Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ ИМЕНИ ГУМАРБЕКА ДАУКЕЕВА

Кафедра математики и математического моделирования

МАТЕМАТИКА 2

Конспект лекций
для студентов по всем образовательным программам

Алматы 2022

СОСТАВИТЕЛЬ: Ким Р.Е. Математика 2. Конспект лекций для студентов по всем образовательным программам. – Алматы: АУЭС, 2022. – 58 с.

Настоящий конспект лекций содержит 15 лекций по базовым разделам дисциплины Математика 2: «Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных», «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Ряды».

Теоретический материал проиллюстрирован примерами и рисунками.

Конспект лекций предназначен для студентов первого курса по всем образовательным программам. Он также может быть полезен для самостоятельного изучения.

Библиогр. – 3 названия, 11 рисунков.

Рецензент: доцент, к.п.н. Саламатина А. М.

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи имени Гумарбека Даукеева» на 2022 г.

Предисловие

Настоящий конспект лекций содержит 15 лекций по основным разделам, традиционно изучаемым в дисциплине Математика 2: «Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных», «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Ряды» и соответствует учебному плану всех специальностей.

Содержание разделов взаимосвязано друг с другом. Теоретический материал иллюстрируется примерами и рисунками.

Конспект лекций предназначен для студентов первого курса всех специальностей. Он может быть также полезен для самостоятельного изучения.

1 Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных

1.1 Лекция 1. Функция нескольких переменных (ФНП)

Содержание лекции: Функция нескольких переменных (ФНП). Частные производные. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Цель лекции: изучить основные понятия ФНП.

Предположим, что x, y – независимые переменные некоторой области D.

Если каждая пара (x, y) соответствует единственному значению переменной z, т.е. $(x, y) \rightarrow z = f(x,y)$, то z называется функцией двух независимых переменных x и y, определенной в D.

Область определения $D(f)$ – множество пар (x, y), для которых функция $z = f(x, y)$ определена.

Область значений $E(f)$ – множество всех значений $z = f(x, y)$.

Т. к. $(x, y)\rightarrow M(x, y)$ на плоскости Oxy, то $D(f)$ – множество точек на плоскости.

Если $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ – независимые переменные в некоторой области D их изменения, то $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \rightarrow w = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ и w есть функция независимых переменных $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, определенная в D.

Предел и непрерывность функции двух переменных

ε – окрестность точки, $M_0 (x_0 ,y_0)$ – это множество точек $M(x, y)$, таких, что

$$|MM_0| < \varepsilon .$$

Число A называется пределом функции $f(x, y)$ когда точка $M(x, y)$ стремится к точке $M_0 (x_0 , y_0)$, если

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \ \exists\, r > 0 : \ |f(x, y) - A| < \varepsilon \text{ , при } |MM_0| < r.$$

Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = A.$

Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0 (x_0 , y_0)$, если

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0), \qquad (1.1)$$

где $M(x, y) \rightarrow M_0 (x_0 , y_0)$ произвольно, оставаясь в области определения D.

Если мы введем обозначения: $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$,

то (1.1): $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0, y_0)$.

Функция $f (x, y)$ называется непрерывной на некотором множестве D, если она непрерывна в каждой точке D. В противном случае, если $f (x, y)$ не непрерывна, например, в точке $M_1(x_1, y_1)$, говорят, что функция $f(x, y)$ разрывна в точке $M_1(x_1, y_1)$ или что $f(x, y)$ имеет разрыв в точке $M_1(x_1, y_1)$.

Точки разрыва могут образовывать линии или поверхности.

Непрерывные функции имеют одни и те же свойства, независимо от количества переменных:

1) Сумма конечного числа непрерывных функций является непрерывной функцией; произведение конечного числа непрерывных функций является непрерывной функцией.

2) Частное двух непрерывных функций является непрерывной функцией, если знаменатель не равен нулю.

Все элементарные функции непрерывны в своей области определения.

Частные производные (ч.п.) функции нескольких переменных

Пусть $z = f(x, y)$ – функция в области D.

Введем обозначения:

$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$ – полное приращение функции,

$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$ – частное приращение по x,

$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$ – частное приращение по y.

Тогда частные производные (ч.п.) определяются следующим образом:

Ч.п. функции $z = f(x, y)$ по x:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

Ч.п. функции $z = f(x, y)$ по y:

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Пример. $z = x^2 \sin y$, $z'_x = 2x \sin y$, $z'_y = x^2 \cos y$.

Ч.п. для любого числа переменных определяются аналогично.

Пример. $u = x^2 + y^2 + xtz^3$, $u'_x = 2x + tz^3$, $u'_y = 2y$, $u'_z = 3xtz^2$, $u'_t = xz^3$.

Нормаль и касательная плоскость к поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$

Касательная плоскость к поверхности σ в точке M_0 – плоскость, в которой лежат все касательные линии к поверхности σ, проходящие через точку M_0.

Уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0).$$

Вектор $\vec{N} = \left(f'_x(M_0), f'_y(M_0), -1\right)$ – нормальный вектор к поверхности σ в точке M_0. Нормальный вектор перпендикулярен к касательной плоскости.

Нормаль к поверхности в точке M_0 – прямая, проходящая через эту точку и имеющая направление вектора N.

Каноническое уравнение нормали к поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$, в точке $M_0 (x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Нормаль и касательная плоскость к поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$

Уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0 (x_0, y_0, z_0)$:

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F_y(M_0)(y-y_0)+F_z(M_0)(z-z_0)=0.$$

Нормальный вектор к поверхности в точке $M_0 (x_0, y_0, z_0)$:

$$\vec{N}=\left(F'_x(M_0),F'_y(M_0),F'_z(M_0)\right).$$

Каноническое уравнение нормали:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}.$$

Градиент функции

Направление наибольшего изменения функции $u(x, y, z)$ в точке $M_0 (x_0, y_0, z_0)$ дает вектор-градиент:

$$\overrightarrow{grad}\,u(M_0)=u'_x(M_0)\bar{i}+u'_y(M_0)\bar{j}+u'_z(M_0)\bar{k}$$

Частные производные высшего порядка. Смешанные производные

Пусть $z = f(x, y)$ – функция, зависящая от x и y, непрерывная и имеющая непрерывные частные производные в области D.

Тогда $z'_x = f'_x(x, y)$, $z'_y = f'_y(x, y)$ – непрерывные функции, зависящие от x и y. Поэтому мы можем дифференцировать их по x и y; получим четыре частные производные второго порядка:

$$f''_{xx}(x,y),\quad f''_{xy}(x,y),\quad f''_{yx}(x,y),\quad f''_{yy}(x,y).$$

В общем случае: частная производная n-го порядка – производная первого порядка от производной $(n – 1)$-го порядка.

Пример. Найти производные второго порядка функции $f(x) = x^2y + y^3$.

Решение. $f'_x(x, y) = 2xy$, $f'_y(x, y) = x^2+3y^2$,

$f''_{xx}(x, y) = 2y$, $f''_{yy}(x, y) = 6y$,

$f''_{xy}(x, y) = 2x$, $f''_{yx}(x, y) = 2x$.

Теорема (о смешанных производных)

Если функция $z = f(x,y)$ и ее ч.п. f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} определены и непрерывны в точке $M(x, y)$ и ее ε – окрестности, то в этой точке $f''_{xy} = f''_{yx}$.

1.2 Лекция 2. Дифференцируемость и дифференциал ФНП. Экстремумы ФНП

Содержание лекции: Полный дифференциал и его связь с частными производными. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое и достаточное условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в ограниченной замкнутой области.

Цель лекции: изучить основные понятия дифференцирования ФНП.

Функция $z = f(x, y)$, полное приращение которой Δz в данной точке (x, y) может быть представлено как сумма двух слагаемых:

1) выражение линейное по Δx и Δy и
2) значение бесконечно малой более высокого порядка по отношению к $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

называется дифференцируемой в данной точке, и линейная часть приращения называется полным дифференциалом (dz или df):

$$dz = f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y.$$

Приращения независимых переменных Δx и Δy называются дифференциалами переменных x и y (dx и dy).

Поэтому $dz = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy$.

Производная сложных функций

Предположим, что $z = F(u, v)$, $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$,

$$z = F[\varphi(x, y), \psi(x, y)].$$

Тогда $z'_x = F'_u u'_x + F'_v v'_x$, $z'_y = F'_u u'_y + F'_v v'_y$.

Пример. $z = x^2 + y^2$, $y = \sin x$, $z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$, $y'_x = \cos x$,

$$\frac{dz}{dx} = 2x + 2y\cos x = 2x + 2\sin x\cos x = 2x + \sin 2x.$$

Производная неявно заданной функции

Рассмотрим уравнение $F(x, y, z) = 0$. (2.1)

Найдем z'_x и z'_y неявной функции от x и y, определенной уравнением (2.1).

Когда мы ищем z'_x, полагаем, что y является константой, поэтому:

$$z'_x = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}.$$

Аналогично, $z'_y = -\dfrac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$.

Предполагается, что $F'_z \neq 0$.

Аналогично мы определяем неявные функции любого числа переменных и их частные производные.

Пример. $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$ $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2,$

$$F'_x(x, y, z) = 2x, \quad F'_y(x, y, z) = 2y, \quad F'_z(x, y, z) = 2z,$$

$$z'_x = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}, \qquad z'_y = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}.$$

Экстремум ФНП

Функция $z = f(x, y)$ имеет локальный максимум в точке $M_0(x_0, y_0)$, если $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ для всех точек (x, y), достаточно близких к точке (x_0, y_0) и отличающихся от нее.

Функция $z = f(x, y)$ имеет локальный минимум в точке $M_0(x_0, y_0)$, если $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ для всех точек (x, y), достаточно близких к точке (x_0, y_0) и отличающихся от нее.

Максимум и минимум функции называются экстремумами функции.

<u>Теорема 1 (Необходимое условие для локального экстремума ФНП)</u>

Если функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума в $x = x_0$, $y = y_0$, то каждая частная производная первого порядка функции z либо равна нулю при этих значениях аргументов, либо не существует.

Теорема не достаточна.

Пример. $z = x^2 - y^2$,

$$z'_x = 2x, \; z'_y = -2y, \; z'_x = z'_y = 0 \quad \text{при } x = 0, \; y = 0.$$

Но в точке (0, 0) функция z не имеет ни максимума, ни минимума.

Точки, в которых $z'_x = 0$ и $z'_y = 0$ (или не существует), называются критическими точками функции $z = f(x, y)$.

<u>Теорема 2 (Достаточное условие для локального экстремума ФНП)</u>

Предположим, что в некоторой области, содержащей точку $M(x_0, y_0)$, функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные вплоть до 3-го порядка включительно; пусть точка $M(x_0, y_0)$ является критической точкой функции $f(x, y)$, т. е.:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Составим определитель из производных второго порядка:

$$D = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_o) \end{vmatrix}.$$

Тогда для $x = x_0$, $y = y_0$:

1) $f(x, y)$ имеет локальный максимум, если

$$D > 0 \quad \text{и} \quad f''_{xx}(x_0, y_0) < 0;$$

2) $f(x, y)$ имеет локальный минимум, если

$$D > 0 \quad \text{и} \quad f''_{xx}(x_0, y_0) > 0\ ;$$

3) $f(x, y)$ не имеет ни локального максимума, ни локального минимума, если $D < 0$;

4) если $D = 0$, то локальный экстремум может быть или не быть (этот случай требует дальнейшего исследования).

Пример. Исследовать функцию на локальный максимум и локальный минимум:

$$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1.$$

Решение.

1) Найдем критические точки: $z'_x = 2x - y + 3$, $z'_y = -x + 2y - 2$.

Решая систему уравнений $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$,

мы получим: $x = -\dfrac{4}{3}$, $y = \dfrac{1}{3}$.

