Коммерциялық емес акционерлік қоғам

АЛМАТЫ ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС УНИВЕРСИТЕТІ

Математикалық модельдеу және бағдарламалық қамтамасыз ету кафедрасы

МАТЕМАТИКА 3

5В070300 - Ақпараттық жүйелер мамандығы бойынша оқитын студенттер үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар
2 бөлім

Алматы 2019

ҚҰРАСТЫРУШЫЛАР: Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Математика 3. 5В070300 –Ақпараттық жүйелер мамандығы студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар. 2-бөлім. - Алматы: АЭжБУ, 2019. - 34 б.

5В070300 – Ақпараттық жүйелер мамандығы студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар «Математика 3» пәнінің «Ықтималдықтар теориясының элементтері» тарауы бойынша №2 есептеу-сызба жұмыстарынан тұрады. Бағдарламаның теориялық сұрақтары енгізілген. Типтік нұсқаның шешімі келтірілген.

Кесте - 14, без.- 11, әдеб.көрсеткіші – 5 атау.

Рецензент: ММҮ кафедрасының аға оқытушысы Абдулланова Ж.С.

«Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2019 ж. жоспары бойынша басылады.

Кіріспе

Ықтималдықтар теориясының бақыланбайтын факторлар әсеріне ұшырайтын жүйелерге қойылған теоретиялық эксперименттердің нәтижесін, осы нәтижелерге бағынатын заңдылықтардың талдауын зерттейді. Ол көптеген қолданбалы есептердің теориялық негізін қамтамасыз етеді.

Ықтималдықтар әдісі қандай да бір деңгейде ғылым салаларында қолданылады.

Ұсынылып отырған әдістемелік нұсқаулықтар ықтималдықтар теориясының екі бөлімінен тұрады: кездейсоқ оқиғалар және кездейсоқ шамалар.

Әр бөлім бойынша теориялық сұрақтар, тапсырмалар және типтік варианттың шешуі келтірілді.

Студенттің вариант нөмірі топтағы тізіммен анықталады. Есептік- сызба жұмыс дәптерге таза, анық жазылуы керек.

1 Есептеу-сызба жұмыс №2. Ықтималдықтар теориясының элементтері

Мақсаты: ықтималдықтар теориясында жиі қолданылатын комбинаториканың кейбір ұғымдарын қарастыру, кездейсоқ шамалар мен олардың ықтималдықтары ұғымдарымен, ықтималдықтар теориясының негізгі теоремаларымен танысу, үлестірім заңдары мен дискретті және кездейсоқ кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамаларын оқып, үйрену.

1.1 Теориялық сұрақтар

1. Комбинаторика элементтері
2. Қарапайым оқиғалар кеңістігі. Оқиғалар алгебрасы.
3. Ықтималдық статистикалық, геометриялық және классикалық анықтамалары.
4. Ықтималдықтарды қосу және көбейту теоремасы. Шартты ықтималдық.
5. Толық ықтималдық формуласы. Байес формуласы.
6. Сынақтардың қайталануы. Бернулли формуласы. Лапластың локальдық және интегралдық теоремалар. Лаплас функциясы. Пуассон теоремасы.
7. Дискретті және үздіксіз кездейсоқ шамалар. Дискретті кездейсоқ шаманың үлестірілім заңы.
8. Үлестірілімнің интегральдық функциясы. Үлестірілім тығыздығы.
9. Кездесоқ шаманың сандық сипататамалары. Дискретті және үздіксіз кездейсоқ шамалардың математикалық үміт, дисперсиясы және орта квадраттық ауытқуы.

10. Биномдық үлестірілім, Пуассон үлестірілімі. Бірқалыпты және көрсеткіштік үлестірілім, сенімділік функциясы.

11. Қалыпты үлестірілім.

12. Ықтималдықтар теориясының шектік теоремалары туралы ұғым.

1.2 Есептік тапсырмалар

1. $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ сандар жиыны берілген. Анықтау керек:

а) осы жиынның цифрларының ішінен қанша әртүрлі m–таңбалы сандарды құруға болады, әр санда цифрлар қайталанбау керек;

б) осы жиынның цифрларының ішінен қанша әртүрлі тоғыз таңбалы сандарды құруға болады, әр санда цифрлар қайталанбау керек;

в) осы жиынның элементтерінен әртүрлі цифрлардан тұратын қанша m-элементті ішкі жиын құруға болады.

№	m	№	m	№	m
1.1	2	1.11	5	1.21	8
1.2	3	1.12	6	1.22	2
1.3	4	1.13	7	1.23	3
1.4	5	1.14	8	1.24	4
1.5	6	1.15	2	1.25	5
1.6	7	1.16	3	1.26	6
1.7	8	1.17	4	1.27	7
1.8	2	1.18	5	1.28	8
1.9	3	1.19	6	1.29	2
1.10	4	1.20	7	1.30	3

2. Жәшікте үш түсті шарлар бар: n_1 ақ түсті шарлар, n_2 - көк, n_3 - қызыл ($\sum_i^3 n_i = n$). Табу керек:

а) ақ түсті шарлардың қатысты жиілігін;

б) таңдап алған m $(m = \sum_i^3 m_i)$ шардың барлығы ақ түсті болу ықтималдығын;

в) таңдап алған m шардың арасында m_1 ақ түсті болу ықтималдығын;

г) таңдап алған m шардың арасында m_1 ақ, m_2 - көк, m_3 - қызыл түсті болу ықтималдығын;

д) таңдап алған m шардың арасында ең болмағанда біреуі ақ түсті болу ықтималдығын.

№	n_1	n_2	n_3	m_1	m_2	m_3	№	n_1	n_2	n_3	m_1	m_2	m_3
2.1	20	26	24	2	1	2	2.16	41	29	30	5	3	2
2.2	40	20	15	4	1	3	2.17	29	21	40	6	4	2

2.3	35	30	20	2	1	2	2.18	25	35	25	2	2	3
2.4	20	40	30	2	2	3	2.19	18	42	20	1	2	2
2.5	30	45	12	3	2	3	2.20	43	27	25	3	4	2
2.6	25	55	20	8	3	4	2.21	22	28	20	2	4	3
2.7	40	24	26	4	3	2	2.22	30	21	29	3	1	1
2.8	28	42	25	3	5	2	2.23	42	20	28	1	3	2
2.9	30	15	40	2	2	3	2.24	24	26	25	2	4	2
2.10	17	33	40	1	3	2	2.25	37	33	30	2	3	5
2.11	31	25	29	2	2	1	2.26	26	34	30	3	2	3
2.12	28	32	15	1	2	2	2.27	31	29	20	1	2	2
2.13	30	41	29	3	4	2	2.28	29	31	35	3	2	3
2.14	32	28	20	3	2	2	2.29	34	26	36	4	1	2
2.15	24	26	35	1	3	1	2.30	25	35	29	1	2	2

3. Қондырғы үш тәуелсіз жұмыс істейтін элементтерден тұрады. Қандай да бір уақыт ішінде бірінші, екінші, үшінші элементтердің мүлтіксіз жұмыс істеу ықтималдықтары сәйкес p_1, p_2, p_3 -ке тең. Осы уақыт аралығында:

а) үш элемент те мүлтіксіз жұмыс істеу (A оқиғасы);

б) мүлтіксіз тек бір элемент жұмыс істеу(B оқиғасы);

в) екі элемент мүлтіксіз жұмыс істеп, біреуі істен шығу (C оқиғасы);

г) ең болмағанда біреуі мүлтіксіз жұмыс істеу (D оқиғасы) ықтималдығын табу керек.

№	p_1	p_2	p_3	№	p_1	p_2	p_3	№	p_1	p_2	p_3
3.1	0.9	0.6	0.5	3.11	0.5	0.9	0.4	3.21	0.5	0.7	0.9
3.2	0.8	0.7	0.6	3.12	0.7	0.8	0.5	3.22	0.6	0.5	0.8
3.3	0.7	0.5	0.8	3.13	0.5	0.7	0.6	3.23	0.7	0.9	0.7
3.4	0.6	0.9	0.8	3.14	0.4	0.6	0.7	3.24	0.8	0.4	0.6
3.5	0.5	0.7	0.9	3.15	0.5	0.5	0.8	3.25	0.9	0.5	0.5
3.6	0.9	0.6	0.8	3.16	0.6	0.9	0.5	3.26	0.4	0.6	0.8
3.7	0.8	0.5	0.7	3.17	0.7	0.8	0.6	3.27	0.5	0.7	0.9
3.8	0.5	0.8	0.6	3.18	0.8	0.5	0.7	3.28	0.6	0.8	0.7
3.9	0.6	0.9	0.5	3.19	0.9	0.6	0.8	3.29	0.7	0.9	0.5
3.10	0.7	0.9	0.4	3.20	0.9	0.4	0.9	3.30	0.8	0.9	0.4

4. Үш фабрика дүкенге жіберетін өнімдер шығарады. Бірінші фабрикадан n_1, екіншіден - n_2, үшіншіден - n_3 ($\sum_{i}^{3} n_i = 1000$) өнім жеткізіледі. Сапасыз өнімдер шығару ықтималдығы бірінші фабрика үшін m_1%, екіншісі үшін - m_2%, үшіншісі үшін - m_3%:

а) дүкеннен алған өнім сапасыз болу ықтималдығын табу керек;

б) дүкеннен алған өнім сапасыз болып шықты. Ол өнімнің i – ші (i =1,2,3) фабрикадан болуының ықтимaлдығын табу керек.

№	n_1	n_2	m_1	m_2	m_3	i	№	n_1	n_2	m_1	m_2	m_3	i
4.1	520	220	5	8	7	1	4.16	100	250	7	8	5	1
4.2	270	410	10	5	9	2	4.17	430	180	5	4	7	2
4.3	250	140	8	7	4	2	4.18	170	540	6	5	8	3
4.4	190	380	5	9	30	1	4.19	650	120	10	9	8	2
4.5	290	610	6	3	3	2	4.20	400	180	7	10	5	1
4.6	270	430	10	6	4	2	4.21	120	380	10	6	9	2
4.7	280	360	7	10	9	1	4.22	270	340	9	5	4	3
4.8	520	110	5	7	10	1	4.23	430	120	10	7	6	2
4.9	240	290	9	8	4	3	4.24	360	120	5	10	8	1
4.10	310	410	7	2	5	3	4.25	420	210	8	7	6	1
4.11	520	110	3	6	7	2	4.26	370	130	10	6	5	2
4.12	280	310	9	8	4	2	4.27	410	200	5	10	8	3
4.13	400	320	4	5	8	1	4.28	280	510	10	6	5	3
4.14	350	240	9	8	7	1	4.29	710	120	2	10	4	3
4.15	190	520	5	2	4	3	4.30	460	240	5	9	7	1

5. n сынақ жүргізілді (a варианты үшін n=10; b варианты үшін n=100; c варианты үшін n=1000). Әрбір сынақта қандай да бір кездейсоқ оқиғаның пайда болу ықтималдығы p-ға тең. Осы оқиғаның:

а) дәл k_1 рет (A оқиғасы) (a, b және c варианттары үшін);

б) k_1-ден артық емес (B оқиғасы) (a және b варианттары үшін);

в) k_2 -ден кем емес (C оқиғасы) (a және b варианттары үшін);

г) ең болмағанда бір (D оқиғасы) (a варианты үшін);

д) k_1 -ден k_2-ге дейін (E оқиғасы) (b варианты үшін) пайда болуының ықтималдығын табу керек.

