+y-z=0 \\ x-2y+z=-2 \end{cases}$	5.2 $\begin{cases} x+y-z=36 \\ x+z-y=13 \\ y+z-x=7 \end{cases}$	5.3 $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$
5.4 $\begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1 \\ 7x+9y-9z=5 \end{cases}$	5.5 $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3z=16 \\ 5y-z=10 \end{cases}$	5.6 $\begin{cases} x+y+z=36 \\ 2x-3z=-17 \\ 6x-5z=7 \end{cases}$
5.7 $\begin{cases} 7x+2y+3z=15 \\ 5x-3y+2z=15 \\ 10x-11y+5z=36 \end{cases}$	5.8 $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 4x+2y+2z=4 \\ 5x+y+3z=4 \end{cases}$	5.9 $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3z=16 \\ 5y-z=10 \end{cases}$
5.10 $\begin{cases} x+y-2z=6 \\ 2x+3y-7y=16 \\ 5x+2y+z=16 \end{cases}$	5.11 $\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ x+5y-4z=-5 \\ 4x+y-3z=-4 \end{cases}$	5.12 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=1 \\ x+y+3z=2 \end{cases}$

5.13 $\begin{cases} x-3y+4z=1 \\ 5x-2y=2 \\ -x+2z=-1 \end{cases}$	5.14 $\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$	5.15 $\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ x+2y+z=8 \\ x+y+2z=9 \end{cases}$
5.16 $\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 3x+y+2z=7 \\ 2x+3y+z=2 \end{cases}$	5.17 $\begin{cases} 4x+2z=2 \\ 2x-2y=-1 \\ 4x-2y+2z=-3 \end{cases}$	5.18 $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ 2x+y+3z=0 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}$
5.19 $\begin{cases} 3x+2z=1 \\ x-2y=-1 \\ 4x-2y+5z=-3 \end{cases}$	5.20 $\begin{cases} 3x+5z=1 \\ x+2y=2 \\ -3x-3y+5z=-1 \end{cases}$	5.21 $\begin{cases} 3x+y+z=-4 \\ -3x+5y+6z=-8 \\ x-4y-2z=-9 \end{cases}$
5.22 $\begin{cases} 3x+5z=-2 \\ x+2y=3 \\ 2x+5z=1 \end{cases}$	5.23 $\begin{cases} 3x+2y+z=4 \\ 2x+y+3z=0 \\ 2x+3y+z=1 \end{cases}$	5.24 $\begin{cases} 3x+4y-2z=12 \\ 2x-y-z=6 \\ 3x-2y+4z=-9 \end{cases}$
5.25 $\begin{cases} 2x-y+2z=8 \\ x+y+2z=11 \\ 4x+y+4z=22 \end{cases}$	5.26 $\begin{cases} 4x-2y+5z=-3 \\ x-2y=-1 \\ 3x+2z=1 \end{cases}$	5.27 $\begin{cases} 3x-2y-5z=5 \\ 2x+3y-7z=12 \\ x-2y+3z=-1 \end{cases}$
5.28 $\begin{cases} -3x-3y+5z=-1 \\ x+2y=2 \\ 3x+5z=1 \end{cases}$	5.29 $\begin{cases} 2x-3y+2z=5 \\ 3x+4y-7z=2 \\ 5x+y-5z=9 \end{cases}$	5.30 $\begin{cases} 3x-y+z=9 \\ 5x-y+2z=11 \\ x+2y+4z=19 \end{cases}$

Задание 6. Дана система уравнений. Требуется задать и решить систему матричным способом.

