Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра математики и математического моделирования

МАТЕМАТИКА 3

Методические указания и задания к выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 5B070300- Информационные системы
Часть 2

Алматы 2019

СОСТАВИТЕЛИ: Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Математика 3. Методические указания и задания к выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 5В070300 - Информационные системы. Часть 2. - Алматы: АУЭС, 2019. - 33 стр.

Методические указания и задания содержат расчетно-графическую работу №2 дисциплины «Математика 3» для студентов специальности 5В070300 - Информационные системы. Эта дисциплина состоит из трёх разделов математики. Второй раздел посвящён теории вероятностей. Приведены теоретические вопросы программы, варианты заданий по основным понятиям, теоремам и законам теории вероятностей. Дано решение типового варианта вместе с необходимыми теоретическими сведениями.

Ил.11, табл. 14, библиогр. 6 назв.

Рецензент: доцент Ю.М.Гармашова

Печатается по плану издания некоммерческого общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2019 г.

Введение

Теория вероятностей изучает результаты теоретических экспериментов над системами, подверженными воздействию неконтролируемых факторов, анализом закономерностей, которым подчиняются эти результаты. Она обеспечивает теоретическую базу для широкого круга практических задач. Вероятностные методы в той или иной степени применяются во многих областях науки.

Данные методические указания содержат два раздела теории вероятностей: случайные события и случайные величины.

По каждому разделу приведены теоретические вопросы, задания и решение типового варианта.

Номер варианта студента определяется по списку группы. Расчетно-графическая работа должна выполняться четко и разборчиво в ученической тетради.

1 Расчетно-графическая работа №2. Элементы теории вероятностей

Цели: рассмотреть некоторые понятия комбинаторики, которые часто применяются в теории вероятностей, ознакомиться с понятиями случайного события и его вероятностью, основными теоремами теории вероятностей, изучить законы распределения и числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин.

1.1 Теоретические вопросы

1. Элементы комбинаторики.
2. Пространство элементарных случайных событий. Алгебра событий.
3. Статистическое, геометрическое и классическое определения вероятности.
4. Теоремы сложения и умножения ероятностей. Условная вероятность.
5. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
6. Повторение спытаний. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. Теорема Пуассона.
7. Дискретные и непрерывные случайные величины. Законы распределения дискретной случайной величины.
8. Интегральная функция распределения. Плотность распределения.
9. Числовые характеристики случайных величин. Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение дискретных и непрерывных случайных величин.
10. Биномиальное распределение, распределение Пуассона. Равномерное и показательное распределения, функция надёжности.
11. Нормальное распределение.
12. Понятие о предельных теоремах теории вероятностей.

1.2 Расчётные задания

1. Дано множество цифр $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Определить:

а) сколько различных m–значных чисел можно образовать из цифр этого множества, цифры в каждом числе не повторяются;

б) сколько различных девятизначных чисел можно образовать из цифр этого множества, цифры в каждом числе не повторяются;

в) сколько m-элементных подмножеств, содержащих разные цифры, можно составить из элементов данного множества.

№	m	№	m	№	m
1.1	2	1.11	5	1.21	8
1.2	3	1.12	6	1.22	2
1.3	4	1.13	7	1.23	3
1.4	5	1.14	8	1.24	4
1.5	6	1.15	2	1.25	5
1.6	7	1.16	3	1.26	6
1.7	8	1.17	4	1.27	7
1.8	2	1.18	5	1.28	8
1.9	3	1.19	6	1.29	2
1.10	4	1.20	7	1.30	3

2. В ящике шары трёх цветов: n_1 шаров белого цвета, n_2 - синего, n_3 - красного ($\sum_i^3 n_i = n$). Найти:

а) относительную частоту шаров белого цвета;

б) вероятность того, что все m ($m = \sum_i^3 m_i$) выбранных шаров будут белого цвета;

в) вероятность того, что среди m выбранных шаров будет m_1 белого цвета;

г) вероятность того, что среди m выбранных шаров будет m_1 белого цвета, m_2 - синего, m_3 - красного;

д) вероятность того, что среди m выбранных шаров будет хотя бы один белого цвета.

№	n_1	n_2	n_3	m_1	m_2	m_3	№	n_1	n_2	n_3	m_1	m_2	m_3
2.1	20	26	24	2	1	2	2.16	41	29	30	5	3	2
2.2	40	20	15	4	1	3	2.17	29	21	40	6	4	2
2.3	35	30	20	2	1	2	2.18	25	35	25	2	2	3
2.4	20	40	30	2	2	3	2.19	18	42	20	1	2	2
2.5	30	45	12	3	2	3	2.20	43	27	25	3	4	2

2.6	25	55	20	8	3	4	2.21	22	28	20	2	4	3
2.7	40	24	26	4	3	2	2.22	30	21	29	3	1	1
2.8	28	42	25	3	5	2	2.23	42	20	28	1	3	2
2.9	30	15	40	2	2	3	2.24	24	26	25	2	4	2
2.10	17	33	40	1	3	2	2.25	37	33	30	2	3	5
2.11	31	25	29	2	2	1	2.26	26	34	30	3	2	3
2.12	28	32	15	1	2	2	2.27	31	29	20	1	2	2
2.13	30	41	29	3	4	2	2.28	29	31	35	3	2	3
2.14	32	28	20	3	2	2	2.29	34	26	36	4	1	2
2.15	24	26	35	1	3	1	2.30	25	35	29	1	2	2

3. Устройство состоит из трёх независимо работающих элементов. Вероятность безотказной работы в течение некоторого времени равна p_1, p_2, p_3 соответственно для первого, второго и третьего элемента. Найти вероятность того, что в течение этого времени:

а) все три элемента будут безотказно работать (событие A);

б) безотказно работать будет только один элемент (событие B);

в) безотказно работать будут два элемента, один откажет (событие C);

г) безотказно работать будет хотя бы один элемент (событие D).

№	p_1	p_2	p_3	№	p_1	p_2	p_3	№	p_1	p_2	p_3
3.1	0.9	0.6	0.5	3.11	0.5	0.9	0.4	3.21	0.5	0.7	0.9
3.2	0.8	0.7	0.6	3.12	0.7	0.8	0.5	3.22	0.6	0.5	0.8
3.3	0.7	0.5	0.8	3.13	0.5	0.7	0.6	3.23	0.7	0.9	0.7
3.4	0.6	0.9	0.8	3.14	0.4	0.6	0.7	3.24	0.8	0.4	0.6
3.5	0.5	0.7	0.9	3.15	0.5	0.5	0.8	3.25	0.9	0.5	0.5
3.6	0.9	0.6	0.8	3.16	0.6	0.9	0.5	3.26	0.4	0.6	0.8
3.7	0.8	0.5	0.7	3.17	0.7	0.8	0.6	3.27	0.5	0.7	0.9
3.8	0.5	0.8	0.6	3.18	0.8	0.5	0.7	3.28	0.6	0.8	0.7
3.9	0.6	0.9	0.5	3.19	0.9	0.6	0.8	3.29	0.7	0.9	0.5
3.10	0.7	0.9	0.4	3.20	0.9	0.4	0.9	3.30	0.8	0.9	0.4

4. Три фабрики производят изделия, поступающие в магазин. Из первой фабрики поступило n_1 изделий, из второй - n_2, из третьей - n_3 ($\sum_{i}^{3} n_i = 1000$). Вероятность того, что изделие, бракованное для первой фабрики, составляет m_1%, для второй - m_2%, для третьей - m_3%. Требуется:

а) найти вероятность того, что приобретённое в магазине изделие будет бракованным;

б) приобретённое в магазине изделие оказалась бракованным. Найти вероятность того, что оно из i – ой фабрики (i =1,2,3).

№	n_1	n_2	m_1	m_2	m_3	i	№	n_1	n_2	m_1	m_2	m_3	i
4.1	520	220	5	8	7	1	4.16	100	250	7	8	5	1
4.2	270	410	10	5	9	2	4.17	430	180	5	4	7	2
4.3	250	140	8	7	4	2	4.18	170	540	6	5	8	3
4.4	190	380	5	9	30	1	4.19	650	120	10	9	8	2
4.5	290	610	6	3	3	2	4.20	400	180	7	10	5	1
4.6	270	430	10	6	4	2	4.21	120	380	10	6	9	2
4.7	280	360	7	10	9	1	4.22	270	340	9	5	4	3
4.8	520	110	5	7	10	1	4.23	430	120	10	7	6	2
4.9	240	290	9	8	4	3	4.24	360	120	5	10	8	1
4.10	310	410	7	2	5	3	4.25	420	210	8	7	6	1
4.11	520	110	3	6	7	2	4.26	370	130	10	6	5	2
4.12	280	310	9	8	4	2	4.27	410	200	5	10	8	3
4.13	400	320	4	5	8	1	4.28	280	510	10	6	5	3
4.14	350	240	9	8	7	1	4.29	710	120	2	10	4	3
4.15	190	520	5	2	4	3	4.30	460	240	5	9	7	1

5. Проводится n испытаний (для варианта a n=10; для варианта b n=100; для варианта c n=1000), в каждом из которых вероятность появления некоторого случайного события равна p. Найти вероятность того, что это событие появится:

а) ровно k_1 раз (событие A) (для вариантов a, b и c);

б) не более k_1 раз (событие B) (для вариантов a и b);

в) не менее k_2 раз (событие C) (для вариантов a и b);

г) хотя бы один раз (событие D) (для варианта a);

д) от k_1 до k_2 раз (событие E) (для варианта b).