№		k_1	k_2	p	№		k_1	k_2	p	№		k_1	k_2	p
5.1	a	2	5	0.9	5.11	a	4	6	0.5	5.21	a	2	6	0.3
	b	80	90			b	75	95			b	40	60	
	c	9		0.004		c	7		0.002		c	8		0.005
5.2	a	3	7	0.8	5.12	a	5	8	0.6	5.22	a	3	7	0.2
	b	85	95			b	20	60			b	35	70	
	c	8		0.005		c	5		0.006		c	4		0.009
5.3	a	4	8	0.7	5.13	a	3	8	0.7	5.23	a	4	7	0.3
	b	70	95			b	30	85			b	50	80	
	c	7		0.003		c	9		0.004		c	8		0.005
5.4	a	3	5	0.6	5.14	a	2	4	0.8	5.24	a	5	7	0.4
	b	60	95			b	40	75			b	40	65	

	c	4		0.006		c	6		0.007		c	4		0.008
5.5	a	2	7	0.5	5.15	a	4	9	0.9	5.25	a	3	5	0.5
	b	50	90			b	80	95			b	45	75	
	c	5		0.007		c	8		0.005		c	7		0.004
5.6	a	4	6	0.4	5.16	a	3	9	0.8	5.26	a	2	4	0.6
	b	65	75			b	50	95			b	30	80	
	c	6		0.002		c	6		0.003		c	9		0.004
5.7	a	5	9	0.3	5.17	a	1	3	0.7	5.27	a	2	8	0.7
	b	55	80			b	65	85			b	40	90	
	c	7		0.005		c	4		0.006		c	5		0.007
5.8	a	4	7	0.2	5.18	a	2	6	0.6	5.28	a	1	4	0.8
	b	40	80			b	50	70			b	25	70	
	c	9		0.008		c	7		0.009		c	9		0.002
5.9	a	2	8	0.3	5.19	a	2	4	0.5	5.29	a	4	7	0.9
	b	65	80			b	55	75			b	35	90	
	c	8		0.004		c	8		0.006		c	6		0.007
5.10	a	3	6	0.4	5.20	a	3	5	0.4	5.30	a	4	6	0.9
	b	20	85			b	45	80			b	10	60	
	c	5		0.003		c		4	0.008		c	4		0.009

6. Дискретті кездейсоқ шама X үлестірім заңдылығымен берілген. Табу керек:

а) оның үлестірім функциясын $F(x)$, оның графигін салу керек;

б) математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын, модасын;

в) X –тің $(a;b)$ интервалына түсу ықтималдығын.

	X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a	b
	P	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6		
6.1	X	0	1	2	4	6	9	-2	7
	P	0.05	0.15	0.3	0.25	0.15	0.1		
6.2	X	-3	-2	-1	0	2	4	-1	3
	P	0.15	0.3	0.02	0.14	0.18	0.21		
6.3	X	1	2	3	5	7	8	-3	6
	P	0.3	0.14	0.16	0.1	0.2	0.1		
6.4	X	-4	-3	-2	0	1	2	0	1
	P	0.2	0.08	0.23	0.27	0.12	0.1		
6.5	X	1	2	4	5	7	9	3	8
	P	0.19	0.21	0.06	0.14	0.12	0.28		
6.6	X	-1	0	2	3	5	7	-4	4
	P	0.26	0.14	0.07	0.2	0.03	0.3		

6.7	*X*	-2	-1	0	3	5	7	1	6
	P	0.18	0.09	0.01	0.2	0.22	0.3		
6.8	*X*	1	2	4	5	6	8	0	6
	P	0.3	0.17	0.13	0.1	0.2	0.1		
6.9	*X*	1	2	3	4	7	9	5	8
	P	0.11	0.29	0.06	0.14	0.17	0.23		
6.10	*X*	0	1	2	3	7	9	4	8
	P	0.06	0.14	0.3	0.25	0.15	0.1		
6.11	*X*	-3	-2	0	1	2	4	-1	3
	P	0.15	0.3	0.01	0.14	0.19	0.21		
6.12	*X*	-1	0	3	5	7	8	1	6
	P	0.25	0.14	0.16	0.1	0.2	0.15		
6.13	*X*	-4	-3	-2	0	2	4	-1	3
	P	0.2	0.07	0.24	0.26	0.13	0.1		
6.14	*X*	-3	-1	0	3	4	7	-2	6
	P	0.12	0.09	0.01	0.2	0.28	0.3		
6.15	*X*	-1	0	1	3	7	8	2	6
	P	0.26	0.14	0.15	0.2	0.1	0.15		
6.16	*X*	-2	-1	0	1	2	7	-3	5
	P	0.17	0.09	0.01	0.3	0.23	0.2		
6.17	*X*	1	2	3	5	6	7	0	4
	P	0.1	0.14	0.16	0.1	0.2	0.3		
6.18	*X*	-3	-1	0	3	5	6	-2	4
	P	0.16	0.09	0.01	0.3	0.24	0.2		
6.19	*X*	1	2	5	6	7	8	3	6
	P	0.2	0.15	0.15	0.1	0.3	0.1		
6.20	*X*	-1	0	2	4	7	8	1	5
	P	0.23	0.18	0.12	0.2	0.1	0.17		
6.21	*X*	1	2	4	5	6	8	0	7
	P	0.3	0.14	0.16	0.03	0.2	0.17		
6.22	*X*	-4	-3	-1	0	1	3	-2	2
	P	0.2	0.03	0.24	0.26	0.17	0.1		
6.23	*X*	1	2	3	4	7	9	0	8
	P	0.17	0.23	0.09	0.11	0.12	0.28		
6.24	*X*	0	1	3	5	7	8	2	6
	P	0.2	0.14	0.16	0.12	0.3	0.08		
6.25	*X*	-5	-3	-2	0	1	3	-4	2
	P	0.2	0.06	0.21	0.29	0.14	0.1		
6.26	*X*	1	2	3	5	8	9	4	7
	P	0.18	0.22	0.05	0.15	0.12	0.28		
6.27	*X*	1	3	4	5	7	8	2	6
	P	0.3	0.16	0.14	0.01	0.2	0.19		
6.28	*X*	-5	-3	-1	0	1	3	-4	2

	P	0.1	0.03	0.14	0.36	0.17	0.2		
6.29	X	0	2	3	4	6	8	1	7
	P	0.26	0.14	0.05	0.15	0.12	0.28		
6.30	X	-1	0	2	3	7	8	1	6
	P	0.21	0.16	0.14	0.1	0.2	0.19		

7. Үзіліссіз кездейсоқ шама X үлестірім тығыздығы мен $f(x)$ берілген. Табу керек:

а) оның үлестірім функциясын $F(x)$;

б) математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын, модасын, медианасын;

в) X –тің $(a;b)$ интервалына түсу ықтималдығы табу керек.

$F(x)$ және $f(x)$ графиктерін салу керек.

№	$f(x)$	a	b	№	$f(x)$	a	b
7.1	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 4 \\ \frac{x}{8}, 0 < x \le 4 \end{cases}$	1	3	7.16	$\begin{cases} 0,\ x \le 0, x > 3 \\ \frac{2}{3}\left(1 - \frac{x}{3}\right),\ 0 < x \le 3 \end{cases}$	-1	2
7.2	$\begin{cases} 0, x \le -3, x > -2 \\ \frac{6}{x^2}, -3 < x \le -2 \end{cases}$	-2,5	0	7.17	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{\pi}{6} \\ 4\sin 2x, 0 < x \le \frac{\pi}{6} \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{12}$
7.3	$\begin{cases} 0, x \le -\frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2} \\ 0{,}5\cos x, -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{4}$	7.18	$\begin{cases} 0, x \le 1, x > 2 \\ \frac{2}{x^2}, 1 < x \le 2 \end{cases}$	0	1,5
7.4	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 1 \\ \frac{4}{\pi(1+x^2)}, 0 < x \le 1 \end{cases}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	7.19	$\begin{cases} 0,\ x \le 2, x > 3 \\ \frac{2x}{5},\ 2 < x \le 3 \end{cases}$	1	2,5
7.5	$\begin{cases} 0,\ x \le 0, x > \pi/2 \\ \cos x,\ 0 < x \le \pi/2 \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{6}$	7.20	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{6}{\pi(1+x^2)}, 0 < x \le \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$	0,1	1
7.6	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \pi \\ 0{,}5\sin x, 0 < x \le \pi \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{2}$	7.21	$\begin{cases} 0,\ x \le -1, x > 2 \\ \frac{1}{9}(x+1)^2,\ -1 < x \le 2 \end{cases}$	0	1
7.7	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 2 \\ \frac{x+2}{6}, 0 < x \le 2 \end{cases}$	1	2	7.22	$\begin{cases} 0, x \le 0, x \ge \frac{1}{2} \\ \frac{6}{\pi\sqrt{1-x^2}}, 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$	$\frac{1}{4}$	1
7.8	$\begin{cases} 0,\ x \le 4, x > 5 \\ \frac{2x}{9},\ 4 < x \le 5 \end{cases}$	3	4,5	7.23	$\begin{cases} 0, x \le 3, x > 5 \\ \frac{7{,}5}{x^2}, 3 < x \le 5 \end{cases}$	2	4

7.9	$\begin{cases} 0, x \le \frac{\pi}{2}, x > \frac{5\pi}{6} \\ -2\cos x, \frac{\pi}{2} < x \le \frac{5\pi}{6} \end{cases}$	0	$\frac{2\pi}{3}$	7.24	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{\pi}{6} \\ 6\sin 3x, 0 < x \le \frac{\pi}{6} \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{12}$
7.10	$\begin{cases} 0, x \le 1, x > 2 \\ 3(x-1)^2, 1 < x \le 2 \end{cases}$	1,5	2	7.25	$\begin{cases} 0, x \le 1, x > 2 \\ 2x-2, 1 < x \le 2 \end{cases}$	0	1,5
7.11	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{\pi}{4} \\ 2\cos 2x, 0 < x \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	7.26	$\begin{cases} 0, x \le -2, x > 2 \\ \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}, -2 < x \le 2 \end{cases}$	0	1
7.12	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 4 \\ \frac{1}{2}(1-\frac{x}{4}), 0 < x \le 4 \end{cases}$	1	3	7.27	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 5 \\ \frac{2}{5}(1-\frac{x}{5}), 0 < x \le 5 \end{cases}$	1	4
7.13	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 2 \\ \frac{x+1}{4}, 0 < x \le 2 \end{cases}$	-1	1	7.28	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{\pi}{6} \\ 3\cos 3x, 0 < x \le \frac{\pi}{6} \end{cases}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{9}$
7.14	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 1 \\ 3x^2, 0 < x \le 1 \end{cases}$	0,2	1,2	7.29	$\begin{cases} 0, x \le -3, x > 3 \\ \frac{1}{2\pi}\sqrt{9-x^2}, -3 < x \le 3 \end{cases}$	0	2
7.15	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{\pi}{3} \\ 2\sin x, 0 < x \le \frac{\pi}{3} \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{6}$	7.30	$\begin{cases} 0, x \le 1, x > 4 \\ \frac{2x}{15}, 1 < x \le 4 \end{cases}$	2	3

8. Биномдық үлестірім (*a* варианты). Пуассон үлестірімі (*b* варианты).