2) Найдем производные второго порядка в критической точке $\left(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$

и определим характер критической точки:

$$A = z''_{xx}(x_0, y_0) = 2, \quad B = z''_{xy}(x_0, y_0) = -1, \quad C = z''_{yy}(x_0, y_0) = 2,$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0.$$

Следовательно, в точке $\left(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ эта функция имеет локальный минимум, а именно $z_{\min} = -\dfrac{4}{3}$.

Наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x,y)$ в замкнутой области *D*

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена и непрерывна в некоторой ограниченной замкнутой области D.

Пусть в этой области заданная функция имеет конечные частные производные первого порядка (за исключением, быть может, конечного количества точек).

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в данной замкнутой области, требуется выполнить три шага простого алгоритма.

Алгоритм поиска наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x,y)$ **в замкнутой области** D

1. Найти критические точки функции $z = f(x,y)$, принадлежащие области D. Вычислить значения функции в критических точках.

2. Исследовать поведение функции $z = f(x,y)$ на границе области D, найдя точки возможного наибольшего и наименьшего значений. Вычислить значения функции в полученных точках.

3. Из значений функции, полученных в предыдущих двух пунктах, выбрать наибольшее и наименьшее.

1.3 Лекция 3. Двойные интегралы и их свойства

Содержание лекции: Двойные интегралы и их свойства. Вычисление двойных интегралов. Якобиан и замена переменных в двойных интегралах.

Цели лекции: изучить двойной интеграл, его свойствами и технику вычисления.

Рассмотрим в плоскости Oxy замкнутую область D, ограниченную линией L.

Пусть в области D задана непрерывная функция $z = f(x, y)$.

Разобьем область D произвольным образом на n частей:

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, \ldots, \Delta s_n.$$

Каждую часть отождествим с ее площадью.

Выберем в каждой площадке произвольную точку: $P_i \in \Delta s_i$ $(i = \overline{1,n})$ и сопоставим ей значение $f(P_i)$.

Составим сумму: $V_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i$.

Эта сумма называется интегральной суммой для функции $f(x, y)$ в области D.

Если $f \geq 0$ в области D, то геометрически каждое слагаемое $f(P_i)\Delta s_i$ можно представить как объем малого цилиндра, высота которого есть $f(P_i)$, а основание Δs_i.

Таким образом, V_n – объем «ступенчатого» тела. Предположим, что $\operatorname{diam} \Delta s_i \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 1.</u> Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, то $\exists \lim\limits_{diam\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i$.

Этот предел не зависит ни от способа разбиения области D на Δs_i, ни от выбора точки $P_i \in \Delta s_i$.

Этот предел называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ в области D и обозначается: $\iint\limits_D f(P)ds$ или $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Таким образом, $\lim\limits_{diam\Delta s_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$,

где D – область интегрирования.

Геометрический смысл двойного интеграла (в случае $f(x, y) \geq 0$):

двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

равен объему тела V, ограниченного

поверхностью $z = f(x, y)$,
плоскостью $z = 0$ и
цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz
и направляющей L.

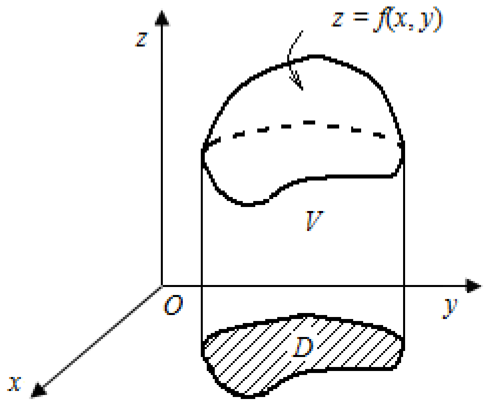

Рисунок 3.1

Свойства двойного интеграла:

1) $\iint\limits_D [\varphi(x,y)+\psi(x,y)]ds = \iint\limits_D \varphi(x,y)ds + \iint\limits_D \psi(x,y)ds$;

2) $\iint\limits_D C\varphi(x,y)ds = C\iint\limits_D \varphi(x,y)ds$, $C = const$;

3) Если D разбита на D_1 и D_2 без общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Вычисление двойных интегралов

Пусть D – замкнутая область в плоскости Oxy.

Область D называется правильной в направлении оси Oy (Ox), если всякая прямая l, параллельная оси Oy (Ox) и проходящая через внутреннюю точку D, пересекает границу области в двух точках, т. е. $l \cap L = \{N_1, N_2\}$.

Таким образом,

D – правильная область в направлении оси Oy, если
D ограничена линиями: $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$, причем

$$\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x), \quad a < b,$$

$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ – непрерывны на $[a, b]$ (рисунок 3.2);

D – правильная область в направлении оси Ox, если
D ограничена линиями: $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $y = c$, $y = d$, причем

$$\psi_1(y) \leq \psi_2(y), \quad c < d,$$

$\psi_1(y), \psi_2(y)$ – непрерывны на $[c, d]$ (рисунок 3.3).

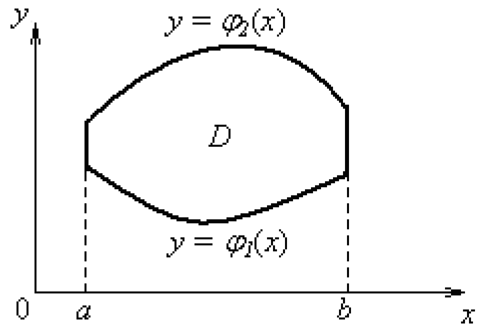

Рисунок 3.2

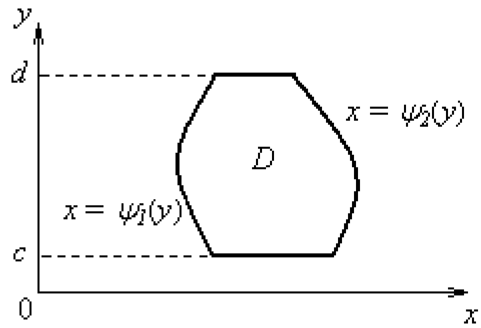

Рисунок 3.3

Правильная область – область, правильная в направлении оси Ox и в направлении оси Oy.

Пусть $f(x, y)$ непрерывна в D.

Выражение $I_D = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$ назовем двукратным интегралом от $f(x, y)$ по области D. Т. е. $I_D = \int\limits_a^b \Phi(x)dx$, где $\Phi(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$.

Свойства двукратного интеграла:

1) Если правильную в направлении оси Oy область D разбить на две области D_1 и D_2 прямой, параллельной оси Oy или Ox, то $I_D = I_{D_1} + I_{D_2}$.

Следствие. $I_D = I_{D_1} + I_{D_2} + I_{D_3} + \ldots + I_{D_n}$.

2) (Оценка двукратного интеграла). Если m – наименьшее, M – наибольшее значения функции $f(x, y)$ в D, S – площадь области D, то

$$mS \le I_D \le MS.$$

3) (Теорема о среднем). Существует точка $P \in D$ такая, что

$$I_D = f(P)S.$$

Теорема 2 (Вычисление двойных интегралов)

Если $f(x, y)$ – непрерывная функция, D – правильная область в направлении Oy, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$;

если D – правильная область в направлении Ox, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy .$$

Замечания:

а) правые части представленных формул являются двукратными или повторными интегралами. Переход от одной формулы к другой называется изменением порядка интегрирования;

б) если область D не является правильной, то необходимо для начала разбить ее на конечное множество правильных областей.

Замена переменных в двойных интегралах

Пусть в плоскости Oxy дана область D, ограниченная линией L.

Предположим, что координаты x и y являются функциями новых переменных u и v: $x = x\ (u,\ v)$, $y = y\ (u,\ v)$, причем $x(u,\ v)$, $y(u,\ v)$ – однозначны, непрерывны и имеют непрерывные производные в некоторой области D', т. е. установлено взаимно однозначное соответствие между областями D и D': $P(x,\ y) \leftrightarrow P'(u,\ v)$, где $u,\ v$ – криволинейные координаты точки P.

Введем обозначение: $$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

– функциональный определитель (якобиан**)** функций $x(u,\ v)$, $y(u,\ v)$.

Тогда формула замены переменных в двойном интеграле имеет вид:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f\big(x(u,v),\, y(u,v)\big) \cdot \left|J(u,v)\right| dudv}$$

Замечание. Частным случаем замены переменных в двойном интеграле является переход к полярным координатам.

Полярные координаты

Положение точки на плоскости определяется двумя полярными координатами ρ и φ, которые связаны с прямоугольными координатами x и y следующими формулами (рисунок 3.4):

$x = \rho\cos\varphi$,
$y = \rho\sin\varphi$, где $0 \le \varphi < 2\pi$.

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial\rho}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial\rho}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\rho\sin\varphi & \cos\varphi\\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi\end{vmatrix}=$$

$$=-\rho\sin^2\varphi-\rho\cos^2\varphi=-\rho.$$

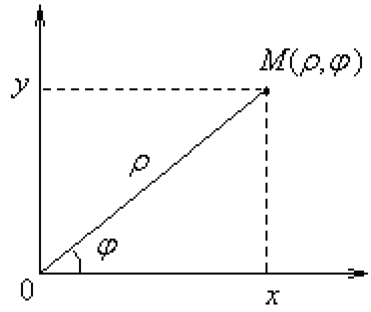

Рисунок 3.4

Следовательно, формула замены переменных принимает вид:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi$$

При этом если область D соответствует рисунку 3.5, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\cdot\rho\cdot d\rho;$$

если область D соответствует рисунку 3.6, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\cdot\rho\cdot d\rho.$$

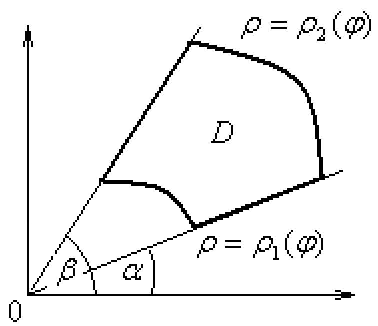

Рисунок 3.5

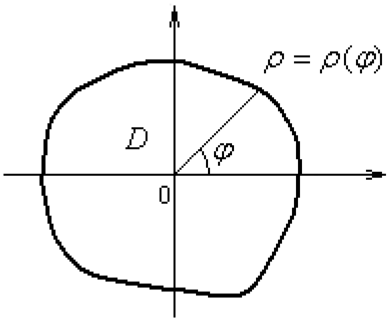

Рисунок 3.6

1.4 Лекция 4. Тройные интегралы и их свойства

Содержание лекции: Тройные интегралы и их свойства. Вычисление тройных интегралов и замена переменных. Применение кратных интегралов.

Цель лекции: изучить тройной интеграл, его свойства и технику вычисления.

Пусть $f(x, y, z)$ – непрерывная функция, определенная в трехмерной области V, ограниченной замкнутой поверхностью S.

Разобьем область V произвольным образом на n элементарных областей:

$$\Delta v_1 , \Delta v_2 , \Delta v_3 , \ldots, \Delta v_n .$$

Каждую область отождествим с ее объемом.

Выберем в каждой области произвольную точку $P_i \in \Delta v_i \ (i = \overline{1,n})$ и сопоставим ей значение $f(P_i)$.

Составим сумму: $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta v_i$.

Эта сумма называется интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$ в области V.

Предположим, что $\operatorname{diam} \Delta v_i \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в замкнутой области V, то $\exists \lim\limits_{diam \Delta v_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta v_i$.

Этот предел не зависит ни от способа разбиения области V на Δv_i , ни от выбора точки $P_i \in \Delta v_i$.

Этот предел называется тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ в области V и обозначается: $\iiint\limits_V f(P)dv$ или $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$.