№		k_1	k_2	p	№		k_1	k_2	p	№		k_1	k_2	p
5.1	a	2	5	0.9	5.11	a	4	6	0.5	5.21	a	2	6	0.3
	b	80	90			b	75	95			b	40	60	
	c	9		0.004		c	7		0.002		c	8		0.005
5.2	a	3	7	0.8	5.12	a	5	8	0.6	5.22	a	3	7	0.2
	b	85	95			b	20	60			b	35	70	
	c	8		0.005		c	5		0.006		c	4		0.009
5.3	a	4	8	0.7	5.13	a	3	8	0.7	5.23	a	4	7	0.3
	b	70	95			b	30	85			b	50	80	
	c	7		0.003		c	9		0.004		c	8		0.005
5.4	a	3	5	0.6	5.14	a	2	4	0.8	5.24	a	5	7	0.4
	b	60	95			b	40	75			b	40	65	
	c	4		0.006		c	6		0.007		c	4		0.008
5.5	a	2	7	0.5	5.15	a	4	9	0.9	5.25	a	3	5	0.5
	b	50	90			b	80	95			b	45	75	

	c	5		0.007		*c*	8		0.005		*c*	7		0.004
5.6	*a*	4	6	0.4	5.16	*a*	3	9	0.8	5.26	*a*	2	4	0.6
	b	65	75			*b*	50	95			*b*	30	80	
	c	6		0.002		*c*	6		0.003		*c*	9		0.004
5.7	*a*	5	9	0.3	5.17	*a*	1	3	0.7	5.27	*a*	2	8	0.7
	b	55	80			*b*	65	85			*b*	40	90	
	c	7		0.005		*c*	4		0.006		*c*	5		0.007
5.8	*a*	4	7	0.2	5.18	*a*	2	6	0.6	5.28	*a*	1	4	0.8
	b	40	80			*b*	50	70			*b*	25	70	
	c	9		0.008		*c*	7		0.009		*c*	9		0.002
5.9	*a*	2	8	0.3	5.19	*a*	2	4	0.5	5.29	*a*	4	7	0.9
	b	65	80			*b*	55	75			*b*	35	90	
	c	8		0.004		*c*	8		0.006		*c*	6		0.007
5.10	*a*	3	6	0.4	5.20	*a*	3	5	0.4	5.30	*a*	4	6	0.9
	b	20	85			*b*	45	80			*b*	10	60	
	c	5		0.003		*c*		4	0.008		*c*	4		0.009

6. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения. Найти:

а) функцию распределения $F(x)$, построить график $F(x)$;

б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду;

в) вероятность попадания X в интервал $(a;b)$.

	X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a	b
	P	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6		
6.1	X	0	1	2	4	6	9	-2	7
	P	0.05	0.15	0.3	0.25	0.15	0.1		
6.2	X	-3	-2	-1	0	2	4	-1	3
	P	0.15	0.3	0.02	0.14	0.18	0.21		
6.3	X	1	2	3	5	7	8	-3	6
	P	0.3	0.14	0.16	0.1	0.2	0.1		
6.4	X	-4	-3	-2	0	1	2	0	1
	P	0.2	0.08	0.23	0.27	0.12	0.1		
6.5	X	1	2	4	5	7	9	3	8
	P	0.19	0.21	0.06	0.14	0.12	0.28		
6.6	X	-1	0	2	3	5	7	-4	4
	P	0.26	0.14	0.07	0.2	0.03	0.3		
6.7	X	-2	-1	0	3	5	7	1	6
	P	0.18	0.09	0.01	0.2	0.22	0.3		
6.8	X	1	2	4	5	6	8	0	6
	P	0.3	0.17	0.13	0.1	0.2	0.1		
6.9	X	1	2	3	4	7	9	5	8
	P	0.11	0.29	0.06	0.14	0.17	0.23		

6.10	*X*	0	1	2	3	7	9	4	8
	P	0.06	0.14	0.3	0.25	0.15	0.1		
6.11	*X*	-3	-2	0	1	2	4	-1	3
	P	0.15	0.3	0.01	0.14	0.19	0.21		
6.12	*X*	-1	0	3	5	7	8	1	6
	P	0.25	0.14	0.16	0.1	0.2	0.15		
6.13	*X*	-4	-3	-2	0	2	4	-1	3
	P	0.2	0.07	0.24	0.26	0.13	0.1		
6.14	*X*	-3	-1	0	3	4	7	-2	6
	P	0.12	0.09	0.01	0.2	0.28	0.3		
6.15	*X*	-1	0	1	3	7	8	2	6
	P	0.26	0.14	0.15	0.2	0.1	0.15		
6.16	*X*	-2	-1	0	1	2	7	-3	5
	P	0.17	0.09	0.01	0.3	0.23	0.2		
6.17	*X*	1	2	3	5	6	7	0	4
	P	0.1	0.14	0.16	0.1	0.2	0.3		
6.18	*X*	-3	-1	0	3	5	6	-2	4
	P	0.16	0.09	0.01	0.3	0.24	0.2		
6.19	*X*	1	2	5	6	7	8	3	6
	P	0.2	0.15	0.15	0.1	0.3	0.1		
6.20	*X*	-1	0	2	4	7	8	1	5
	P	0.23	0.18	0.12	0.2	0.1	0.17		
6.21	*X*	1	2	4	5	6	8	0	7
	P	0.3	0.14	0.16	0.03	0.2	0.17		
6.22	*X*	-4	-3	-1	0	1	3	-2	2
	P	0.2	0.03	0.24	0.26	0.17	0.1		
6.23	*X*	1	2	3	4	7	9	0	8
	P	0.17	0.23	0.09	0.11	0.12	0.28		
6.24	*X*	0	1	3	5	7	8	2	6
	P	0.2	0.14	0.16	0.12	0.3	0.08		
6.25	*X*	-5	-3	-2	0	1	3	-4	2
	P	0.2	0.06	0.21	0.29	0.14	0.1		
6.26	*X*	1	2	3	5	8	9	4	7
	P	0.18	0.22	0.05	0.15	0.12	0.28		
6.27	*X*	1	3	4	5	7	8	2	6
	P	0.3	0.16	0.14	0.01	0.2	0.19		
6.28	*X*	-5	-3	-1	0	1	3	-4	2
	P	0.1	0.03	0.14	0.36	0.17	0.2		
6.29	*X*	0	2	3	4	6	8	1	7
	P	0.26	0.14	0.05	0.15	0.12	0.28		
6.30	*X*	-1	0	2	3	7	8	1	6
	P	0.21	0.16	0.14	0.1	0.2	0.19		

7. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$. Найти:

а) функцию распределения $F(x)$;

б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду, медиану;

в) вероятность попадания X в интервал $(a;b)$.

Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

№	$f(x)$	a	b	№	$f(x)$	a	b
7.1	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 4 \\ \frac{x}{8}, 0 < x \le 4 \end{cases}$	1	3	7.16	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 3 \\ \frac{2}{3}\left(1 - \frac{x}{3}\right), 0 < x \le 3 \end{cases}$	-1	2
7.2	$\begin{cases} 0, x \le -3, x > -2 \\ \frac{6}{x^2}, -3 < x \le -2 \end{cases}$	-2,5	0	7.17	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{\pi}{6} \\ 4\sin 2x, 0 < x \le \frac{\pi}{6} \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{12}$
7.3	$\begin{cases} 0, x \le -\frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2} \\ 0{,}5\cos x, -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{4}$	7.18	$\begin{cases} 0, x \le 1, x > 2 \\ \frac{2}{x^2}, 1 < x \le 2 \end{cases}$	0	1,5
7.4	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 1 \\ \frac{4}{\pi(1 + x^2)}, 0 < x \le 1 \end{cases}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	7.19	$\begin{cases} 0, x \le 2, x > 3 \\ \frac{2x}{5}, 2 < x \le 3 \end{cases}$	1	2,5
7.5	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \pi/2 \\ \cos x, 0 < x \le \pi/2 \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{6}$	7.20	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{6}{\pi(1 + x^2)}, 0 < x \le \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$	0,1	1
7.6	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \pi \\ 0{,}5\sin x, 0 < x \le \pi \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{2}$	7.21	$\begin{cases} 0, x \le -1, x > 2 \\ \frac{1}{9}(x+1)^2, -1 < x \le 2 \end{cases}$	0	1
7.7	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 2 \\ \frac{x+2}{6}, 0 < x \le 2 \end{cases}$	1	2	7.22	$\begin{cases} 0, x \le 0, x \ge \frac{1}{2} \\ \frac{6}{\pi\sqrt{1 - x^2}}, 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$	$\frac{1}{4}$	1
7.8	$\begin{cases} 0, x \le 4, x > 5 \\ \frac{2x}{9}, 4 < x \le 5 \end{cases}$	3	4,5	7.23	$\begin{cases} 0, x \le 3, x > 5 \\ \frac{7{,}5}{x^2}, 3 < x \le 5 \end{cases}$	2	4
7.9	$\begin{cases} 0, x \le \frac{\pi}{2}, x > \frac{5\pi}{6} \\ -2\cos x, \frac{\pi}{2} < x \le \frac{5\pi}{6} \end{cases}$	0	$\frac{2\pi}{3}$	7.24	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{\pi}{6} \\ 6\sin 3x, 0 < x \le \frac{\pi}{6} \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{12}$
7.10	$\begin{cases} 0, x \le 1, x > 2 \\ 3(x-1)^2, 1 < x \le 2 \end{cases}$	1,5	2	7.25	$\begin{cases} 0, x \le 1, x > 2 \\ 2x - 2, 1 < x \le 2 \end{cases}$	0	1,5

7.11	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{\pi}{4} \\ 2\cos 2x, 0 < x \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	7.26	$\begin{cases} 0, x \le -2, x > 2 \\ \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}, -2 < x \le 2 \end{cases}$	0	1
7.12	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 4 \\ \frac{1}{2}(1-\frac{x}{4}), 0 < x \le 4 \end{cases}$	1	3	7.27	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 5 \\ \frac{2}{5}(1-\frac{x}{5}), 0 < x \le 5 \end{cases}$	1	4
7.13	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 2 \\ \frac{x+1}{4}, 0 < x \le 2 \end{cases}$	-1	1	7.28	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{\pi}{6} \\ 3\cos 3x, 0 < x \le \frac{\pi}{6} \end{cases}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{9}$
7.14	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 1 \\ 3x^2, 0 < x \le 1 \end{cases}$	0,2	1,2	7.29	$\begin{cases} 0, x \le -3, x > 3 \\ \frac{1}{2\pi}\sqrt{9-x^2}, -3 < x \le 3 \end{cases}$	0	2
7.15	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{\pi}{3} \\ 2\sin x, 0 < x \le \frac{\pi}{3} \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{6}$	7.30	$\begin{cases} 0, x \le 1, x > 4 \\ \frac{2x}{15}, 1 < x \le 4 \end{cases}$	2	3

8. Биномиальное распределение (вариант *a*). Распределение Пуассона (вариант *b*).