6.1 $\begin{cases} x-2z=1 \\ 2x+y-z=0 \\ x-2y+z=-2 \end{cases}$	6.2 $\begin{cases} x+y-z=36 \\ x+z-y=13 \\ y+z-x=7 \end{cases}$	6.3 $\begin{cases} x+y+z=36 \\ 2x-3z=-17 \\ 6x-5z=7 \end{cases}$
6.4 $\begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1 \\ 7x+9y-9z=5 \end{cases}$	6.5 $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3z=16 \\ 5y-z=10 \end{cases}$	6.6 $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 4x+2y+2z=4 \\ 5x+y+3z=4 \end{cases}$
6.7 $\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ x+5y-4z=-5 \\ 4x+y-3z=-4 \end{cases}$	6.8 $\begin{cases} 7x+2y+3z=15 \\ 5x-3y+2z=15 \\ 10x-11y+5z=36 \end{cases}$	6.9 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=1 \\ x+y+3z=2 \end{cases}$

6.10 $\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$	6.11 $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$	6.12 $\begin{cases} x+y-2z=6 \\ 2x+3y-7y=16 \\ 5x+2y+z=16 \end{cases}$
6.13 $\begin{cases} 4x+2z=2 \\ 2x-2y=-1 \\ 4x-2y+2z=-3 \end{cases}$	6.14 $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3z=16 \\ 5y-z=10 \end{cases}$	6.15 $\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 3x+y+2z=7 \\ 2x+3y+z=2 \end{cases}$
6.16 $\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ x+2y+z=8 \\ x+y+2z=9 \end{cases}$	6.17 $\begin{cases} 3x+y+z=-4 \\ -3x+5y+6z=-8 \\ x-4y-2z=-9 \end{cases}$	6.18 $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ 2x+y+3z=0 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}$
6.19 $\begin{cases} 3x+2z=1 \\ x-2y=-1 \\ 4x-2y+5z=-3 \end{cases}$	6.20 $\begin{cases} 2x-y+2z=8 \\ x+y+2z=11 \\ 4x+y+4z=22 \end{cases}$	6.21 $\begin{cases} x-3y+4z=1 \\ 5x-2y=2 \\ -x+2z=-1 \end{cases}$
6.22 $\begin{cases} 3x+5z=1 \\ x+2y=2 \\ -3x-3y+5z=-1 \end{cases}$	6.23 $\begin{cases} 3x-2y-5z=5 \\ 2x+3y-7z=12 \\ x-2y+3z=-1 \end{cases}$	6.24 $\begin{cases} 4x-2y+5z=-3 \\ x-2y=-1 \\ 3x+2z=1 \end{cases}$
6.25 $\begin{cases} 3x+2y+z=4 \\ 2x+y+3z=0 \\ 2x+3y+z=1 \end{cases}$	6.26 $\begin{cases} 3x-y+z=9 \\ 5x-y+2z=11 \\ x+2y+4z=19 \end{cases}$	6.27 $\begin{cases} 3x+5z=-2 \\ x+2y=3 \\ 2x+5z=1 \end{cases}$
6.2 $\begin{cases} -3x-3y+5z=-1 \\ x+2y=2 \\ 3x+5z=1 \end{cases}$	6.29 $\begin{cases} 2x-3y+2z=5 \\ 3x+4y-7z=2 \\ 5x+y-5z=9 \end{cases}$	6.30 $\begin{cases} 3x+4y-2z=12 \\ 2x-y-z=6 \\ 3x-2y+4z=-9 \end{cases}$

Задание 7. Даны координаты фокуса $F_1(x,y)$ для кривых второго порядка.

Требуется:

а) найти для эллипса полуоси a и b с заданным эксцентриситетом эллипса e_1 *и* записать его каноническое уравнение. Сделать схематический чертеж;

б) найти для гиперболы действительную и мнимую полуоси, уравнения асимптот с заданным эксцентриситетом e_2 и записать его каноническое уравнение. Сделать схематический чертеж;

в) записать каноническое уравнение параболы с заданным фокусом $F_1(x,y)$ и вершиной в начале координат. Сделать схематический чертеж.