Өнім *N* элементтен тұрады. Қандай да бір уақыт аралығында бір элементтің істен шығу ықтималдығы *p*-ға тең және қалған элементтердің күйіне тәуелсіз. Істен шыққан элементтер санының үлестірім заңын құрастыру керек (*X* кездейсоқ шамасы). *a* варианты үшін осы кездейсоқ шаманың математикалық үмітін, дисперсиясын және орта квадраттық ауытқуын; *b* варианты үшін көрсетілген уақыт аралығында *m*-нен кем емес элементтердің істен шығу ықтималдығын табу керек.

№		*N*	*p*	m	№		*N*	*p*	m	№		*N*	*p*	m
8.1	*a*	3	0.1		8.11	*a*	4	0.15		8.21	*a*	3	0.11	
	b	2000	0.001	4		*b*	1500	0.005	6		*b*	1000	0.005	6
8.2	*a*	2	0.12		8.12	*a*	5	0.13		8.22	*a*	2	0.16	
	b	1000	0.007	5		*b*	4000	0.006	2		*b*	4500	0.003	2
8.3	*a*	4	0.2		8.13	*a*	3	0.14		8.23	*a*	4	0.29	
	b	3000	0.004	7		*b*	8000	0.001	2		*b*	2000	0.001	4
8.4	*a*	5	0.25		8.14	*a*	2	0.2		8.24	*a*	5	0.1	

	b	2000	0.002	5		*b*	6500	0.002	6		*b*	1000	0.007	5
8.5	*a*	3	0.3		8.15	*a*	4	0.27		8.25	*a*	3	0.17	
	b	1000	0.005	6		*b*	3000	0.005	2		*b*	3000	0.004	7
8.6	*a*	2	0.1		8.16	*a*	5	0.2		8.26	*a*	2	0.21	
	b	5000	0.001	2		*b*	1500	0.002	3		*b*	2000	0.002	5
8.7	*a*	4	0.15		8.17	*a*	3	0.19		8.27	*a*	4	0.22	
	b	2000	0.001	4		*b*	2000	0.001	4		*b*	1000	0.005	6
8.8	*a*	5	17		8.18	*a*	2	23		8.28	*a*	5	24	
	b	1000	0.008	5		*b*	1000	0.007	5		*b*	6500	0.007	8
8.9	*a*	3	12		8.19	*a*	4	11		8.29	*a*	3	18	
	b	3000	0.004	7		*b*	3500	0.002	1		*b*	7000	0.002	6
8.10	*a*	2	15		8.20	*a*	5	28		8.30	*a*	2	22	
	b	2000	0.003	2		*b*	2000	0.001	5		*b*	5500	0.004	9

9. Бірқалыпты үлестірім.

a варианты.

Өлшеу құралының бөлу бағасы k-ға тең. Өлшеу құралының көрсеткіші ең жақын бүтін бөлінуіне дейін жуықталады. X кездейсоқ шамасы – жуықтауда жіберілген қателігі.

b варианты.

Қандай да бір маршруттың автобустары тек кесте бойынша жүреді. Автобустың жүру интервалы k минут. X кездейсоқ шамасы –аялдамада автобусты күту уақыты. Табу керек:

а) үлестірім тығыздығын $f(x)$;

б) үлестірім функциясын $F(x)$;

в) математикалық үмітін, дисперсиясын;

г) есептеу кезінде m-нен кіші (артық) қате кету ықтималдығын (*a* варианты үшін).

д) аялдамаға келген жолаушы трамвайды m минуттен кем (артық) күту ықтималдығын (*b* варианты үшін).

$F(x)$ және $f(x)$ графиктерін салу керек.

№	*k*		*m*	№	*k*		*m*	№	*k*		*m*
9.1	*a*	0,2	0,04	9.11	*a*	0,3	0,08	9.21	*a*	0,9	0,02
	b	5	3		*b*	18	9		*b*	19	8
9.2	*a*	0,3	0,02	9.12	*a*	0,6	0,01	9.22	*a*	0,1	0,08
	b	10	4		*b*	24	8		*b*	20	5
9.3	*a*	0,1	0,06	9.13	*a*	0,9	0,06	9.23	*a*	0,7	0,01
	b	15	5		*b*	6	3		*b*	25	5
9.4	*a*	0,5	0,01	9.14	*a*	0,5	0,05	9.24	*a*	0,4	0,06
	b	6	2		*b*	12	6		*b*	9	3
9.5	*a*	0,6	0,05	9.15	*a*	0,8	0,07	9.25	*a*	0,5	0,07
	b	20	10		*b*	16	8		*b*	14	7

9.6	a	0,9	0,02	9.16	a	0,2	0,04	9.26	a	0,3	0,08
	b	19	8		b	5	3		b	18	9
9.7	a	0,1	0,08	9.17	a	0,3	0,02	9.27	a	0,6	0,01
	b	20	5		b	10	4		b	24	8
9.8	a	0,7	0,01	9.18	a	0,1	0,06	9.28	a	0,9	0,06
	b	25	5		b	15	5		b	6	3
9.9	a	0,4	0,06	9.19	a	0,5	0,01	9.29	a	0,5	0,05
	b	9	3		b	6	2		b	12	6
9.10	a	0,5	0,07	9.20	a	0,6	0,05	9.30	a	0,8	0,07
	b	14	7		b	20	10		b	16	8

10. Көрсеткіштік үлестірім. T кездейсоқ шамасы - элементтің үздіксіз жұмыс жасау уақыты, λ - істен шығу жиілігі, яғни бірлік уақыт аралығында элементтің істен шығуының орта саны. Табу керек:

а) $f(t)$ үлестірім тығыздығын;

б) $F(t)$ үлестірім функциясын, оның ықтималдық мағынасын көрсету керек;

в) сенімділік функциясын $R(t)$, оның ықтималдық мағынасын көрсету керек;

г) математикалық үмітін, дисперсиясын;

д) t уақыт аралығында элементтің істен шығуы ықтималдығын (A оқиғасы) және t уақыт аралығында элементтің істен шықпау ықтималдығын (B оқиғасы).

$F(t)$, $R(t)$ және $f(t)$ графиктерін салу керек.

№	λ	t	№	λ	t	№	λ	t
10.1	1	5	10.11	2	5	10.21	3	8
10.2	2	10	10.12	3	10	10.22	4	4
10.3	3	6	10.13	4	6	10.23	6	3
10.4	4	8	10.14	6	8	10.24	7	2
10.5	6	4	10.15	7	4	10.25	8	1
10.6	7	3	10.16	8	3	10.26	9	10
10.7	8	2	10.17	9	2	10.27	10	6
10.8	9	1	10.18	10	1	10.28	1	7
10.9	10	7	10.19	1	10	10.29	2	8
10.10	1	9	10.20	2	6	10.30	3	2

11. Қалыпты үлестірім заңы. Қандай да бір затты өлшеу жүргізілуде. Өлшеудің кездейсоқ қателері (X кездейсоқ шамасы) a және σ параметрлі қалыпты үлестірім заңына бағынады. Табу керек:

а) $f(x)$ үлестірім тығыздығын;

б) $F(x)$ үлестірім функциясын;

в) математикалық үмітін, дисперсиясын;

г) $(\alpha;\beta)$ аралығына түсу ықтималдығын;

д) өлшеу абсолют шамасы бойынша δ-дан аспайтындай қате жіберу ықтималдығын.

$F(t)$ және $f(t)$ графиктерін салу керек.

№	a	σ	α	β	δ	№	a	σ	α	β	δ
11.1	10	1	8	14	2	11.16	10	2	9	14	2
11.2	12	2	7	14	3	11.17	12	4	5	14	3
11.3	14	3	10	15	5	11.18	14	1	9	15	5
11.4	11	5	9	12	3	11.19	11	6	8	12	3
11.5	13	2	6	13	2	11.20	13	4	6	17	2
11.6	12	3	7	15	4	11.21	12	9	8	15	4
11.7	10	2	8	17	2	11.22	10	3	6	17	2
11.8	12	4	6	14	6	11.23	12	5	6	13	6
11.9	14	6	11	19	5	11.24	14	2	12	19	5
11.10	15	5	8	12	3	11.25	15	3	4	12	3
11.11	17	4	6	14	2	11.26	17	1	5	14	2
11.12	12	5	7	18	4	11.27	12	4	9	18	4
11.13	18	5	6	12	3	11.28	11	3	4	12	3
11.14	10	4	6	15	2	11.29	17	2	5	19	5
11.15	12	3	5	18	4	11.30	13	5	6	18	3

1.3 Типтік варианттың шешуі

1. $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ сандар жиыны берілген. Анықтау керек:

а) осы жиынның цифрларының ішінен қанша әртүрлі үштаңбалы сандарды құруға болады, әр санда цифрлар қайталанбау керек;

б) осы жиынның цифрларының ішінен қанша әртүрлі жеті таңбалы сандарды құруға болады, әр санда цифрлар қайталанбау керек;

в) осы жиынның элементтерінен әртүрлі цифрлардан тұратын қанша үш элементті ішкі жиын құруға болады.

Шешуі: бұл есепті шығару үшін комбинаториканың кейбір ұғымдарын қолданады. Комбинаторика – бұл математиканың бөлімі. Бұл бөлімде ақырлы жиын элементтерін таңдау мен олардың орналасуының есептерін шешіледі.

Сонымен қатар осындай таңдаудың немесе берілген жиынның ішкі жиындарының санын есептеулер қарастырылады.

Қарапайым мысалдар ретінде орналасуды, орын ауыстыруды, теруді алуға болады.

A - n элементтен тұратын ақырлы жиын болсын:

а) A жиынының n элементін m бойынша орналасуы деп A жиынының m әртүрлі элементтерінен тұратын реттелген ішкі жиыны айтылады (кортеж, реттелген таңдама). Осындай орналасу саны A_n^m деп белгіленіп, мына формуламен есептелінеді:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)...(n-m+1);$$

б) A жиынының орын ауыстыруы деп осы элементтердің реттелген жиыны айтылады. Сонымен, орын ауыстыру A жиынының элементтерінен тұрады және осы элементтер бір бірінен орналасу ретімен ғана ерекшеленеді. n элементті орын ауыстыру саны P_n деп белгіледі және мына формуламен есептелінеді:

$$P_n = n!;$$

в) A жиынының n элементтерінен m бойынша теруі деп A жиынының реттелмеген әртүрлі m элементінен тұратын ішкі жиындары айтылады. Белгіленуі C_n^m және $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3...m}$ формуласы бойынша есептелінеді.

Есебімізге қайта оралайық:

а) бірдей цифрлардан құралған, бірақ әртүрлі ретпен орналасқан сандар әртүрлі болғандықтан, әрбір үш таңбалы сан берілген жиынның 7 цифрден 3 бойынша орналасу болып табылады. Сондықтан осындай орналасу саны немесе саны мына формуламен есептелінеді:

$$A_7^3 = \left|7-3+1=5\right| = 7\cdot 6\cdot 5 = 210;$$

б) әртүрлі жеті таңбалы сандарда берілген жиынның барлық элементтері кездесу керек, яғни цифрлар қайталанбауы тиіс. Сонымен, әрбір жеті таңбалысан – бұл осы жиынның жеті элементінің ауыстыруы, ал осындай ауыстырулар саны немесе саны $P_7 = 7!$ тең;

в) берілген жиынның үш таңбалы ішкі жиындары әртүрлі үш элементінен құралады, элементтердің орналасу реті маңызды емес. Сондықтан бұл ішкі жиындар теру болады. Олардың саны мына формуламен есептелінеді:

$$C_7^3 = \frac{A_7^3}{P_3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35.$$

2. Жәшікте үш түсті шарлар бар: 40 ақ түсті шарлар, 50 - көк, 30 - қызыл (барлығы 120 шар). Табу керек:

а) ақ түсті шарлардың қатысты жиілігін;

б) таңдап алған 20 шардың барлығы ақ түсті болу ықтималдығын;

в) таңдап алған 20 шардың арасында 9 ақ түсті болу ықтималдығын;

г) таңдап алған 20 шардың арасында 9 ақ, 6 көк, 5 қызыл түсті болу ықтималдығын;

д) таңдап алған 20 шардың арасында ең болмағанда біреуі ақ түсті болу ықтималдығын.