Изделие состоит из *N* элементов. Вероятность отказа одного элемента в течение некоторого времени равна *p* и не зависит от состояния других элементов. Составить закон распределения числа отказавших элементов (случайная величина *X*). Для варианта *a* найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины; для варианта *b* найти вероятность отказа не менее *m* элементов за указанное время.

№		*N*	*p*	m	№		*N*	*p*	m	№		*N*	*p*	m
8.1	*a*	3	0.1		8.11	*a*	4	0.15		8.21	*a*	3	0.11	
	b	2000	0.001	4		*b*	1500	0.005	6		*b*	1000	0.005	6
8.2	*a*	2	0.12		8.12	*a*	5	0.13		8.22	*a*	2	0.16	
	b	1000	0.007	5		*b*	4000	0.006	2		*b*	4500	0.003	2
8.3	*a*	4	0.2		8.13	*a*	3	0.14		8.23	*a*	4	0.29	
	b	3000	0.004	7		*b*	8000	0.001	2		*b*	2000	0.001	4
8.4	*a*	5	0.25		8.14	*a*	2	0.2		8.24	*a*	5	0.1	
	b	2000	0.002	5		*b*	6500	0.002	6		*b*	1000	0.007	5
8.5	*a*	3	0.3		8.15	*a*	4	0.27		8.25	*a*	3	0.17	
	b	1000	0.005	6		*b*	3000	0.005	2		*b*	3000	0.004	7
8.6	*a*	2	0.1		8.16	*a*	5	0.2		8.26	*a*	2	0.21	
	b	5000	0.001	2		*b*	1500	0.002	3		*b*	2000	0.002	5
8.7	*a*	4	0.15		8.17	*a*	3	0.19		8.27	*a*	4	0.22	

	b	2000	0.001	4		*b*	2000	0.001	4		*b*	1000	0.005	6
8.8	*a*	5	17		8.18	*a*	2	23		8.28	*a*	5	24	
	b	1000	0.008	5		*b*	1000	0.007	5		*b*	6500	0.007	8
8.9	*a*	3	12		8.19	*a*	4	11		8.29	*a*	3	18	
	b	3000	0.004	7		*b*	3500	0.002	1		*b*	7000	0.002	6
8.10	*a*	2	15		8.20	*a*	5	28		8.30	*a*	2	22	
	b	2000	0.003	2		*b*	2000	0.001	5		*b*	5500	0.004	9

9. Равномерное распределение.

Вариант *a*.

Цена деления измерительного прибора равна *k*. Показания прибора округляются до ближайшего целого деления. Случайная величина *X* – ошибка при округлении отсчёта.

Вариант *b*.

Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения *k* минут. Случайная величина *X* – время ожидания автобуса. Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание, дисперсию;

г) вероятность того, что при отсчёте будет сделана ошибка, меньшая (большая) *m* (для варианта *a*).

д) вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать автобус менее (более) *m* минут (для варианта *b*).

Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

№		*k*	*m*	№		*k*	*m*	№		*k*	*m*
9.1	*a*	0,2	0,04	9.11	*a*	0,3	0,08	9.21	*a*	0,9	0,02
	b	5	3		*b*	18	9		*b*	19	8
9.2	*a*	0,3	0,02	9.12	*a*	0,6	0,01	9.22	*a*	0,1	0,08
	b	10	4		*b*	24	8		*b*	20	5
9.3	*a*	0,1	0,06	9.13	*a*	0,9	0,06	9.23	*a*	0,7	0,01
	b	15	5		*b*	6	3		*b*	25	5
9.4	*a*	0,5	0,01	9.14	*a*	0,5	0,05	9.24	*a*	0,4	0,06
	b	6	2		*b*	12	6		*b*	9	3
9.5	*a*	0,6	0,05	9.15	*a*	0,8	0,07	9.25	*a*	0,5	0,07
	b	20	10		*b*	16	8		*b*	14	7
9.6	*a*	0,9	0,02	9.16	*a*	0,2	0,04	9.26	*a*	0,3	0,08
	b	19	8		*b*	5	3		*b*	18	9
9.7	*a*	0,1	0,08	9.17	*a*	0,3	0,02	9.27	*a*	0,6	0,01
	b	20	5		*b*	10	4		*b*	24	8
9.8	*a*	0,7	0,01	9.18	*a*	0,1	0,06	9.28	*a*	0,9	0,06
	b	25	5		*b*	15	5		*b*	6	3
9.9	*a*	0,4	0,06	9.19	*a*	0,5	0,01	9.29	*a*	0,5	0,05

	b	9	3		*b*	6	2		*b*	12	6
9.10	*a*	0,5	0,07	9.20	*a*	0,6	0,05	9.30	*a*	0,8	0,07
	b	14	7		*b*	20	10		*b*	16	8

10. Показательное распределение. Случайная величина T - время безотказной работы элемента; λ - интенсивность отказов, то естьсреднее число отказов в единицу времени. Найти:

а) плотность распределения $f(t)$;

б) функцию распределения $F(t)$, указать её вероятностный смысл;

в) функцию надёжности $R(t)$, указать её вероятностный смысл;

г) математическое ожидание, дисперсию;

д) вероятность того, что за время t элемент откажет (событие A) и вероятность того, что за время t элемент не откажет (событие B).

Построить графики $F(t)$, $R(t)$ и $f(t)$.

№	λ	t	№	λ	t	№	λ	t
10.1	1	5	10.11	2	5	10.21	3	8
10.2	2	10	10.12	3	10	10.22	4	4
10.3	3	6	10.13	4	6	10.23	6	3
10.4	4	8	10.14	6	8	10.24	7	2
10.5	6	4	10.15	7	4	10.25	8	1
10.6	7	3	10.16	8	3	10.26	9	10
10.7	8	2	10.17	9	2	10.27	10	6
10.8	9	1	10.18	10	1	10.28	1	7
10.9	10	7	10.19	1	10	10.29	2	8
10.10	1	9	10.20	2	6	10.30	3	2

11. Нормальный закон распределения. Производится взвешивание некоторого вещества. Случайные ошибки взвешивания (случайная величина X) подчинены нормальному закону распределения с параметрами a и σ. Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание, дисперсию;

г) вероятность попадания в интервал $(\alpha;\beta)$;

д) вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине δ.

Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

№	a	σ	α	β	δ	№	a	σ	α	β	δ
11.1	10	1	8	14	2	11.16	10	2	9	14	2
11.2	12	2	7	14	3	11.17	12	4	5	14	3
11.3	14	3	10	15	5	11.18	14	1	9	15	5
11.4	11	5	9	12	3	11.19	11	6	8	12	3

11.5	13	2	6	13	2	11.20	13	4	6	17	2
11.6	12	3	7	15	4	11.21	12	9	8	15	4
11.7	10	2	8	17	2	11.22	10	3	6	17	2
11.8	12	4	6	14	6	11.23	12	5	6	13	6
11.9	14	6	11	19	5	11.24	14	2	12	19	5
11.10	15	5	8	12	3	11.25	15	3	4	12	3
11.11	17	4	6	14	2	11.26	17	1	5	14	2
11.12	12	5	7	18	4	11.27	12	4	9	18	4
11.13	18	5	6	12	3	11.28	11	3	4	12	3
11.14	10	4	6	15	2	11.29	17	2	5	19	5
11.15	12	3	5	18	4	11.30	13	5	6	18	3

1.3 Решение типового варианта

1. Дано множество цифр $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Определить:

а) сколько различных трёхзначных чисел можно образовать из цифр этого множества, цифры в каждом числе не повторяются;

б) сколько различных семизначных чисел можно образовать из цифр этого множества; цифры в каждом числе не повторяются;

в) сколько трёхэлементных подмножеств, содержащих разные цифры, можно составить из элементов данного множества.

Решение: при решении этой задачи используют некоторые понятия из комбинаторики. Комбинаторика – это раздел математики, в котором решаются задачи выбора и расположения элементов чаще всего конечного множества, а также способов подсчёта числа таких выборок или подмножеств данного множества. Простейшими примерами таких подмножеств являются размещения, перестановки и сочетания.