Физический смысл тройного интеграла: если $f \geq 0$ в области V, то можно считать, что $f(x, y, z)$ – плотность распределения некоторого вещества в области V. Тогда тройной интеграл численно равен массе вещества, заключенного в области V.

Вычисление тройных интегралов

Пусть V – область в пространстве, ограниченная замкнутой поверхностью S.

Область V называется правильной (трехмерной) областью, если:

1) всякая прямая l, параллельная оси Oz и проходящая через внутреннюю точку V, пересекает границу области в двух точках, т. е. $l \cap S = \{N_1, N_2\}$;

2) вся V проектируется на Oxy в правильную (двумерную) область D;

3) всякая часть области V, отсеченная плоскостью, параллельной любой из координатных плоскостей (Oxy, Oxz, Oyz), также обладает свойствами 1) и 2).

Таким образом, V – правильная область, если V ограничена снизу и сверху двумя поверхностями, заданными соответственно уравнениями:

$$z = \psi_1(x,y),\ z = \psi_2(x,y).$$

Введем понятие трехкратного интеграла (рис. 4.1).

Пусть D – проекция области V на плоскость Oxy, ограниченная линиями:

$y = \varphi_1(x),\ y = \varphi_2(x),$
$x = a,\ \ x = b,$
$\varphi_1(x) \le \varphi_2(x),\qquad a < b.$

Тогда трехкратный интеграл от функции $f(x, y, z)$ по области V определяется так:

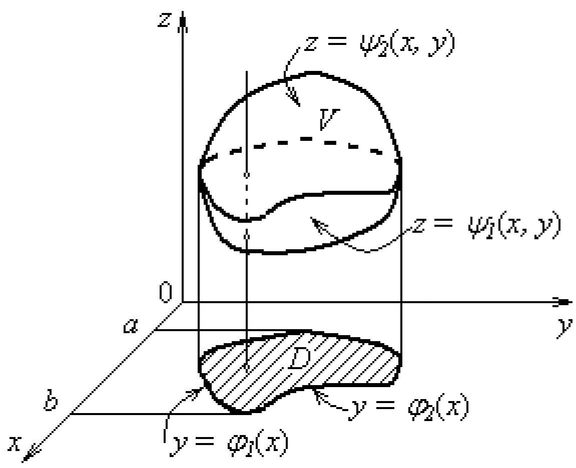

Рисунок 4.1

$$I_V = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx .$$

Свойства трехкратного интеграла:

1) Если область V разбить на области V_1, V_2 плоскостью, параллельной какой-либо из координатных плоскостей, то $I_V = I_{V_1} + I_{V_2}$.

Следствие. $I_V = I_{V_1} + I_{V_2} + I_{V_3} + \ldots + I_{V_n}$.

2) (оценка трехкратного интеграла)

Если m – наименьшее, M – наибольшее значения функции $f(x, y, z)$ в области V, V – объем области V, то $mV \le I_V \le MV$.

3) (теорема о среднем)

Существует точка $P \in V$ такая, что:

$$\int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx = f(P)V .$$

Теорема 2. Если $f(x, y, z)$ – непрерывная функция, V – правильная область, то:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx .$$

Замена переменных в тройных интегралах

Пусть V – замкнутая область в пространстве.

Предположим, что координаты x, y и z являются функциями новых переменных u, t, w: $x = x(u, t, w)$, $y = y(u, t, w)$, $z = z(u, t, w)$, причем $x(u, t, w)$, $y(u, t, w)$, $z(u, t, w)$ – однозначны, непрерывны и имеют непрерывные производные в некоторой области V', т. е. установлено взаимно однозначное соответствие между областями V и V': $P(x, y, z) \leftrightarrow P'(u, t, w)$, где u, t, w – криволинейные координаты точки P.

Введем обозначение:

$$J = J(u,t,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

– функциональный определитель (якобиан) функций $x = x(u, t, w)$, $y = y(u, t, w)$, $z = z(u, t, w)$.

Тогда формула замены переменных в тройном интеграле имеет вид:

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f\left[x(u,t,w), y(u,t,w), z(u,t,w)\right]\cdot |J| dudtdw}$$

Замечание. Частным случаем замены переменных в тройном интеграле является переход к сферическим или цилиндрическим координатам.

Сферические координаты

Положение точки в пространстве определяется тремя сферическими координатами r, φ, θ, которые связаны с прямоугольными координатами x, y, z следующими формулами (Рис 4.2):

$x = r \sin \varphi \cos \theta$,
$y = r \sin \varphi \sin \theta$,
$z = r \cos \varphi$,

где $0 \le r < \infty$, $0 \le \varphi \le \pi$, $0 \le \theta < 2\pi$.

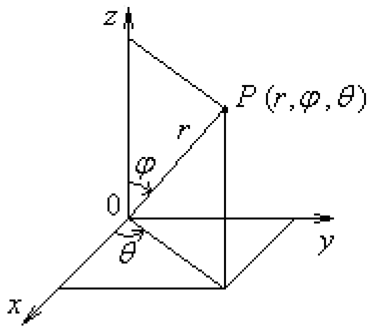

Рисунок 4.2

$$J = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin\varphi .$$

Следовательно, формула замены переменных принимает вид:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\varphi \cdot drd\varphi d\theta .$$

Цилиндрические координаты

Положение точки в пространстве определяется тремя цилиндрическими координатами ρ, θ, z, которые связаны с прямоугольными координатами x, y, z следующими формулами (рис 4.3):

$x = \rho\cos\theta,$
$y = \rho\sin\theta,$
$z = z,$ где $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \theta < 2\pi$.

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

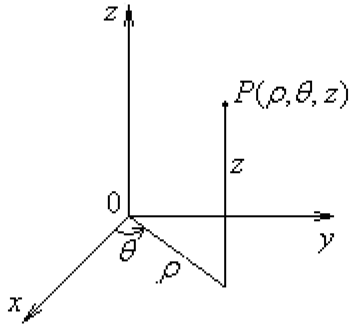

Рисунок 4.3

Следовательно, формула замены переменных принимает вид:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\cdot\rho\cdot d\rho d\theta dz.$$

Пример. Вычислить $\iiint\limits_V zdxdydz$, где V – полушар радиуса R с центром в начале координат O (Рис 4.4).

Решение.

Данная область V ограничена снизу поверхностью $z = 0$,

а сверху – поверхностью $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

(в цилиндрических координатах $z = \sqrt{R^2 - \rho^2}$).

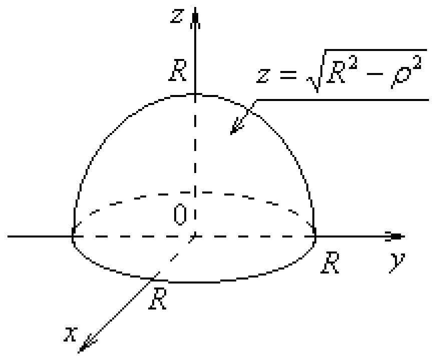

Рисунок 4.4

Следовательно,

$$\iiint\limits_{V'} z\rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\left(\int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} zdz\right)\rho d\rho\right]d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^R \frac{z^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho d\rho\right]d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^R \frac{1}{2}\left(R^2-\rho^2\right)\rho d\rho\right]d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right]d\theta = \frac{1}{2}\frac{R^4}{4}2\pi = \frac{\pi R^4}{4}.$$

2 Обыкновенные дифференциальные уравнения

2.1 Лекция 5. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Основные классы дифференциальных уравнений первого порядка

Содержание лекции: Дифференциальные уравнения (ДУ) 1-го порядка. Задача Коши. Основные классы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, линейные уравнения, уравнения в полных дифференциалах.

Цель лекции: изучить основные понятия теории дифференциальных уравнений.

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$. ДУ – выражение следующего вида:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (5.1)$$

Если $y = f(x)$ – функция одной независимой переменой, то ДУ называется обыкновенным ДУ (ОДУ).

Если дифференциальные уравнения содержат неизвестные функции нескольких переменных, то такие уравнения называются дифференциальными уравнениями с частными производными.

Если уравнение (5.1) можно разрешить относительно n-ой производной, то его можно записать в виде:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \qquad (5.1')$$

Порядком ДУ называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

ДУ (5.1) называется линейным, если левая часть его есть многочлен первой степени относительно $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ (и не содержит их произведений), т. е. ДУ имеет следующий вид:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x), \qquad (5.2)$$

где $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ – коэффициенты уравнения (определены и непрерывны в некотором интервале); $f(x)$ – правая часть уравнения.

Уравнение (5.2) называется однородным (без правой части), если $f(x) = 0$.

Уравнение (5.2) называется неоднородным (с правой частью), если $f(x) \neq 0$.

Решением (или интегралом) ДУ называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение (5.1), превращает его в тождество.

Решить (или проинтегрировать) данное ДУ означает найти все его решения в заданной области.

График решения называется интегральной кривой.

Решение $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, которое содержит столько независимых произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, каков порядок этого уравнения, называется общим решением ДУ (5.1)

Если общее решение задано в неявном виде $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, то оно называется общим интегралом.

Примеры простейших ДУ:

1) $y' = f(x)$.

Общее решение: $y = \int f(x)dx + C$, C – *const.*

2) $y'' = 0$

Общее решение: $y = C_1x + C_2$, C_1, C_2 – *const.*

Всякое решение ДУ, которое получается из общего решения, если приписать определенные значения произвольным постоянным, в него входящим, называется частным решением ДУ, $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, и, соответственно, $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ называется частным интегралом.

Пример. $y'' + y = 0$,

общее решение: $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$,

частное решение: $y = 2\sin x + 5\cos x$.

При заданных начальных условиях при $x = x_0$:

$$\left.\begin{array}{l} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{array}\right\} \quad \text{(н.у.)}$$

постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ можно подобрать так, что функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, являющаяся решением уравнения (5.1), будет удовлетворять этим условиям. Таким образом, введем новое понятие.

Задача Коши (начальная задача): найти решение $y = \varphi(x)$ ДУ (5.1), удовлетворяющее начальному условию (н.у.).

Теорема 1. Если в уравнении $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ функция $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ и ее частные производные по аргументам $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ непрерывны в некоторой области, содержащей значения:

$$x = x_0, \ y = y_0, \ y' = y'_0, \ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)},$$

то существует и при том единственное решение $y = \varphi(x)$ задачи Коши.

Дифференциальные уравнения 1-го порядка

ДУ 1-го порядка имеет вид: $F(x, y, y') = 0$, (5.3)

Или, если уравнение разрешено относительно производной, то

$$y' = f(x, y). \qquad (5.3')$$

Общее решение $y = \varphi(x, C)$ зависит от одного произвольного постоянного C.

Теорема 2 (о существовании и единственности решения ДУ)

Если уравнение имеет вид $y' = f(x, y)$, $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ – непрерывны в некоторой области D, содержащей некоторую точку $M(x_0, y_0) \in D$, то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию: $\varphi(x_0) = y_0$.

Геометрический смысл теоремы: существует единственная функция $y = \varphi(x)$, график которой проходит через точку (x_0, y_0).

Рассмотрим основные виды ДУ 1-го порядка.

1) Уравнения с разделяющимися переменными

ДУ вида

$$M(x)\,dx + N(y)dy = 0 \tag{5.4}$$

называют уравнением с разделенными переменными.

Общий интеграл его есть $\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$.

а) ДУ вида

$$y' = f(x)g(y) \tag{5.5}$$

можно привести к уравнению с разделенными переменными:

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx,$$ (предполагая, что $g(y) \neq 0$).

Интегрируя, находим общий интеграл уравнения (4.5):

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C^*.$$

б) ДУ вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \tag{5.6}$$

называется уравнением с разделяющимися переменными. Его можно привести к уравнению с разделенными переменными.

