Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра «Математика и математическое моделирование»

МАТЕМАТИКА 2

Методические указания и задания
по выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 5В070200 - «Автоматизация и управление». Часть 2

Алматы 2019

СОСТАВИТЕЛИ: Искакова А.К., Есботаева Э.С. Математика 2. Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 5В070200 - «Автоматизация и управление». Часть 2. - Алматы: АУЭС, 2019.- 30 с.

Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ содержат дополненное и переработанное издание типового расчета №1 программы второго семестра курса Математика 2 для студентов дневного отделения специальности «Автоматизация и управление». Приведены основные теоретические вопросы программы, варианты заданий и решение типового варианта.

Библиогр.- 6 назв.

Рецензент: Ю.М.Гармашова

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2019г.

© НАО «Алматинский университет энергетики и связи» на 2019 г.

Введение

Вторая часть методических указаний и заданий по выполнению расчетно – графических работ для студентов специальности 5В070200 – «Автоматизация и управление» дисциплины «Математика – 2» содержит математический раздел «Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных». Все задания, предлагаемые для самостоятельного решения, снабжены примерами решений и основными формулами.

Методическая разработка предназначена, в первую очередь, для студентов инженерно – технических специальностей дневной формы обучения, но может быть также полезна для студентов всех специальностей, изучающих курс высшей математики дистанционно,и является базой для подготовки к разным видам контроля.

Расчетно-графическая работадолжна быть выполнена студентом в отдельной ученической тетради. Все объяснения должны быть полными, вестись на доступном языке и, по возможности,на языке соответствующей математической терминологии.

1 Расчетно - графическая работа №1

1.1 Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Теоретические вопросы.

1. Функции нескольких переменных. Основные понятия. Область определения функции двух и трех переменных.
2. Частное и полное приращениефункции нескольких переменных.
3. Предел функции нескольких переменных.Непрерывность функции двух переменных.
4. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных.
5. Частные производныеи полный дифференциал функции нескольких переменных первого порядка.
6. Градиент, производная по направлению.
7. Частные производные функции нескольких переменных высших порядков. Повторное дифференцирование.
8. Смешанные производные функции нескольких переменных высших порядков.
9. Производные и дифференциалы высших порядковфункции нескольких переменных.
10. Производная сложной функции от нескольких переменных.
11. Дифференцирование неявной функции.
12. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
13. Экстремумы функций нескольких переменных. Основные понятия. Необходимые и достаточные условия экстремума.
14. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Задания по выполнению расчетно – графической работы «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных».

*Задание 1.*Для функции $z= f(x,y)$ найти:

а) частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;

б) частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

в) доказать, что выполняется равенство $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

г) найти дифференциалы первого и второго порядков $dz,\ d^2 z$.

1.1	$z = e^{2x^2+y^2}$	1.2	$z = 2xy - \frac{y}{x^2}$
1.3	$z = 2x^3 lny - 3xy^6$	1.4	$z = \cos(xy^2 - 5y)$
1.5	$z = \sin(x^3 + 4y)$	1.6	$z = ln(x^2 - 2y)$
1.7	$z = (4xy - 3y^3)^2$	1.8	$z = sin(x^3 - 4xy)$
1.9	$z = (2yx^3 - ysinx)^7$	1.10	$z = (3x^4 - 2y^6)^2$
1.11	$z = e^{3x^2+5y^3}$	1.12	$z = \ln(5xy)$
1.13	$z = \cos(3xy - 5)$	1.14	$z = cos(2x - 7y)$
1.15	$z = \cos(3x^2 + 6xy^3)$	1.16	$z = (2x - 9y)^5$
1.17	$z = (2yx^2 - xy^4)^3$	1.18	$z = (3x^4 - 2y)^5$
1.19	$z = xe^{8y-1}$	1.20	$z = tg(x+y^2)$
1.21	$z = ye^{x^2+5y^3}$	1.22	$z = ye^{2xy^3}$
1.23	$z = \frac{x}{y} + 3x$	1.24	$z = ctg(3x-y^2)$
1.25	$z = cos(x^2 + 4y)$	1.26	$z = \ln(x^3+y^2)$
1.27	$z = (3x - 7y^2)^6$	1.28	$z = (2x + 5y)^3$
1.29	$z = (2x - 5y)^3$	1.30	$z = (x^2y - 7y^3)^7$

*Задание 2.*Найти градиент заданной функции $u(M) = u(x, y, z)$ в точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

№	$u(M)$	M_1	№	$u(M)$	M_1
2.1	$x^2 y + y^2 z + z^2 x$	(1,-1,2)	2.16	$\ln(x^3 + y^3 + z + 1)$	(1,3,0)
2.2	$5xy^3 z^2$	(2,1,-1)	2.17	$x - 2y + e^z$	(-4,-5,0)
2.3	$\ln(x^2 + y^2 + z^2)$	(-1,2,1)	2.18	$x^4 - 3xyz$	(2,2,-4)
2.4	$z \cdot e^{x^2+y^2+z^2}$	(0,0,0)	2.19	$3x^2 y^3 z$	(-2,-3,1)
2.5	$\ln(xy + yz + xz)$	(-2,3,-1)	2.20	e^{xy+z^2}	(-5,0,2)

2.6	$\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}$	(1,1,1)	2.21	x^{yz}	(3,1,4)
2.7	$x^2 y + xz^2 - 2$	(1,1,1)	2.22	$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3$	(1,2,-1)
2.8	$xe^y + ye^x - z^2$	(3,0,-2)	2.23	$(x + y)^z$	(1,5,0)
2.9	$3xy^2 + z^2 - xyz$	(1,2,2)	2.24	$x^2 y + y^2 z - 3z$	(0,-2,-1)
2.10	$5x^2 yz + xy^2 z + yz^2$	(1,1,1)	2.25	$\frac{10}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$	(-1,2,-2)
2.11	$\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$	(1,2,2)	2.26	$\ln\left(1 + x^2 - y^2 + z^2\right)$	(1,1,1)
2.12	$y^2 z - 2xyz + z^2$	(3,1,-1)	2.27	$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$	(-1,1,1)
2.13	$x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$	(1,-1,2)	2.28	$x^3 + xy^2 - 6xyz$	(1,3,-5)
2.14	$\ln\left(1 + x + y^2 + z^2\right)$	(1,1,1)	2.29	$\frac{x}{y} - \frac{y}{z} - \frac{x}{z}$	(2,2,2)
2.15	$x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 5$	(1,2,1)	2.30	$e^{x - yz}$	(1,0,3)

*Задание 3.*Проверить является ли функция*u*(*x*,*y*,*z*) решением дифференциального уравнения в частных производных.

