Коммерциялық емес акционерлік қоғам

АЛМАТЫ ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС УНИВЕРСИТЕТІ

Математикалық модельдеу және бағдарламалық қамтамасыз ету кафедрасы

МАТЕМАТИКА 3

5В070300 - Ақпараттық жүйелер мамандығы бойынша оқитын студенттер үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар

1 бөлім

Алматы 2019

ҚҰРАСТЫРУШЫЛАР: Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Математика 3. 5В070300 –Ақпараттық жүйелер мамандығы студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар. 1- бөлім - Алматы: АЭжБУ, 2019. - 23 б.

5В070300 – Ақпараттық жүйелер мамандығы студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар «Математика 3» пәнінің «Ықтималдықтар теориясының элементтері» тарауы бойынша №1 есептеу-сызба жұмыстарынан тұрады. Бағдарламаның теориялық сұрақтары енгізілген. Типтік нұсқаның шешімі келтірілген.

Кестелер- 14, без.- 11, әдеб.көрсеткіші – 4 атау.

Рецензент: ММҮ кафедрасының аға оқытушысы Абдулланова Ж.С.

«Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2019 ж. жоспары бойынша басылды

Кіріспе

Қатар ұғымы математикалық талдаудың негізгі ұғымдарына жатады. Ол математикалық талдаудың теориялық зерттеулерінде, ондағы кейбір ұғымдардың қалыптасуында, мысалы, көрсеткіштік және тригонометриялық комплекс айнымалылы функцияны анықтауда қолданылады. Қатар жуықтап есептеулерде жиі қолданылады: интегралдарды жуықтап есептеу, дифференциалдық теңдеулерді жуықтап шешу және т.с.с. Логарифмдерді, тригонометриялық функциялардың белгілі кестелері қатарды қолданып құрылған.

Студент өз вариантын топтағы тізімнен анықтай алады. Есептік- сызба жұмыс дәптерге жазылады. Есептік- сызба жұмыс анық, таза орындалуы керек.

1 Есептеу-сызба жұмыс №1. Қатарлар теориясының элементтері

Мақсаты: сандық және функционалдық қатарлардың негізгі ұғымдарын қарастыру: қатардың жинақтылығы және жинақсыздығы, қатардың қосындысы, жинақтылық радиусы, облысы ұғымдары. Қатардың жинақтылығын жинақтылық белгілері арқылы зерттеу.

1.1 Теориялық сұрақтар

1. Сандық қатарлар. Жинақтылық және қатардың қосындысы.
2. Жинақтылық белгілері. Қатардың жинақтылығының қажетті шарты.
3. Салыстыру белгілері.
4. Даламбер және Коши белгілері. Кошидің интегралдық белгісі.
5. Таңбасы ауыспалы қатарлар. Лейбниц теоремсы. Қатардың қалдығын бағалау.
6. Таңбасы айнымалы қатарлар. Абсолютті және шартты жинақты қатарлар.
7. Функциялық қатар. Жинақтылық облысы.
8. Бірқалыпты жинақты қатарлар және олардың қасиеттері.
9. Дәрежелік қатарлар. Абель теоремасы.
10. Тейлор қатарлары.

1.2 Есептік тапсырмалар

1. Берілген қатар үшін $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

а) қатардың a_n жалпы мүшесінің формуласын құру керек және алғашқы бес мүшесін жазу керек;

б) қатардың *n*-ші дербес қосындысын жазу керек S_n ;

в) қатардың қалдығын жазу керек r_n;

г) қатардың жинақтылығының қажетті шартын тексеру керек.

1.1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$	1.11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}$	1.21	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 5^n}$
1.2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{7^n}$	1.12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$	1.22	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}$
1.3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\ln(n+1)}$	1.13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n}$	1.23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+4^n}{10^n}$
1.4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)^2}$	1.14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^3+1}$	1.24	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n+5}}$
1.5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$	1.15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot(3n+3)}$	1.25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$
1.6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n+5}$	1.16	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(3n+1)}$	1.26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n}$
1.7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(5n+1)}$	1.17	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3^n}}$	1.27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(3n+1)}}$
1.8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n+2)}}$	1.18	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)^5}$	1.28	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-3)\cdot 6^n}$
1.9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[2]{(2n+1)}\cdot 3^n}$	1.19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2n+1)}$	1.29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2(n+1)}$
1.10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+2n-1)}$	1.20	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}$	1.30	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(2n+1)^2}$

2. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек:

а) берілген қатарды салыстырудың екінші белгісі бойынша $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ Дирихле қатарымен салыстырып;

б) салыстырудың бірінші белгісі бойынша.