Шешуі:

а) A оқиғасының қатысты жиілігі деп (белгіленуі $P^*(A)$) A оқиғасы пайда болған сынақ санының m барлық сынақтың жалпы санына n қатынасы айтылады: $P^*(A) = m/ n$.

A – ақ шарды таңдау оқиғасы болсын, сонда $\mathrm{P}^*(A)$ = 40/ 120=1/3.

Қалған пункттерде A оқиғасының ықтималдығының классикалық анықтамасын қолданамыз:

$$P(A) = m / n,$$

мұндағы m – A оқиғасының пайда болуына қолайлы сынақтар саны,

n – сынақтардың жалпы саны;

б) A – таңдап алған 20 шардың барлығы да ақ түсті болу оқиғасы болсын. Элементар оқиғалардың жалпы саны 120 шардың ішінен 20 шарды таңдап алудың әртүрлі жолдар саны, яғни n = C_{120}^{20}; қолайлы оқиғалар саны 40 шардың ішінен ақ түсті 20 шар алудың әртүрлі жолдар санына тең, яғни m = C_{40}^{20}. Сонымен,

$$P(A) = m / n = C_{40}^{20} / C_{120}^{20} = 4{,}679 \times 10^{-12};$$

в) A – кез келген ретпен алынған 20 шардың тоғызы ақ түсті болу оқиғасы болсын. Жоғарыда айтылғандай, $n = C_{120}^{20}$.

A элементар оқиғасының m қолайлы сынақтар санын комбинаториканың ережелерінің бірін қолдану арқылы табамыз: n элементті жиында s ішкі жиын бар болсын. Ішкі жиындар сәйкес $n_1, n_2, ..., n_s$ элементтерден тұрады ($\sum_{1}^{s} n_i = n$). Осы жиыннан таңдау жүргізілсін делік: n_1 -ден m_1 элемент, n_2 -ден m_2 элемент,…, n_s -тен m_s элемент таңдап алынсын. Онда N жалпы саны $m_1, m_2, ..., m_s$ элементтерден тұратын s группасын құру әдістер саны болады $N = C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \ldots C_{n_s}^{m_s}$, бұл жағдайда элементтердің реті ескерілмеген.

Сонымен бұл пунктте $m = C_{40}^{9} \cdot C_{80}^{11}$, мұндағы C_{40}^{9} теруі ақ түсті 40 шардың ішінен ақ түсті 9 шарды таңдап алу санын береді, ал C_{80}^{11} теруі ақ түсті емес 80 қалған шардың ішінен ақ түсті емес 11 шарды таңдап алу санын береді, яғни $m = C_{40}^{9} \cdot C_{80}^{11}$. Сонымен:

$$P(A) = m / n = C_{40}^{9} \cdot C_{80}^{11} / C_{120}^{20} = 0{,}097;$$

г) A - кез келген ретпен алынған 20 шардың тоғызы ақ түсті, алтауы көк түсті, бесеуі қызыл түсті болу оқиғасы болсын. Бұл есепті шешу үшін A оқиғасының ықтималдығының классикалық анықтамасын қолданамыз:
$P(A) = m/ n$, мұндағы n қолда бар 120 шардың арасынан 20 шарды таңдап алудың мүмкін әдістерінің саны, яғни $n = C_{120}^{20}$. A оқиғасының пайда болуына

қолайлы элементар оқиғалар саны жоғарыда келтірілген комбинаторика ережесі бойынша табылады, яғни $m = C_{40}^{9} \cdot C_{50}^{4} \cdot C_{30}^{5}$. Сондықтан:

$$P(A) = m/n = 0{,}021;$$

д) A - сатып алынған 20 шардың ішінде ең болмағанда біреуі ақ түсті болу оқиғасы болсын, онда оған қарама-қарсы $\bar{A}$ - сатып алынған 20 шардың ішінде ешқайсысы ақ түсті болмау оқиғасы. б пунктіндегі сияқты бұл оқиғаның ықтималдығын келесі формуламен табамыз $P(\bar{A}) = m/n = C_{80}^{20} / C_{120}^{20} = 1{,}2 \times 10^{-4}$. Онда A оқиғасының ықтималдығы $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 1{,}2 \times 10^{-4} \approx 1$, яғни бұл оқиға ақиқат оқиғаға жуық оқиға.

Теру санын есептегенде Mathcad-та combin функциясы қолданылды. Төменде combin(Q,R) қолданушының C(Q,R) функциясы ретінде енгізілген файлдың көшірмесі келтірілген, ол Q мен R-дің кез келген мәндерінде

$C(Q,R) := \mathrm{combin}(Q,R)$, $C(120,20) = 2.946 \times 10^{22}$,

$C(40,9) = 2.734 \times 10^{8}$, $C(80,11) = 1.048 \times 10^{13}$,

$C(40,20) = 1.378 \times 10^{11}$,

$$\frac{C(40,9) \cdot C(80,11)}{C(120,20)} = 0.097, \qquad \frac{C(80,20)}{C(120,20)} = 1.2 \times 10^{-4},$$

$$\frac{C(40,9) \cdot C(50,6) \cdot C(30,5)}{C(120,20)} = 0.021$$

3. Қондырғы үш тәуелсіз жұмыс істейтін элементтерден тұрады. Қандай да бір уақыт ішінде бірінші, екінші, үшінші элементтердің мүлтіксіз жұмыс істеу ықтималдықтары сәйкес 0,75, 0,8, 0,9. Осы уақыт аралығында:

а) үш элемент те мүлтіксіз жұмыс істеу (A оқиғасы);

б) мүлтіксіз тек бір элемент жұмыс істеу(B оқиғасы);

в) екі элемент мүлтіксіз жұмыс істеп, біреуі істен шығу (C оқиғасы);

г) ең болмағанда біреуі мүлтіксіз жұмыс істеу (D оқиғасы) ықтималдығын табу керек.

Шешуі: A_1 – бірінші, A_2 – екінші, A_3 – үшінші элементтің мүлтіксіз жұмыс істеу оқиғасы болсын. Шарт бойынша $P(A_1)$=0,75, $P(A_2)$=9,8, $P(A_3)$=0,9:

а) A – үш элемент те мүлтіксіз жұмыс істеу оқиғасы болғандықтан, $A = A_1 A_2 A_3$ және A_1, A_2, A_3 тәуелсіз оқиғалар болғандықтан, $P(A) = P(A_1 A_2 A_3) =$ $= P(A_1) P(A_2) P(A_3) = = 0{,}75 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}54$;

б) B - мүлтіксіз тек бір элемент жұмыс істеу оқиғасы, сондықтан $B = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$, мұндағы $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ оқиғалары - A_1, A_2, A_3

оқиғаларына қарама-қарсы оқиғалар, яғни сәйкес бірінші, екінші, үшінші элементтің істен шығуы.

$$P(\overline{A}_1)=1-P(A_1)=1-0{,}75=0{,}25,$$
$$P(\overline{A}_2)=1-P(A_2)=1-0{,}8=0{,}2,$$
$$P(\overline{A}_3)=1-P(A_3)\ =1-0{,}9=0{,}1$$

болғандықтан және оқиғалар тәуелсіз болғандықтан,

$$P(B)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=$$
$$=0{,}75\cdot0{,}2\cdot0{,}1+0{,}25\cdot0{,}8\cdot0{,}1+0{,}25\cdot0{,}2\cdot0{,}9=0{,}08;$$

в) C - мүлтіксіз екі элементтің жұмыс істеу оқиғасы, бір элементтің істен шығуы алдыңғы пунктте көрсетілгендей анықталады, яғни $C=A_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1\overline{A}_2A_3$.

Оның ықтималдығы: $P(C)=\ 0{,}75\cdot0{,}8\cdot0{,}1+0{,}25\cdot0{,}8\cdot0{,}9+0{,}75\cdot0{,}2\cdot0{,}9=$ =0,3456;

г) D - ең болмағанда біреуі мүлтіксіз жұмыс істеу оқиғасы. Қарама-қарсы оқиғаны қарастырамыз: $\overline{D}$- барлық үш элемент істен шығады. $\overline{D}=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ болғандықтан, $P(D)=1-P(\overline{D})\ =1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=1-0{,}25\cdot0{,}2\cdot0{,}1=0{,}995$.

4. Үш фабрика дүкенге жіберетін өнімдер шығарады. Бірінші фабрикадан 100, екіншіден -300, үшіншіден - 1000-100-300 = 600 өнім жеткізіледі. Сапасыз өнімдер шығару ықтималдығы бірінші фабрика үшін 5%, екіншісі үшін - 4%, үшіншісі үшін - 6%:

а) дүкеннен алған өнім сапасыз болу ықтималдығын табу керек;

б) дүкеннен алған өнім сапасыз болып шықты. Ол өнімнің екінші (i =1,2,3) фабрикадан болуының ықтималдығын табу керек.

Шешуі: A –дүкеннен алған өнім сапасыз болу оқиғасы; $B_1,\ B_2,\ B_3$ - дүкеннен алған өнімнің бірінші, екінші, үшінші фабрикадан болу оқиғалары болсын (бұл оқиғалар гипотезалар):

а) A оқиғасының ықтималдығы толық ықтималдықтар формуласымен табылады: $P(A)\ =\ P(B_1)P(A/\ B_1)+P(B_2)P(A/\ B_2)+P(B_3)P(A/\ B_3)$, мұндағы $P(A/\ B_i)$ – алынған өнімнің i – ші (i =1,2,3) фабрикадан болуының шартты ықтималдығы.

Шарт бойынша: $P(B_1)$ = 100/1000 = 0,1; $P(B_2)$ = 300/1000 = 0,3; $P(B_3)$ = 600/1000 = 0,6; $P(A/B_1)$=0,05; $P(A/B_2)$=0,04; $P(A/B_3)$=0,06.

Сондықтан $P(A)=\ 0.1\cdot0.05+0{,}3\cdot0{,}04+0{,}6\cdot0{,}06=0{,}053$;

б) бұл пунктте $P(B_2/A)$ шартты ықтималдықты табу керек. Ол үшін Байес формуласын қолданамыз:

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P(A/B_k)},\ i=1,2,\ldots,n.$$

Біздің жағыдайда:

$$P(B_2/A)=\frac{P(B_2)P(A/B_2)}{\sum_{k=1}^{3}P(B_k)P(A/B_k)} = \frac{0{,}3\cdot 0{,}04}{0{,}053}=0{,}226.$$

5. n сынақ жүргізілді (a варианты үшін n=10; b варианты үшін n=100; c варианты үшін n=1000). Әрбір сынақта қандай да бір кездейсоқ оқиғаның пайда болу ықтималдығы p-ға тең. Осы оқиғаның:

а) дәл k_1 рет (A оқиғасы) (a, b және c варианттары үшін);

б) k_1-ден артық емес (B оқиғасы) (a и b варианттары үшін);

в) k_2 -ден кем емес (C оқиғасы) (a и b варианттары үшін);

г) ең болмағанда бір (D оқиғасы) (a варианты үшін);

д) k_1 -ден k_2-ге дейін (E оқиғасы) (b варианты үшін) пайда болуының ықтималдығын табу керек.