Пусть A - конечное множество, состоящее из n элементов:

а) размещением из n элементов множества A по m называется упорядоченное подмножество множества A (кортеж, упорядоченная выборка), состоящее из m различных элементов A. Число таких размещений обозначается A_n^m и находится по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\dots(n-m+1);$$

б) перестановкой элементов множества A называется упорядоченное множество этих элементов. Таким образом, перестановки содержат все элементы множества A и отличаются друг от друга порядком их расположения. Число перестановок из n элементов обозначается P_n и находится по формуле $P_n = n!$;

в) сочетанием из n элементов множества A по m называется неупорядоченное подмножество множества A, состоящее из m различных элементов этого множества. Число таких сочетаний обозначается C_n^m и находится по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3...m}.$$

Вернёмся к решению нашей задачи:

а) поскольку числа, составленные из одинаковых, но расположенных в разном порядке цифр разные, то каждое трёхзначное число является размещением из 7 цифр данного множества по 3. Поэтому число таких размещений или чисел находится по формуле:

$$A_7^3 = \left|7-3+1=5\right| = 7\cdot 6\cdot 5 = 210\ ;$$

б) в различных семизначных числах должны присутствовать все элементы данного множества, причём элементы, то есть цифры, не должны повторяться. Таким образом, каждое семизначное число - это перестановка из семи элементов этого множества, а число таких перестановок или чисел будет равно $P_7 = 7!$;

в) трёхэлементные подмножества данного множества составляются из трёх различных его элементов, порядок расположения элементов не важен, поэтому эти подмножества будут сочетаниями. Их число находится по формуле:

$$C_7^3 = \frac{A_7^3}{P_3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35\ .$$

2. В ящике шары трёх цветов: 40 шаров белого цвета, 50 - синего, 30 - красного (всего 120 шаров). Найти:

а) относительную частоту шаров белого цвета;

б) вероятность того, что все 20 выбранных шаров будут белого цвета;

в) вероятность того, что среди 20 выбранных шаров будет 9 белого цвета;

г) вероятность того, что среди 20 выбранных шаров будет 9 белого цвета, 6 - синего, 5 - красного;

д) вероятность того, что среди 20 выбранных шаров будет хотя бы один белого цвета.

Решение:

а) относительной частотой события A (обозначается $P^*(A)$) называется отношение числа m испытаний, в которых событие A появилось, к общему числу n произведённых испытаний: $P^*(A) = m/n$.

Пусть A – выбор шара белого цвета, тогда $P^*(A) = 40/120 = 1/3$;

В остальных пунктах используем классическое определение вероятности события A: $P(A) = m / n$, где m – число испытаний, благоприятствующих появлению события A; n – общее число испытаний;

б) пусть событие A - все 20 выбранных шаров будут белого цвета. Общее число элементарных событий равно числу различных способов взять 20 шаров из 120, то есть$n = C_{120}^{20}$; число благоприятствующих событий равно числу различных способов взять из 40 шаров белого цвета 20, то есть $m = C_{40}^{20}$. Таким образом, $P(A) = m/n = C_{40}^{20} / C_{120}^{20} = 4{,}679 \times 10^{-12}$;

в) пусть событие A – среди 20 выбранных шаров будет 9 белого цвета. Как выше сказано, $n = C_{120}^{20}$. Число m благоприятствующих событию A элементарных событий находится по одному из правил комбинаторики: пусть во множестве из n элементов имеются s подмножеств, состоящих соответственно из $n_1, n_2, ..., n_s$ элементов ($\sum_{1}^{s} n_i = n$). Тогда, если из этого множества происходит отбор по схеме: m_1 из n_1 элементов, m_2 из n_2 элементов,…, m_s из n_s элементов, то общее число N способов образования s групп по $m_1, m_2, ..., m_s$ элементов без учёта порядка в каждой из них равно $N = C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \ldots C_{n_s}^{m_s}$. Таким образом, в этом пункте $m = C_{40}^{9} \cdot C_{80}^{11}$, где C_{40}^{9} равно числу различных способов выбрать 9 шаров белого цвета из 40 белого цвета, а C_{80}^{11} равно числу различных способов выбрать 11 шаров не белого цвета из 80 не белого цвета. Итак, $P(A) = m/n = C_{40}^{9} \cdot C_{80}^{11} / C_{120}^{20} = 0{,}097$;

г) пусть событие A - среди 20 выбранных наудачу шаров 9 белого цвета, 6 - синего, 5 - красного. Для решения задачи также используем классическое определение вероятности события A: $P(A) = m/n$, где n число всех возможных способов выбора 20 шаров из имеющихся 120, то есть$n = C_{120}^{20}$. Число m благоприятствующих событию A элементарных событий находится по выше приведённому правилу комбинаторики, то есть $m = C_{40}^{9} \cdot C_{50}^{4} \cdot C_{30}^{5}$. Поэтому $P(A) = m/n = 0{,}021$.

д) пусть событие A – среди 20 выбранных шаров будет хотя бы один белого цвета, тогда противоположное событие $\bar{A}$ - среди 20 выбранных шаров не будет ни одного шара белого цвета. Как в случае б) вероятность этого события найдём по формуле $P(\bar{A}) = m/n = C_{80}^{20} / C_{120}^{20} = 1{,}2 \times 10^{-4}$. Тогда вероятность события A равна $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 1{,}2 \times 10^{-4} \approx 1$, то есть это событие почти достоверное;

При вычислении числа сочетаний была использована функция combin в Mathcad. Ниже приведена копия файла, в котором combin(Q,R) введена как функция пользователя C(Q,R), позволяющая получать значения сочетаний при произвольных Q и R.

$C(Q,R) := \text{combin}(Q,R)$, $C(120,20) = 2.946 \times 10^{22}$, $C(80,11) = 1.048 \times 10^{13}$, $C(40,9) = 2.734 \times 10$,

$$\frac{C(80,20)}{C(120,20)} = 1.2\times 10^{-4}, \quad C(40,20) = 1.378\times 10^{11},$$

$$\frac{C(40,9)\cdot C(80,11)}{C(120,20)} = 0.097,$$

$$\frac{C(40,9)\cdot C(50,6)\cdot C(30,5)}{C(120,20)} = 0.021.$$

3. Устройство состоит из трёх независимо работающих элементов. Вероятность безотказной работы в течение некоторого времени равна 0,75, 0,8, 0,9 соответственно для первого, второго и третьего элемента. Найти вероятность того, что в течение этого времени:

а) все три элемента будут безотказно работать (событие *A*);

б) безотказно работать будет только один элемент (событие *B*);

в) безотказно работать будут два элемента, один откажет (событие *C*);

г) безотказно работать будет хотя бы один элемент (событие *D*).

Решение: пусть событие A_1 – безотказная работа первого элемента, A_2 – второго, A_3 – третьего. По условию $P(A_1)$=0,75, $P(A_2)$=9,8, $P(A_3)$=0,9:

а) так как событие *A* - все три элемента будут работать безотказно, то $A = A_1A_2A_3$ и, т.к. A_1, A_2, A_3 события независимые, то $P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = = 0,75\cdot 0,8\cdot 0,9 = 0,54$;

б) событие *B* - безотказно работать будет только один элемент, поэтому $B = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$, где $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ события противоположные A_1, A_2, A_3, то есть отказ первого, второго и третьего элемента соответственно. Так как $P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 1 - 0,75 = 0,25$, $P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 1 - 0,8 = 0,2$, $P(\overline{A_3}) = 1 - P(A_3) = = 1 - 0,9 = 0,1$ и так как слагаемые есть события несовместные, то $P(B) = P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3) = 0,75\cdot 0,2\cdot 0,1 + 0,25\cdot 0,8\cdot 0,1 + 0,25\cdot 0,2\cdot 0,9 =$ 0,08;

в) событие *C* - безотказно работать будут два элемента, один откажет составляется аналогично, как в предыдущем пункте, то есть $C = A_1A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2A_3 + A_1\overline{A_2}A_3$. Его вероятность определяется также аналогично: $P(C) = 0,75\cdot 0,8\cdot 0,1 + 0,25\cdot 0,8\cdot 0,9 + 0,75\cdot 0,2\cdot 0,9 =$0,3456;

г) событие *D* - безотказно работать будет хотя бы один элемент. Рассмотрим противоположное событие $\overline{D}$ - откажут все три элемента. Так как $\overline{D} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$, то $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) = 1 - 0,25\cdot 0,2\cdot 0,1 =$0,995.

4. Три фабрики производят изделия, поступающие в магазин. Из первой фабрики поступило 100 изделий, из второй - 300, из третьей - 1000-100-300 =

=600. Вероятность того, что изделие бракованное для первой фабрики составляет 5%, для второй - 4%, для третьей - 6%. Требуется:

а) найти вероятность того, что приобретённое в магазине изделие будет бракованным;

б) приобретённое в магазине изделие оказалось бракованным. Найти вероятность того, что оно из второй фабрики.

Решение: пусть событие A – приобретённое в магазине изделие будет бракованным; события B_1, B_2, B_3 - приобретённое изделие соответственно из первой, второй, третьей фабрики (эти события называются гипотезами):

а) вероятность события A находится по формуле полной вероятности: $P(A) = P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+P(B_3)P(A/B_3)$, где $P(A/B_i)$ – условные вероятности того, что приобретённое изделие из i – ой фабрики (i=1,2,3). По условию задачи имеем: $P(B_1)$ = 100/1000 = 0,1; $P(B_2)$ = 300/1000 = 0,3; $P(B_3)$ = 600/1000 = 0,6; $P(A/B_1)$=0,05; $P(A/B_2)$=0,04; $P(A/B_3)$=0,06. Поэтому $P(A)$ = $0.1 \cdot 0.05 + 0,3 \cdot 0,04 + 0,6 \cdot 0,06$ = 0,053;

б) в этом пункте требуется найти условную вероятность $P(B_2/A)$.

Используем для этого формулу Байеса:

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A/B_k)}, \; i = 1,2,\ldots, \; n.$$

В нашем случае:

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2)P(A/B_2)}{\sum_{k=1}^{3} P(B_k)P(A/B_k)} = \frac{0,3 \cdot 0,04}{0,053} = 0,226.$$

5. Проводится n испытаний (для варианта a n=10; для варианта b n=100; для варианта c n=1000), в каждом из которых вероятность появления некоторого случайного события равна 0,8 (для вариантов a и b) и 0,003 (для варианта c). Найти вероятность того, что это событие появится:

а) ровно k_2 раз (событие A) (для вариантов a, b и c);

б) не более k_1 раз (событие B) (для вариантов a и b);

в) не менее k_2 раз (событие C) (для вариантов a и b);

г) хотя бы один раз (событие D) (для варианта a);

д) от k_1 до k_2 раз (событие E) (для варианта b).