№	F_1	e_1	e_2	№	F_1	e_1	e_2
7.1	*(1,0)*	0.8	1.2	7.16	*(4,0)*	6/7	1.6
7.2	*(-1,0)*	0.5	1.4	7.17	*(-7,0)*	1/3	6/4
7.3	*(0,2)*	0.75	3/2	7.18	*(0,6)*	4/5	7/4
7.4	*(0,-2)*	2/3	5/4	7.19	*(0,-6)*	5/7	8/5
7.5	*(1.5,0)*	1/3	7/6	7.20	*(4,0)*	0.5	7/4
7.6	*(-1.5,0)*	4/5	1.2	7.21	*(-2,0)*	0.8	6/5
7.7	*(0,3)*	5/7	1.3	7.22	*(0,2)*	0.4	1.3
7.8	*(0,-5)*	6/7	8/5	7.23	*(0,-4)*	0.6	1.5
7.9	*(10,0)*	1/3	7/4	7.24	*(1,0)*	0.8	1.6
7.10	*(-7,0)*	4/5	6/5	7.25	*(-9,0)*	0.5	6/4
7.11	*(0,4)*	5/7	1.3	7.26	*(0,4.2)*	0.75	1.2
7.12	*(0,-4)*	0.5	1.5	7.27	*(0,-2.2)*	2/3	1.4
7.13	*(8,0)*	0.8	1.6	7.28	*(6,0)*	1/3	3/2
7.14	*(0,5)*	0.4	6/4	7.29	*(0,2.5)*	4/5	5/4
7.15	*(-5,0)*	0.6	7/4	7.30	*(-1.5,0)*	5/7	7/6

Задание 8. Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка. Сделать схематический чертеж.

8.1	$-16-4x-64y-64=0$	8.2	$x^2+y^2+8x-12y+20=0$
8.3	$x^2-y^2-4y-4=0$	8.4	$-y^2+12x-2y-25=0$
8.5	$-3y^2+2x-12y+30=0$	8.6	$9x^2-16y^2-36x-64y-127=0$
8.7	$9x^2-y^2-18x-6y-10=0$	8.8	$-y^2+8x-2y-9=0$
8.9	$4y^2+8x+16y+30=0$	8.10	$5x^2+9y^2+30x+18y+9=0$
8.11	$x^2+y^2-2x+8y+9=0$	8.12	$y^2-8x+8y+32=0$
8.13	$x^2-4y^2-2x-24y-64=0$	8.14	$4x^2+8x+2y+30=0$

8.15	$4y^2+8x+12y+10=0$	8.16	$y^2+4x+8y+16=0$
8.17	$x^2+6x-2y+30=0$	8.18	$3x^2-4y^2+18x+20=0$
8.19	$9x^2+10y^2+40y-50=0$	8.20	$4y^2-2x+8y+28=0$
8.21	$16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$	8.22	$x^2+9y^2-40x+36y+100=0$
8.23	$x^2+6x-2y+5=0$	8.24	$4x^2+8x-6y+28=0$
8.25	$-5y^2+x+20y-6=0$	8.26	$x^2+2y^2-2x+8y+7=0$
8.27	$2x^2-2y^2+2x=0$	8.28	$x^2+8x-2y-16=0$
8.29	$9x^2+4y^2-54x-32y+109=0$	8.30	$x^2+8x+2y+20=0$

1.3 Решение типового варианта

Задание 1. Дан определитель третьего порядка.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} \quad i=3;\ j=2.$$

Требуется:

а) найти все миноры M_{ij} и алгебраические дополнения A_{ij} элементов 3-ей строки – a_{31}, a_{32}, a_{33};

б) разложить определитель по элементам третьего столбца и вычислить его;

в) вычислить определитель по правилу треугольника (правило Сарриуса).

Решение:

а) M_{31} - минор элемента a_{31} есть определитель, полученный из данного вычеркиванием третьей строки и первого столбца, на пересечении которых находится данный элемент [6].

$$M_{31}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}=10-4=6.$$

Остальные M_{32}, M_{33} - миноры элементов a_{32} и a_{33}:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 8 = 3;$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3.$$

.Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} находим по формуле:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij};$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^{3+1} \cdot 6 = 6;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^{3+2} \cdot 3 = -3;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^{3+3} \cdot (-3) = 6\, A_{ij} = -3;$$

б) определитель вычисляется путем *разложения третьей строки* в виде суммы произведений элемента на алгебраическое дополнение:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot ((-2) \cdot (-5) - 1 \cdot 4) - 2 \cdot (1 \cdot (-5) - (-2) \cdot 4) + 7(1 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2)) =$$

$$= 3 \cdot (10 - 4) - 2 \cdot (-5 + 8) + 7 \cdot (1 - 4) = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 3 + 7 \cdot (-3) = -9.$$