Шешуі: бұл есепте қандай да бір оқиғаның n тәуелсіз оқиғалар арасынын k рет пайда болу ықтималдығын табу керек, ол $P_n(k)$ деп белгіленеді. Есептің шартына байланысты оның шешімін әртүрлі жолмен қарастырады:

1) n =10, k_1=9, k_2=2 болсын. Бұл жерде n үлкен емес, сондықтан A оқиғасының ықтималдығын анықтау үшін Бернулли формуласын қолданамыз:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},$$

мұндағы $q=1-p$, $(k=0,1,2,..n)$.

B және C оқиғаларының ықтималдығы ықтималдықтардың қосындысы ретінде анықталады: $P_n(k)+P_n(k+1)+\ldots+P_n(n)$ – бұл n тәуелсіз оқиғалар арасынын k реттен кем емес пайда болу оқиғаларының ықтималдығы, яғни немесе k рет, немесе $k+1$ рет,…, немесе n рет; $P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(k)$– бұл n тәуелсіз оқиғалар арасынын k реттен артық емес пайда болу оқиғаларының ықтималдығы, яғни немесе 0 рет, немесе 1 рет, немесе 2 рет,…, немесе k рет. Бұл оқиғалар кумулятивті (жинақталған) деп аталады. Сонымен:

а) $P(A)=P_{10}(2)=C_{10}^2 0{,}8^2 0{,}2^8=0{,}000074$;

б) $P(B)=P_{10}(0)+P_{10}(1)+P_{10}(2)=0{,}000078$;

в) $P(C)=P_{10}(9)+P_{10}(10)=0{,}376$;

г) D оқиғасына қарама қарсы $\overline{D}$ оқиғасын енгіземіз. $\overline{D}$ оқиғасы – бұл 10 тәуелсіз сыныктарда берілген оқиғасының мүлдем пайда болмауы. Онда $P(D)=1-P(\overline{D})=1-P_{10}(0)\approx 1$;

Төменде Mathcad-тан есептеулермен файлдың көшірмесі келтірілген.

$C(Q,R) := \mathrm{combin}(Q,R)$,

$C(10,2)\cdot 0.8^2\cdot 0.2^8 = 7.373\times 10^{-5}$

$C(10,9)\cdot 0.8^9\cdot 0.2^1 + C(10,10)\cdot 0.8^{10}\cdot 0.2^0 = 0.376$

$$C(10,0)\cdot 0.8^{0}\cdot 0.2^{10} + C(10,1)\cdot 0.8^{1}\cdot 0.2^{9} + C(10,2)\cdot 0.8^{2}\cdot 0.2^{8} = 7.793\times 10^{-5}$$

$$1 - C(10,0)\cdot 0.8^{0}\cdot 0.2^{10} = 1$$

b) n =100, k_1=70, k_2=80 болсын. Тәуелсіз тәжірибелер саны n үлкен болғандықтан, қандай да бір оқиғаның n тәжірибеде k рет пайда болу ықтималдығы $P_n(k)$ Муавр-Лаплас аймақтық теоремасымен есептелінеді және жуық шамамен $P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$ тең, мұндағы $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $0 < p < 1$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2)$ (осы функцияның мәнін кестеден немесе Mathcad жүйесіндегі dnorm функциясы арқылы табады).

B, *C* және *D* оқиғаларының ықтималдығын анықтау үшін Муавр-Лаплас интегралдық теоремасын қолданады: қандай да бір оқиғаның пайда болу k саны k_1-ден k_2-ге дейінгі аралығында болу ықтималдығы $P_n(k_1,k_2)$ жуық шамамен $P_n(k_1,k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ тең, мұндағы $x_2 = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \exp(-t^2/2)dt$ - Лаплас функциясы, оның мәні арнайы кестеден немесе Mathcad жүйесіндегі pnorm функциясы арқылы:

а) $P(A)$= $P_{100}(80) \cong \frac{1}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}}\varphi(2,5) = 0,018/4 = 0,0045$;

$x = \frac{70-100\cdot 0,8}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}}$=-2,5;

б) $P(B)$= $P_{100}(k \le 70) = P_{100}(0,70) \approx \Phi(x_1) - \Phi(x_4) = 0,006$; $x_1 = -2,5$, $x_4 = -20$;

в) $P(C)$= $P_{100}(k \ge 80) = P_{100}(80,100) \approx \Phi(x_3) - \Phi(x_2) = 0,5$; $x_3 = 5$;

д) $P(E)$= $P_{100}(70,80) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0,494$, $x_2 = 0$.

Mathcad жүйесіндегі есептелінген есептеулердің көшірме файлы көрсетілген.

$n := 100$, $k1 := 70$, $k2 := 80$,

$p := 0.8$, $q := 1 - p$,

$x1 := \frac{k1 - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}$, $x2 := \frac{k2 - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}$, $x3 := \frac{n - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}$, $x4 := \frac{0 - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}$,

$x1 = -2.5$, $x2 = 0$, x3=5, x4 = -20

$\text{pnorm}(x2,0,1) - \text{pnorm}(x1,0,1) = 0.494$, $\text{dnorm}(x1,0,1) = 0.018$

$\text{pnorm}(x3,0,1) - \text{pnorm}(x2,0,1) = 0.5$,

$\mathrm{pnorm}(x1,0,1) - \mathrm{pnorm}(x4,0,1) = 6.21 \times 10^{-3}$,

или другой вариант

$\Phi(x) := \mathrm{pnorm}(x,0,1) - 0.5$,

$P(k1,k2) := \Phi(x2) - \Phi(x1)$.

$\Phi(x1) = -0.494$, $\Phi(x2) = 0$,

$P(k1,k2) = 0.494$,

$\Phi(x3) = 0.5$, $\Phi(x4) = -0.5$,

$\Phi(x3) - \Phi(x2) = 0.5$, $\Phi(x1) - \Phi(x4) = 6.21 \times 10^{-3}$.

с) *n*=1000, *n* үлкен шама, *p* кіші шама, ал олардың көбейтіндісі $\lambda = n \cdot p$ - үлкен емес сан болғандықтан, қандай да бір оқиғаның n тәуелсіз сынақта k рет пайда болу ықтималдығын $P_n(k)$ анықтау үшін Бернулли формуласының орнына Пуассон формуласын қолданады:

$$P_n(k) \approx \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k!.$$

Біздің есеп үшін n=1000, k=6, p=0,003, $\lambda = 1000 \cdot 0{,}003 = 3$, олай болса $P_{1000}(6) = 3^6 \cdot e^{-3} / 6!$=0,05.

Есептеулер кезінде $p(k,\lambda) = \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k!$ функциясының кестелік мәнін немесе Mathcad-тан dpois функциясын қолдануға болады. Төменде Mathcad-тан есетеулермен файлдың көшірмесі келтірілген.

$p(k,\lambda) := \mathrm{dpois}(k,\lambda)$,

$p(6,3) = 0.05$.

6. Дискретті кездейсоқ шама X үлестірім заңдылығымен берілген.

X	0	10	20	30	40	50
P	0,05	0,15	0,3	0,25	0,2	0,05

Табу керек:

а) оның үлестірім функциясын $F(x)$, $F(x)$ графигін салу керек;

б) математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын, модасын;

в) X–тің (15;45) интервалына түсу ықтималдығын.

Шешуі:

а) X кездейсоқ шамасының $F(x)$ үлестірім функциясы (интегралдық үлестірім функциясы) X<x оқиғасының ықтималдығын анықтайды. Дискретті кездейсоқ шамасы мына формуласымен есептелінеді:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

мұндағы $x_i < x$ үшін қосу барлық i бойынша жүргізіледі.

Сонымен:

1) Егер $x \le 0$, онда $F(x) = P(X < 0) = 0$.

2) Егер $0 < x \le 10$, онда $F(x) = P(X = 0) = 0{,}05$.

3) Егер $10 < x \le 20$, онда $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) = 0{,}05 + 0{,}15 = 0{,}2$.

4) Егер $20 < x \le 30$, онда $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) =$ $= 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$.

5) Егер $30 < x \le 40$, онда $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30) =$ $= 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75$.

6) Егер $40 < x \le 50$, онда $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30) +$ $+ P(X = 40) = 0{,}75 + 0{,}2 = 0{,}95$.

7) Егер $x > 50$, онда $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30) +$ $+ P(X = 40) + P(X = 50) = 0{,}95 + 0{,}05 = 1$.

Сондықтан, $F(x) = \begin{cases} 0, \ \textit{егер}\ x \le 0 \\ 0{,}05, \ \textit{егер}\ 0 < x \le 10 \\ 0{,}2, \ \textit{егер}\ 10 < x \le 20 \\ 0{,}5, \ \textit{егер}\ 20 < x \le 30 \\ 0{,}75, \ \textit{егер}\ 30 < x \le 40 \\ 0{,}95, \ \textit{егер}\ 40 < x \le 50 \\ 1, \ \textit{егер}\ x > 50 \end{cases}$;

График Mathcad жүйесінде сызылған (төменде);

б) сандық сипаттамаларын табайық. Дискретті кездейсоқ шама үшін математикалық үміт кездейсоқ шаманың барлық мүмкін мәндерін оның ықтималдықтарына көбейтіп қосқанға тең: $M(X) = \sum_i x_i p_i$. Сондықтан:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}15 + 10 \cdot 0{,}15 + 20 \cdot 0{,}3 + 30 \cdot 0{,}25 + 40 \cdot 0{,}2 + 50 \cdot 0{,}05 = 25{,}5.$$

X кездейсоқ шаманың дисперсиясы $D(X) = M[X - M(X)]^2$ формуласымен немесе $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ формуласымен есептелінеді. Дискретті кездейсоқ шама үшін бұл формулалар мына түрде қолданылады:

$$D(X) = \sum_i (x_i - M(X))^2 \cdot p_i \text{ немесе } D(X) = \sum_i x_i^{\,2} p_i - (\sum_i x_i p_i)^2 .$$

Орта квадраттық ауытқу $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$ санына тең; дискретті кездейсоқ шаманың модасы (белгіленуі M_0) – осы кездейсоқ шаманың ең үлкен ықтималдықты қабылдайтын мәні; X –тің (a;b) интервалына түсу ықтималдығы $P(a;b) = F(b) - F(a)$ формуласымен есептелінеді. Біздің есеп үшін бұл шамалар:

$$D(x)=154{,}75;\ \sigma(x) = \sqrt{154{,}75} = 12{,}44;\ \ M_0=20;$$
$$P(15;45) = F(45) - F(15)=0{,}75.$$

Төменде Mathcad-тан есептеулермен файлдың көшірмесі келтірілген, дисперсия екі формуламен де есептелінген.