Умножим (5.6) на $\dfrac{1}{M_2(x)N_1(y)}$:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

Интегрируя, получим общий интеграл уравнения (5.6):

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

2) Линейные уравнения

Линейным уравнением называется уравнение первого порядка, линейное относительно неизвестной функции и ее производной. Оно имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x), \tag{5.7}$$

где $p(x)$ и $g(x)$ – заданные непрерывные функции от x (или постоянные).

Методы решения линейного уравнения

а) метод Бернулли

Будем искать решение уравнения (5.7) в виде $y(x) = u(x)v(x)$. (5.8)

Дифференцируя обе части равенства (5.8), находим: $\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$.

Подставим полученное выражение в уравнение (5.7), получим:

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + puv = g \quad \text{или} \quad u\left(\frac{dv}{dx} + pv\right) + v\frac{du}{dx} = g\ . \tag{5.9}$$

Выберем функцию v такой, чтобы $\left(\frac{dv}{dx} + pv\right) = 0$. (5.10)

Разделяя переменные в этом ДУ относительно функции v, находим:

$$v = C_1 e^{-\int p(x)dx}.$$

Так как достаточно одного отличного от нуля решения уравнения (5.10), то положим $C_1 = 1$, тогда $v = e^{-\int p(x)dx}$ (5.11)

Очевидно, что $v(x) \neq 0$.

Подставляя найденное значение $v(x)$ в уравнение (5.9), получим:

$$v(x)\frac{du}{dx} = g(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{g(x)}{v(x)} \Rightarrow u = \int \frac{g(x)}{v(x)}dx + C\ .$$

Таким образом,

$$y = v(x)u(x) = v(x)\int \frac{g(x)}{v(x)}dx + Cv(x).$$

б) Метод вариации

Для решения уравнения (5.9) первоначально решают уравнение:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

и заменяют в общем решении $y = C_1 e^{-\int p(x)dx}$ константу C_1 на функцию $C_1(x)$, такую, чтобы она удовлетворяла уравнению (5.7).

3) Уравнение Бернулли

Дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)y^n, \quad (n \neq 0, n \neq 1) \tag{5.12}$$

называется уравнением Бернулли.

Методы решения уравнения Бернулли:

а) метод Бернулли

(найти решение в виде $y(x) = u(x)v(x)$ как для линейных уравнений);

б) подстановка $z = y^{-n+1}$ сводит уравнение (5.12) к линейному уравнению относительно новой функции z.

Так как $\dfrac{dz}{dx} = (-n+1)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$, то, умножив уравнение (5.12) на $(-n+1)y^{-n}$, получим:

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1)p(x)z = (-n+1)g(x). \qquad (5.13)$$

Решив это линейное уравнение относительно z, и подставив вместо z выражение y^{-n+1}, найдем $y(x)$ – решение уравнения (5.12).

4) Уравнения в полных дифференциалах

Дифференциальное уравнение вида:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \qquad (5.14)$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – некоторые функции, непрерывные вместе со своими частными производными в некоторой области и

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \qquad (5.15)$$

называется уравнением в полных дифференциалах.

Условие (5.15) равносильно тому, что левая часть уравнения (5.14) есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, т. е.

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y) \;\Rightarrow\; (5.14) \Leftrightarrow du(x, y) = 0 \;\Rightarrow\; u(x, y) = C,$$

где $u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C_1$

((x_0, y_0) – точка, в окрестности которой существует решение ДУ (5.14)).

Таким образом, получаем общий интеграл уравнения (5.14):

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C.$$

2.2 Лекция 6. Дифференциальные уравнения высших порядков

Содержание лекции: Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Линейные однородные дифференциальные уравнения. Структура общего решения линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Цель лекции: изучить основные понятия дифференциальных уравнений высших порядков и методы решения линейных однородных дифференциальных уравнений.

Основные понятия дифференциальных уравнений высших порядков (ДУВП)

Дифференциальное уравнение вида:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{6.1}$$
называется дифференциальным уравнением n-го порядка.

Если можем найти n-ую производную из (6.1), то уравнение:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{6.1$'$}$$
называется дифференциальным уравнением n-го порядка, разрешенным относительно старшей производной.

ДУ n-го порядка называется линейным, если оно является многочленом первой степени относительно искомой функции y и ее производных $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, т. е. имеет вид:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x), \tag{6.1$''$}$$
где $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ и $f(x)$ – заданные функции от x или постоянные, причем $a_0(x) \neq 0$ для всех значений x из той области, в которой рассматривается уравнение (6.1″).

Функция $f(x)$ называется правой частью уравнения.

В дальнейшем будем предполагать, что $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ и $f(x)$ – непрерывны при всех значениях x, причем $a_0(x) = 1$.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение имеет вид:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$$
и называется однородным линейным дифференциальным уравнением (без правой части).

Если $f(x) \neq 0$, то уравнение называется неоднородным линейным дифференциальным уравнением (с правой частью).

Задача Коши (начальная задача):

Найти решение ДУ (6.1′), соответствующее начальным условиям (н.у.).

$$\left.\begin{aligned} &y_{x=x_0} = y_0, \\ &y'_{x=x_0} = y'_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y^{(n-1)}_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

Теорема (существование и единственность решения задачи Коши)

Если ДУ имеет вид $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ и $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ и ее частные производные (ч.п.) относительно аргументов $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ – непрерывны в некоторой области, содержащей значения $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$, $\ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, то существует единственное решение $y = y(x)$ ДУ, соответствующее начальным условиям (6.2).

Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ называется общим решением ДУ (6.1′) если:

а) оно удовлетворяет ДУ (6.1′) $\forall\ C_1, C_2, \ldots, C_n$;

б) при заданных н.у. (6.2) мы можем найти такие $C_1, C_2, \ldots, C_n$, что $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ удовлетворяет этим условиям.

Если общее решение дано в неявном виде $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, то оно называется общим интегралом.

Любое решение ДУ, которое получается из общего решения, если мы назначим конкретные значения для произвольных постоянных, в него входящих, $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, называется частным решением ДУ и, соответственно, $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ называется частным интегралом.

Методы решения ДУВП

1. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$**.**

Найдем общий интеграл этого уравнения.

Т. к. $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, то $y^{(n-1)} = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1$, где x_0 – некоторое фиксированное значение x.

Интегрируя снова, мы получим: $y^{(n-2)} = \int\limits_{x_0}^{x}\left(\int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx\right)dx + C_1(x - x_0) + C_2$,

Интегрируя n раз, мы получим:

$$y = \int\limits_{x_0}^{x}\ldots\int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx\ldots dx + \frac{C_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_n.$$

Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее н.у. (6.2), достаточно положить $C_n = y_0$, $C_{n-1} = y'_0, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_1 = y_0^{(n-1)}$.

2. ДУВП, допускающие понижение порядка.

А) Уравнения вида $y'' = f(x, y')$ (6.3)

(f не содержит явно y)

Решение.

Обозначим: $y' = p$. Тогда $y'' = p'$, (6.3): $p' = f(x, p)$ – ДУ 1-го порядка.

Общее решение этого уравнения: $p = p(x, C_1)$.

Общее решение ДУ (6.3): $y = \int p(x, C_1)dx + C_2$.

Замечание.

Аналогичным образом можно решить ДУ $y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)})$, предполагая, что $y^{(n-1)} = p$.

В) Уравнения вида $y'' = f(y, y')$ (6.4)

(f не содержит явно x)

Решение.

Обозначим: $y' = z$, $z = z(y.)$ Тогда $y'' = z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot z.$

(6.4): $z\dfrac{dz}{dy} = f(y,z)$ – ДУ 1-го порядка.

Общее решение этого уравнения: $z = z(y, C_1)$.

Т. к. $y' = \dfrac{dy}{dx} = z(y, C_1)$, то $\dfrac{dy}{z(y, C_1)} = dx.$

Интегрируя это уравнение, мы получим общий интеграл данного уравнения (6.4): $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$.

Некоторые свойства однородных линейных дифференциальных уравнений (ОЛДУ) 2-го порядка.

Теорема 1.

Если y_1 и y_2 – два частных решения ОЛДУ 2-го порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{6.5}$$

то $y_1 + y_2$ – также является решением этого уравнения.

Два решения ДУ (6.5) y_1 и y_2 называются линейно независимыми на отрезке $[a, b]$, если $\dfrac{y_1}{y_2} \neq const.$

В противном случае решения называются линейно зависимыми, т. е. $\exists\, \lambda \in R$: $y_1 = \lambda y_2$.

Пример 1. $y'' - y = 0$,

Решения уравнения: $e^x, e^{-x}, 3e^x, 5e^{-x}$.

Здесь e^x и e^{-x} – линейно независимы на любом отрезке, потому что $\dfrac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x} \neq const.$

e^x и $3e^x$ – линейно зависимы, потому что $\dfrac{e^x}{3e^x} = \dfrac{1}{3} = const.$

Если y_1 и y_2 – функции, зависящие от x, то определитель вида $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$ называется определителем Вронского (вронскианом) данных функций.

Теорема 2.

Если функции y_1 и y_2 линейно зависимы на отрезке $[a, b]$, то $W(y_1, y_2) = 0$.

Теорема 3.

Если решения ДУ (6.5) (y_1 и y_2) линейно независимы на отрезке $[a, b]$, то $W(y_1, y_2) \neq 0$ в любой точке отрезка.

Теорема 4.

Если y_1 и y_2 – два линейно независимых решения уравнения (6.5), то $y = C_1y_1 + C_2y_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, есть его общее решение.

Теорема 5.

Каковы бы ни были н.у.: $y_{x=x_0} = y_0$, $y'_{x=x_0} = y'_0$, можно так подобрать значения C_1, C_2, чтобы $C_1y_1 + C_2y_2$ удовлетворяло заданным н.у.

Однородные линейные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами

1. Однородные ЛДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad p, q \in R \tag{6.6}$$

Достаточно найти два линейно независимых частных решения (ч.р.).

Будем искать ч.р. в виде: $y = e^{kx}$, (6.7)

где $k - const$, тогда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$, $\Rightarrow$ (6.6): $e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$

Т. к. $e^{kx} \neq 0$, то $k^2 + pk + q = 0$.

(6.8)

$\Rightarrow$[k удовлетворяет (6.8) $\Rightarrow e^{kx}$ – решение уравнения (6.6)].

$k^2 + pk + q = 0$ – характеристическое уравнение для ДУ (6.6).

Корни характеристического уравнения:

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \qquad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Возможны случаи:

I. $k_1, k_2 \in$ R ($k_1 \neq k_2$); II. $k_1, k_2 \in$ C; III. $k_1, k_2 \in$ R ($k_1 = k_2$).

Рассмотрим эти случаи.

I. $k_1, k_2 \in$ R ($k_1 \neq k_2$), ч.р.: $y_1 = e^{k_1x}$, $y_2 = e^{k_2x}$.

y_1, y_2 – линейно независимы $\Rightarrow$ $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$ – общее решение.

II. $k_1, k_2 \in$ C, $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$,

ч.р.: $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$,

$y = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$ – общее решение.

Частный случай: чисто мнимые корни ($\alpha = 0$) $p = 0$: $y'' + qy = 0$,

$y = C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x$ – общее решение.

III. $k_1, k_2 \in$ R ($k_1 = k_2$) $y = (C_1 + C_2x)e^{k_1x}$ – общее решение.

2. Однородные ЛДУ n -го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0, \tag{6.9}$$

$a_1, \ldots, a_n$ – заданные коэффициенты.

Найдем общее решение по плану:

1) найти характеристическое уравнение;
2) найти корни характеристического уравнения: $k_1, k_2, \ldots, k_n$;
3) по характеру корней найти ч.р. (n линейно независимых ч.р.);
4) построить общее решение.