Или определитель вычисляется путем *разложения второго столбца*:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = (-2) \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{22} + 2 \cdot A_{32} = -2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-14 + 15) + 1 \cdot (7 - 12) - 2 \cdot (-5 + 8) =$$

$$= 2 - 6 - 5 = -9;$$

в) определитель третьего порядка вычисляется по *правилу Сарриуса*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} -$$

$$a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33};.$$

или вычисления проводим по следующей схеме:

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot7 + (-2)\cdot(-5)\cdot3 + (-2)\cdot2\cdot4 - 3\cdot1\cdot4 - 2\cdot(-5)\cdot1 - (-2)\cdot(-2)\cdot7 =$$

$$= 7 + 30 - 16 - 12 + 10 - 28 = -9.$$

Задание 2. Даны матрицы A, B, C .

Требуется найти:

а) произведение матриц AB , BC , BA , если произведения существуют. Если произведение невозможно, то объяснить почему[1];

б) матрицу A^{-1}, обратную матрице A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix};. \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Решение:

а) определим размерности данных матриц: $A_{3\times3}$, $B_{3\times2}$, $C_{2\times4}$. Произведение двух матриц возможно, если совпадает количество столбцов первой матрицы с количеством строк второй матрицы. При этом в результате получаем новую матрицу с количеством строк первой и количеством строк второй. Это выполняется при произведении матриц *AB:*

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times k} = D_{m\times k};$$

$$A_{3\times3} \cdot B_{3\times2} = D_{3\times2},$$

где элементы d_{ij} - полученной матрицы D равен сумме произведений i -ой строки матрицы A на j -ый столбец матрицы B :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot4 + 0\cdot(-3) + 2\cdot1 & 3\cdot(-3) + 0\cdot6 + 2\cdot7 \\ 1\cdot4 + (-1)\cdot(-3) + 3\cdot1 & 1\cdot(-3) + (-1)\cdot6 + 3\cdot7 \\ 4\cdot4 + (-1)\cdot(-3) + 6\cdot1 & 4\cdot(-3) + (-1)\cdot6 + 6\cdot7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 10 & 12 \\ 25 & 24 \end{pmatrix}.$$

Возможно произведение матриц $B_{3\times2} \cdot C_{2\times4} = F_{3\times4}$:

$$B\cdot C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4\cdot2 + (-3)\cdot4 & 4\cdot3 + (-3)\cdot(-1) & 4\cdot7 + (-3)\cdot3 & 4\cdot1 + (-3)\cdot(-6) \\ (-3)\cdot2 + 6\cdot4 & (-3)\cdot3 + 6\cdot(-1) & (-3)\cdot7 + 6\cdot3 & (-3)\cdot1 + 6\cdot(-6) \\ 1\cdot2 + 7\cdot4 & 1\cdot3 + 7\cdot(-1) & 1\cdot7 + 7\cdot3 & 1\cdot1 + 7\cdot(-6) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 15 & -37 & 22 \\ 18 & -15 & 39 & -39 \\ 30 & -4 & 14 & 41 \end{pmatrix}.$$

$B_{3\times 2} \cdot A_{3\times 3}$ произведение невозможно, т.к. число столбцов матрицы B не равно числу строк матрицы *A;*

б) Если определитель $\det A \neq 0$, то для невырожденной квадратной матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ существует обратная матрица A^{-1} такая, что

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E .$$

Формула обратной матрицы состоит из A_{ij} - алгебраических дополнений элемента a_{ij} :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Прежде всего вычислим:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Находим алгебраические дополнения всех ее элементов.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 6 & 10 & -7 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 6 & 10 & -7 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1}\cdot A=-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -2 & 2\\ 6 & 10 & -7\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ 4 & -1 & 6\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Задание 3.

Даны: $A(-2,7,0)$, $B(-6,3,-1)$, $C(1,0,1)$, $\vec{b}=(-3,4,1)$, $\vec{c}=(9,-1,0)$.