Решение: вероятность того, что в n испытаниях случайное событие появится k раз, обозначается $P_n(k)$. В зависимости от условий задачи к её решению подходят по - разному:

a) n =10, пусть k_1=2, k_2=9. Здесь n не велико, поэтому вероятность события A можно найти точно по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $q = 1 - p$, $(k = 0,1,2,\ldots n)$. Вероятности событий B и C определяются как суммы вероятностей: $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k)$ - вероятность того, что событие произойдёт не более k раз в n независимых испытаниях, то есть или 0, или 1, или 2,…, или k раз; $P_n(k)+P_n(k+1)+...+P_n(n)$ - вероятность того, что событие произойдёт не менее, чем k раз в n независимых испытаниях, то есть или k, или k+1,…, или n раз. Эти вероятности называют кумулятивными (накопленными). Таким образом:

а) $P(A)=P_{10}(2)=C_{10}^{2}0{,}8^{2}0{,}2^{8}=0{,}000074$;

б) $P(B)=P_{10}(0)+P_{10}(1)+P_{10}(2)=0{,}000078$;

в) $P(C)=P_{10}(9)+P_{10}(10)=0{,}376$;

г) рассмотрим событие $\overline{D}$, противоположное D. $\overline{D}$ - в серии из 10 независимых испытаний данное случайное событие не появилось ни разу. Тогда: $P(D)=1-P(\overline{D})=1-P_{10}(0)\approx 1$;

Ниже приведена копия файла из Mathcad с вычислениями.

$C(Q,R):=\mathrm{combin}(Q,R)$,

$C(10,2)\cdot 0.8^{2}\cdot 0.2^{8}=7.373\times 10^{-5}$;

$C(10,9)\cdot 0.8^{9}\cdot 0.2^{1}+C(10,10)\cdot 0.8^{10}\cdot 0.2^{0}=0.376$;

$C(10,0)\cdot 0.8^{0}\cdot 0.2^{10}+C(10,1)\cdot 0.8^{1}\cdot 0.2^{9}+C(10,2)\cdot 0.8^{2}\cdot 0.2^{8}=7.793\times 10^{-5}$;

$1-C(10,0)\cdot 0.8^{0}\cdot 0.2^{10}=1$;

b) n =100, пусть k_1=70, k_2=80. Поскольку число независимых испытаний n велико, то вероятность $P_n(k)$ появления случайного события k раз в n испытаниях определяется по локальной теореме Муавра-Лапласа и приближённо равна:

$$P_n(k)\cong\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

где $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $0<p<1$, $q=1-p$, $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2)$ (значения этой функции находят из таблиц или с помощью встроенной функции dnorm в системе Mathcad).

Для определения вероятностей событий *B*, *C* и *E* используют интегральную теорему Муавра-Лапласа: вероятность $P_n(k_1,k_2)$ того, что число появления некоторого события будет находиться в промежутке от k_1 до k_2 приближённо равна:

$$P_n(k_1,k_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

где $x_2=\dfrac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$, $x_1=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$. $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\exp(-t^2/2)dt$ - функция Лапласа, значения которой находят из специальных таблиц или с помощью встроенной функции pnorm в системе Mathcad:

а) $P(A)$=$P_{100}(80) \cong \dfrac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\varphi(2{,}5) = 0{,}018 / 4 = 0{,}0045$; $x = \dfrac{70 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}$=-2,5;

б) $P(B)$=$P_{100}(k \le 70) = P_{100}(0{,}70) \approx \Phi(x_1) - \Phi(x_4) = 0{,}006$; $x_1 = -2{,}5$, $x_4 = -20$;

в) $P(C)$=$P_{100}(k \ge 80) = P_{100}(80{,}100) \approx \Phi(x_3) - \Phi(x_2) = 0{,}5$; $x_3 = 5$;

д) $P(E)$=$P_{100}(70{,}80) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0{,}494$, $x_2 = 0$.

Ниже приведена копия файла, в котором сделаны вычисления в системе Mathcad.

$n := 100$, $k1 := 70$, $k2 := 80$,

$p := 0.8$, $q := 1 - p$,

$x1 := \dfrac{k1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$, $x2 := \dfrac{k2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$, $x3 := \dfrac{n - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$, $x4 := \dfrac{0 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$,

$x1 = -2.5$, $x2 = 0$, x3=5, x4 = -20

$\mathrm{pnorm}(x2, 0, 1) - \mathrm{pnorm}(x1, 0, 1) = 0.494$, $\mathrm{dnorm}(x1, 0, 1) = 0.018$

$\mathrm{pnorm}(x3, 0, 1) - \mathrm{pnorm}(x2, 0, 1) = 0.5$,

$\mathrm{pnorm}(x1, 0, 1) - \mathrm{pnorm}(x4, 0, 1) = 6.21 \times 10^{-3}$,

или другой вариант

$\Phi(x) := \mathrm{pnorm}(x, 0, 1) - 0.5$,

$P(k1, k2) := \Phi(x2) - \Phi(x1)$.

$\Phi(x1) = -0.494$, $\Phi(x2) = 0$,

$P(k1, k2) = 0.494$,

$\Phi(x3) = 0.5$, $\Phi(x4) = -0.5$,

$\Phi(x3) - \Phi(x2) = 0.5$, $\Phi(x1) - \Phi(x4) = 6.21 \times 10^{-3}$.

с) *n*=1000, поскольку n велико, p - мало, а произведение $\lambda = n \cdot p$ - небольшое число, то вместо формулы Бернулли для определения вероятности $P_n(k)$ появления k раз некоторого события в серии n независимых испытаний удобнее использовать формулу Пуассона:

$$P_n(k) \approx \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k!.$$

В нашей задаче n =1000, k =6, p =0,003, $\lambda = 1000 \cdot 0{,}003 = 3$, поэтому $P_{1000}(6) = 3^6 \cdot e^{-3} / 6!$ =0,05.

При вычислении можно использовать таблицу значений функции $p(k, \lambda) = \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k!$, приводимую в некоторых учебниках, или функцию dpois в

Mathcad. Ниже приведена копия файла, в котором проведены вычисления в Mathcad:

$p(k,\lambda) := \mathrm{dpois}(k,\lambda)$,

$p(6,3) = 0.05$.

6. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

X	0	10	20	30	40	50
P	0,05	0,15	0,3	0,25	0,2	0,05

Найти:

а) функцию распределения $F(x)$, построить график $F(x)$;

б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду;

в) вероятность попадания X в интервал (15;45).

Решение:

а) функция распределения $F(x)$ (интегральная функция распределения) случайной величины X определяет вероятность события $X< x$. Для дискретной случайной величины она находится по формуле $F(x) = P(X < x) = \sum\limits_{x_i < x} p_i =$ $= \sum\limits_{x_i < x} P(X = x_i)$, где суммирование ведётся по всем i, для которых $x_i < x$.

Итак,

- если $x \le 0$, то $F(x) = P(X < 0) = 0$;
- если $0 < x \le 10$, то $F(x) = P(X = 0) = 0{,}05$;
- если $10 < x \le 20$, то $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) = 0{,}05 + 0{,}15 = 0{,}2$;
- если $20 < x \le 30$, то $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$;
- если $30 < x \le 40$, то: $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30) =$ $= 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75$;
- если $40 < x \le 50$, то $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30) +$ $+ P(X = 40) = 0{,}75 + 0{,}2 = 0{,}95$;
- если $x > 50$, то $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30) +$ $+ P(X = 40) + P(X = 50) = 0{,}95 + 0{,}05 = 1$.

Таким образом, $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0 \\ 0{,}05, & \text{если } 0 < x \le 10 \\ 0{,}2, & \text{если } 10 < x \le 20 \\ 0{,}5, & \text{если } 20 < x \le 30 \\ 0{,}75, & \text{если } 30 < x \le 40 \\ 0{,}95, & \text{если } 40 < x \le 50 \\ 1, & \text{если } x > 50 \end{cases}$.

График построен в системе Mathcad (см. ниже).

б) найдём числовые характеристики. Для дискретной случайной величины математическое ожидание равно сумме произведений всех её возможных значений на вероятности этих значений: $M(X)=\sum_i x_i p_i$. Поэтому

$M(X)=0\cdot 0{,}15+10\cdot 0{,}15+20\cdot 0{,}3+30\cdot 0{,}25+40\cdot 0{,}2+50\cdot 0{,}05=25{,}5$.