Пример. Найти общее решение уравнения $y''' + 9y' = 0$.

$$k^3 + 9k = 0 \Rightarrow (k^2 + 9)k = 0 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 3i \\ k_2 = -3i \end{cases} (\alpha = 0,\ \beta = 3),\ k_3 = 0,$$

$$y = e^{0\cdot x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + C_3 e^{0x} \Rightarrow y = (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + C_3$$

Замечание.

Трудность решения ОЛДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами заключается в решении характеристического уравнения.

2.3 Лекция 7. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Содержание лекции: Неоднородное линейное дифференциальное уравнение. Уравнения со специальной правой частью.

Цель лекции: изучить основные методы решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений.

Неоднородные линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью

Рассмотрим уравнение вида:

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad p, q \in R.$$

Метод подбора частного решения.

1. $f(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x}$, $P_n(x)$ – многочлен n-й степени.

a) Если число α не является корнем характеристического уравнения:

$k^2 + pk + q = 0$, то $\qquad y^* = (A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n)e^{\alpha x} = Q_n(x)e^{\alpha x}$.

b) Если число α является простым корнем характеристического уравнения, то $\qquad y^* = xQ_n(x)e^{\alpha x}$.

c) Если число α является двукратным корнем характеристического уравнения, то $\qquad y^* = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 3y = x$.

Решение.

Общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$\bar{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}.$$

Т. к. $f(x) = x = P_1(x)e^{0x}$, ищем частное решение в виде:

$$y^* = Q_1(x)e^{0x} = A_0x + A_1.$$

Подставляя это выражение в данное ДУ, имеем:

$$4A_0 + 3\,(A_0 x + A_1) = x,$$

из этого уравнения мы получаем $A_0 = 1/3$, $A_1 = -4/9$.

Следовательно, $y^* = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$.

Общее решение: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$.

2. $f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$, $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены.

а) Если число $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то:

$$y^* = U(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

где $U(x)$, $V(x)$ – многочлены, степень которых равна наивысшей степени многочленов $P(x)$, $Q(x)$.

б) Если число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения, то:

$$y^* = x[U(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V(x)e^{\alpha x}\sin\beta x].$$

Специальный случай: $f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x$, где M, N – постоянные.

а) Если число $i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то:

$$y^* = A\cos\beta x + B\sin\beta x,$$

б) Если число $i\beta$ является корнем характеристического уравнения, то:

$$y^* = x[\,A\cos\beta x + B\sin\beta x\,].$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$.

Решение.

Общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$\bar{y} = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x).$$

Ищем частное решение в виде: $y^* = A\cos x + B\sin x$.

Подставляя y^* в данное уравнение, имеем:

$$-A\cos x - B\sin x + 2(-A\sin x + B\cos x) + 5(A\cos x + B\sin x) = 2\cos x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, получим: $-A + 2B + 5A = 2$,

$$-B - 2A + 5B = 0,$$

из этого мы получаем: $A = 2/5$, $B = 1/5$.

Общее решение: $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$.

Неоднородные линейные уравнения высокого порядка с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью

Рассмотрим уравнение вида:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(x) \qquad (7.1)$$

Пусть $\bar{y}=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$ (7.2)

– общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0 \qquad (7.3)$$

Теорема

Если $\bar{y}$ – общее решение однородного уравнения (7.3) и y^* – частное решение неоднородного уравнения (7.1), то $y=\bar{y}+y^*$ – общее решение неоднородного уравнения (7.1).

Рассмотрим специальные случаи:

1. $f(x)=P_n(x)\,e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ – многочлен n-ой степени.

а) Если число α не является корнем характеристического уравнения, то $y^*=Q_n(x)e^{\alpha x}$.

б) Если число α является корнем кратности μ характеристического уравнения, то $y^*=x^{\mu}\,Q_n(x)e^{\alpha x}$.

2. $f(x)=M\cos\beta x+N\sin\beta x$, где M, N – постоянные,

а) если число $i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то

$$y^*=A\cos\beta x+B\sin\beta x,;$$

б) если число $i\beta$ является корнем кратности μ характеристического уравнения, то $y^*=x^{\mu}[\,A\cos\beta x+B\sin\beta x\,]$.

3. $f(x)=P\,(x)\,e^{\alpha x}\cos\beta x+Q\,(x)\,e^{\alpha x}\sin\beta x$, где $P(x), Q(x)$ – многочлены.

а) Если число $\alpha+i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то $y^*=U(x)\,e^{\alpha x}\cos\beta x+V\,(x)\,e^{\alpha x}\sin\beta x$,

где $U(x)$, $V(x)$ – многочлены, степень которых равна наивысшей степени многочленов $P(x), Q(x)$.

б) если число $\alpha+i\beta$ является корнем кратности μ характеристического уравнения, то $y^*=x^{\mu}[\,U(x)\,e^{\alpha x}\cos\beta x+V\,(x)\,e^{\alpha x}\sin\beta x\,]$.

Пример. Найти общее решение уравнения: $y^{(4)}-y=5\cos x$.

Решение. Корни характеристического уравнения $k^4-1=0$:

$$k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=i,\quad k_4=-i.$$

$$\bar{y}=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

Т. к. i – простой корень характеристического уравнения, то мы ищем частное решение в виде:

$$y^*=x(A\cos x+B\sin x).$$

Подставляя y^* в данное уравнение, имеем:

$$4A\sin x-4B\cos x=5\cos x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, получим:

$$4A=0,\quad -4B=5,$$

следовательно, $y^* = -\frac{5}{4} x \sin x$.

Итак, общее решение: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - \frac{5}{4} x \sin x$.

2.4 Лекция 8. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Метод вариации произвольных постоянных в нахождении общего решения

Содержание лекции: Метод вариации произвольных постоянных в нахождении общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения.

Цель лекции: изучить основные методы решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \qquad (8.1)$$

соответствующее однородное уравнение: $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, (8.2)

Теорема 1

Предположим, что y^* – любое частное решение уравнения (8.1), $\bar{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения (8.2).

Тогда общее решение неоднородного уравнения (8.1) представляется как сумма $y = \bar{y} + y^*$.

Общий метод нахождения частного решения неоднородного уравнения – метод вариации произвольных постоянных.

Общее решение уравнения (8.2) имеет вид:

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2, \qquad (8.3)$$

где y_1, y_2 – линейно независимые решения уравнения (8.2).

Предположим, что C_1, C_2 – некоторые функции от x.

Продифференцируем равенство (8.3): $\bar{y}' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + C'_1 y_1 + C'_2 y_2$.

Выберем C_1, C_2 так, что $C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0$. (8.4)

Таким образом, $\bar{y}' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2$,

поэтому $\bar{y}'' = C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2$.

Подставляя $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в (8.1), получим:

$$C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + a_1 (C_1 y'_1 + C_2 y'_2) + a_2 (C_1 y_1 + C_2 y_2) = f(x)$$

или

$$C_1 (y''_1 + a_1 y'_1 + a_2 y_1) + C_2 (y''_2 + a_1 y'_2 + a_2 y_2) + C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x).$$

Так как y_2 – решение однородного уравнения (8.2), то последнее уравнение принимает вид:

$$C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x). \qquad (8.5)$$

Таким образом, функция (8.3) является решением ДУ (8.1), если C_1, C_2 удовлетворяют уравнениям (8.4), (8.5), т. е. если:

$$C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0,$$
$$C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x).$$

Т. к. $W(y_1, y_2) \neq 0$, то система разрешима, т. е. $\exists\ C'_1 = \varphi_1(x)$, $C'_2 = \varphi_2(x)$.

Тогда $C_1 = \int \varphi_1(x)dx + \overline{C}_1$, $C_2 = \int \varphi_2(x)dx + \overline{C}_2$, где $\overline{C}_1, \overline{C}_2$ – постоянные интегрирования.

Подставляя эти выражения в (8.3), мы находим общее решение неоднородного уравнения.

Пример.

Найти общее решение уравнения $y'' - \dfrac{y'}{x} = x$.

Решение.

Найдем общее решение однородного уравнения $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$:

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln y' = \ln xC \Rightarrow y = C_1 x^2 + C_2.$$

Определим C_1, C_2: $C'_1 x^2 + C'_2 \cdot 1 = 0,$
$2C'_1 x + C'_2 \cdot 0 = x,$

Решая эту систему, мы находим: $C'_1 = \dfrac{1}{2}, C'_2 = -\dfrac{x^2}{2}$,

Тогда $C_1 = \dfrac{x}{2} + \overline{C}_1$, $C_2 = -\dfrac{x^3}{6} + \overline{C}_2$,

Таким образом, $y = \overline{C}_1 x^2 + \overline{C}_2 + \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^3}{6}$, или $y = \overline{C}_1 x^2 + \overline{C}_2 + \dfrac{x^3}{3}$.

Теорема 2

Решение y^* уравнения $y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x)$ может быть представлено как $y^* = y_1^* + y_2^*$, где y_1^* и y_2^* – соответственно решения уравнений:

$$y_1^{*\prime\prime} + a_1 y_1^{*\prime} + a_2 y_1^* = f_1(x),$$
$$y_2^{*\prime\prime} + a_1 y_2^{*\prime} + a_2 y_2^* = f_2(x).$$

Неоднородные линейные уравнения высокого порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x) \qquad (8.6)$$

Пусть $$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \qquad (8.7)$$
– общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \qquad (8.8)$$

<u>Теорема</u>

Если $\bar{y}$ – общее решение однородного уравнения (8.8), и y^* – частное решение неоднородного уравнения (8.6), то $y = \bar{y} + y^*$ – общее решение неоднородного уравнения (8.6).

<u>Метод вариации произвольных постоянных</u>

Пусть общее решение соответствующего однородного уравнения известно: $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$.

Предполагая, что $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – функции от x, создадим систему:

$$\left.\begin{array}{r} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{array}\right\}$$

Эта система разрешима относительно C_1', C_2', …, C_n'.

Общее решение этой системы:

$$C_1(x) = \int C_1' dx + \overline{C}_1,$$

$$C_2(x) = \int C_2' dx + \overline{C}_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_n(x) = \int C_n' dx + \overline{C}_n,$$

в этом случае $y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \ldots + C_n(x) y_n$ является общим решением неоднородного уравнения.

2.5 Лекция 9. Система дифференциальных уравнений

Содержание лекции: Система дифференциальных уравнений. Задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений. Метод исключения. Структура общего решения.

Цель лекции: изучить основные понятия системы дифференциальных уравнений и методы ее решения.

Система ДУ 1-го порядка

Уравнения вида

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n), \end{array}\right\} \tag{9.1}$$

называются нормальной системой ДУ первого порядка неизвестных функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$.

Решить (проинтегрировать) систему означает – найти функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, удовлетворяющие системе (9.1).

Решить задачу Коши означает – определить функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, соответствующие системе (9.1) и начальным условиям (н.у.):

$$(y_1)_{x=x_0} = y_{10}, \quad (y_2)_{x=x_0} = y_{20}, \quad ..., (y_n)_{x=x_0} = y_{n0}. \tag{9.2}$$

Интегрирование системы (9.1) выполняется следующим образом.