№	Уравнение	*u*(*x*,*y*,*z*)
3.1	$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	$u = \frac{y}{x}$
3.2	$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 3\left(x^3 - y^3\right)$	$u = \ln \frac{x}{y} + x^3 - y^3$
3.3	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	$u = \ln\left(x^2 (y+1)^2\right)$
3.4	$y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (1 + y \ln x) \frac{\partial u}{\partial x}$	$u = x^y$
3.5	$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2u$	$u = \frac{xy}{x + y}$
3.6	$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	$u = e^{xy}$

3.7	$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	$u=\sin^2(x-ay)$
3.8	$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$	$u=y\sqrt{\frac{y}{x}}$
3.9	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$	$u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
3.10	$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	$u=e^{-\cos(x+ay)}$
3.11	$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$	$u=(x-y)(y-z)(z-x)$
3.12	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u$	$u=x\ln\frac{y}{x}$
3.13	$y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=o$	$u=\ln(x^2+y^2)$
3.14	$x^2\frac{\partial u}{\partial x}-xy\frac{\partial u}{\partial y}+y^2=0$	$u=\frac{y^2}{3x}+\arcsin(xy)$
3.15	$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2xyu=0$	$u=e^{xy}$
3.16	$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$	$u=arctg\frac{x+y}{1-xy}$
3.17	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$	$u=\ln(x^2+y^2+2x+1)$
3.18	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+u=0$	$u=\frac{2x+3y}{x^2+y^2}$
3.19	$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=1$	$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
3.20	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u$	$u=(x^2+y^2)tg\frac{x}{y}$

3.21	$9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$	$u=e^{-(x+3y)}\sin(x+3y)$
3.22	$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$	$u=xe^{y/x}$
3.23	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$	$u=arctg\frac{y}{x}$
3.24	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$	$u=arctg\frac{y}{x}$
3.25	$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$	$u=\ln\left(x+e^{-y}\right)$
3.26	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$	$u=\arcsin\frac{x}{x+y}$
3.27	$\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{y^2}$	$u=\frac{y}{\left(x^2-y^2\right)^5}$
3.28	$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x+y}{x-y}$	$u=\frac{x^2+y^2}{x-y}$
3.29	$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{u}$	$u=\sqrt{2xy+y^2}$
3.30	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$	$u=\ln\left(x^2-y^2\right)$

*Задание 4.*Найдите первую производнуюфункции,заданной в неявном виде $F(x,y,z)=0$.

№	$F(x,y,z)$	№	$F(x,y,z)$
4.1	$xyz+3xy^2-5yz^2$	4.16	$xy^2-z+xyz(z-x)$
4.2	$x^2yz-2xyz^2+3xy^2z$	4.17	$(x+y)z^2+x(y^2+z^2)$
4.3	$2x^2y^2z-xyz^3+x^2yz^2$	4.18	$x-yz+xyz-xz^2$
4.4	$x^2(y+z)-yz^2+2xyz$	4.19	$x^3y+y^3z+z^3x$
4.5	$(xy-yz)z^2+xy^2z$	4.20	$xy^2+yz^2-zx^2$

4.6	$2xy^2 - 3xyz + 2xz^2$	4.21	$xyz - x^2y - 2xy^2$
4.7	$(y+z)xyz - (x+y-z)yz^2$	4.22	$(x-z)y^2 + (y-x)z^2$
4.8	$3xyz^2 - 4xy^2z + x^2y^2$	4.23	$xy^2z + x^2yz + xyz^2$
4.9	$-x^2y + 2xyz - 3xz^2$	4.24	$(x - yz)x^2 - 2xyz^2$
4.10	$xyz - z^3 + 2xy^2$	4.25	$(x+y)z^2 + (y+z)x^2$
4.11	$zx(y-x) - 2xyz + z^3$	4.26	$(x - yz)z - z(x+y)$
4.12	$x(y^2+z^2) + 3xyz - z^3$	4.27	$(x+2y)z^2 + 3xyz$
4.13	$(y+z)x^2 - 2xy^2 + xyz$	4.28	$x^2yz + y^2xz + z^2xy$
4.14	$xy(z-y) - 2x^3 + 3xy^2$	4.29	$(x-y)x^2 + y^2z - 2xyz$
4.15	$(x+y)zx^2 + 2xy^2z - xyz^2$	4.30	$x^3y + y^3z + z^3x$

Задание 5. Найти $\frac{du}{dx}$ от сложной функции, если $u = u(x, y)$,где $x = x(t)$, $y = y(t)$ в точке $t = t_0$.

№	$u = u(x,y),\ x = x(t),\ y = y(t)$
5.1	$u = e^{x-2y},\ x = \sin t,\ y = t^3,\ t_0 = 0$
5.2	$u = \ln(e^x + e^{-y}),\ x = t^2,\ y = t^3,\ t_0 = -1$
5.3	$u = y^x,\ x = \ln(t-1),\ y = e^{t/2},\ t_0 = 2$
5.4	$u = e^{y-2x+2},\ x = \sin t,\ y = \cos t,\ t_0 = \pi/2$
5.5	$u = x^2e^y,\ x = \cos t,\ y = \sin t,\ t_0 = \pi$
5.6	$u = \ln(e^x + e^y),\ x = t^2,\ y = t^3,\ t_0 = 1$
5.7	$u = x^y,\ x = e^t,\ y = \ln t,\ t_0 = 1$
5.8	$u = e^{y-2x},\ x = \sin t,\ y = t^3,\ t_0 = 0$
5.9	$u = x^2e^{-y},\ x = \sin t,\ y = \sin^2 t,\ t_0 = \pi/2$
5.10	$u = \ln(e^{-x} + e^y),\ x = t^2,\ y = t^3,\ t_0 = -1$
5.11	$u = e^{y-2x-1},\ x = \cos t,\ y = \sin t,\ t_0 = \pi/2$
5.12	$u = \arcsin(x/y),\ x = \sin t,\ y = \cos t,\ t_0 = \pi$

5.13	$u = \arccos\left(\frac{2x}{y}\right),\ x = \sin t,\ y = \cos t,\ t_0 = \pi$
5.14	$u = \frac{x^2}{(y+1)},\ x = 1-2t,\ y = arctgt,\ t_0 = 0$
5.15	$u = x/y,\ x = e^t,\ y = 2-e^{2t},\ t_0 = 0$
5.16	$u = \ln\left(e^{-x}+e^{-2y}\right),\ x = t^2,\ y = t^3/3,\ t_0 = 1$
5.17	$u = \sqrt{x+y^2+3},\ x = \ln t,\ y = t^2,\ t_0 = 1$
5.18	$u = \arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right),\ x = \sin t,\ y = \cos t,\ t_0 = \pi$
5.19	$u = y^2/x,\ x = 1-2t,\ y = 1+arctgt,\ t_0 = 0$
5.20	$u = \frac{y}{x}-\frac{x}{y},\ x = \sin t,\ y = \cos t,\ t_0 = \frac{\pi}{4}$
5.21	$u = \sqrt{x^2+y+3},\ x = \ln t,\ y = t^2,\ t_0 = 1$
5.22	$u = \arcsin\frac{x}{2y},\ x = \sin t,\ y = \cos t,\ t_0 = \pi$
5.23	$u = \frac{x}{y}-\frac{y}{x},\ x = \sin 2t,\ y = tg^2 t,\ t_0 = \frac{\pi}{4}$
5.24	$u = \sqrt{x+y+3},\ x = \ln t,\ y = t^2,\ t_0 = 1$
5.25	$u = y/x,\ x = e^t,\ y = 1-e^{2t},\ t_0 = 0$
5.26	$u = \arcsin\left(\frac{2x}{y}\right),\ x = \sin t,\ y = \cos t,\ t_0 = \pi$
5.27	$u = \ln\left(e^{2x}+e^{y}\right),\ x = t^2,\ y = t^4,\ t_0 = 1$
5.28	$u = arctg(x+y),\ x = t^2+2,\ y = 4-t^2,\ t_0 = 1$
5.29	$u = \sqrt{x^2+y^2+3},\ x = \ln t,\ y = t^3,\ t_0 = 1$
5.30	$u = arctg(xy),\ x = t+3,\ y = e^t,\ t_0 = 0$

*Задание 6.*Составить уравнения нормали и касательной плоскости к каждой из следующихповерхностейSв указанной точке$M_0(x_0,y_0,z_0)$.