2.1	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+2n-1)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^3(2+\sin^2 n)}$	2.11	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\cos^2 n}$	2.21	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(2n+1)^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2}{n^5+\sin\frac{1}{n}}$
2.2	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(5n+1)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^3(2-\cos^2 n)}$	2.12	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3+n^3}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^4(1+\sin^2 n)}$	2.22	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(3n^3+1)}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-2}{n^3(1+\sin^2 n)}$
2.3	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n+2)}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^4(2+\sin^2 n)}$	2.13	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)^5}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^4+\sin\frac{1}{n}}$	2.23	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-3)\cdot(6n-2)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^4(2-\cos^2 n)}$
2.4	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n-\cos^2 n}$	2.14	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^3+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^5(2-\cos^2 n)}$	2.24	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(3n+3)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3+\sin\frac{1}{n}}$
2.5	а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n-1)(n+2)}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+\sin^2 n}$	2.15	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^3+5}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{n^5+\sin\frac{1}{n}}$	2.25	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n^2+1}\right)^2$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n-\cos^2 3n}$

2.6	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(3n+1)^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^3(2-\cos^2 n)}$	2.16	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[5]{\frac{1}{3n^3+1}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^4(1+\sin^2 n)}$	2.26	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^4+5}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^4+\sin^2 n}$
2.7	а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n-1}(n^2+2)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^4(2+\sin^2 n)}$	2.17	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(3n^4+3)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^4(2-\cos^2 n)}$	2.27	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^5+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{n^5+\sin\frac{1}{n}}$
2.8	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(3n+1)^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n^5+\sin^2 n}$	2.18	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[4]{\frac{n}{3n^3+1}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-2}{n^3(1+\sin^2 n)}$	2.28	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^4(2-\cos^2 n)}$
2.9	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(3n-1)(4n^2+2)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+\sin^2 n}$	2.19	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+1}{(6n^6+3)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^3(2-\cos^2 n)}$	2.29	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^4(2+\sin^2 n)}$
2.10	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^3(2+\sin^2 n)}$	2.20	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n^3+1}\right)^4$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\cos^2 n}$	2.30	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(2n-1)^3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2}{n^5+\sin\frac{1}{n}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатарды Даламбер белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеу керек.

3.1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$	3.11	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{(n-1)!}$	3.21	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 5^n}$
3.2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{7^n}$	3.12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$	3.22	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n-1)^3}$
3.3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{(n+7)!}$	3.13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$	3.23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{10^n}$
3.4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)\cdot 3^n}$	3.14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{(n+2)!}$	3.24	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+10)^3}{5^n}$
3.5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}$	3.15	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{(n-1)!}$	3.25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n!}{\sqrt{(2n-1)}}$
3.6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{\sqrt{2^n}}$	3.16	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+3)!}{3^{n-1}}$	3.26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^2}{8^n}$
3.7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)}$	3.17	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{(n-1)!}$	3.27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(6n+1)\cdot 7^n}$
3.8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n+7}{2^n}$	3.18	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{(n+1)!}$	3.28	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n-1)(n+1)}$
3.9	$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n-1}{(n-2)!}$	3.19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-5}{5^{n/2}}$	3.29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^2}{10^n}$
3.10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n}{(n^2+7)}$	3.20	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!}{5^n(n-1)}$	3.30	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{(n-1)}}{10^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатарды Кошидің радикалдық белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеу керек.

4.1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$	4.11	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(tg\,\frac{\pi}{(2n-1)}\right)^{2n}$	4.21	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^n}{7^n}$
4.2	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln(n+3)}\right)^{3n}$	4.12	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\,\frac{1}{(n+1)}\right)^{n}$	4.22	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln(n+3)}\right)^{n}$