Мы дифференцируем первое уравнение системы (9.1) по переменной x:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + ... + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}.$$

После замены $\quad \dfrac{dy_1}{dx}, ..., \dfrac{dy_n}{dx} \to f_1, ..., f_n$

из уравнений (9.1) мы получаем: $\quad \dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, ..., y_n).$

Дифференцируя полученное уравнение и выполняя процедуру, аналогичную предыдущей, мы находим:

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, ..., y_n).$$

Продолжая далее таким же образом, мы получаем:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, ..., y_n).$$

Таким образом, мы получаем следующую систему:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n),\\
&\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n),
\end{aligned}\right\} \tag{9.3}$$

Из первых (n–1) уравнений мы определяем $y_2, y_3, \ldots, y_n$, выражая их через x, y_1 и производные $\dfrac{dy_1}{dx}, \dfrac{d^2 y_1}{dx^2}, ..., \dfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}$:

$$\left.\begin{aligned}
&y_2 = \varphi_2(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}),\\
&y_3 = \varphi_3(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y_n = \varphi_n(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}).
\end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

Подставляя эти выражения в последнее уравнение в (9.3), мы получаем уравнение n-го порядка для определения y_1:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}). \tag{9.5}$$

Решая это уравнение, находим y_1:

$$y_1 = \psi_1(x, C_1, C_2 ..., C_n). \tag{9.6}$$

Дифференцируя последнее выражение (n–1) раз, мы находим:

$$\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2 y_1}{dx^2}, ..., \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}$$

как функции от $x, C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Подставляя эти функции в уравнение (9.4), определяем $y_2, y_3, \ldots, y_n$:

$$\left.\begin{aligned}
&y_2 = \psi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n),\\
&y_3 = \psi_3(x, C_1, C_2, ..., C_n),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y_n = \psi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n).
\end{aligned}\right\} \tag{9.7}$$

Таким образом, (9.6), (9.7) – общее решение системы (9.1).

Для того чтобы полученное решение удовлетворяло н. у. (9.2), необходимо найти из уравнений (9.6) и (9.7) соответствующие константы C_1, $C_2, \ldots, C_n$.

Замечание.

Если система (9.1) линейна относительно неизвестных функций, то уравнение (9.5) линейно.

Пример 1.

Решить систему: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z + x, \\ \dfrac{dz}{dx} = -4y - 3z + 2x \end{cases}$ (a)

с н. у. $(y)_{x=0} = 1, \ (z)_{x=0} = 0.$ (b)

Решение.

1) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + 1.$$

Используя (a), мы получаем:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (y + z + x) + (-4y - 3z + 2x) + 1,$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2z + 3x + 1. \tag{c}$$

2) Из 1-го уравнения системы (a):

$$z = \frac{dy}{dx} - y - x, \tag{d}$$

тогда (c): $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2(\dfrac{dy}{dx} - y - x) + 3x + 1$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 5x + 1. \tag{e}$$

Общее решение уравнения (e):

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + 5x - 9 \tag{f}$$

и на основе (e), мы получаем:

$$z = (C_2 - 2C_1 - 2C_2x)e^{-x} - 6x + 14. \tag{g}$$

Используя н. у. в (f), (g), мы получаем:

$$1 = C_1 - 9, \qquad 0 = C_2 - 2C_1 + 14,$$

из которых имеем: $C_1 = 10, \ C_2 = 6.$

Таким образом, $y = (10 + 6x)e^{-x} + 5x - 9.$

И на основе (d) мы получаем: $z = (-14 - 12x)e^{-x} - 6x + 14.$

Система линейных дифференциальных уравнений (ЛДУ) с постоянными коэффициентами

Рассмотрим нормальную систему ЛДУ первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n,\\ \frac{dx_2}{dt}&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{dx_n}{dt}&=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n,\end{aligned}\right\}, \qquad (9.8)$$

где a_{ij} – постоянные числа ($i=\overline{1,m}$ (от 1 до m), $j=\overline{1,n}$ (от 1 до n)), t – аргумент, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные функции.

Будем искать решение в виде:

$$x_1=\alpha_1 e^{kt},\ x_2=\alpha_2 e^{kt},\ \ldots,\ x_n=\alpha_n e^{kt}. \qquad (9.9)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, k – коэффициенты.

Подставляя в (9.8), получаем:

$$\left.\begin{aligned}k\alpha_1 e^{kt}&=(a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+...+a_{1n}\alpha_n)e^{kt},\\ k\alpha_2 e^{kt}&=(a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+...+a_{2n}\alpha_n)e^{kt},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ k\alpha_n e^{kt}&=(a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+...+a_{nn}\alpha_n)e^{kt},\end{aligned}\right\}$$

Разделив на e^{kt}, имеем:

$$\left.\begin{aligned}&(a_{11}-k)\alpha_1+a_{12}\alpha_2+...+a_{1n}\alpha_n=0,\\ &a_{21}\alpha_1+(a_{22}-k)\alpha_2+...+a_{2n}\alpha_n=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+...+(a_{nn}-k)\alpha_n=0,\end{aligned}\right\} \qquad (9.10)$$

Определитель системы (9.10):

$$\Delta(k)=\begin{vmatrix}a_{11}-k & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-k & ... & a_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}-k\end{vmatrix} \qquad (9.11)$$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0 \Rightarrow x_1(t)=x_2(t)=\ldots=x_n(t)\equiv 0.$

Нетривиальные решения существуют $\Leftrightarrow$ $\Delta = 0$:

Таким образом, мы получаем характеристическое уравнение для системы (9.8):

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0 \qquad (9.12)$$

Его корни – корни характеристического уравнения.

Рассмотрим специальный случай, когда корни характеристического уравнения $k_1, k_2, \dots, k_n$ вещественны и различны.

Для каждого k_i мы определим коэффициенты $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)}$ из системы (9.10).

Таким образом, получаем:

для k_1 решение системы (9.8):

$$x_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t}, \quad x_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t}, \quad \dots, \quad x_n^{(1)} = \alpha_n^{(1)} e^{k_1 t};$$

для k_2 решение системы (9.8):

$$x_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t}, \quad x_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{k_2 t}, \quad \dots, \quad x_n^{(2)} = \alpha_n^{(2)} e^{k_2 t};$$

…………………………………

для k_n решение системы (9.8):

$$x_1^{(n)} = \alpha_1^{(n)} e^{k_n t}, \quad x_2^{(n)} = \alpha_2^{(n)} e^{k_n t}, \dots, \quad x_n^{(n)} = \alpha_n^{(n)} e^{k_n t}.$$

Общее решение системы (9.8):

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= C_1 \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t} + \dots + C_n \alpha_1^{(n)} e^{k_n t}, \\ x_2 &= C_1 \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \alpha_2^{(2)} e^{k_2 t} + \dots + C_n \alpha_2^{(n)} e^{k_n t}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= C_1 \alpha_n^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \alpha_n^{(2)} e^{k_2 t} + \dots + C_n \alpha_n^{(n)} e^{k_n t}, \end{aligned}\right\} \qquad (9.13)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – произвольные постоянные.

Пример.

Найти общее решение системы $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 2x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2 \end{cases}$.

Решение.

Характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0.$

Корни характеристического уравнения: $k_1 = 1$, $k_2 = 4$.
Ищем решение системы в виде:

$$x_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^t, \quad x_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^t \quad \text{и} \quad x_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{4t}, \quad x_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{4t}.$$

Составим систему (9.10) для $k_1 = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} (2-1)\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0, \\ 1\alpha_1^{(1)} + (3-1)\alpha_2^{(1)} = 0 \end{array}\right\}.$$

Решение этой системы: $\alpha_2^{(1)} = -\dfrac{1}{2}\alpha_1^{(1)}$.

Полагая, что $\alpha_1^{(1)} = 1$, получаем: $\alpha_2^{(1)} = -\dfrac{1}{2}$.

Таким образом, первое решение системы:

$$x_1^{(1)} = e^t, \qquad x_2^{(1)} = -\frac{e^t}{2},$$

Аналогично, второе решение системы:

$$x_1^{(2)} = e^{4t}, \qquad x_2^{(2)} = e^{4t}.$$

Общее решение системы:

$$x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{4t}, \qquad x_2 = -\frac{C_1 e^t}{2} + C_2 e^{4t}.$$

3 Ряды

3.1 Лекция 10. Числовые ряды

Содержание лекции: Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Ряд с положительными членами, его признаки сходимости.

Цели лекции: изучить основные понятия числовых рядов и условия сходимости рядов.

Выражение вида:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{10.1}$$

где $u_n \in R$ ($n = 1, 2, \ldots$) называется числовым рядом.

Числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называются членами ряда, число u_n – общим членом ряда.

$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$ – *n-ая* частичная сумма ряда;

$r_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i$ – *n-ый* остаток ряда.

Если существует конечный предел $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, то его называют суммой ряда (10.1), и ряд (10.1) называется сходящимся. Если $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует (в частности бесконечен), то ряд (10.1) называется расходящимся.

Теорема (необходимый признак сходимости ряда)

Если ряд (10.1) сходится, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Обратное утверждение не верно.

Пример. Гармонический ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ расходится, хотя $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Теорема (достаточный признак расходимости ряда)

Если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд (10.1) расходится.

Замечание. Сходимость или расходимость числового ряда не нарушается, если в нем отбросить любое конечное число членов. Но его сумма, если она существует, при этом изменяется.

Ряды с положительными членами

Если все члены ряда $u_n > 0$, то ряд называется положительным рядом.

Рассмотрим два ряда:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad u_i > 0, \tag{10.1}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots, \qquad v_i > 0. \tag{10.2}$$

Критерии сходимости положительных рядов:

1. Сравнение рядов с положительными членами

Теорема 1 (1-ый признак сравнения)

Если $u_n \leq v_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), (10.3)

то:

а) если ряд (10.2) сходится, то сходится и ряд (10.1);

б) если ряд (10.1) расходится, то расходится и ряд (10.2).

Замечание.

Теорема 1 имеет место и в том случае, когда (10.3) начинает выполняться только для $n \geq N$, но не для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$

Теорема 2 (2-ой признак сравнения)

Если существует предел отношения общих членов:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A, \quad (A\neq 0, \quad A\neq\infty),$$

то ряды (10.1) и (10.2) сходятся или расходятся одновременно.

Замечание. Сходимость многих рядов можно исследовать путем сравнения их с рядом Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, сходимость которого зависит от параметра p: если $p>1$, то ряд сходится; если $p\leq 1$, то ряд расходится.

2. Признак Даламбера

Теорема

Если для ряда с положительными членами:

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots, \qquad u_i>0$$

существует конечный предел отношения $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$,

то: 1) ряд сходится, если $l<1$,

3) ряд расходится, если $l>1$

(если $l=1$, то теорема не дает ответа на вопрос о сходимости или расходимости ряда).

3. Радикальный признак Коши

Теорема

Если для ряда с положительными членами:

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots, \quad u_i>0,$$

существует конечный предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$,

то: 1) ряд сходится, если $l<1$,

4) ряд расходится, если $l>1$

(если $l=1$, то тест считается не прошедшим).

4. Интегральный признак

Теорема

Пусть члены ряда $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$, положительны и не возрастают, т. е. $u_1\geq u_2\geq u_3\geq\ldots$

и пусть $f(x)$ – такая непрерывная не возрастающая функция, что:

$$f(1)=u_1,\ f(2)=u_2,\ \ldots,\ f(n)=u_n\ .$$

Тогда ряд $\sum_{i=1}^{\infty}u_i$ и несобственный интеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся.

3.2 Лекция 11. Знакочередующиеся ряды

Содержание лекции: Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Знакопеременные ряды.

Цель лекции: изучить основные понятия знакопеременных числовых рядов и условия их сходимости.

Выражение вида $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ (11.1)

или $-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$, (11.1′)

где $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ положительны, называется знакочередующимся рядом.

Очевидно, что:

$$(-1)^{n+1} = (-1)^2 \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n = (-1) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = -\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n .$$

Поэтому будем рассматривать знакочередующиеся ряды вида (11.1).

Теорема Лейбница

Если для ряда $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$, $(u_n > 0)$ (11.1) следующие два условия выполняются:

1) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ (11.2)

2) $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$, (11.3)

то знакочередующийся ряд (11.1) сходится и $0 < s < u_1$.

Замечание 1. Теорема Лейбница справедлива, если неравенство (11.2) выполняется начиная с некоторого N.