Требуется:

а) вектор $\vec{AB}=\bar{a}$ и координаты точки С - середины отрезка AB;

б) определить взаимное расположение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$: коллинеарны, перпендикулярны или угол между ними;

в) найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{b}$ и $\vec{c}$;

г) проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Решение:

а) если заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора находятся по формуле:

$$\vec{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1);$$

$$\vec{a}=\vec{AB}=((-6)-(-2), 3-7, -1-0)=(-4,-4,-1).$$

Координаты *середины отрезка* будут:

$$C\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right);$$

$$C\left(\frac{-2-6}{2};\ \frac{7+3}{2};\ \frac{0-1}{2}\right)=\left(-4;\ 5;\ -\frac{1}{2}\right);$$

б) если вектора $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$ - *коллинеарны,* то их координаты пропорцианальны:

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\Leftrightarrow\quad \bar{a}\,//\,\bar{b}.$$

Если вектора $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$ - *перпендикулярны*, то:

$$a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0\quad\Leftrightarrow\quad \bar{a}\perp\bar{b}.$$

Вектора не коллинеарны и не перпендикулярны:

$$\frac{-4}{-3}\neq\frac{-4}{4}\neq\frac{-1}{1};$$

$$\bar{a}\,\bar{b}=(-4,-4,-1)\cdot(-3,4,1)=12-16-1=-5\neq 0.$$

Угол между векторами $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right),\ \vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$ определяется через скалярное произведение векторов и их длинами:

$$\cos\bar{a}\,\bar{b}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|a|\cdot|b|},$$

$$\cos\bar{a}\,\bar{b}=\frac{(-4,-4,-1)\cdot(-3,4,1)}{\sqrt{(-4)^2+(-4)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+4^2+1^2}}=\frac{-5}{\sqrt{33}\sqrt{26}};$$

в) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{b}$ =(-3,4,1) и $\vec{c}$ =(9,-1,0) определяется как длина вектора, полученного при их векторном произведении [4]:

$$\bar{b}\times\bar{c}=[\bar{b},\bar{c}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -3 & 4 & 1\\ 9 & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 9 & 0\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 9 & -1\end{vmatrix}\bar{k}=$$

$$=\bar{i}+9\bar{j}-33\bar{k}=(1,9,-33);$$

$$\left|\bar{b}\times\bar{c}\right|=\left|(1,9,-33)\right|=\sqrt{1^2+9^2+(-33)^2}=\sqrt{1171};$$

г) три вектора $\bar{a}=(-4,-4,-1)$, $\vec{b}$ =(-3,4,1) и $\vec{c}$ =(9,-1,0) – *компаланарны*, если лежат на одной плоскости и их смешанное произведение равно нулю:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix};$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}-4 & -4 & -1\\ -3 & 4 & 1\\ 9 & -1 & 0\end{vmatrix}=-7\neq 0$$ – некомпланарны.

Задание 4. Даны точки *A(4,-3,2), B(1,0,0)* и вектора $\vec{b}$ =(5,-2,4) и $\vec{c}$ =(-3,1,5). Требуется:

а) составить уравнение прямой L_1, проходящей через точки А и В;

б) составить уравнение прямой L_2, проходящей через точки А и параллельно вектору *b*;

в) составить уравнение плоскости P_1, проходящей через точки А и *В* и параллельно вектору *с*;

г) составить уравнение плоскости P_2, проходящей через точку *В* и параллельно векторам *b,c*;

д) найти угол между прямыми L_1, L_2;

е) найти угол между плоскостями P_1, P_2;

д) найти угол между плоскостью P_2 и прямой L_1.

Решение:

а) каноническое уравнение прямой L_1, проходящей через две точки, определяется из условия коллинеарности векторов $AM=(x-4,y+3,z-2)$ и $AB=(1-4,0+0,z-2)=(-3,0,-2)$ и имеет вид:

$$L_1: \quad \frac{x-4}{-3}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-2}{-2} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \; // \; \overrightarrow{AB};$$

б) каноническое уравнение прямой L_2, проходящей через точку А и паралельно вектору $\vec{b}=(5,-2,4)$, выводится из условия коллинеарности векторов $\vec{b}=(5,-2,4)$ и $AM=(x-4,y+3,z-2)$ и имеет вид [2]:

$$L_2: \quad \frac{x-4}{5}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-2}{4} \Leftrightarrow \vec{b} \; // \; \overrightarrow{AB};$$