Дисперсия случайной величины X находится либо по формуле $D(X)=M[X-M(X)]^2$, либо по формуле $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$. Для дискретной случайной величины эти формулы перепишутся так: $D(X)=\sum_i (x_i-M(X))^2\cdot p_i$ или $D(X)=\sum_i x_i^2 p_i-(\sum_i x_i p_i)^2$. Среднее квадратическое отклонение равно $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}$; мода дискретной случайной величины (обозначается M_0) – это её значение, принимаемое с наибольшей вероятностью; вероятность попадания X в интервал $(a;b)$ находится по формуле $P(a;b)=F(b)-F(a)$. В нашей задаче эти величины равны:

$$D(x)=154{,}75;\ \sigma(x)=\sqrt{154{,}75}=12{,}44;\ M_0=20;$$

$$P(15;45)=F(45)-F(15)=0{,}75.$$

Ниже приведена копия файла, в котором сделаны вычисления в системе Mathcad, причём вычисление дисперсии проведено по обеим формулам:

$ORIGIN \equiv 1$ $\quad s := (0\ \ 10\ \ 20\ \ 30\ \ 40\ \ 50)$,

$M := s^T \cdot p^T$, $\quad p := (0.05\ \ 0.15\ \ 0.3\ \ 0.25\ \ 0.2\ \ 0.05)$,

$M = 25.5$,

$s0 := s^T - M$,

$$s0 = \begin{pmatrix} -25.5 \\ -15.5 \\ -5.5 \\ 4.5 \\ 14.5 \\ 24.5 \end{pmatrix},$$

$D := \left[\overrightarrow{(s0\cdot s0)}\right]^T \cdot p^T$,

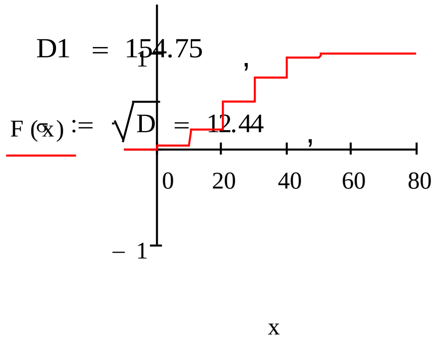
$D = 154.75$,

$s2 := \left(0^2\ \ 10^2\ \ 20^2\ \ 30^2\ \ 40^2\ \ 50^2\right)$,

$D1 := s2^T \cdot p^T - M^2$,

$D1 = 154.75$,

$\sigma := \sqrt{D} = 12.44$,



$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \le 0 \\ 0.05 & \text{if } 0 < x \le 10 \\ 0.2 & \text{if } 10 < x \le 20 \\ 0.5 & \text{if } 20 < x \le 30 \\ 0.75 & \text{if } 30 < x \le 40 \\ 0.95 & \text{if } 40 < x \le 50 \\ 1 & \text{if } x > 50 \end{cases}$$,

$F(45) - F(15) = 0.75$.

7. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0 \\ \frac{2}{9}(3x - x^2), & \text{если } 0 < x \le 3 \\ 0, & \text{если } x > 3 \end{cases}.$$

Найти:

а) функцию распределения $F(x)$;

б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду, медиану;

в) вероятность попадания X в интервал (1;4).

Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

Решение:

а) функцию распределения находим по формуле $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Итак:

- если $x \le 0$, то $f(x) = 0$, поэтому $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx = 0$;

- если $0 < x \le 3$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{x} \frac{2}{9}(3x - x^2)dx$ = - $\frac{x^2(2x-9)}{27}$;

- если $x > 3$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{3} \frac{2}{9}(3x - x^2)dx + \int_{3}^{x} 0\,dx = 1$.

Таким образом, искомая функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ если \quad x \le 0 \\ -\frac{x^2(2x-9)}{27}, \ если \quad 0 < x \le 3 \\ 1, \ если \quad x > 3 \end{cases};$$

б) числовые характеристики непрерывных случайных величин находятся по формулам: математическое ожидание - $M(x) = \int_{-\infty(a)}^{\infty(b)} xf(x)dx$; дисперсия - $D(x) = \int_{-\infty(a)}^{\infty(b)} (x - M(x))^2 f(x)dx$ или $D(x) = \int_{-\infty(a)}^{\infty(b)} x^2 f(x)dx - [M(x)]^2$ (пределы интегрирования зависят от того, принадлежат ли возможные значения случайной величины всей оси *OX* или интервалу (*a;b*)); среднее квадратическое отклонение - $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$. Модой непрерывной случайной величины X называется то её значение M_o, при котором плотность распределения максимальна. Медианой непрерывной случайной величины X называется такое её значение M_e, для которого одинаково вероятно, окажется ли случайная величина меньше или больше M_e, то есть $P(X < M_e) = P(X > M_e) = 0{,}5$.

Таким образом, в нашей задаче $M(x) = \int_{0}^{3} 2/9x(3x - x^2)dx$ =1,5; $D(x) = \int_{0}^{3} x^2 \cdot 2/9(3x - x^2)dx - 1{,}5^2 =$ 0,45; $\sigma(X) = \sqrt{0{,}45}$ = 0,671.

Для определения моды надо найти максимум функции $f(x) = 2/9(3x - x^2)$ на отрезке [0; 3]. Для этого находим производную и приравниваем её к нулю: $f'(x) = 2/3 - 4x/9$, $f'(x) = 0$ при *x*=3/2 - эта точка критическая. Проверяем её на экстремум: $f'(1) > 0$, $f'(2) < 0$. Итак, при переходе через точку *x*=3/2 знак производной сменился с плюса на минус, значит, *x*=3/2 точка максимума, поэтому M_o = 3/2. Заметим, что если $f(x)$ линейная функция, то её экстремумы находятся на концах отрезка [*a;b*], и максимум проще найти по графику $f(x)$.

Медиану находим из условия $P(X < M_e) = 0{,}5$, где $P(X < M_e) =$ $= P(-\infty < X < M_e) = P(0 < X < M_e)$. Так как $P(0 < X < M_e) = \int_{0}^{M_e} 2/9(3x - x^2)dx$ = = -$M_e^2(2M_e - 9)/27$, то, решая уравнение -$M_e^2(2M_e - 9)/27$ =0,5, получим три корня, из которых подходит один: M_e = 1,5;

в) вероятность попадания X в интервал (1;4) равна $P(1 < X < 4) = P(1 < X < 3) + P(3 < X < 4) = \int_1^3 2/9(3x - x^2)dx + \int_3^4 0\,dx = $ 0,741

или $P(1 < X < 4) = F(4) - F(1) = 1 - \left(-\frac{1\cdot(2-9)}{27}\right) = \frac{20}{27}$ = 0,74.

Ниже приведёна копия файла с вычислениями в системе Mathcad.

$$f(x) := \frac{2}{9}\cdot\left(3\cdot x - x^2\right), \qquad \sqrt{\frac{9}{20}} = 0.671,$$

$$\int_0^3 x\cdot f(x)\,dx \to \frac{3}{2} = 1.5, \qquad \int_0^3 x^2\cdot f(x)\,dx - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \to \frac{9}{20} = 0.45,$$

$$\frac{d}{dx}f(x) \to \frac{2}{3} - \frac{4\cdot x}{9}, \qquad f1(x) := \frac{d}{dx}f(x),$$

$$\int_0^y f(x)\,dx \to -\frac{y^2\cdot(2\cdot y - 9)}{27}, \qquad f1(x)\ \text{solve} \to \frac{3}{2},$$

$$f1(1) = 0.222, \qquad f1(2) = -0.222,$$

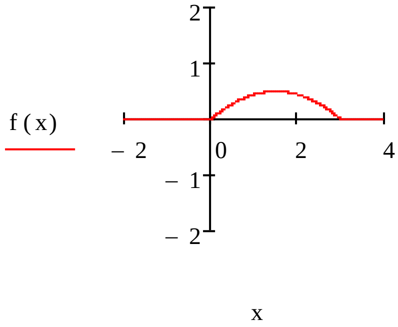
$$-\frac{y^2\cdot(2\cdot y - 9)}{27} - 0.5\ \text{solve} \to \begin{pmatrix} 4.0980762113533159403 \\ -1.0980762113533159403 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.098 \\ -1.098 \\ 1.5 \end{pmatrix}.$$

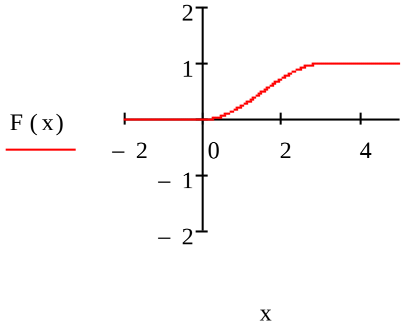
$$\int_1^3 f(x)\,dx \to \frac{20}{27} = 0.741, \qquad f2(x) := -\frac{x^2\cdot(2\cdot x - 9)}{27},$$

$$f2(1) = 0.259, \qquad 1 - 0.259 = 0.741.$$

Графики функций $F(x)$ и $f(x)$ построим в системе Mathcad:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \le 0 \\ \left[\frac{2}{9}\cdot\left(3\cdot x - x^2\right)\right] & \text{if } 0 < x \le 3 \\ 0 & \text{if } x > 3 \end{cases}, \qquad F(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \le 0 \\ \frac{x^2\cdot(9 - 2\cdot x)}{27} & \text{if } 0 < x \le 3 \\ 1 & \text{if } x > 3 \end{cases},$$





8. Биномиальное распределение (вариант *a*). Распределение Пуассона (вариант *b*).

Изделие состоит из *N* элементов. Вероятность отказа одного элемента в течение некоторого времени равна *p* и не зависит от состояния других элементов. Составить закон распределения числа отказавших элементов (случайная величина *X*). Для вариант *a* найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины; для вариант *b* найти вероятность отказа не менее 2 элементов за указанное время.

Решение:

a) *N*=6, *p*=0,25, дискретная случайная величина *X* – число отказавших элементов. Её возможные значения: $x_1 = 0$ (нет отказавших элементов), $x_2 = 1$ (один отказавший элемент) и т.д. $x_7 = 6$ (шесть отказавших элементов). Возможные значения независимы, и вероятность появления каждого из них одинакова, поэтому случайная величина *X* распределена по биномиальному закону: $P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $k = 0,1,2,\ldots,6$, *p*=0,25, $q = 1 - p$ =0,75, $n = 6$.

Итак, $P(X = 0) = P_6(0) = C_6^0 0{,}25^0 0{,}75^6$ =0,178;

$P(X = 1) = P_6(1) = C_6^1 0{,}25^1 0{,}75^5$ =0,356; $P(X = 2) = P_6(2) = C_6^2 0{,}25^2 0{,}75^4$ =0,297;

$P(X = 3) = P_6(3) = C_6^3 0{,}25^3 0{,}75^3$ =0,132; $P(X = 4) = P_6(4) = C_6^4 0{,}25^4 0{,}75^2$ =0,033;

$P(X = 5) = P_6(5) = C_6^5 0{,}25^5 0{,}75^1$ =0,004; $P(X = 6) = P_6(6) = C_6^6 0{,}25^6 0{,}75^0$ =0,0002.