№	S	$M_0(x_0, y_0, z_0)$.
6.1	$x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0$	$M_0(2, 1,-1)$
6.2	$x^2 + z^2 - 4y^2 = -2xy$	$M_0(-2, 1,2)$
6.3	$x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z = 7$	$M_0(1, 2,1)$
6.4	$x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4x = 8$	$M_0(-1, 1,2)$
6.5	$2x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y = 13$	$M_0(2, 1,-1)$
6.6	$x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0$	$M_0(2, 1,-1)$
6.7	$x^2 + z^2 - 5yz + 3y = 46$	$M_0(1, 2,-3)$
6.8	$x^2 + y^2 - xz - yz = 0$	$M_0(0, 2,2)$
6.9	$x^2 + y^2 + 2zy - z^2 + y - 2z = 2$	$M_0(1, 1,1)$
6.10	$x^2 + y^2 - z^2 - 2zx + 2x = z$	$M_0(1, 1,1)$
6.11	$z = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - y$	$M_0(-1,-1,-1)$
6.12	$z = y^2 - x^2 + 2xy - 3y$	$M_0(1, -1,1)$
6.13	$z = x^2 - y^2 - 2xy - x - 2y$	$M_0(-1, 1,1)$
6.14	$x^2 - 2y^2 + z^2 + xz - 4y = 13$	$M_0(3, 1, 2)$
6.15	$4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z = 9$	$M_0(-1, -2,1)$
6.16	$z = x^2 + y^2 - 3xy - x + y + 2$	$M_0(2, 1, 0)$
6.17	$2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz = 3$	$M_0(1, 2,1)$
6.18	$x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14$	$M_0(3, 1, 4)$
6.19	$x^2 + y^2 - z^2 + xz + 4y = 4$	$M_0(1, 1, 2)$
6.20	$x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4x = -5$	$M_0(-2, 1, 0)$
6.21	$x^2 + y^2 - xz + yz - 3x = 11$	$M_0(1, 4, -1)$
6.22	$x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xz = 8$	$M_0(0, 2, 0)$
6.23	$x^2 - y^2 - 2z^2 - 2y = 0$	$M_0(-1,-1,1)$

6.24	$x^2 + y^2 - 3z^2 + xy = -2z$	$M_0(1,\ 0,1)$
6.25	$2x^2 - y^2 + z^2 - 6x + 2y + 6 = 0$	$M_0(1,-1,1)$
6.26	$x^2 + y^2 - z^2 + 6xy - z = 8$	$M_0(1,\ 1,0)$
6.27	$z = 2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y + 10$	$M_0(-1,\ 1,3)$
6.28	$z = x^2 + y^2 - 4xy + 3x - 15$	$M_0(-1,\ 3,4)$
6.29	$z = x^2 + 2y^2 + 4xy - 5y - 10$	$M_0(-7,\ 1,8)$
6.30	$z = 2x^2 - 3y^2 + xy + 3x + 1$	$M_0(1,-1,2)$

Задание7. Исследовать на экстремум заданные функции.

7.1	$z = xy(12 - x - y)$	7.2	$z = (x-2)^2 + 2y^2 - 10$
7.3	$z = (x-5)^2 + y^2 + 1$	7.4	$z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$
7.5	$z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$	7.6	$z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$
7.7	$z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$	7.8	$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$
7.9	$z = xy - x^2 - y^2 + 9$	7.10	$z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$
7.11	$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$	7.12	$z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$
7.13	$z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$	7.14	$z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$
7.15	$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$	7.16	$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$
7.17	$z = (x-1)^2 + 2y^2$	7.18	$z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$
7.19	$z = x^2 + 3(y+2)^2$	7.20	$z = 2(x+y) - x^2 - y^2$
7.21	$z = xy - 3x^2 - 2y^2$	7.22	$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$
7.23	$z = x^3 + y^3 - 3xy$	7.24	$z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$
7.25	$z = xy(6 - x - y)$	7.26	$z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$
7.27	$z = 6(x-y) - 3x^2 - 3y^2$	7.28	$z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 2$
7.29	$z = 4(x-y) - x^2 - y^2$	7.30	$z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18 + 2$

Примеры выполнениярасчетно – графических работ по теме «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных».

*Задание 1.*Для функции $z = arctg\ \frac{x}{y}$ найти:

а) частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;

б) частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

в) доказать, что выполняется равенство $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

г) найти дифференциалы первого и второго порядков dz, d^2z.

Решение:

а) заданную функцию рассматриваем как сложную функцию и для нахождения производных используем формулу: $z' = (arctgu)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u'$. Найдем частную производную первого порядка по переменной*x*, считая в заданной функции переменную *y* постоянной:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \left(arctg \frac{x}{y} \right)' \Big|_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)' \Big|_x = \frac{y^2}{y^2+x^2}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2};$$

Теперь найдем частную производную первого порядка по переменной *y*, считая в заданной функции переменную *x* постоянной:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \left(arctg \frac{x}{y} \right)' \Big|_y = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)' \Big|_y = \frac{y^2}{y^2+x^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2};$$

б) найдем частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. Для того чтобы найти вторую частную производную по *x*,еще раз дифференцируем полученную производную первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \frac{y}{x^2+y^2}$ по той же переменной *x*, считая в заданной функции переменную *y* постоянной:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x = y\cdot\left(\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right)'_x =$$

$$= -y\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-2}\cdot(x^2+y^2)'_x = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Аналогично, для того чтобы найти вторую частную производную по *y*, еще раз дифференцируем полученную производную первого порядка $\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = -\frac{x}{x^2+y^2}$ по той же переменной *y*, считая в заданной функции переменную *x* постоянной:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right)'_x = -x \cdot \left(\left(x^2 + y^2 \right)^{-1} \right)'_x =$$

$$= x \cdot \left(x^2 + y^2 \right)^{-2} \cdot (x^2 + y^2)'_y = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Для того чтобы найти смешанную производную второго порядка, надо полученную производную первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \frac{y}{x^2 + y^2}$ по переменной *x* продифференцировать по переменной *y,* считая переменную *x* постоянной:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z'_{xy} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right)' \Bigg|_y = \frac{y'_y \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot (x^2 + y^2)'_y}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