$$\text{ORIGIN} = 1 \qquad s := (0\ \ 10\ \ 20\ \ 30\ \ 40\ \ 50)_,$$

$$M := s^T \cdot p^T{}_, \qquad p := (0.05\ \ 0.15\ \ 0.3\ \ 0.25\ \ 0.2\ \ 0.05)_,$$

$$M = 25.5\ ,$$

$$s0 := s^T - M_,$$

$$D := \left[\overrightarrow{(s0 \cdot s0)}\right]^T \cdot p^T{}_,$$

$$s0 = \begin{pmatrix} -25.5 \\ -15.5 \\ -5.5 \\ 4.5 \\ 14.5 \\ 24.5 \end{pmatrix},$$

$$D = 154.75\ ,$$

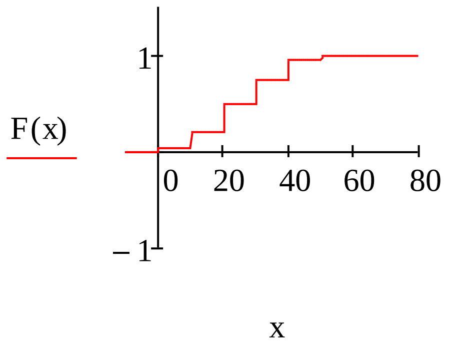
$$s2 := \left(0^2\ \ 10^2\ \ 20^2\ \ 30^2\ \ 40^2\ \ 50^2\right)_,$$

$$D1 := s2^T \cdot p^T - M^2{}_,$$

$$D1 = 154.75\ ,$$

$$\sigma := \sqrt{D} = 12.44\ ,$$

$$F(x) := \begin{vmatrix} 0 \ \text{ if } \ x \le 0 \\ 0.05 \ \text{ if } \ 0 < x \le 10 \\ 0.2 \ \text{ if } \ 10 < x \le 20 \\ 0.5 \ \text{ if } \ 20 < x \le 30 \\ 0.75 \ \text{ if } \ 30 < x \le 40 \\ 0.95 \ \text{ if } \ 40 < x \le 50 \\ 1 \ \text{ if } \ x > 50 \end{vmatrix},$$



$$F(45) - F(15) = 0.75\ .$$

7. Үзіліссіз кездейсоқ шама X үлестірім тығыздығы мен $f(x)=\begin{cases} 0, \; егер \; x \le 0 \\ \frac{2}{9}(3x-x^2), \; егер \;\; 0 < x \le 3 \\ 0, \; егер \;\; x > 3 \end{cases}$ берілген. Табу керек:

а) оның үлестірім функциясын $F(x)$;

б) математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын, модасын, медианасын;

в) X–тің $(a;b)$ интервалына түсу ықтималдығы табу керек.

$F(x)$ және $f(x)$ графиктерін салу керек.

Шешуі:

а) үлестірім функциясын келесі формула бойынша табамыз $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Сонымен:

- егер $x \le 0$, онда $f(x)=0$, Сондықтан $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx = 0$;

- егер $0 < x \le 3$, онда $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{x} \frac{2}{9}(3x-x^2)dx =$ - $\frac{x^2(2x-9)}{27}$;

- егер $x > 3$, онда $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{3} \frac{2}{9}(3x-x^2)dx + \int\limits_{3}^{x} 0\,dx = 1.$

Сонымен, ізделінді үлестірім функциясы

$$F(x)=\begin{cases} 0, \; егер \; x \le 0 \\ -\frac{x^2(2x-9)}{27}, \; егер \; 0 < x \le 3 \\ 1, \; егер \; x > 3 \end{cases};$$

б) үзіліссіз кездейсоқ шаманың сандық сипаттамалары мына формулалармен табылады:

- математикалық үміт:

$$M(x)=\int\limits_{-\infty(a)}^{\infty(b)} xf(x)dx;$$

-дисперсия:

$$D(x)=\int\limits_{-\infty(a)}^{\infty(b)} (x-M(x))^2 f(x)dx \qquad \text{немесе} \qquad D(x)=\int\limits_{-\infty(a)}^{\infty(b)} x^2 f(x)dx - \left[M(x)\right]^2$$

(интегралдау шектері кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері Ox осінің барлық немесе $(a;b)$ интервалының мәндерін қабылдауына байланысты);

- орта квадраттық ауытқуы:

$$\sigma(x)=\sqrt{D(x)};$$

X кездейсоқ шаманың модасы деп үлестірім тығыздығы максималды болатын M_o мәні айтылады;

X кездейсоқ шаманың медианасы деп кездейсоқ шама M_e-ден кем немесе артық болғанда ықтималдығы бірдей болатын M_e мәні айтылады, яғни $P(X < M_e) = P(X > M_e) = 0{,}5$.

Сонымен, біздің есепте $M(x) = \int_0^3 2/9x(3x - x^2)dx$=1,5;

$D(x) = \int_0^3 x^2 \cdot 2/9(3x - x^2)dx - 1{,}5^2$ = 0,45;

$\sigma(X) = \sqrt{0{,}45}$ = 0,671.

Моданы анықтау үшін $f(x) = 2/9(3x - x^2)$ функциясының [0;3] кесіндісіндегі максимумын табу керек. Ол үшін функцияның туындысын тауып, нөлге теңестіреміз: $f'(x) = 2/3 - 4x/9$, x=3/2 болғанда $f'(x) = 0$, бұл кризистік нүкте. Функцияны экстремумге тексереміз: $f'(1) > 0,\ f'(2) < 0$. Сонымен, x=3/2 нүктесінен ауысқанда функцияның туындысы таңбасын плюстен минуске өзгертті. Олай болса x=3/2 - максимум нүктесі, сондықтан M_o = 3/2.

Айта кетелік, егер $f(x)$ сызықты функция болса, онда оның экстремумдары [*a;b*] кесіндісінің шеткі нүктелерінде орналасқан, ал оның максимумын $f(x)$ графигінен тапқан жеңілірек.

Медиананы келесі шарттан табамыз:

$$P(X < M_e) = 0{,}5,$$

мұндағы $P(X < M_e) = P(-\infty < X < M_e) = P(0 < X < M_e)$.

$P(0 < X < M_e) = \int_0^{M_e} 2/9(3x - x^2)dx$=-${M_e}^2(2M_e - 9)/27$ болғандықтан, ${M_e}^2(2M_e - 9)/27$=0,5 теңдеуін шешіп, үш түбір аламыз, олардың біреуі берілген кесіндіге тиісті: M_e = 1,5;

в) X–тің (1;4) интервалына түсу ықтималдығы:

$$P(1 < X < 4) = P(1 < X < 3) + P(3 < X < 4) = \int_1^3 2/9(3x - x^2)dx + \int_3^4 0dx = 0{,}741$$

немесе

$$P(1 < X < 4) = F(4) - F(1) = 1 - \left(-\frac{1\cdot(2-9)}{27}\right) = \frac{20}{27} = 0{,}74.$$

Төменде Mathcad-тан есептеулермен файлдың көшірмесі келтірілген.

$f(x) := \frac{2}{9}\cdot\left(3\cdot x - x^2\right)$, $\sqrt{\frac{9}{20}} = 0.671$,

$\int_0^3 x\cdot f(x)\,dx \to \frac{3}{2} = 1.5$, $\int_0^3 x^2\cdot f(x)\,dx - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \to \frac{9}{20} = 0.45$,

$$\frac{d}{dx}f(x) \to \frac{2}{3} - \frac{4\cdot x}{9}, \qquad f1(x) := \frac{d}{dx}f(x),$$

$$\int_0^y f(x)\,dx \to -\frac{y^2\cdot(2\cdot y-9)}{27}, \qquad f1(x)\ \text{solve} \to \frac{3}{2},$$

$$f1(1) = 0.222, \qquad f1(2) = -0.222,$$

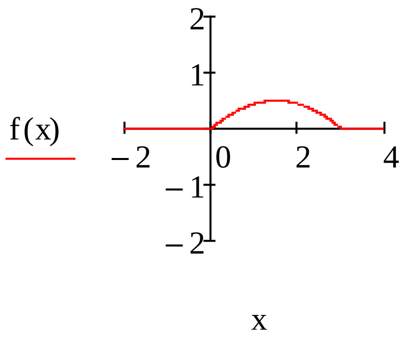
$$-\frac{y^2\cdot(2\cdot y-9)}{27} - 0.5\ \text{solve} \to \begin{pmatrix} 4.0980762113533159403 \\ -1.0980762113533159403 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.098 \\ -1.098 \\ 1.5 \end{pmatrix}.$$

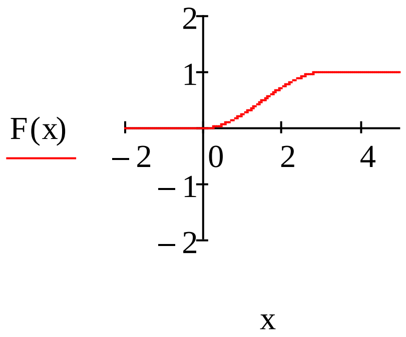
$$\int_1^3 f(x)\,dx \to \frac{20}{27} = 0.741, \qquad f2(x) := -\frac{x^2\cdot(2\cdot x-9)}{27},$$

$$f2(1) = 0.259, \qquad 1 - 0.259 = 0.741.$$

$F(x)$ және $f(x)$ функцияларының графиктерін Mathcad жүйесінде саламыз:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \le 0 \\ \left[\frac{2}{9}\cdot\left(3\cdot x - x^2\right)\right] & \text{if } 0 < x \le 3 \\ 0 & \text{if } x > 3 \end{cases}, \qquad F(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \le 0 \\ \frac{x^2\cdot(9-2\cdot x)}{27} & \text{if } 0 < x \le 3 \\ 1 & \text{if } x > 3 \end{cases},$$





8. Биномдық үлестірім (*a* варианты). Пуассон үлестірімі (*b* варианты).

Өнім N элементтен тұрады. Қандай да бір уақыт аралығында бір элементтің істен шығу ықтималдығы p-ға тең және қалған элементтердің күйіне тәуелсіз. Істен шыққан элементтер санының үлестірім заңын құрастыру керек (X кездейсоқ шамасы). *a* варианты үшін осы кездейсоқ шаманың математикалық үмітін, дисперсиясын және орта квадраттық ауытқуын; *b* варианты үшін көрсетілген уақыт аралығында екіден кем емес элементтердің істен шығу ықтималдығын табу керек.

Шешуі:

а) N=6, p=0,25, X дискретті кездейсоқ шамасы – істен шыққан элементтер саны. Оның мүмкін мәндері: $x_1 = 0$(істен шыққан элемент жоқ), $x_2 = 1$(бір элемент істен шықты) және т.с.с. $x_7 = 6$ (алты элемент істен шықты). Мүмкін мәндер тәуелсіз және олардың әрқайсысының пайда болуықтималдығы бірдей, сондықтан X кездейсоқ шамасы биномдық үлестірім заңымен үлестірілген: $P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, мұндағы $k = 0,1,2,\ldots,6$, p=0,25, $q = 1 - p$=0,75, $n = 6$.

Олай болса, $P(X = 0) = P_6(0) = C_6^0 0{,}25^0 0{,}75^6$=0,178;
$P(X = 1) = P_6(1) = C_6^1 0{,}25^1 0{,}75^5$=0,356; $P(X = 2) = P_6(2) = C_6^2 0{,}25^2 0{,}75^4$=0,297;
$P(X = 3) = P_6(3) = C_6^3 0{,}25^3 0{,}75^3$=0,132; $P(X = 4) = P_6(4) = C_6^4 0{,}25^4 0{,}75^2$=0,033;
$P(X = 5) = P_6(5) = C_6^5 0{,}25^5 0{,}75^1$=0,004; $P(X = 6) = P_6(6) = C_6^6 0{,}25^6 0{,}75^0$=0,0002.