Искомый закон распределения:

X	0	1	2	3	4	5	6
p	0,178	0,356	0,297	0,132	0,033	0,004	0,0002

Числовые характеристики биномиального распределения можно определить по известным формулам для дискретных случайных величин:

$M(X) = \sum_i x_i p_i$, $D(X) = \sum_i (x_i - M(X))^2 \cdot p_i$ или $D(X) = \sum_i x_i^2 p_i - (\sum_i x_i p_i)^2$.

Однако проще воспользоваться свойствами математического ожидания и дисперсии, когда *X* – число появления события в *n* испытаниях: $M(X) = np$,

$D(X) = npq$. Итак, в нашем случае $M(X) = 6 \cdot 0{,}25 = 1{,}5$, $D(X) = 6 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 1{,}125$. $\sigma(x) = \sqrt{D(X)} \approx 1{,}06$.

Ниже приведена копия файла из Mathcad с вычислениями.

$C(Q, R) := \text{combin}(Q, R)$;

$C(6,0)\cdot 0.25^0 \cdot 0.75^6 = 0.178$;

$C(6,1)\cdot 0.25^1 \cdot 0.75^5 = 0.356$;

$C(6,2)\cdot 0.25^2 \cdot 0.75^4 = 0.297$;

$C(6,3)\cdot 0.25^3 \cdot 0.75^3 = 0.132$;

$C(6,4)\cdot 0.25^4 \cdot 0.75^2 = 0.033$;

$C(6,5)\cdot 0.25^5 \cdot 0.75^1 = 4.395 \times 10^{-3}$;

$C(6,6)\cdot 0.25^6 \cdot 0.75^0 = 2.441 \times 10^{-4}$.

Анализ биномиального распределения удобно проводить в среде Mathcad с использованием специальных функций с корневым словом binom (dbinom, pbinom, qbinom, rbinom). Например, функция dbinom(*k*,*n*,*p*) выводит значения вероятностей и т.д;

b) *N*=1000, *p*=0,001, в этом случае дискретная случайная величина *X* – число отказавших элементов распределена по закону Пуассона (предельный для биномиального закон распределения, когда вероятность *p* появления события в каждом испытании мала, а число *n* проводимых испытаний велико):

$P(X = k) = P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, где $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}001 = 1$, $k = 0,1,2,\ldots,1000$, $n = 1000$.

Таким образом, $P(X = 0) = P_{1000}(0) \approx \frac{1^0}{0!} e^{-1} = 0{,}368$;

$P(X = 1) = P_{1000}(1) \approx \frac{1^1}{1!} e^{-1} = 0{,}368$; $P(X = 2) = P_{1000}(2) \approx \frac{1^2}{2!} e^{-1} = 0{,}184$;

$P(X = 3) = P_{1000}(3) \approx \frac{1^3}{3!} e^{-1}$ 0,061, и т.д. $P(X = 10) = P_{1000}(10) \approx \frac{1^{10}}{10!} e^{-1} = 0{,}0000001$ и т.д. Искомый закон распределения:

X	0	1	2	3	…	10	…
p	0,368	0,368	0,184	0,061	…	0,0000001	…

Вероятность отказа не менее двух элементов вычисляется по формуле:

$$P(X \geq 2) = \sum_{k=2}^{1000} P_{1000}(k) \text{ или } P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) =$$

$$= 1 - 0{,}368 - 0{,}368 = 0{,}264.$$

Ниже приведена копия файла из Mathcad с вычислениями:

$p(k, \lambda) := \text{dpois}(k, \lambda)$

$p(0,1) = 0.368$

$p(1,1) = 0.368$

$p(2,1) = 0.184$

$p(3,1) = 0.061$

$p(4,1) = 0.015$

$p(5,1) = 3.066 \times 10^{-3}$

$p(10,1) = 1.014 \times 10^{-7}$

$p(1000,1) = 0$

В среде Mathcad закону распределения Пуассона соответствуют специальные функции с корневым словом pois (dpois, ppois, qpois, rpois). Например, функция dpois(k,n,p) выводит значения вероятностей и т.д.

9. Равномерное распределение.

Вариант *a*.

Цена деления измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляются до ближайшего целого деления. Случайная величина X – ошибка при округлении отсчёта.

Вариант *b*.

Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 минут. Случайная величина X – время ожидания автобуса.

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание, дисперсию;

г) вероятность того, что при отсчёте будет сделана ошибка меньшая (большая) 0,04 (для варианта *a*).

д) вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать автобус менее (более) 3 минут (для варианта *b*).

Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

Решение:

a) случайная величина X –ошибка при округлении отсчёта распределена равномерно между двумя целыми делениями; $b-a=0{,}2$ – длина интервала, в котором заключены возможные значения X. Для равномерного распределения имеют место формулы:

- $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & если \quad x\in(a,b)\\ 0, & если \quad x\notin(a,b)\end{cases}$ - плотность распределения;

- $F(x)=\begin{cases}0, & если \quad x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & если \quad a<x\le b\\ 1, & если \quad x>b\end{cases}$ - функция распределения;

- $M(X)=\dfrac{a+b}{2}$ - математическое ожидание;

- $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$ - дисперсия;

- $P(\alpha<X<\beta)=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$ - вероятность попадания в интервал (α,β).

Поэтому в нашей задаче:

а) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{0{,}2} = 5, \ \textit{если} \quad x \in (0;0{,}2) \\ 0, \ \textit{если} \quad x \notin (0;0{,}2) \end{cases};$

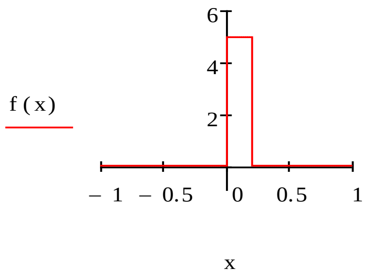
б) $F(x) = \begin{cases} 0, \ \textit{если} \quad x \le 0 \\ \dfrac{x}{0{,}2} = 5x, \ \textit{если} \quad 0 < x \le 0{,}2 \\ 1, \ \textit{если} \quad x > 0{,}2 \end{cases};$

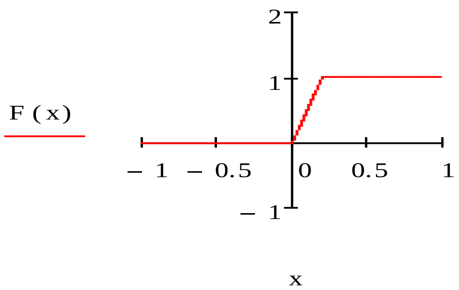
в) $M(X) = \dfrac{0{,}2 + 0}{2} = 0{,}1$; $D(X) = \dfrac{(0{,}2 - 0)^2}{12} = 0{,}003$;

г) ясно, что при отсчёте будет сделана ошибка, меньшая 0,04, если она попадёт в интервал (0; 0,04) или в интервал (0,16; 0,2) (событие A), то есть вероятность этого события равна $P(A) = P(0 < X < 0{,}04) + P(0{,}16 < X < 0{,}2) =$ $= \dfrac{0{,}04 - 0}{0{,}2} + \dfrac{0{,}2 - 0{,}16}{0{,}2}$ =0,4; при отсчёте будет сделана ошибка большая 0,04, если она попадёт в интервал (0,04; 0,16) (событие B), то есть вероятность этого события равна $P(B) = P(0{,}04 < X < 0{,}16) = \dfrac{0{,}16 - 0{,}04}{0{,}2}$ =0,6 или $P(B) = 1 - P(A)$.

Построим графики $F(x)$ и $f(x)$ в системе Mathcad.

$$f(x) := \begin{vmatrix} 0 & \text{if} & x \le 0 \\ 5 & \text{if} & 0 < x \le 0.2 \\ 0 & \text{if} & x > 0.2 \end{vmatrix} \qquad F(x) := \begin{vmatrix} 0 & \text{if} & x \le 0 \\ (5 \cdot x) & \text{if} & 0 < x \le 0.2 \\ 1 & \text{if} & x > 0.2 \end{vmatrix}$$





b) случайная величина X – время ожидания автобуса распределена равномерно между двумя последовательными прибытиями автобуса; $b - a = 5$ – длина интервала, в котором заключены возможные значения X. Формулы для равномерного распределения приведены выше.

В этом варианте:

а) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5} = 0{,}2, \ \textit{если} \quad x \in (0;5) \\ 0, \ \textit{если} \quad x \notin (0;5) \end{cases};$

б) $F(x)=\begin{cases} 0, & если \quad x \le 0 \\ \dfrac{x}{5}=0{,}2x, & если \quad 0 < x \le 5; \\ 1, & если \quad x > 5 \end{cases}$

в) $M(X)=\dfrac{5+0}{2}=2{,}5$; $D(X)=\dfrac{(5-0)^2}{12}=2{,}08$;

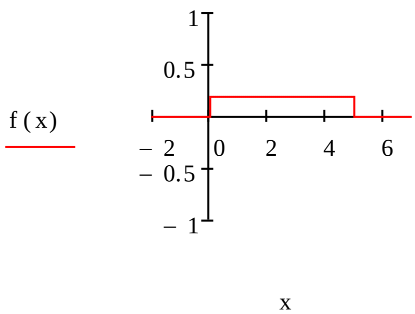
г) ясно, что пассажир будет ждать автобуса менее 3 минут, если он подойдёт к остановке в интервал времени (0; 3) или, что всё равно, в интервал (2; 5) (событие *A*), то есть вероятность этого события равна

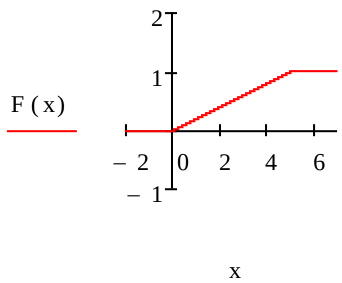
$$P(A)=P(0<X<3)=\frac{3-0}{5}=0{,}6.$$

Пассажир будет ждать автобуса более 3 минут, если он подойдёт к остановке в интервал времени (0; 2) или, что всё равно, в интервал (3; 5) (событие *B*), то есть вероятность этого события равна $P(B)=P(3<X<5)==\dfrac{5-3}{5}=0{,}4$ или $P(B)=1-P(A)$.