4.3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(\ln(n+2))^n}$	4.13	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-n-1}{7n^2+3n+4}\right)^n$	4.23	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n^3}\right)^{2n}$
4.4	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}$	4.14	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^n\cdot\frac{1}{5^n}$	4.24	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{2n+1}\right)^{2n}$
4.5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{(8n+14)^n}$	4.15	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{3^n}\right)^n$	4.25	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(tg\frac{\pi}{5^n}\right)^{3n}$
4.6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)^{3n}}$	4.16	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\left(\frac{n+1}{4n+1}\right)\right)^n$	4.26	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)^{2n}$
4.7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(\ln(n+5))^n}$	4.17	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5n-1}{7n^2+3n+4}\right)^n$	4.27	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{2n}$
4.8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^n7^n}{(n+14)^n}$	4.18	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{\pi}{2n-4}\right)^{3n}$	4.28	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{4^n}\right)^n$
4.9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n+5)^{3n}}$	4.19	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\left(\frac{5n+1}{4n+1}\right)\right)^n$	4.29	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{5n+1}\right)^n$
4.10	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{n+1}\right)^{n^2}$	4.20	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\ln(2n+3)}\right)^{3n}$	4.30	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-n-1}{n^2+3n-5}\right)^n$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ қатарды Кошидің интегралдық белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеу керек.

5.1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\ln(3n+1)}$	5.16	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}$
5.2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)\sqrt{\ln(5n+1)}}$	5.17	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)\ln^2(5n+1)}$
5.3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^4(n+2)}$	5.18	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)\sqrt[3]{\ln(4n+1)}}$
5.4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\sqrt{\ln(3n+1)}}$	5.19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+12)\ln^5(n+12)}$
5.5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)\sqrt{\ln^3(5n+1)}}$	5.20	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+5)\sqrt[3]{\ln(3n+5)}}$

5.6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+12)\sqrt[3]{\ln^2(n+12)}}$	5.21	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+5)\sqrt{\ln^3(5n+5)}}$
5.7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)\sqrt[3]{\ln^2(5n+1)}}$	5.22	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\sqrt{\ln^3(n+3)}}$
5.8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[3]{\ln^4(4n)}}$	5.23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\sqrt{\ln^5(3n+2)}}$
5.9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+12)\ln^3(2n+12)}$	5.24	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt{\ln^3(5n)}}$
5.10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^4(2n+1)}$	5.25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\sqrt[4]{\ln(n+2)}}$
5.11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(7n+1)\sqrt{\ln^7(7n+1)}}$	5.26	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{12}n}$
5.12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+6)\ln^8(n+6)}$	5.27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)\sqrt[3]{\ln^4(n+4)}}$
5.13	$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(2n-3)\ln(2n-3)}$	5.28	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+11)\sqrt[3]{\ln^5(n+11)}}$
5.14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)\sqrt{\ln^3(5n+1)}}$	5.29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\sqrt[6]{\ln(n+5)}}$
5.15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+12)\sqrt[3]{\ln^6(n+12)}}$	5.30	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-3)\sqrt{\ln^5(5n-3)}}$

6. Таңбалары ауыспалы қатарды $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ шартты немесе абсолютті жинақтылыққа зерттеу керек.

6.1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+1)^2}$	6.11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n^3+1}$	6.21	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+5}}$
6.2	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)(n+2)}$	6.12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)\cdot(3n+3)}$	6.22	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2n+1}$
6.3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{n^2+5}$	6.13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(3n+1)}$	6.23	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{3^n}$

6.4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{5n+1}}$	6.14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{3^n}}$	6.24	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{(3n+1)}}$
6.5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{(n+2)}}$	6.15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(5n+1)^5}$	6.25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+2)}{6^n}$
6.6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)}$	6.16	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$	6.26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{5^n}$
6.7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{7n\sqrt{n+5}}$	6.17	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(n+1)!}$	6.27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}$
6.8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[2]{(2n+1)}}$	6.18	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(2n+1)}$	6.28	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}}$
6.9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$	6.19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{5^n}$	6.29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{10^n}$
6.10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2+2n-1)}$	6.20	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 6^n}{(n-1)!}$	6.30	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{(2n+1)^2}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ функционалдық қатардың жалпы мүшесі берілген. Берілген қатарды x_0 нүктесінде жазып, алынған сандық қатарды жинақтылыққа зерттеу керек.