в) уравнение плоскости P_1, проходящей через точки $A(4,-3,2)$, $B(1,0,0)$ и параллельно вектору $\vec{c}=(-3,1,5)$, выводится из условия *компланарности* трех векторов $AM=(x-4,y+3,z-2)$, $AB=(-3,0+0,-2)$, $c=(-3,1,5)$:

$$P_1: \begin{vmatrix} x-4 & y+3 & z-2 \\ -3 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \vec{c} \; // \; P_1.$$

Общее уравнение искомой плоскости P_1 есть:

$$2(x-4)+2(y+3)-3(z-2)=0;$$

г) уравнение плоскости P_2, проходящей через точку $A(4,-3,2)$ и параллельно векторам $\vec{b}=(5,-2,4)$ и $\vec{c}=(-3,1,5)$, также получается из условия компланарности трех векторов $AM=(x-4,y+3,z-2)$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$P_1: \begin{vmatrix} x-4 & y+3 & z-2 \\ 5 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0;$$

$$P_2: -14(x-4)-37(y+3)-(z-2)=0;$$

д) угол между прямыми L_1, L_2 определяется через угол между направляющими векторами q_1, q_2 этих прямых:

$$L_1: \quad \frac{x-4}{-3}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-2}{-2} \; // \; \overrightarrow{q_1}=(-3,3,-2);$$

$$L_2: \quad \frac{x-4}{5}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-2}{4} \; // \; \overrightarrow{q_2}=(5,-2,4);$$

$$\cos(L_1L_2)=\cos(q_1q_2)=\frac{\vec{q}_1\cdot\vec{q}_2}{|q_1|\cdot|q_2|}=\frac{-3\cdot5+3\cdot(-2)+(-2)\cdot4}{\sqrt{9+9+4}\sqrt{25+4+16}}=\frac{-29}{\sqrt{22}\sqrt{45}};$$

е) угол между плоскостями P_1 и P_2 определяется через угол между нормалями к этим плоскостям $n_1 =(2,2,-3)$, $n_2=(-14,-37,-1)$:

$$P_1: 2(x-4)+2(y+3)-3(z-2)=0 \perp \overrightarrow{n_1} = (2,2,-3);$$

$$P_2: -14(x-4) - 37(y+3)-(z-2)=0 \perp \overrightarrow{n_1} = (-14,-37,-1);$$

$$\cos(L_1 L_2) = \cos(q_1 q_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{2 \cdot (-14) + 2 \cdot (-37) + (-3) \cdot (-1)}{\sqrt{4+4+1}\sqrt{14^2+37^2+1}} = \frac{-99}{\sqrt{9}\sqrt{19363}};$$

д) синус угла между прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле [5]:

$$\sin\left(L, ^\wedge P\right) = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

В нашем случае, угол между P_2 и прямой L_1:

$$L_1: \quad \frac{x-4}{-3} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-2}{-2} \;//\; \overrightarrow{q_1} = (-3,3,-2);$$

$$P_2: -14(x-4) - 37(y+3)-(z-2)=0 \perp \overrightarrow{n_1} = (-14,-37,-1);$$

$$\cos(L_1 P_2) = \sin(\vec{q}_1 \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{-3 \cdot (-14) + 3 \cdot (-37) + (-2) \cdot (-1)}{\sqrt{9+9+4}\sqrt{14^2+37^2+1}} = \frac{1445}{\sqrt{22}\sqrt{19363}}.$$

Задание 5. Дана система уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -1 \\ -2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$.

Требуется решить систему методом Крамера.

Решение: вначале составим и вычислим определитель Δ, состоящий из коэффициентов уравнений данной системы:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Чтобы решить систему методом Крамера [1] необходимо вычислить вспомогательные определители Δ_i, которые получены из исходного путем замены *i*-го столбца на столбец правых частей:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 21, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -15 .$$

Формула Крамера [4] для решения системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

отсюда для данной системы: $x_1 = -7, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 5$.

Задание 6. Дана система уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -1 \\ \quad -2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$.