в) докажем, что справедливо равенство $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. Значение $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ найдено в пункте (б). Для того чтобы найти смешанную производную второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, надо полученную производную первого порядка $\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = -\frac{x}{x^2 + y^2}$ по переменной*y* продифференцировать по переменной *x,* считая переменную *y* постоянной:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z'_{yx} = \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right)'_x = -\frac{x'_x \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot (x^2 + y^2)'_x}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= -\frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Таким образом, мы доказали, что $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

г) для нахождения дифференциалов первого порядка *dz*и второго порядка $d^2 z$ функции $z = f(x, y)$ напишемформулы:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \text{ , } d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Используя результаты пунктов (а), (б) и (в), по этим формулам находим:

$$dz = \frac{y}{x^2 + y^2}dx - \frac{x}{x^2 + y^2}dy;$$

$$d^2z = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}dx^2 + 2\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}dxdy + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}dy^2.$$

Задание 2. Найти градиент функции $u(x, y, z) = \sqrt{4 + x^2 + y^2 - z}$ в точке $M_0(0; 2; 1)$.

Решение: градиент указывает направление наибыстрейшего роста функции в заданной точке. Пусть задана функция вида $u = f(x, y, z)$, то градиент вычисляется по формуле:

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Градиент заданной функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 определяется по формуле:

$$grad\ \ u(M_0) = u'_x(M_0)\bar{i} + u'_y(M_0)\bar{j} + u'_z(M_0)\bar{k}.$$

Найдем значения частных производных первого порядка функции $u(x, y, z) = \sqrt{4 + x^2 + y^2 - z}$ в точке $M_0(0; 2; 1)$:

$$u'_x(M_0) = \left(\sqrt{4 + x^2 + y^2 - z}\right)'_x\Big|_{M_0} = \frac{x}{\sqrt{4 + x^2 + y^2 - z}}\Bigg|_{M_0} = \frac{0}{\sqrt{4 + 0 + 4 - 1}} = 0;$$

$$u'_y(M_0) = \left(\sqrt{4 + x^2 + y^2 - z}\right)'_y\Big|_{M_0} = \frac{y}{\sqrt{4 + x^2 + y^2 - z}}\Bigg|_{M_0} = \frac{2}{\sqrt{4 + 0 + 4 - 1}} = \frac{2}{\sqrt{7}};$$

$$u'_z(M_0) = \left(\sqrt{4 + x^2 + y^2 - z}\right)'_z\Big|_{M_0} = \frac{-1}{2\sqrt{4 + x^2 + y^2 - z}}\Bigg|_{M_0} =$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{4 + 0 + 4 - 1}} = -\frac{1}{2\sqrt{7}}.$$

Таким образом,

$$grad\ \ u(M_0) = \frac{2}{\sqrt{7}}\vec{j} - \frac{1}{2\sqrt{7}}\vec{k}.$$

Задание 3. Проверить является ли функция $z(x, y) = \frac{x^2}{2y} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ решением дифференциального уравнения в частных производных $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3}{y}$.

Решение: найдем частные производные первого порядка заданной функции по переменным *x* и *y*:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{y} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2};\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{2y^2} + \frac{1}{y^2}.$$

Подставим найденные выражения в левую часть уравнения и приведем подобные:

$$x^2\left(\frac{x}{y} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}\right) + y^2\left(-\frac{x^2}{2y^2} + \frac{1}{y^2}\right) = \frac{x^3}{y}$$

или

$$\frac{x^3}{y} + \frac{x^2}{2} - 1 - \frac{x^2}{2} + 1 = \frac{x^3}{y}.$$

Получили тождество, таким образом, функция $z(x, y) = \frac{x^2}{2y} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ удовлетворяет заданному уравнению.

Задание 4. Найдите первые производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции, заданной в неявном виде $xe^y + ye^x + ze^x = a$.

Решение: частные производные неявной функции двух переменных $z = \varphi(x, y)$, заданной с помощью уравнения $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ - дифференцируемая функция переменных *x*, *y*, z, определяются формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z},\qquad \text{где}\ \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0.$$

Здесь:

$$F(x, y, z) = xe^y + ye^x + ze^x - a.$$

Найдем

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^y + ye^x + ze^x; \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = xe^y + e^x; \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = e^x.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^y + ye^x + ze^x}{e^x} = -(e^{y-x} + y + z); \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xe^y + e^x}{e^x} = -(xe^{y-x} + 1).$$

Задание 5. Найти $\frac{du}{dt}$ от сложной функции, если $u = x^2 + y^2 + xy$,где $x = \sin t$, $y = e^t$ в точке $t = 0$.

Решение: для функции $u = u(x, y)$, где $x = x(t), y = y(t)$ производная сложной функции $u = u(x(t), y(t))$ вычисляется по формуле:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Вычислим частные производные первого порядка функции $u = x^2 + y^2 + xy$ по переменным x и y:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^2 + y^2 + xy)'_x = 2x + y; \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 + y^2 + xy)'_y = 2y + x.$$

Вычислим производные от функций $x = \sin t$, $y = e^t$:

$$\frac{dx}{dt} = (\sin t)' = \cos t; \qquad \frac{dy}{dt} = (e^t)' = e^t.$$

Подставим найденные выражения в формулу производной сложной функции:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = (2x + y) \cdot \cos t + (2y + x) \cdot e^t =$$

$$= \left| \begin{matrix} x = \sin t \\ y = e^t \end{matrix} \right| = (2\sin t + e^t) \cdot \cos t + (2e^t + \sin t) \cdot e^t =$$

$$= \sin 2t + e^t(\cos t + \sin t) + 2e^{2t}.$$

Найдем значение производной сложной функции в точке $t = 0$:

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0} = [\sin 2t + e^t(\cos t + \sin t) + 2e^{2t}]\Big|_{t=0} = 3.$$

Задание 6. Составить уравнения нормали и касательной плоскости к поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ в точке $M_0(3,4,-5)$.

Решение: уравнение нормали к данной поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}}.$$

А уравнение касательной плоскости к поверхности Sв точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}(x - x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}(y - y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}(z - z_0) = 0$$

Найдем значения частных производных по переменным *x*, *y*, z в заданной точке $M_0(3,4,-5)$:

$$F'_x(3,4,-5) = (x^2 + y^2 - z^2)'_x = 2x\Big|_{M_0} = 6;$$

$$F'_y(3,4,-5) = (x^2 + y^2 - z^2)'_x = 2y\Big|_{M_0} = 8;$$

$$F'_z(3,4,-5) = (x^2 + y^2 - z^2)'_x = -2z\Big|_{M_0} = 10.$$

Подставим найденные значения, тогда уравнение нормали к поверхности *S* в точке $M_0(3,4,-5)$ имеет вид:

$$\frac{x-3}{6} = \frac{y-4}{8} = \frac{z+5}{10} \quad \text{или} \quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z+5}{5};$$

А уравнение касательной плоскости к заданной поверхности Sв точке $M_0(3,4,-5)$ имеет вид:

$$6\cdot(x-3) + 8\cdot(y-4) + 10\cdot(z+5) = 0 \text{ или } 3x + 4y + 5z = 0.$$

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию $f(x,y) = x^3 + y^3 + 9xy$.