Замечание 2. Теорема Лейбница иллюстрируется геометрически.

Если на числовой прямой откладывать частичные суммы (рисунок 11.1):

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 - u_2 = s_1 - u_2, \quad s_3 = s_2 + u_3, \quad s_4 = s_3 - u_4, \ \ldots ,$$

то точки, соответствующие частичным суммам, будут приближаться к некоторой точке s, которая изображает сумму ряда. При этом:

$$s_2 < s_4 < s_6 < \ldots < s < \ldots < s_5 < s_3 < s_1 .$$

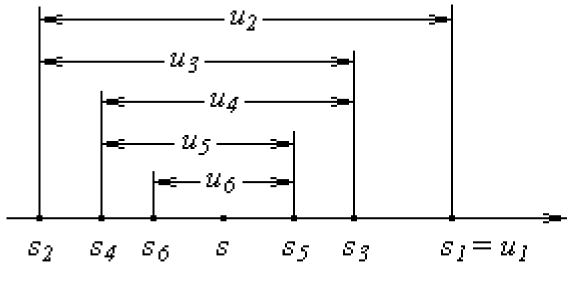

Рисунок 11.1

Замечание 3. (Оценка остатка ряда)

Если знакочередующийся ряд удовлетворяет условию Лейбница, то $r_n = \sum_{i=n+1}^{\infty}(-1)^{i+1}u_i$ – знакочередующийся ряд с первым членом $(-1)^{n+2}$ u_{n+1}, следовательно, $| r_n | < u_{n+1}$.

Таким образом (т. к. $s = s_n + r_n$), оценка ошибки: $| s - s_n | < u_{n+1}$, т. е. ошибка, совершаемая при замене s на s_n, не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов.

Знакопеременные ряды

Знакопеременный ряд – ряд, члены которого могут быть как положительными, так и отрицательными.

Теорема 1 (достаточное условие сходимости знакопеременного ряда)

Если знакопеременный ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ (11.4)
таков, что ряд $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots,$ (11.5)
сходится, то данный знакопеременный ряд сходится.

Знакопеременный ряд (11.4) называется абсолютно сходящимся, если ряд абсолютных величин его членов (11.5) сходится.

Если знакопеременный ряд (11.4) сходится и ряд из абсолютных значений (11.5) расходится, то данный знакопеременный ряд (11.4) называется условно (или не является абсолютно) сходящимся.

Поскольку при изучении условной или абсолютной сходимости возможны три случая:

1) ряд абсолютно сходится;
2) ряд условно сходится;
3) ряд расходится,

рассмотрим три примера:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)^3}$.   2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{(n+1)^2}}$.   3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(4n-1)}$.

Пример 1. Определите, является ли следующий ряд абсолютно сходящимся, условно сходящимся или расходящимся: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)^3}$.

Решение.

Данный ряд является знакочередующимся. Рассмотрим соответствующий ряд из абсолютных значений:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(n+2)^3}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^3}. \qquad (*)$$

Этот ряд сходится согласно второму признаку сравнения: сравниваем его с рядом Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ ($p = 3 > 1$), который сходится.

Т. к. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(n+2)^3}}{\frac{1}{n^3}}=1$, то оба ряда сходятся одновременно.

Поскольку ряд (*) сходится, то исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 2. Определите, является ли следующий ряд абсолютно сходящимся, условно сходящимся или расходящимся: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{(n+1)^2}}$.

Решение.

Данный ряд является знакочередующимся. Рассмотрим соответствующий ряд из абсолютных значений:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{(n+1)^2}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{5}}}. \qquad (**)$$

Этот ряд расходится согласно второму признаку сравнения: сравниваем его с рядом Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{5}}}$ $\left(p=\frac{2}{5}<1\right)$, который расходится.

Т. к. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{5}}}}{\frac{1}{n^{\frac{2}{5}}}}=1$, то оба ряда расходятся одновременно.

Таким образом, ряд (**) расходится (по второму признаку сравнения). Таким образом, исходный ряд не сходится абсолютно.

Проверим выполнение условий теоремы Лейбница:

1) $\frac{1}{\sqrt[5]{2^2}}>\frac{1}{\sqrt[5]{3^2}}>\frac{1}{\sqrt[5]{4^2}}>\ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{(n+1)^2}}=0$.

Оба условия выполняются; следовательно, исходный ряд условно сходится.

Пример 3. Определите, является ли следующий ряд абсолютно сходящимся, условно сходящимся или расходящимся: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(4n-1)}$.

Решение.

Данный ряд является знакочередующимся. Рассмотрим соответствующий ряд из абсолютных значений:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n n}{(4n-1)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n-1}. \qquad (***)$$

Сравнивая с рядом Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, получаем: $p = 0 < 1$, т.е., ряд (***) расходится (по второму признаку сравнения). Таким образом, исходный ряд не сходится абсолютно.

Проверка условий Лейбница: 1) $\frac{1}{3} > \frac{2}{7} > \frac{3}{11} > \ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{4n-1} = \frac{1}{4} \neq 0.$

Второе условие теоремы Лейбница не выполняется; следовательно, исходный ряд расходится.

Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

С помощью понятия абсолютной сходимости теорему 1 формулируют следующим образом: всякий абсолютно сходящийся ряд есть ряд сходящийся.

<u>Теорема 2.</u> Если ряд сходится абсолютно, то он остается абсолютно сходящимся при любой перестановке его членов. При этом сумма ряда не зависит от порядка его членов.

<u>Теорема 3.</u> Если ряд сходится условно, то, какое бы мы ни задали число A, можно так переставить члены этого ряда, чтобы его сумма оказалась равной A. Более того, можно так переставить члены условно сходящегося ряда, что полученный ряд окажется расходящимся.

Пример.

Знакочередующийся гармонический ряд:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$$

сходится условно по теореме Лейбница. Переставляя члены этого ряда, можно изменить значение суммы.

Предположим, что сумма этого ряда равна S. Перепишем его члены так, чтобы после одного положительного члена было два отрицательных:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots =$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\ldots =$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots\right) = \frac{1}{2}S.$$

Сумма уменьшилась вдвое!

3.3 Лекция 12. Функциональные ряды

Содержание лекции: Функциональные ряды. Область сходимости. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости. Интервал сходимости, область сходимости.

Цель лекции: изучить основные понятия функциональных рядов и условия сходимости функциональных рядов.

Выражение вида:

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+...+u_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x), \qquad (12.1)$$

где $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$) – функции от x, называется функциональным рядом.

Для определенных значений x ($x = x_k$) получаем:

$$u_1(x_k) + u_2(x_k) + \ldots + u_n(x_k) + \ldots$$

– числовой ряд (он может быть сходящимся или расходящимся).

Если этот ряд сходится, то x_k является точкой сходимости функционального ряда.

Область сходимости – множество значений x, для которых функциональный ряд сходится.

В области сходимости существует сумма ряда $s(x)$.

Пример.

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

Функциональный ряд сходится в интервале (-1, 1), т. е. когда $|x|<1$, то $s(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

Сумма $s_n(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x)$ называется частичной суммой.

Если функциональный ряд сходится, то $\exists\ s(x) = s_n(x) + r_n(x)$,
где сумма:

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$$

называется остатком ряда (12.1).

Для каждого x в области сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[s(x)-s_n(x)\right]=0 .$$

Функциональный ряд (12.1) называется мажорируемым в некоторой области (D) если:

$\exists$ сходящийся числовой ряд $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots,\quad (\alpha_i > 0)$ (12.2)
такой, что $\forall x\in D\ \ |u_i(x)| \le \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$

Теорема (непрерывность суммы функционального ряда)

Сумма мажорируемого на $[a, b]$ ряда непрерывных функций является функцией, непрерывной на этом отрезке.

Теорема (интегрирование функционального ряда)

Если (12.1) – мажорируемый на $[a, b]$ ряд, $\alpha, x \in [a, b]$, то:

$$\int_{\alpha}^{x} \sum_{i=1}^{\infty} u_i(t)dt = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{x} u_i(t)dt . \qquad (*)$$

Замечание 1. Если (12.1) – не мажорируемый на $[a, b]$ ряд, то $(*)$ не всегда возможно.

Теорема (дифференцирование функционального ряда)

Если (12.1) – функциональный ряд функций с непрерывными производными на $[a, b]$ – сходится на $[a, b]$ к $s(x)$ и $\sum_{i=1}^{\infty} u_i'(x)$ – мажорируемый на $[a, b]$ ряд, то:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) \right)' = \sum_{i=1}^{\infty} u_i'(x) .$$

Замечание. Требование мажорируемого ряда производных существенно.

Степенные ряды

Ряд вида:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots , \qquad (12.3)$$

где a_i – коэффициенты степенного ряда (постоянные), $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, называется степенным рядом.

Область сходимости степенного ряда — это всегда интервал, который, в частности, может вырождаться в точку.

Теорема 1 (теорема Абеля)

1) если степенной ряд сходится в некоторой $x_0 \neq 0$, то (12.3) сходится абсолютно для $\forall x$: $|x| < x_0$;

2) если степенной ряд расходится в некоторой x_1, то (12.3) расходится $\forall x$: $|x| > x_1$.

Теорема 2

Область сходимости степенного ряда — это интервал с центром в 0.

$(-R, R)$ – интервал сходимости степенного ряда, если:

$\forall x \in (-R, R)$ (12.3) – абсолютно сходящийся ряд,

$\forall |x| > R$ (12.3) – расходящийся ряд.

R – радиус сходимости степенного ряда.

При $x = \pm R$ сходимость рассматривается индивидуально. Возможны случаи: $R = 0$, $R = \infty$.

Методы определения *R*

Применяя тест Даламбера: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Применяя радикальный критерий Коши: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

<u>Теорема 3</u>

Степенной ряд с радиусом сходимости R мажорируемый на $[-\rho,\rho]$, $(\forall\rho < R)$.

<u>Теорема 4</u>

Для степенного ряда (12.3) с радиусом сходимости R ряд производных:

$$\varphi(x) = a_1 + 2\, a_2 x + \ldots + n\, a_n x^{n-1} +$$

имеет тот же интервал сходимости и $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x^i\right)' = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(a_i x^i\right)'$.

Процесс может быть распространен на любую производную.

Ряды по степеням ($x - x_0$)

Ряд вида:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

называется рядом по степеням $(x - x_0)$.

Это общий случай степенного ряда.

Интервал сходимости этого ряда есть интервал $(x_0 - R;\ x_0 + R)$ с центром в x_0. Число R – радиус сходимости ряда рассчитывается как в предыдущем случае.

Пример.

Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$.

Решение.

Находим радиус сходимости ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n-1}}\right| = 2.$$

Найдем интервал сходимости:

$$|x+1| < 2 \quad \Rightarrow \quad -2 < x+1 < 2 \quad \Rightarrow \quad -3 < x+1 < 1.$$

Проверим граничные точки.

$x = -3$: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3+1)^n}{n\cdot 2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

Это знакочередующийся гармонический ряд, и он сходится.

$x = 1$: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+1)^n}{n\cdot 2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^{n-1}}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Это гармонический ряд, и он расходится.

Итак, степенной ряд сходится в одной граничной точке, но не сходится в другой.

Таким образом, область сходимости данного ряда: [–3; 1).

3.4 Лекция 13. Ряды Тейлора и Маклорена

Содержание лекции: Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды.

Цель лекции: изучить основные понятия рядов Тейлора и Маклорена.

Предположим, что $f(x)$ – функция, имеющая производные до $(n+1)$-го порядка в окрестности точки $x = a$.