Требуется составить и решить систему матричным методом.

Решение: пусть дана система алгебраических уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$. Из нее однозначно определяются три матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ или } AX = B.$$

Решение системы матричным методом [6] состоит в нахождении обратной матрицы A^{-1}, с помощью которой решение ее ищется в виде:

$$X = A^{-1} \cdot B .$$

Определим матрицы коэффициентов и правых частей данной системы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Задание системы матричным методом:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ 0x_1 - 2x_2 + 1x_3 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot X = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -1 \\ 0x_1 - 2x_2 + 1x_3 = 1 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 2 \end{cases}.$$

Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6.$$

Тогда

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Решение системы в матричном виде есть:

$$X = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ -6 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Задание 7. Даны координаты фокуса $F_1(0,-3)$ для кривых второго порядка. Требуется:

а) найти для эллипса полуоси a и b с заданным эксцентриситетом эллипса $\mathcal{E}_1=0.6$ *и* записать его каноническое уравнение. Сделать схематический чертеж;

б) найти для гиперболы действительную и мнимую полуоси, уравнения асимптот с заданным эксцентриситетом $\mathcal{E}_2=3/2$ и записать его каноническое уравнение. Сделать схематический чертеж;

в) записать каноническое уравнение параболы с заданным фокусом $F_1(0,-3)$ и вершиной в начале координат. Сделать схематический чертеж.

Решение:

а) для эллипса эксцентриситет $\mathcal{E}_1=0.6<1$ и каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Если координаты фокуса находятся на оси *Ox*, то $a \succ b$, и координаты фокуса и эксцентриситет определяются:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}; \quad F_1(c,0); \quad F_2(-c,0); \qquad \varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Если координаты фокуса находятся на оси *Oy*, то $b \succ a$, $F_1(0,c)$, $F_2(0,-c)$, где $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ и $\varepsilon = \frac{c}{b}$.

Так как $F_1(0,-3)$ – фокус находится на оси *Oy* ($F_2(0,3)$) и далее определяются полуоси эллипса: c=3; $\mathcal{E}_1=0.6=3/b$.

Отсюда $b=3/0.6=5;$ $a^2=b^2-c^2=25-9=16.$

Итак, полуоси эллипса: $a=4$ $b=5$ и его каноническое уравнение имеет вид:

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

График показан на рисунке 1.

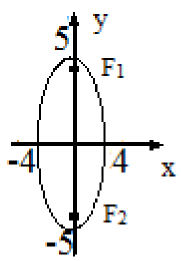

Рисунок 1

б) для гиперболы эксцентриситет $\mathcal{E}_2=3/2>1$. Если координаты фокуса $F_{1,2}(\pm c,0)$ гиперболы находятся на оси *Ox*, то в каноническом уравнении гиперболы a - действительная полуось и b - мнимая полуось:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad F_1(c;0); \quad F_2(-c;0); \quad \varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Если координаты фокуса $F_{1,2}(0,\pm c)$ гиперболы находятся на оси *Oy*, тогда b - действительная полуось по оси Oy и a - мнимая полуось по оси Ox в каноническом уравнении сопряженной гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1; \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad F_1(0;c); \quad F_2(0;-c;); \quad \varepsilon = \frac{c}{b}.$$

Уравнение асимптот обеих гипербол:

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

В нашем случае $F_1(0,-3)$ - фокус на оси Oy, тогда координаты второго фокуса - $F_2(0,3)$ и далее определяем по нему полусь b по оси Oy:

$$c=3;\ \mathcal{E}_2=3/2=3/b.$$

Отсюда действительная полуось $b=2$.

Мнимая полуось: $a^2= c^2 - b^2=9-4=5$ по оси Ox.