Решение: функция нескольких переменных может иметь экстремум только в точках, которые принадлежат области определения, то есть в точках, в которых все частные производные первого порядка равны нулю. Такие точки называются критическими. Для функции от двух переменных $z = f(x,y)$ критические точки находятся из системы уравнений (необходимые условия экстремума):

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0; \\ f'_y(x,y) = 0. \end{cases}$$

Достаточные условия экстремума для функции $z = f(x,y)$ можно записать с помощьюопределителя второго порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2,$$

где $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$; $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$; $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, причем:

1) Если $\Delta > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ - точка экстремума: при $A > 0$ (или $C > 0$) - точка минимума, при $A < 0$ (или $C < 0$) - точкамаксимума.

2) Если $\Delta < 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремума нет.

3) Если $\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Вычислим производные первого и второго порядков:

$$f'_x(x, y) = (x^3 + y^3 + 9xy)'_x = 3x^2 + 9y;$$

$$f'_y(x, y) = (x^3 + y^3 + 9xy)'_y = 3y^2 + 9x.$$

Приравняем к нулю найденные первые частные производные и из полученной системы уравнений с двумя неизвестными найдем координаты критических точек:

$$\begin{cases} 3x^2 + 9y = 0 \\ 3y^2 + 9x = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 + 3y = 0 \\ y^2 + 3x = 0 \end{cases}.$$

Найдем *y*из первого уравнения $y = -\frac{1}{3}x^2$ и, подставляя его выражение во второе уравнение, получим

$$\left(-\frac{1}{3}x^2\right)^2 + 3x = 0,$$

отсюда $x^4 + 27x = 0$ или $x(x^3 + 27) = 0$

Таким образом, $x_1 = 0$, $x_2 = -3$. Отсюда найдем $y_1 = 0$, $y_2 = -3$. Получили две критические точки $M_1(0;0)$ и $M_2(-3;-3)$.Комплексные корни уравнения $x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) = 0$ во внимание не берем.

Вычислим значения вторых частных производных в критической точке $M_1(0;0)$:

$$A_1 = f''_{xx}(0,0) = 0; \quad C_1 = f''_{yy}(0,0) = 0; \quad B_1 = f''_{xy}(0,0) = 9,$$

тогда $\Delta_1 = 0 \cdot 0 - 9^2 = -81 < 0$, то есть в точке $M_1(0;0)$ экстремума нет.

Вычислим значения вторых частных производных в критической точке $M_2(-3;-3)$:

$A_2 = f''_{xx}(-3,-3) = 6 \cdot (-3) = -18$; $C_2 = f''_{yy}(-3,-3) = -18$; $B_2 = f''_{xy}(-3,-3) = 9$,

тогда $\Delta_2 = (-18)\cdot(-18) - 9^2 = 243 > 0$, то есть в точке $M_2(-3;-3)$ экстремум есть и, так как $A_2 = -18 < 0$, то точка $M_2(-3;-3)$ является точкой максимума, причем:

$$\max \quad f(x, y) = f(-3;-3) = 27 .$$

1.2Интегральное исчисление функции нескольких переменных

Теоретические вопросы.

1. Двойной интеграл, основные свойства двойного интеграла.
2. Вычисление двойных интегралов в декартовых координатах.
3. Вычисление двойных интегралов в полярных координатах.
4. Геометрические приложения двойных интегралов: площадь плоской области, объем цилиндра.
5. Механические приложения двойных интегралов: масса пластинки, статистические моменты, центр масс.
6. Тройные интегралы, их основные свойства.
7. Якобиан. Замена переменных в кратных интегралах
8. Вычисление тройных интегралов в декартовых координатах.
9. Вычисление тройных интегралов в сферических координатах.
10. Приложения тройных интегралов: масса тела, статистические моменты тела, координаты центра масс, моменты инерции тела.

Задания по выполнению расчетно – графической работы «Интегральное исчисление функции нескольких переменных».

Задание 8. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле.

8.1	$\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)dx$	8.16	$\int_{0}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{0} f(x,y)dx$
8.2	$\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx$	8.17	$\int_{1}^{e} dx \int_{\ln x}^{1} f(x,y)dy$
8.3	$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} f(x,y)dy$	8.18	$\int_{0}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2-1}^{1} f(x,y)dy$
8.4	$\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx$	8.19	$\int_{1}^{e} dy \int_{\ln y}^{1} f(x,y)dx$

8.5	$\int_{-1}^{0} dx \int_{\sqrt[3]{x}}^{0} f(x,y)dy$	8.20	$\int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy$
8.6	$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-2-y}^{0} f(x,y)dx$	8.21	$\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} f(x,y)dx$
8.7	$\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x^2} f(x,y)dy$	8.22	$\int_{1}^{\sqrt{2}} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$
8.8	$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx$	8.23	$\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x^3} f(x,y)dy$
8.9	$\int_{1}^{2} dx \int_{0}^{2-x} f(x,y)dy$	8.24	$\int_{1}^{2} dx \int_{-\sqrt{2-x}}^{0} f(x,y)dy$
8.10	$\int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{x}}^{0} f(x,y)dy$	8.25	$\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$
8.11	$\int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$	8.26	$\int_{1}^{2} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x}} f(x,y)dy$
8.12	$\int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{x}}^{0} f(x,y)dy$	8.27	$\int_{-1}^{0} dy \int_{y}^{0} f(x,y)dx$
8.13	$\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x^2} f(x,y)dy$	8.28	$\int_{1}^{e} dy \int_{\ln y}^{1} f(x,y)dx$
8.14	$\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx$	8.29	$\int_{-1}^{0} dx \int_{\sqrt[3]{x}}^{0} f(x,y)dy$
8.15	$\int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy$	8.30	$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-2-y}^{0} f(x,y)dx$

*Задание 9.*Расставить пределы интегрирования и вычислить площадь, используя двойной интеграл, где область интегрирования*D*ограничена заданными линиями.