Тогда справедлива формула Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x), \qquad (13.1)$$

Остаточный член рассчитывается по формуле:

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}\left[a+\theta(x-a)\right], \qquad 0<\theta<1.$$

Предположим, что в окрестности точки $x = a$: $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0.$

Переходя к пределу в (13.1), когда $n\to\infty$: мы получим ряд Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots \qquad (13.2)$$

Равенство (13.2) справедливо лишь при $R_n(x)\to 0$ когда $n\to\infty$.

В этом случае ряд сходится и его сумма равна $f(x)$.

Замечание.

Ряд Тейлора представляет данную функцию $f(x)$ только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0.$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) \neq 0,$ то ряд не представляет данную функцию, хотя он может сходиться.

Если a = 0, то получаем частный случай ряда Тейлора, а именно, ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots \qquad (13.3)$$

Примеры разложения функций в ряд Маклорена:

1. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1} \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \qquad (-\infty < x < \infty);$

2. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (-\infty < x < \infty);$

3. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (-\infty < x < \infty);$

Если заменить x на $(-x)$, получим:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (-\infty < x < \infty);$$

4. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + \ldots \qquad (-1 < x \leq 1);$

5. $(1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{1!} x^2 + \ldots + \dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + \ldots,$

где m – произвольное постоянное число, $\qquad (-1 < x < 1).$

В частности,

при m = –1: $\qquad \dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \qquad (-1 < x < 1);$

при $m = \dfrac{1}{2}$: $\qquad \sqrt{(1+x)} = 1 + \dfrac{1}{2} x - \dfrac{1}{2\cdot 4} x^2 + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} x^3 + \ldots \qquad (-1 \leq x \leq 1);$

при $m = -\dfrac{1}{2}$: $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \dfrac{1}{2} x + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4} x^2 - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} x^3 + \ldots \qquad (-1 < x \leq 1).$

Применение степенных рядов в приближенных вычислениях

Рассмотрим ряды Тейлора и Маклорена.

Чтобы вычислить приблизительно выражение, найдем образец-функцию *f(x)* и преобразуем ее в ряд. Возьмем количество слагаемых, которое обеспечивает требуемую точность, а именно: если член ряда не влияет на заданную точность, то и последующие члены ряда могут быть усечены.

Пример.

Вычислить приближенно $\frac{1}{\sqrt[4]{e}} = e^{-\frac{1}{4}}$.

Возьмем ряд Маклорена для e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

Подставим в ряд $x = -\frac{1}{4}$:

$$e^{-\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16 \cdot 2!} - \frac{1}{64 \cdot 3!} + \frac{1}{256 \cdot 4!} + \ldots \; .$$

Таким образом, мы можем зафиксировать точность вычислений и усечь не влияющие слагаемые.

Вычисление определенных интегралов, используя ряды

Предположим, дан следующий интеграл:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Предположим, что функция является слишком сложной, тяжело интегрированной, тогда мы преобразуем $f(x)$ в степенной ряд: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Почленно интегрируя, получим:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx.$$

Мы знаем, что в математическом анализе интегралы вида:

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \; \int \frac{\cos x}{x} dx, \; \int \frac{e^x}{x} dx, \; \int e^{-x^2} dx$$

не берутся, т. е. мы не можем найти их первообразных. Следовательно, мы не можем использовать формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла. Вот почему на практике мы часто используем разложение подынтегральной функции в ряд Маклорена.

Пример. Вычислить интеграл с точностью 0,001:

$$\int_o^1 \sqrt[3]{x} \cos x dx.$$

Ряд Маклорена для функции косинус имеет вид:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots.$$

Найдем произведение:

$$x^{\frac{1}{3}}\cos x = x^{\frac{1}{3}} - \frac{x^{\frac{7}{3}}}{2!} + \frac{x^{\frac{13}{3}}}{4!} - \frac{x^{\frac{19}{3}}}{6!} + \dots .$$

Почленно интегрируя, получим:

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}\cos x dx = \left.\frac{x^{\frac{4}{3}}}{1!\frac{4}{3}} - \frac{x^{\frac{10}{3}}}{2!\frac{10}{3}} + \frac{x^{\frac{16}{3}}}{4!\frac{16}{3}} - \frac{x^{\frac{22}{3}}}{6!\frac{22}{3}} + \dots\right|_0^1 =$$

$$= \left[\frac{1}{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2!\frac{10}{3}} + \frac{1}{4!\frac{16}{3}}\right] - \frac{1}{6!\frac{22}{3}} + \dots \ .$$

Просчитаем значения имеющихся дробей:

$\frac{1}{\frac{4}{3}} = 0{,}75 > 0{,}001;$ $\qquad \frac{1}{2!\frac{10}{3}} = 0{,}15 > 0{,}001;$ $\qquad \frac{1}{4!\frac{16}{3}} = 0{,}0078125 > 0{,}001;$

$\frac{1}{6!\frac{22}{3}} = 0{,}0001893939 < 0{,}001$.

Следовательно, для вычисления с точностью 0,001 достаточно взять только первые три члена ряда:

$$\int_o^1 \sqrt[3]{x}\cos x dx \approx 0{,}75 - 0{,}15 + 0{,}0078125 = 0{,}6078125 .$$

3.5 Лекция 14. Ряды Фурье

Содержание лекции: Разложение функций в ряды Фурье. Теорема Дирихле. Ряды Фурье на произвольном интервале.

Цель лекции: изучить основные понятия рядов Фурье.

При изучении разнообразных периодических процессов (в радиотехнике, электронике, в теории и практике автоматического регулирования) целесообразно разлагать периодические функции, описывающие эти процессы, не в степенные ряды, а так называемые тригонометрические ряды.

Например, простейшим периодическим процессом (движением) является простое гармоническое колебание, описываемое функцией:

$$y = A\sin(\omega t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad y = A\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Сложное гармоническое колебание возникает в результате наложения конечного или бесконечного числа гармоник:

$$\sin(\omega t + \varphi_0) \ \text{ и } \ \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Ряд Фурье для функций с периодом 2π

Функция *f(x)* называется кусочно-монотонной на интервале (a;b), если мы можем разделить этот интервал на конечное число интервалов (a; x_1), (x_1; x_2), … , (x_n; b) и *f(x)* либо не возрастающая, либо не убывающая на каждом из этих интервалов.

<u>Теорема Дирихле</u>

Если *f(x)* – периодическая функция с периодом 2π, ограниченная и кусочно-монотонная на интервале [–π; π], то мы можем разложить *f(x)* в ряд Фурье:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),$$

где a_n, b_n – коэффициенты Фурье определяются формулами:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx,\qquad (n = 0,1,2, \ldots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx,\qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Сумма ряда сходится во всех точках непрерывности функции:

$$S(x) = f(x).$$

Значение этого ряда в точке разрыва функции *f(x)* равно:

$$S(x)=\frac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right].$$

Если *f(x)* – четная функция, то ряд Фурье имеет вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

где
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx dx,\qquad (n = 0,1,2, \ldots).$$

Если *f(x)* – нечетная функция, то ряд Фурье имеет вид:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,$$

где
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx dx,\qquad (n = 1,2, \ldots).$$

<u>Теорема</u>

Если *f(x)* – периодическая функция с периодом 2π, то:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{a}^{a+2\pi}f(x)dx,$$

где a – произвольная постоянная.

Ряд Фурье для функции с периодом 2*l*

Предположим, что *f(x)* – периодическая функция с периодом 2*l*, удовлетворяющая условиям Дирихле. Тогда в каждой точке непрерывности функции *f (x)* эту функцию можно разложить в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где a_n, b_n – коэффициенты Фурье:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad (n = 0,1,2, \ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Если *x* – точка разрыва функции *f(x)*, то сумма ряда Фурье *S(x)* равна:

$$S(x) = \frac{1}{2}\left[f(x-0) + f(x+0)\right].$$

Если *f(x)* – четная функция, то ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$

где
$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad (n = 0,1,2, \ldots).$$

Если *f(x)* – нечетная функция, то ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

где
$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad (n = 0,1,2, \ldots).$$

<u>Теорема</u>

Если *f(x)* периодическая функция с периодом 2*l*, то:

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{a}^{a+2l} f(x)dx,$$

где *a* – произвольная постоянная.

3.6 Лекция 15. Разложение функций по косинусам и синусам в ряд Фурье на произвольном промежутке

Содержание лекции: Примеры разложения функций в ряды Фурье на произвольном интервале.

Цель лекции: изучить основные понятия рядов Фурье на произвольном интервале.

Пример 1. Разложить следующую функцию в ряд Фурье:

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -l\le x<0,\\ 1, & 0\le x\le l.\end{cases}$$

Функция нечетная, поэтому она раскладывается только по синусам, т. е. $a_0 = 0$, $a_n = 0$. Найдем коэффициенты:

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{l}\left[-\int_{-l}^{0}\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{0}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{l}\left[\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{l}x\Bigg|_{-l}^{0}-\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{l}x\Bigg|_{0}^{l}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left[1-\cos\pi n-\cos\pi n+1\right]=\frac{2}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right].$$

Таким образом, $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l}.$$

Пример 2. Разложить следующую функцию в ряд Фурье:

$$f(x)=\begin{cases}-1, & 0\le x<2\\ 2, & 2\le x\le 4\end{cases}.$$

Решение: для определения коэффициентов Фурье воспользуемся формулами:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{l})dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx,$$

где a=0, a+2l=4, тогда половина периода: l=(4–0)/2=2.

Получим:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (-1)dx + \frac{1}{2}\int_2^4 (2)dx = -\frac{1}{2}(2-0) + \frac{1\cdot 2}{2}(4-2) = 1;$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^2 (-1)\cos(\frac{n\pi x}{2})dx + \frac{1}{2}\int_2^4 (2)\cos(\frac{n\pi x}{2})dx =$$

$$= -\frac{1\cdot 2}{2\pi n}\sin(\frac{\pi n x}{2})\Bigg|_0^2 + \frac{1\cdot 2}{\pi n}\sin(\frac{\pi n x}{2})\Bigg|_2^4 = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^2 (-1)\sin(\frac{n\pi x}{2})dx + \frac{1}{2}\int_2^4 (2)\sin(\frac{n\pi x}{2})dx =$$

$$= \frac{2}{2\pi n}\cos(\frac{\pi n x}{2})\Bigg|_0^2 - \frac{4}{2\pi n}\cos(\frac{\pi n x}{2})\Bigg|_2^4 =$$

$$= \frac{1}{\pi n}(\cos(\pi n) - \cos 0)) - \frac{2}{\pi n}(\cos 2\pi n - \cos \pi n) = \frac{3}{\pi n}((-1)^n - 1).$$

Подставляя найденные коэффициенты в формулу $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{l}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{l}),$ где l=2, получим искомое разложение:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\pi n}((-1)^n - 1)(\sin(\frac{\pi n x}{2}).$$

Библиография

1. Бугров Я. С. Высшая математика в 3-х т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление в 2-х кн. Книга 2: учебник для вузов / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — Москва: Издательство Юрайт, 2022. — 246 с.
2. Бугров Я. С. Высшая математика в 3-х т. Том 3. В 2-х кн. Книга 1. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы: учебник для вузов / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — Москва: Издательство Юрайт, 2022. — 288 с.
3. Бугров Я. С. Высшая математика в 3-х т. Том 3. В 2-х кн. Книга 2. Ряды. Функции комплексного переменного: учебник для вузов/ Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 219 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Сводный план 2022 г., поз. 165

Ким Регина Евгеньевна

МАТЕМАТИКА 2

Конспект лекций
для студентов по всем образовательным программам

Редактор: Е.Б. Жанабаева
Специалист по стандартизации: Ж.А. Ануарбек

Подписано в печать _______ Формат 60×84 1/16
Тираж 50 экз. Бумага типографская № 1
Объем 4,0 уч.-изд. лист Заказ_____ Цена 2000 тг

Копировально-множительное бюро
некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи »
050013, Алматы, ул. Байтурсынова, 126/1