Ізделінді үлестірім заңы:

X	0	1	2	3	4	5	6
p	0,178	0,356	0,297	0,132	0,033	0,004	0,0002

Биномдық үлестірімнің сандық сипаттамаларын дискретті кездейсоқ шамалар үшін белгілі формулалар бойынша анықтаймыз:
$M(X) = \sum_i x_i p_i$, $D(X) = \sum_i (x_i - M(X))^2 \cdot p_i$ және $D(X) = \sum_i x_i^2 p_i - (\sum_i x_i p_i)^2$.
Алайда, X – оқиғаның *n* сынақта пайда боллғанда математикалық үміт пен дисперсияның қасиеттерін қолданған қолайлы: $M(X) = np$, $D(X) = npq$. Сонымен, біздің жағыдайда $M(X) = 6 \cdot 0{,}25 = 1{,}5$, $D(X) = 6 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 1{,}125$.
$\sigma(x) = \sqrt{D(X)} \approx 1{,}06$.

Mathcad –та жүргізіген есертеулердің көшірме файлы:

$C(Q,R) := \mathrm{combin}(Q,R)$

$C(6,0)\cdot 0.25^0 \cdot 0.75^6 = 0.178$

$C(6,1)\cdot 0.25^1 \cdot 0.75^5 = 0.356$

$C(6,4)\cdot 0.25^4 \cdot 0.75^2 = 0.033$

$C(6,2)\cdot 0.25^2 \cdot 0.75^4 = 0.297$

$C(6,3)\cdot 0.25^3 \cdot 0.75^3 = 0.132$

$C(6,5)\cdot 0.25^5 \cdot 0.75^1 = 4.395 \times 10^{-3}$

$C(6,6)\cdot 0.25^6 \cdot 0.75^0 = 2.441 \times 10^{-4}$.

Бином үлестірімі үшін талдауды арнайы функцияларды қолданып Mathcad жүйесінде жүргізуге болады, ол функциялардың түпкі сөзі binom (dbinom, pbinom, qbinom, rbinom). Мысалы, dbinom(k,n,p) функциясы ықтималдықтар мәнін шығарады т.с.с.

b) N=1000, p=0,001, дискретті кездейсоқ шама X – істен шыққан элементтер саны Пуассон заңымен үлестірілген (биномдық үлестірзаңы заңы үшін шектік, әрбір сынақта оқиғаның пайда болу ықтималдығы p аз, ал сынақ саны n үлкен):

$$P(X=k)=P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

мұндағы $\lambda=np=1000\cdot0{,}001=1,\ k=0,1,2,\ldots,1000,\ n=1000$.

Сонымен,

$$P(X=0)=P_{1000}(0)\approx\frac{1^0}{0!}e^{-1}=0{,}368;$$

$$P(X=1)=P_{1000}(1)\approx\frac{1^1}{1!}e^{-1}=0{,}368;\quad P(X=2)=P_{1000}(2)\approx\frac{1^2}{2!}e^{-1}=0{,}184;$$

$P(X=3)=P_{1000}(3)\approx\dfrac{1^3}{3!}e^{-1}0{,}061$, и т.д. $P(X=10)=P_{1000}(10)\approx\dfrac{1^{10}}{10!}e^{-1}=0{,}0000001$

және т.с.с.

Іздеп отырған үлестірім заңы:

X	0	1	2	3	…	10	…
p	0,368	0,368	0,184	0,061	…	0,0000001	…

Екіден кем емес элементтердің істен шығу ықтималдығы келесі формуламен есептелінеді:

$P(X\ge2)=\sum_{k=2}^{1000}P_{1000}(k)$ или $P(X\ge2)=1-P(X=0)-P(X=1)$ = 1 - 0,368 - 0,368 = 0,264.

Mathcad –та жүргізіген есертеулердің көшірме файлы:

$$p(k,\lambda):=\mathrm{dpois}(k,\lambda)$$

$p(0,1)=0.368$ $\quad$ $p(4,1)=0.015$

$p(1,1)=0.368$ $\quad$ $p(5,1)=3.066\times10^{-3}$

$p(2,1)=0.184$ $\quad$ $p(10,1)=1.014\times10^{-7}$

$p(3,1)=0.061$ $\quad$ $p(1000,1)=0$.

Пуассон үлестірімі Mathcad жүйесінде арнайы функцияларға сәйкес келеді, ол функциялардың түпкі сөзі pois (dpois, ppois, qpois, rpois). Мысалы, dpois(k,n,p) функциясы ықтималдықтар мәнін шығарады т.с.с.

9. Бірқалыпты үлестірім.

a варианты.

Өлшеу құралының бөлу бағасы 0,2-ге тең. Өлшеу құралының көрсеткіші ең жақын бүтін бөлінуіне дейін жуықталады. X кездейсоқ шамасы – жуықтауда жіберілген қателігі.

b варианты.

Қандай да бір маршруттың автобустары тек кесте бойынша жүреді. Автобустың жүру интервалы 5 минут. X кездейсоқ шамасы – аялдамада автобусты күту уақыты.

Табу керек:

а) үлестірім тығыздығын $f(x)$;

б) үлестірім функциясын $F(x)$;

в) математикалық үмітін, дисперсиясын;

г) есептеу кезінде 0,04 -тен кіші (артық) қате кету ықтималдығын (*a* варианты үшін);

д) аялдамаға келген жолаушы трамвайды 3 минуттен кем (артық) күту ықтималдығын (*b* варианты үшін).

$F(x)$ және $f(x)$ графиктерін салу керек.

Шешуі:

a) X кездейсоқ шамасы – жуықтауда жіберілген қателігі екі бүтін бөлімдер арасында бірқалыпты үлестірілген; $b-a=0{,}2$ – X –тің мүмкін мәндері енетін интервал ұзындығы.

Бірқалыпты үлестірім үшін қолданылатын формулалар:

- бірқалыпты үлестірімнің тығыздығы:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a},\ егер\ x\in(a,b)\\ 0,\ \ егер\ x\notin(a,b)\end{cases};$$

- үлестірім функциясы:

$$F(x)=\begin{cases}0,\ \ егер\ \ x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a},\ егер\ a<x\le b\\ 1,\ \ егер\ \ x>b\end{cases};$$

- математикалық үміті:

$$M(X)=\frac{a+b}{2};$$

- дисперсиясы:

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12};$$

- (α,β) аралығына түсу ықтималдығы:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}.$$

Сондықтан біздің есеп үшін:

а) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{0,2} = 5, \ \textit{егер} \ x \in (0;0,2) \\ 0, \quad \textit{егер} \ x \notin (0;0,2) \end{cases};$

б) $F(x) = \begin{cases} 0, \quad \textit{егер} \ \ x \le 0 \\ \dfrac{x}{0,2} = 5x, \ \textit{егер} \ \ 0 < x \le 0,2 \\ 1, \ \textit{егер} \ \ x > 0,2 \end{cases};$

в) $M(X) = \dfrac{0,2 + 0}{2} = 0,1;$

$D(X) = \dfrac{(0,2 - 0)^2}{12} = 0,003;$

г) есептеу кезінде 0,04 -тен кіші қате кетуі мүмкін екені белгілі, егер ол (0; 0,04) интервалына немесе (0,16; 0,2) интервалына түссе (*A* оқиғасы), яғни оқиға ықтималдығы:

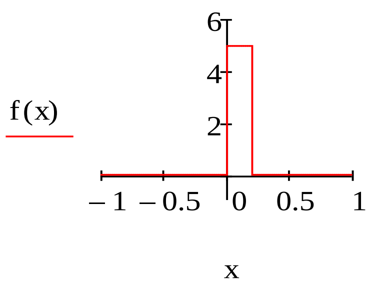
$$P(A) = P(0 < X < 0,04) + P(0,16 < X < 0,2) =$$
$$= \frac{0,04 - 0}{0,2} + \frac{0,2 - 0,16}{0,2} = 0,4;$$

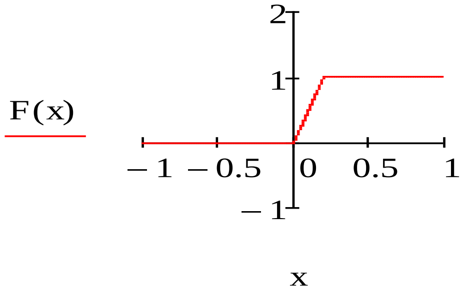
есептеу кезінде 0,04 -тен артық қате кетуі мүмкін, егер ол (0,04; 0,16) интервалына түссе (*B* оқиғасы), яғни оқиға ықтималдығы:

$$P(B) = P(0,04 < X < 0,16) = \frac{0,16 - 0,04}{0,2} = 0,6 \text{ немесе } P(B) = 1 - P(A).$$

Mathcad жүйесінде *F*(*x*) және *f*(*x*) графиктерін саламыз.

$f(x) := \begin{array}{|l} 0 \ \text{ if } \ x \le 0 \\ 5 \ \text{ if } \ 0 < x \le 0.2 \\ 0 \ \text{ if } \ x > 0.2 \end{array}$ $\qquad$ $F(x) := \begin{array}{|l} 0 \ \text{ if } \ x \le 0 \\ (5 \cdot x) \ \text{ if } \ 0 < x \le 0.2 \\ 1 \ \text{ if } \ x > 0.2 \end{array}$





b) X кездейсоқ шамасы – автобусты күту уақыты, автобустың алдамаға тізбектей екі рет келуінің арасында бірқалыпты жүргізілген; $b-a=5$ – X – тің мүмкін мәндер енетін интервалдың ұзындығы.

Бірқалыпты үлестірімнің негізгі формулалары жоғарыда келтірілді.

Біздің вариант үшін:

а) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{5}=0{,}2, \; егер \; x\in(0;5) \\ 0, \; егер \; x\notin(0;5) \end{cases}$;

б) $F(x)=\begin{cases} 0, \; егер \; x\le 0 \\ \dfrac{x}{5}=0{,}2x, \; егер \; 0<x\le 5 \\ 1, \; егер \; x>5 \end{cases}$;

в) $M(X)=\dfrac{5+0}{2}=2{,}5$;

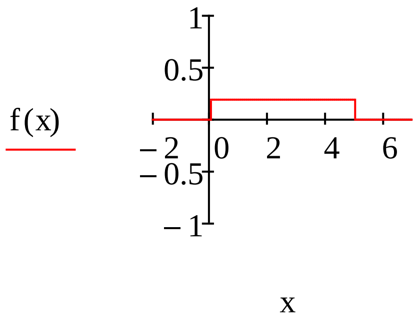
$D(X)=\dfrac{(5-0)^2}{12}=2{,}08$;

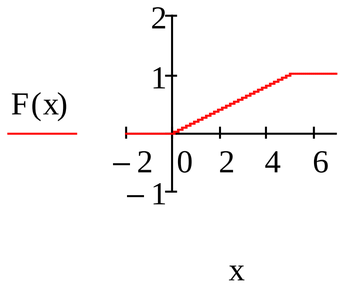
г) жолаушы автобусты 3 минуттен кем күтетіндігі белгілі, егер ол аялдамаға (0; 3) немесе (2; 5) уақыт аралығында келсе (A оқиғасы), онда ол автобусты, яғни бұл оқиғаның ықтималдығы $P(A)=P(0<X<3)=\dfrac{3-0}{5}$=0,6; егер жолаушы аялдамаға (0; 2) немесе (3; 5) уақыт аралығында келсе (B оқиғасы), онда ол автобусты 3 минуттен артық күтетіндігі белгілі, яғни бұл оқиғаның ықтималдығы:

$$P(B)=P(3<X<5)==\frac{5-3}{5}=0{,}4 \text{ немесе } P(B)=1-P(A).$$

Mathcad жүйесінде $F(x)$ және $f(x)$ графиктерін саламыз.

$$f(x) := \begin{vmatrix} 0 \text{ if } x\le 0 \\ 0.2 \text{ if } 0<x\le 5 \\ 0 \text{ if } x>5 \end{vmatrix} \qquad F(x) := \begin{vmatrix} 0 \text{ if } x\le 0 \\ (0.2\cdot x) \text{ if } 0<x\le 5 \\ 1 \text{ if } x>5 \end{vmatrix}$$





Mathcad жүйесінде бірқалыпты үлестірімге арнайы функциялар сәйкес келеді, олардың түпкі сөздері unif: dunif(x,a,b)– үлестірім тығыздығының мәндерін шығарады; түпкі сөздері punif(x,a,b) – үлестірім функциясының мәндерін шығарады; runif(n,a,b) – (a,b) аралығында бірқалыпты үлестірілген n тәуелсіз кездейсоқ сандардың массивін шығарады.