9.1	$D:\ y=\frac{1}{2}x+2,\ y=0, x=-3, x=2$	9.16	$D: x=2-y-y^2,\ x=2$
9.2	$D: y=4-x^2,\ y=0$	9.17	$D: y=1-x^2,\ y\geq 0$
9.3	$D: y=x^2-1,\ y=3$	9.18	$D: x=y^2,\ x=1$
9.4	$D:\ y=\frac{x^2}{2},\ y=0$	9.19	$D: y=5x,\ y=x,\ x=3$
9.5	$D: y=x,\ y=0, x=1$	9.20	$D: y=2-x,\ y=x, x\geq 0$
9.6	$D: y^2=1-x,\ x\geq 0$	9.21	$D: y=x^2,\ x=1,\ x=2$
9.7	$D: y=x^2-3x,\ y=x$	9.22	$D: y=4-x^2,\ y=3x, x\geq 0, y\geq 0$
9.8	$D: y=2-x^2,\ y^3=x^2$	9.23	$D: y^2=4x,\ x=2$
9.9	$D: x=2-y^2,\ x=0$	9.24	$D: y=x^2-6x+5,\ y=0$
9.10	$D: y=x^3,\ y=3x$	9.25	$D: y=x^2+2,\ x=3, x\geq 0, y\geq 0$
9.11	$D: y=x^2, y=x,\ x=-\frac{1}{2}$	9.26	$D: y=-x,\ y=2x-x^2$
9.12	$D: y^2=x,\ y=0,\ x=1,\ x=4$	9.27	$D: y=-x^2+4,\ y=0$
9.13	$D: y=-\frac{1}{4}x^2+x+3,\ y=0$	9.28	$D: y=4x,\ x=1,\ x=9$
9.14	$D: y=\frac{1}{4}x^3,\ y-x=0$	9.29	$D: y=x^2,\ y=2x+8$
9.15	$D: y=3-2x-x^2,\ y=1-x$	9.30	$D: y=x^2,\ x=-1,\ x=2$

*Задание 10.*Вычислить повторные интегралы, расставив пределы интегрирования.

10.1	$\iint\limits_D \left(x+3\sqrt{y}\right)dxdy,$ $D: -2\leq x\leq 0,\ 0\leq y\leq 1$	10.16	$\iint\limits_D \left(x+y\right)^2 dxdy,$ $D: -1\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq 1$
10.2	$\iint\limits_D \left(2x+1\right)\sqrt{y}\,dxdy,$ $D: -2\leq x\leq 0,\ 0\leq y\leq 1$	10.17	$\iint\limits_D \left(xy^2+x^3\right)dxdy,$ $D: 0\leq x\leq 1, -1\leq y\leq 0$
10.3	$\iint\limits_D \left(x+2\right)y^2 dxdy,$ $D: -3\leq x\leq -1,\ 0\leq y\leq 2$	10.18	$\iint\limits_D \left(y+1\right)\sqrt{x}\,dxdy,$ $D: 0\leq x\leq 4,\ -1\leq y\leq 2$

10.4	$\iint\limits_D y(1-3x)\,dxdy,$ $D: -1/3 \le x \le 0,\ 0 \le y \le 1$	10.19	$\iint\limits_D \left(x^3-2\right)\sqrt{y}\,dxdy,$ $D: 0 \le x \le 1,\ 4 \le y \le 9$
10.5	$\iint\limits_D y^3\left(5+x\right)dxdy,$ $D: -1 \le x \le 2, 0 \le y \le 1$	10.20	$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy,$ $D: 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 0$
10.6	$\iint\limits_D (1+x)\sqrt{y}\,dxdy,$ $D: 2 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 1$	10.21	$\iint\limits_D x^3\left(1+2y\right)dxdy,$ $D: -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$
10.7	$\iint\limits_D \left(3x+y\right)dxdy,$ $D: 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1$	10.22	$\iint\limits_D \left(2\sqrt{x}\cdot y+1\right)dxdy,$ $D: 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1$
10.8	$\iint\limits_D (2-3y)\sqrt[3]{x}\,dxdy,$ $D: 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 0$	10.23	$\iint\limits_D \left(x^2y+y^2\right)dxdy,$ $D: -2 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1$
10.9	$\iint\limits_D \left(1-2\sqrt{x}\right)y\,dxdy,$ $D: 0 \le x \le 9,\ -2 \le y \le 2$	10.24	$\iint\limits_D \left(x+2\right)^2 y\,dxdy,$ $D: -2 \le x \le -1,\ 0 \le y \le 2$
10.10	$\iint\limits_D (1-2y)\sqrt{x}\,dxdy,$ $D: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1/2$	10.25	$\iint\limits_D (2-x)\sqrt{y}\,dxdy,$ $D: 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 4$
10.11	$\iint\limits_D \left(1+y^2x\right)dxdy,$ $D: -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$	10.26	$\iint\limits_D \left(x+3\sqrt{y}\right)dxdy,$ $D: -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$
10.12	$\iint\limits_D \left(\sqrt{x}+3x\,y\right)dxdy,$ $D: 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 2$	10.27	$\iint\limits_D \left(x+2y\right)dxdy,$ $D: -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1$
10.13	$\iint\limits_D \left(xy^2+1\right)dxdy,$ $D: -2 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2$	10.28	$\iint\limits_D \left(1+3\sqrt{x}\right)y\,dxdy,$ $D: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$
10.14	$\iint\limits_D \left(2x-5\right)^2 y\,dxdy,$ $D: -2 \le x \le 1,\ -3 \le y \le 3$	10.29	$\iint\limits_D (1+3x)\sqrt{y}dxdy,$ $D: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1/3$

10.15	$\iint\limits_D \left(5+x^2\right)\sqrt{y}\,dxdy,$ $D: 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1$	10.30	$\iint\limits_D (1-2y)\sqrt{x}\,dxdy,$ $D: 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1/2$

*Задание 11.*Перейти к полярным координатам, расставить пределы интегрирования по новым переменным и вычислить двойной интеграл.

11.1	$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy,$ $D: x^2+y^2=2$	11.16	$\iint\limits_D \left(x^2+2y^2\right)dxdy,$ $D: x^2+y^2=9$
11.2	$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+16}\ \ dxdy,$ $D: x^2+y^2=9$	11.17	$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\ \ dxdy,$ $D: x^2+y^2=4$
11.3	$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dxdy,$ $D: x^2+y^2=1$	11.18	$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\ \ dxdy,$ $D: x^2+y^2=3$
11.4	$\iint\limits_D \sin\left(x^2+y^2\right)dxdy,$ $D: x^2+y^2=\pi/2$	11.19	$\iint\limits_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy,$ $D: 1 \le x^2+y^2 \le 4$
11.5	$\iint\limits_D e^{3x^2+3y^2}\,dxdy,$ $D: x^2+y^2=5$	11.20	$\iint\limits_D \cos\left(x^2+y^2\right)dxdy,$ $D: x^2+y^2=\pi/2$
11.6	$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy,$ $D: x^2+y^2=5$	11.21	$\iint\limits_D \left(2x^2+y^2\right)dxdy,$ $D: x^2+y^2=2, x \ge 0, y \ge 0$
11.7	$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+5}\ \ dxdy,$ $D: 4 \le x^2+y^2 \le 11$	11.22	$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2-16}\ \ dxdy,$ $D: x^2+y^2=20, x \ge 0, y \ge 0$
11.8	$\iint\limits_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,$ $D: 1 \le x^2+y^2 \le 4$	11.23	$\iint\limits_D \sin\left(x^2+y^2\right)dxdy,$ $D: x^2+y^2=\pi/2$