Каноническое уравнение гиперболы и уравнения асимптот имеют вид:

$$-\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{2^2}=1;$$

$$y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}x.$$

Для построения гиперболы строится прямоугольник со сторонами $x=\pm a$, $y=\pm b$ $(x=\pm\sqrt{5},\ y=\pm 2)$. Вершины гиперболы находятся в точках пересечения сторон прямоугольника с осью Oy (действительной осью гиперболы). Асимптотами гиперболы $y=\pm b/ax$ являются диагонали прямоугольника. Схематический график данной гиперболы показан на рисунке 2;

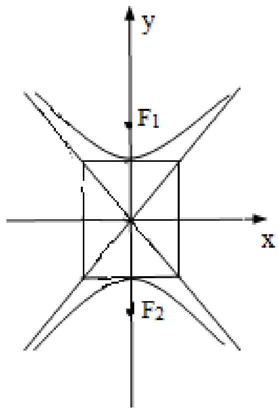

Рисунок 2

в) для параболы эксцентриситет $\mathcal{E}=1$. Если фокус параболы $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ находится на оси Ox, то каноническое уравнение параболы есть $y^2=2px$.

Если фокус параболы $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$ находится на оси Oy, то каноническое уравнение параболы - $x^2=2py$, где p – фокальный параметр параболы.

В нашем случае: $F_1(0,-3)$ – фокус находится на оси Oy, тогда $p/2=-3$, а уравнение параболы имеет вид:

$$x^2=2(-6)y=-12y.$$

Схематический график параболы показан на рисунке 3.

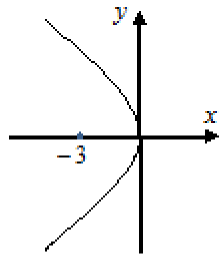

Рисунок 3

Задание 8. Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка $x^2 - 2y^2 - 4y - 6 = 0$. Сделать схематический чертеж.

Решение: канонические уравнения кривых второго порядка со смещенным центром симметрии в точке (x_0, y_0) имеют вид:

1) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ - эллипс.

2) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1$ - гиперболы.

3) $(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$, $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)^2$ - параболы.

Для приведения уравнения к каноническому виду необходимо *выделение до полного квадрата* для каждой переменной [4]:

$x^2 - 2(y^2 + 2y + 1 - 1) - 6 = 0, \quad x^2 - 2(y+1)^2 - 2\cdot(-1) - 6 = 0, \quad x^2 - 2(y+1)^2 = 4$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{2} = 1.$$

При сравнении получили уравнение гиперболы с симметрией в точке $(0,-1)$, полуосями $a = 2$, $b = \sqrt{2}$. При параллельном переносе новых осей координат: $x = x_1$, $y + 1 = y_1$.

Уравнение гиперболы примет вид $\frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{2} = 1$. Схематический график показан на рисунке 4.

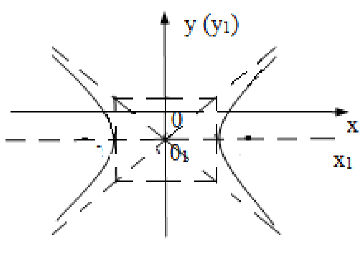

Рисунок 4

Список литературы

1 Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И. Е. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Выш. Шк., 2000. – 303 с.: ил.

2 Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). – М.: Высшая школа, 2008. –176 с.

3 Мустахишев К.М., Атабай Б.Ж. Математика 1. Конспект лекций для студентов специальностей 5В071700 - «Теплоэнергетика, 5В071800 – Электроэнергетика, 5В071900 – «Радиотехника, электроника и телекоммуникации».- Алматы: АУЭС, 2013- 48 с.

4 Индивидуальные задания по высшей математике ч.1 : Учеб. пособие /под ред. А.П. Рябушко – Мн.:Выш.шк., 2007.-396 с.

5 Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч.1– М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и Образование, 2003.

6 Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В., Хейнман В.Б. Сборник задач по линейной алгебре. – Мн.: Выш. школа, 1980.

Содержание

Сводный план 2019., поз. 169

Масанова Аида Жайлауовна

МАТЕМАТИКА 2

Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 5В0702000 - Автоматизация и управление. Часть 1

Редактор Л.Т.Сластихина
Специалист по стандартизации Г.И. Мухаметсариева

Подписано в печать _______
Тираж 25 экз.
Объем 2,3 уч.- изд. лист

Формат 60х84 1/16
Бумага типографская №1
Заказ_____ Цена 1200 тг

Копировально-множительное бюро
некоммерческое акционерное общество
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013, Алматы, Байтурсынова, 126/1