10. Көрсеткіштік үлестірім. T кездейсоқ шамасы - элементтің үздіксіз жұмыс жасау уақыты, λ=0,5 - істен шығу жиілігі, яғни бірлік уақыт аралығында элементтің істен шығуының орта саны. Табу керек:

а) $f(t)$ үлестірім тығыздығын;

б) $F(t)$ үлестірім функциясын, оның ықтималдық мағынасын көрсету керек;

в) сенімділік функциясын $R(t)$, оның ықтималдық мағынасын көрсету керек;

г) математикалық үмітін, дисперсиясын;

д) t =5 сағат уақыт аралығында элементтің істен шығуы ықтималдығын (A оқиғасы) және t =5 сағат уақыт аралығында элементтің істен шықпау ықтималдығын (B оқиғасы).

$F(t)$, $R(t)$ және $f(t)$ графиктерін салу керек.

Шешуі: X үзіліссіз кездейсоқ шамасы $f(x)=\begin{cases} 0, \textit{егер } x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, \ \textit{егер } x \ge 0 \end{cases}$ тығыздығымен берілсе, онда ол көрсеткіштік үлестірім заңына бағынады.

Көрсеткіштік үлестірімнің басқа ұғымдары мен формулалары: $F(x)=\begin{cases} 0, \textit{егер } x<0 \\ 1-e^{-\lambda x}, \ \textit{егер } x \ge 0 \end{cases}$ - үлестірім функциясы; егер кездейсоқ шама X=T – уақыты болса, онда $F(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t}$ - радиолокатордың нысананы табу уақыты; $R(t)=P(T>t)=e^{-\lambda t}$– сенімділік функциясы, t уақытындағы нысананы табу ықтималдығы;

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\ \sigma(X)=\frac{1}{\lambda};\ \ P(\alpha<X<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}.$$

Біздің есепте $t \ge 0$ болатындығын ескерсек:

а) $f(t)=0{,}5e^{-0{,}5t}$;

б) $F(t)=P(T<t)=1-e^{-0{,}5t}$, t уақыты аралығындағы элементтің істен шығу ықтималдығын анықтайды;

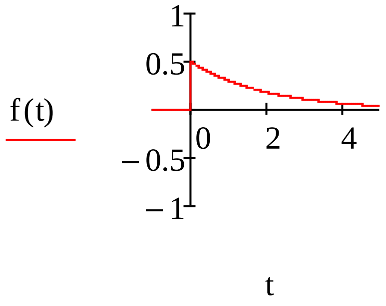
в) $R(t)=e^{-0{,}5t}$, t уақыты аралығындағы элементтің мүлтіксіз жұмыс істеу ықтималдығын анықтайды;

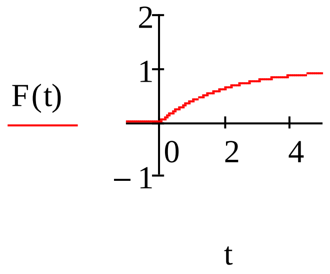
г) $M(X)=\dfrac{1}{0{,}5}=2$; $D(X)=\dfrac{1}{0{,}5^2}=4$;

д) үлестірім функциясы t уақытындағы істен шығу ықтималдығын анықтайтын болғандықтан, оған t=5 мәнін қойып, t=5 сағат уақыты ішіндегі істен шығу ықтималдығын аламыз: $F(5)=1-e^{-0{,}5\cdot 5}=1-e^{-2{,}5}$=0,918; «істен шығу» және «істен шықпау» оқиғалары – қарама-қарсы, сондықтан t=5 уақытындағы істен шықпау немесе мүлтіксіз жұмыс істеу ықтималдығы 1-0,918=0,082. Бұл нәтижені сенімділік функциясын тікелей қолданып алуға болады: $R(5) = e^{-0,5\cdot 5} = e^{-2,5}$ =0,082.

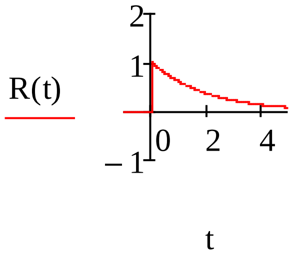
Mathcad жүйесінде $F(t)$, $R(t)$ және $f(t)$ графиктерін салып, кейбір есептеулер жүргіземіз:

$$f(t) := \begin{vmatrix} 0 \ \text{ if } \ t < 0 \\ 0.5\cdot e^{-0.5\cdot t} \ \text{ if } \ t \geq 0 \end{vmatrix} \qquad F(t) := \begin{vmatrix} 0 \ \text{ if } \ t < 0 \\ 1 - e^{-0.5\cdot t} \ \text{ if } \ t \geq 0 \end{vmatrix}$$





$$R(t) := \begin{vmatrix} 0 \ \text{ if } \ t < 0 \\ e^{-0.5\cdot t} \ \text{ if } \ t \geq 0 \end{vmatrix}$$



$$e^{-2.5} = 0.082$$
$$1 - e^{-2.5} = 0.918$$

Көрсеткіштік үлестіріміне Mathcad жүйесінде арнайы функцияларды қолданып жүргізуге болады, ол функциялардың түпкі сөздері exp: dexp(x, λ) – үлестірім тығыздығының мәндерін шығарады; түпкі сөздері pexp(x, λ) – үлестірім функциясының мәндерін шығарады; rexp(n, λ) – λ параметрлі көрсеткішті үлестірілген n тәуелсіз кездейсоқ сандардың массивін шығарады.

11. Қалыпты үлестірім заңы. Қандай да бір затты өлшеу жүргізілуде. Өлшеудің кездейсоқ қателері (X кездейсоқ шамасы) a=10 және σ=2 параметрлі қалыпты үлестірім заңына бағынады. Табу керек:

а) $f(x)$ үлестірім тығыздығын;

б) $F(x)$ үлестірім функциясын;

в) математикалық үмітін, дисперсиясын;

г) $(12;14)$ аралығына түсу ықтималдығын;

д) өлшеу абсолют шамасы бойынша δ=3-тен аспайтындай қате жіберу ықтималдығын.

$F(t)$ және $f(t)$ графиктерін салу керек.

Шешуі: X үзіліссіз кездейсоқ шамасы $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ тығыздығымен берілсе, онда ол қалыпты үлестірім заңына бағынады, мұндағы $a=M(X)$ – математикалық үміт, $\sigma=\sigma(X)-$ орта квадраттық ауытқу.

Қалыпты үлестірімнің басқа ұғымдары мен формулалары:

$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left[\dfrac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}\right]dt$ немесе $F(x)=\Phi\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)+0{,}5$ -

– Лаплас функциясы, оның мәнін кестеден немесе Mathcad жүйесінде табуға болады.

$$P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

– $(\alpha;\beta)$ интервалына түсу ықтималдығы.

Кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үмітінен δ -дан артық емес ауытқуының ықтималдығы мына формуламен есептелінеді:

$$P(|X-a|\le\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Біздің есеп үшін:

а) $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}$;

б) $F(x)=\Phi\left(\dfrac{x-10}{2}\right)+0{,}5$;

в) $M(X)=a=10,\ \sigma(X)=\sigma=2,\ D(X)=\sigma^2=4$;

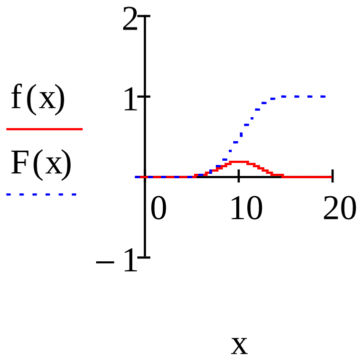
г) $P(12<X<14)=\Phi\left(\dfrac{14-10}{2}\right)-\Phi\left(\dfrac{12-10}{2}\right)=\Phi(2)-\Phi(1)$=0,4772-0,3413= =0,1359;

д) өлшеу абсолют шамасы бойынша δ =3-тен аспайтындай қате жіберу ықтималдығын $P(|X-10|\le 3)=2\Phi\left(\dfrac{3}{2}\right)=2\Phi(1{,}5)$ =0,4332.

Бұл жерде Лаплас функциясының мәні кестеден алынған, оны Mathcad жүйесінде де табуға болады.

Қалыпты үлестіріміне Mathcad жүйесінде арнайы функцияларды қолданып жүргізуге болады, ол функциялардың түпкі сөздері norm және d, p, q, r. әрәптерінен басталатын сөздер. Мысалы, dnorm (x,a, σ) – үлестірім тығыздығының мәндерін шығарады; түпкі сөздері pnorm (x,a,σ) – үлестірім функциясының мәндерін шығарады. Осы функцияларды сәйкес графиктерді салу үшін қолданамыз. Төменде Mathcad-та есептеулермен файлдың көшірмелері келтірілген.

$f(x):=\mathrm{dnorm}(x,10,2)$ $\qquad$ $F(x):=\mathrm{pnorm}(x,10,2)$


f(x)
F(x)
2
1
−1
0
10
20
x

Әдебиеттер тізімі

1 Жаңбырбаев Б.С. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика элементтері. -Алматы. 2006 – 184 бет.

2 Қазешев А. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. – Алматы, 2011.

3 Мұстахишев К.М., Ералиев С.Е., Атабай Б.Ж. Математика (толық курс). - Алматы, 2009. - 358 бет.

4 Қазешев А. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика бойынша есептер жинағы. – Алматы, 2005.

5 Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. 5В070400 – Есептеу техникасы және бағдарламалық қамтамасыз ету, 5В070300 – Ақпараттар жүйесі мамандықтарының студенттері үшін дәрістер жинағы. - Алматы: АЭжБУ, 2013. - 49 б.

Мазмұны

2019 ж. жиынтық жоспары, реті 151

Астраханцева Людмила Николаевна
Байсалова Мәншүк Жұмамұратқызы

МАТЕМАТИКА 3

5В070300 - Ақпараттық жүйелер мамандығы бойынша оқитын студенттер үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар
2 бөлім

Редактор Ж.Изтелеуова
Стандарттау бойынша маман Г.И.Мухаметсариева

Басуға_________ қол қойылды
Пішімі 60х84 1/16
Таралымы 25 дана
Баспаханалық қағаз №1
Көлемі 2,1 баспа табақ
Тапсырыс Бағасы 1100 тг.

«Алматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірме-көбейткіш бюросы
050013, Алматы, Байтұрсынұлы көшесі, 126/1