11.9	$\iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$ $D: 1 \le x^2+y^2 \le 4$	11.24	$\iint\limits_D y\cos\left(x^2+y^2\right)dxdy,$ $D: x^2+y^2=5$
11.10	$\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}\ dxdy,$ $D: x^2+y^2=16$	11.25	$\iint\limits_D \frac{x}{x^2+y^2}dxdy,$ $D: 1 \le x^2+y^2 \le 4$
11.11	$\iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$ $D: 1 \le x^2+y^2 \le 9, x \ge 0, y \ge 0$	11.26	$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy,$ $D: x^2+y^2=3$
11.12	$\iint\limits_D \left(2x^2+3y^2\right)dxdy,$ $D: x^2+y^2=1$	11.27	$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+4}\ dxdy,$ $D: x^2+y^2=5$
11.13	$\iint\limits_D y\sqrt{x^2+y^2}\ dxdy,$ $D: x^2+y^2=9$	11.28	$\iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy,$ $D: x^2+y^2=1, x \ge 0, y \ge 0$
11.14	$\iint\limits_D x\cdot\sqrt[4]{x^2+y^2}\,dxdy,$ $D: x^2+y^2=25$	11.29	$\iint\limits_D \left(2x^2+3y^2\right)dxdy,$ $D: x^2+y^2=3, x \ge 0, y \ge 0$
11.15	$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\ dxdy,$ $D: x^2+y^2=7,\ x \ge 0, y \ge 0$	11.30	$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\ dxdy,$ $D: x^2+y^2=4$

*Задание 12.*Вычислить тройной интеграл, гдеобластьVограничена заданными плоскостями.

12.1 $\iiint\limits_V \left(x^2+2y^2-z\right)dxdydz;$ $V: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3,\ -1 \le z \le 2$	12.2 $\iiint\limits_V x^2yzdxdydz,$ $V: -1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2,\ 2 \le z \le 3$
12.3 $\iiint\limits_V \left(2x^2+3y+z\right)dxdydz,$ $V: 2 \le x \le 3,\ -1 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 4$	12.4 $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz;$ $V: 0 \le x \le 3,\ -1 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 2$

12.5 $\iiint\limits_V x^2y^2z\,dxdydz;$ $V:\ -1\le x\le 3,\ \ 0\le y\le 2,\ \ -2\le z\le 5$	12.6 $\iiint\limits_V (x+y+z)\,dxdydz;$ $V:\ \ 0\le x\le 3,\ \ -1\le y\le 0,\ \ 1\le z\le 2$
12.7 $\iiint\limits_V (2x-y^2-z)\,dxdydz;$ $V:\ 1\le x\le 5,\ \ 0\le y\le 2,\ \ -1\le z\le 0$	12.8 $\iiint\limits_V 2xy^2z\,dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 3,\ \ -2\le y\le 0,\ \ 1\le z\le 2$
12.9 $\iiint\limits_V 5xyz^2\,dxdydz;$ $V:\ -1\le x\le 0,\ \ 2\le y\le 3,\ \ 1\le z\le 2$	12.10 $\iiint\limits_V (x^2+2y^2-z)\,dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 3,\ \ -1\le z\le 2$
12.11 $\iiint\limits_V (x+2yz)\,dxdydz;$ $V:\ -2\le x\le 0,\ \ 0\le y\le 1,\ \ 0\le z\le 2$	12.12 $\iiint\limits_V (x+yz^2)\,dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 2,\ \ -1\le z\le 3$
12.13 $\iiint\limits_V (xy+3z)\,dxdydz;$ $V:\ -1\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1,\ \ 1\le z\le 2$	12.14 $\iiint\limits_V (xy-z^2)\,dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 2,\ \ 0\le y\le 1,\ \ -1\le z\le 3$
12.15 $\iiint\limits_V (x^3+yz)\,dxdydz;$ $V:\ -1\le x\le 2,\ \ 0\le y\le 1,\ \ 0\le z\le 1$	12.16 $\iiint\limits_V (x^3+y^2-z)\,dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 2,\ \ 1\le y\le 0,\ \ 0\le z\le 1$
12.17 $\iiint\limits_V (2x^2+y-z^3)\,dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 1,\ \ -2\le y\le 1,\ \ 0\le z\le 1$	12.18 $\iiint\limits_V x^2yz^2\,dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 2,\ \ 1\le y\le 2,\ \ -1\le z\le 0$
12.19 $\iiint\limits_V (x+y-z)\,dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 4,\ \ 1\le y\le 3,\ \ -1\le z\le 5$	12.20 $\iiint\limits_V (x+2y+3z^2)\,dxdydz;$ $V:\ -1\le x\le 2,\ \ 0\le y\le 1,\ \ 1\le z\le 2$
12.21 $\iiint\limits_V (3x^2+2y+z)\,dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1,\ \ -1\le z\le 3$	12.22 $\iiint\limits_V (xy-z^3)\,dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 1,\ \ -1\le y\le 2,\ \ 0\le z\le 3$

12.23 $\iiint\limits_V x^3 yz\,dxdydz;$ $V:\ 1\le x\le 2,\ 1\le y\le 3,\ 0\le z\le 1$	12.24 $\iiint\limits_V xy^2 z\,dxdydz;$ $V:\ -2\le x\le 1,\ 0\le y\le 3,\ 0\le z\le 3$
12.25 $\iiint\limits_V xyz^2\,dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 2,\ -1\le y\le 0,\ 0\le z\le 4$	12.26 $\iiint\limits_V (x+yz)\,dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 4,\ 0\le z\le 2$
12.27 $\iiint\limits_V (x+y^2-z^2)\,dxdydz;$ $V:\ -2\le x\le 0,\ 1\le y\le 2,\ 0\le z\le 5$	12.28 $\iiint\limits_V (x+y+z^2)\,dxdydz;$ $V:\ -1\le x\le 0,\ 0\le y\le 1,\ 2\le z\le 3$
12.29 $\iiint\limits_V (x+y^2-2z)\,dxdydz;$ $V:1\le x\le 2,\ -2\le y\le 3,\ 0\le z\le 1$	12.30 $\iiint\limits_V (x-y-z)\,dxdydz;$ $V:\ 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 1,\ -2\le z\le 1$

Примеры выполнения расчетно – графических работ по теме «Интегральное исчисление функции нескольких переменных».

Задание 8. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_1^e dx \int\limits_0^{\ln x} f(x,y)\,dy$.

Решение. Область интегрирования $D=\{1\le x\le e,\ 0\le y\le \ln x\}$ ограничена линиями $x=1;\ x=e;\ y=0;\ y=\ln x$ (рисунок 1). Внутренний интеграл задан по переменной *y*, поэтому для определения заданной области штрихи проводим сверху вниз параллельно оси *Oy*.