Построим графики $F(x)$ и $f(x)$ в системе Mathcad.

$$f(x):=\begin{vmatrix} 0 \quad \text{if} \quad x \le 0 \\ 0.2 \quad \text{if} \quad 0 < x \le 5 \\ 0 \quad \text{if} \quad x > 5 \end{vmatrix} \qquad F(x):=\begin{vmatrix} 0 \quad \text{if} \quad x \le 0 \\ (0.2 \cdot x) \quad \text{if} \quad 0 < x \le 5 \\ 1 \quad \text{if} \quad x > 5 \end{vmatrix}$$





В среде Mathcad равномерному закону распределения соответствуют специальные функции с корневым словом unif: dunif(*x*,*a*,*b*)– выводит значения плотности распределения; punif(*x*,*a*,*b*) – выводит значения функции распределения; runif(*n*,*a*,*b*) – выводит массив из *n* значений независимых случайных чисел, распределённых равномерно в интервале (*a*,*b*).

10. Показательное распределение. Случайная величина *T* - время безотказной работы элемента, λ =0,5 - интенсивность отказов, то есть среднее число отказов в единицу времени.

Найти:

а) плотность распределения $f(t)$;

б) функцию распределения $F(t)$, указать её вероятностный смысл;

в) функцию надёжности $R(t)$, указать её вероятностный смысл;

г) математическое ожидание, дисперсию;

д) вероятность того, что за время t =5ч. элемент откажет (событие A) и вероятность того, что за время t =5ч. элемент не откажет (событие B).

Построить графики $F(t)$, $R(t)$ и $f(t)$.

Решение: показательным называют закон распределения непрерывной случайной величины X с плотностью $f(x)=\begin{cases} 0, & если \quad x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & если \quad x \ge 0 \end{cases}$. Другие понятия и формулы для показательного распределения: $F(x)=\begin{cases} 0, & если \quad x<0 \\ 1-e^{-\lambda x}, & если \quad x \ge 0 \end{cases}$ - функция распределения; если случайная величина X = T – время безотказной работы элемента, то $F(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t}$ определяет вероятность отказа элемента за время t; $R(t)=P(T>t)=e^{-\lambda t}$ – функция надёжности, определяет вероятность безотказной работы элемента за время t:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\ \sigma(X)=\frac{1}{\lambda};\ P(\alpha<X<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}.$$

В нашей задаче, учитывая то, что $t \ge 0$, имеем:

а) $f(t)=0{,}5e^{-0{,}5t}$;

б) $F(t)=P(T<t)=1-e^{-0{,}5t}$ определяет вероятность отказа элемента за время t;

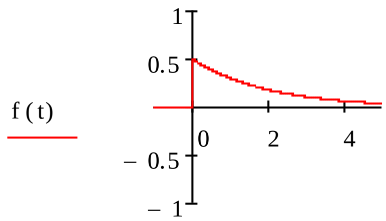
в) $R(t)=e^{-0{,}5t}$ определяет вероятность безотказной работы элемента за время t;

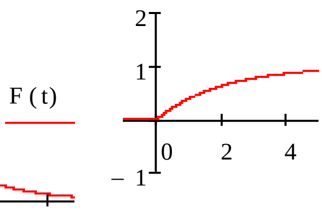
г) $M(X)=\frac{1}{0{,}5}=2$; $D(X)=\frac{1}{0{,}5^2}=4$;

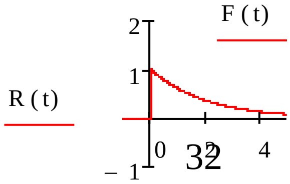
д) поскольку функция распределения определяет вероятность отказа за время t, то, подставив в неё t=5, получим вероятность отказа за время t=5ч: $P(A)$ $=F(5)=1-e^{-0{,}5\cdot 5}=1-e^{-2{,}5}$=0,918; события «элемент откажет» и «элемент не откажет» - противоположные, поэтому вероятность безотказной работы элемента за время t=5 равна $P(B)$ =1-0,918=0,082. Этот же результат можно получить непосредственно, пользуясь функцией надёжности: $R(5)=e^{-0{,}5\cdot 5}=e^{-2{,}5}$=0,082.

Построим графики $F(t)$, $R(t)$ и $f(t)$ и сделаем некоторые вычисления в системе Mathcad:

$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t<0 \\ 0.5\cdot e^{-0.5\cdot t} & \text{if } t \ge 0 \end{cases}$ $\qquad F(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t<0 \\ 1-e^{-0.5\cdot t} & \text{if } t \ge 0 \end{cases}$







$R(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t<0 \\ e^{-0.5\cdot t} & \text{if } t \ge 0 \end{cases}$

t t t

$e^{-2.5} = 0.082$

В среде Mathcad показательному закону распределения соответствуют специальные функции с корневым словом exp: dexp(x, λ) выводит значения плотности распределения; pexp(x, λ) выводит значения функции распределения; rexp(n, λ) выводит массив из n значений независимых случайных чисел, распределённых по показательному закону с параметром λ.

$$1 - e^{-2.5} = 0.918$$

11. Нормальный закон распределения. Производится взвешивание некоторого вещества. Случайные ошибки взвешивания (случайная величина X) подчинены нормальному закону распределения с параметрами a=10 и σ =2.

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание, дисперсию;

г) вероятность попадания в интервал $(12; 14)$;

д) вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине δ =3.

Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

Решение: нормальным называют закон распределения непрерывной случайной величины X с плотностью:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $a = M(X)$ – математическое ожидание;

$\sigma = \sigma(X)$ – среднее квадратическое отклонение X.

Другие понятия и формулы для нормального распределения:

- $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left[\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}\right]dt$ или $F(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) + 0{,}5$ - функция распределения, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа, её значения табулированы или их можно определить в системе Mathcad ;

- $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$ - вероятность попадания в интервал $(\alpha; \beta)$;

- $P(|X-a|\le\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ - вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидания не более чем на δ .

В нашей задаче:

а) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}$;

б) $F(x)=\Phi\left(\frac{x-10}{2}\right)+0{,}5$;

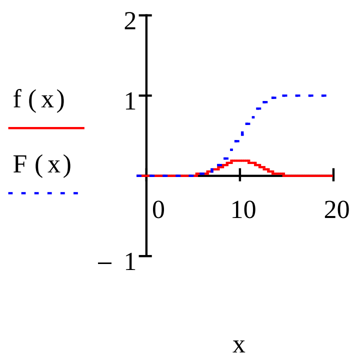
в) $M(X)=a=10$, $\sigma(X)=\sigma=2$, $D(X)=\sigma^2=4$;

г) $P(12<X<14)=\Phi\left(\frac{14-10}{2}\right)-\Phi\left(\frac{12-10}{2}\right)=\Phi(2)-\Phi(1)$=0,4772-0,3413=0,1359;

д) $P(|X-10|\le 3)=2\Phi\left(\frac{3}{2}\right)=2\Phi(1{,}5)$=0,4332.

Здесь значения функции Лапласа взяты из таблицы, хотя их можно было бы найти в системе Mathcad, где нормальному закону распределения соответствуют функции, имеющие в названии корневое слово norm и начинающиеся с букв d, p, q, r. Например, dnorm (x,a,σ) выводит значения плотности распределения $f(x)$; pnorm (x,a,σ) выводит значения функции распределения $F(x)$. Воспользуемся этими функциями для построения соответствующих графиков. Копия файла из Mathcad приведена ниже.

f(x) := dnorm (x,10,2)   F(x) := pnorm (x,10,2)



Список литературы

1 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 2003.- 279 с.

2 Севастьянов Б.А. Курс теории вероятносей и математической статистики.- М.: Наука, 1982.

3 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. школа, 1999. - 400 с.

4 Ивановский Р.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Основы, прикладные аспекты с примерами и задачами в среде Mathcad. - СПб.: БХВ- Петербург, 2008. – 528 с.

5 Письменный Д. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистики, случайные процессы. – М.: Айрис - пресс, 2006. – 288 с.

6 Сборник индивидуальных заданий для технических ВУЗов. Часть 2/ Под ред. В.Б. Миносцева, Е.А. Пушкаря.-2-е изд.- СПб.: Издательство «Лань», 2013.-320 с.

7 Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Теория вероятностей и математическая статистика. Конспект лекций для студентов специальности 5В070300 – «Информационные системы». - Алматы: АУЭС, 2014. - 35 с.

Содержание

Сводный план 2019 г., поз. 152

Астраханцева Людмила Николаевна
Байсалова Маншук Жумамуратовна

МАТЕМАТИКА 3

Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 5В070300- Информационные системы
Часть 2

Редактор Л.Т.Сластихина
Специалист по стандартизации Г.И.Мухаметсариева

Подписано в печать_______ Формат 60х84 1/16
Тираж 25 экз. Бумага типографская №1
Объем 2,1 уч.-из.л. Заказ______ цена 1050 тг.

Копировально-множительное бюро
некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013, Алматы, ул.Байтурсынова, 126/1