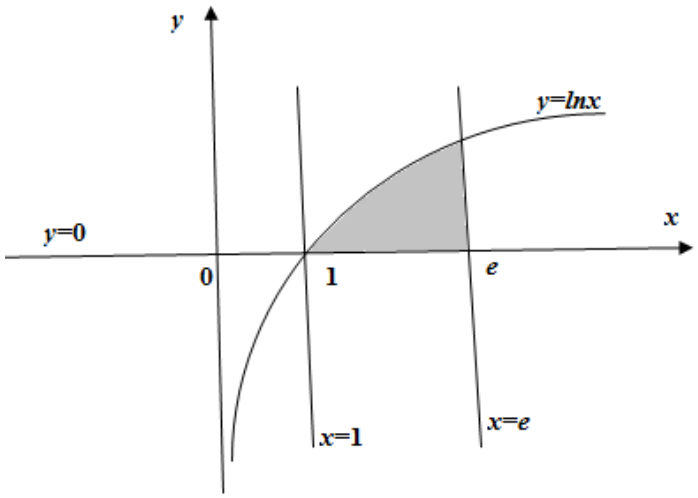

Рисунок 1

Изменим порядок интегрирования,так как теперь внутренний интеграл будет по переменной *x*, то на полученном чертеже проводим штрихи справа налево параллельно оси*Ox*, причем начало каждого штриха определяет верхний предел интегрирования, а конец каждого штриха определяет нижний предел интегрирования в новом повторном интеграле. Заданную область D определим как область D_1, ограниченную линиями:

$$x = e^y;\ x = e;\ \ y = 0;\ y = 1.$$

Тогда

$$\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y)\,dy = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y)\,dx.$$

Задание 9. Расставить пределы интегрирования и вычислить площадь фигуры, используя двойной интеграл, где область интегрирования *D*– параллелограмм, ограниченный линиями $y = x;\ y = x - 3;\ \ y = 2;\ y = 4$ (рисунок 2).

Решение.Надо вычислить площадь параллелограмма, заключенного между параллельными прямыми $y = x;\ y = x - 3$ и $y = 2;\ y = 4$.

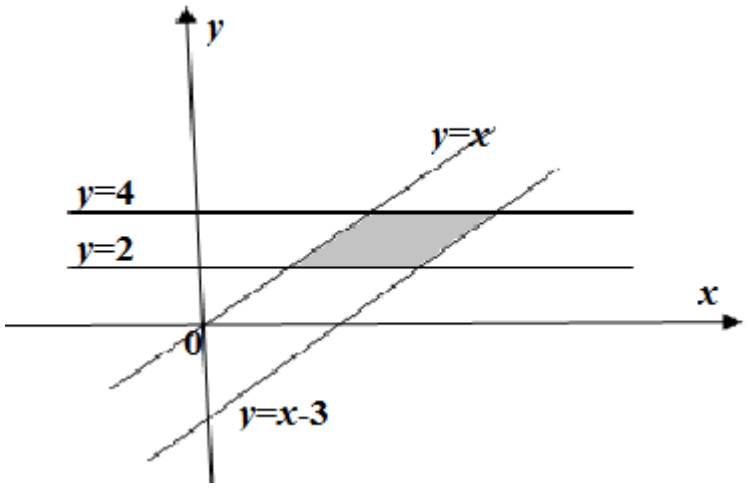

Рисунок 2

Форма параллелограмма позволяет применить формулу повторного интеграла с внутренним интегралом по переменной *x*, при этом надо определить пределы интегрирования: $y = 2;\ y = 4;\ \ x = y;\ x = y + 3.$

$$S = \iint_D dxdy = \int_2^4 dy \int_y^{y+3} dx = \int_2^4 x\Big|_y^{y+3} dx = \int_2^4 (y + 3 - y)\,dy = 3\int_2^4 dx = 6.$$

Задание 10. Вычислить повторный интеграл:

$$\iint_D (x^2 + y)\,dxdy\ ,\ \ D = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\},$$

расставив пределы интегрирования.

Решение: так как область D правильный прямоугольник, то пределы в повторном интеграле расставляются по порядку:

$$\iint\limits_D (x^2 + y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 (x^2 + y)\,dy = \int\limits_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (2x^2 + 2)\,dx = \left(\frac{2x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{8}{3}.$$

Задание 11. Перейти к полярным координатам, расставить пределы интегрирования по новым переменным и вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dxdy, \quad D = \left\{ x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{9},\ x^2 + y^2 = \pi^2 \right\}.$$

Решение. Полагая $x = \rho\cos\varphi;\quad y = \rho\sin\varphi$, имеем

$$\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dxdy = \iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}} \cdot \rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \iint\limits_D \frac{\sin\rho}{\rho} \cdot \rho\,d\rho\,d\varphi = \iint\limits_D \sin\rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\pi/3}^{\pi} \sin\rho\,d\rho =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot (-\cos\rho)\Big|_{\pi/3}^{\pi} = 3\pi.$$

Задание 12. Вычислить тройной интеграл, где область Vограничена заданными плоскостями:

$$\iiint\limits_V (2xy + z)\,dxdydz, \quad V = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 3\}.$$

Решение: так как область Vправильный параллелепипед, то пределы расставляются в повторном интеграле по порядку:

$$\iiint\limits_V (2xy + z)\,dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 (2xy + z)\,dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 \left(2xyz + \frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 \left(6xy + \frac{9}{2}\right)dy = \int\limits_0^1 \left(3xy^2 + \frac{9}{2}y\right)\Bigg|_0^2 dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (12x + 9)\,dx = (6x^2 + 9x)\Big|_0^1 = 15.$$

Список литературы

1 Хасеинов К.А. Каноны математики. - Алматы. 2003.

2 Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). – М.: Высшая школа, 2008. –176 с.

3 Индивидуальные задания по высшей математике: Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ч. 2: Учебное пособие /под редакцией А.П. Рябушко. – Мн.: Вышейшаяшкола, 2007. - 396 с.

4 Индивидуальные задания по высшей математике: Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. Ч. 3: Учебное пособие /под ред. А.П. Рябушко. – Мн.:Вышейшаяшкола, 2007.- 351 с.

5 Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1,2 части. – М.: Рольф, 2007. – 288 с.

6 Искакова А.К., Есботаева Э.С. Математика. Конспект лекций для студентов специальности 5В070200 – «Автоматизация и управление» дисциплины. –Алматы: АУЭС, 2017. 71с.

Содержание

Введение …… 3
1 Расчетно-графическая работа №1…… 3
1.1 Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных..... 3
1.2 Интегральное исчисление функции нескольких переменных……..... 19
Список литературы…… 29

Сводный план 2019 г., поз. 171

Искакова Акжолтай Курмантаевна
Есботаева Эльмира Султанмуратовна

МАТЕМАТИКА 2

Методические указания и задания
по выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности
5В070200 - «Автоматизация и управление». Часть 2

Редактор Л.Т.Сластихина

Специалист по стандартизации Г.И.Мухаметсариева

Подписано в печать_____ Формат 60х84 1/16
Тираж 25 экз. Бумага типографическая №1
Объем2,0 уч.-изд.л. Заказ _____ Цена 1000 тг.

Копировально – множительное бюро
Некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013 Алматы, ул.Байтурсынова, 126/1