№	$u_n(x)$	x_0	№	$u_n(x)$	x_0
7.1	$\frac{2^n(x+1)^n}{n^3+2}$	-1/2	7.16	$\frac{(x-5)^n}{n!}$	-1
7.2	$\frac{(x-1)^{2n}}{n^2+1}$	3	7.17	$\frac{(n+1)^2 x^n}{4^n}$	-5
7.3	$\frac{(x-2)^n \sin\frac{\pi}{2^n}}{n}$	1	7.18	$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{3n}\frac{(x-5)^n}{5^n}$	4
7.4	$\frac{(x-3)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$	2	7.19	$(x-1)^n tg\,\frac{\pi}{4^n}$	-1
7.5	$\frac{(n+1)!(2x+1)^n}{\sqrt{n+1}}$	-3	7.20	$\frac{\sqrt{\ln(n+1)}\,x^n}{n+1}$	-1
7.6	$\frac{(2x+3)^n}{2^n\cdot n^2}$	-2	7.21	$\frac{(5x-6)^n}{(n+1)!}$	0

7.7	$\dfrac{(x+5)^{n^2}}{(n+1)^n}$	-6	7.22	$(x+1)^n \sin\dfrac{3\pi}{n^2+1}$	1
7.8	$\dfrac{(3x-1)^n}{5^n \cdot n}$	2	7.23	$\dfrac{(x+5)^{2n-1}}{2^n \cdot n}$	-3
7.9	$\dfrac{n\cdot(x+1)^n}{9^n}$	-2	7.24	$\dfrac{n!\cdot(4x-3)^n}{2^{n+1}}$	0
7.10	$n\cdot 5^n\cdot(3x+2)^{n+1}$	0	7.25	$4^n\cdot(x+1)^n$	1/8
7.11	$\dfrac{(n+1)^3\cdot x^n}{4^n}$	-5	7.26	$(x+1)^n tg\dfrac{1}{n}$	-2
7.12	$\dfrac{(5-x)^n}{1+n^3}$	6	7.27	$\dfrac{(x+10)^n\cdot 10^n}{(n+2)!}$	-11
7.13	$\dfrac{(2x+3)^n\cdot(n+1)^3}{5^{n+1}}$	-2	7.28	$\dfrac{x^{2n}}{n} tg\dfrac{\pi}{3^n}$	-6
7.14	$\dfrac{(3x+1)^n\cdot n!}{\sqrt{n^2+1}}$	2/3	7.29	$\dfrac{(4x+3)^n\cdot 2^n}{n}$	-1/4
7.15	$(x+5)^n\sin\dfrac{\pi}{n^2+1}$	-6	7.30	$\dfrac{(3-2x)^n}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$	1

8. Берілген дәрежелік қатардың жинақтылық радиусы мен нтервалын табу керек.

8.1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{(\ln(n+2))^n}$	8.16	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{4n}\right)^{3n}(x-3)^n$
8.2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\dfrac{\pi}{n^3}\right)^{2n}(x+1)^n$	8.17	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n^2}{7n^2+3n+4}\right)^n(x-2)^n$
8.3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{(n+3)}\right)^{3n}\cdot(2x-1)^n$	8.18	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n-2}{2n+1}\right)^{2n}(2x+1)^n$
8.4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7^n(x-3)^n}{(8n+14)}$	8.19	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\dfrac{1}{3^n}\right)x^n$
8.5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(tg\dfrac{\pi}{5^n}\right)^{3n}\cdot(x-1)^n$	8.20	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)\cdot 3^n}(x-1)^n$
8.6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{2n+1}}{n!}(5x+1)^n$	8.21	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+10)^3}{5^n}(3x-1)^n$

8.7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^n$	8.22	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4^{n-1}(x+1)^n}{\sqrt[3]{n-1}}$
8.8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{\sqrt{(2n-1)}}(x+2)^n$	8.23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{2^n}x^{2n}$
8.9	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+3)!x^n}{3^{n-1}}$	8.24	$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[5]{\frac{1}{3n^3+1}}(4x+1)^n$
8.10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^{2n}}{(n+1)}$	8.25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(3n+3)}(x-5)^n$
8.11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(6n+1)\cdot 7^n}$	8.26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n+7}{2^n}(2x+1)^n$
8.12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(3n+1)^2}(x+3)^n$	8.27	$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[5]{\frac{1}{3n^3+1}}(2x-3)^n$
8.13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)x^{2n}}{2^n(n^2+2)}$	8.28	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(3n+3)}x^n$
8.14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{3^n}x^n$	8.29	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n^3+1}\right)^n(5-2x)^n$
8.15	$\sum_{n=1}^{\infty}tg\,\frac{\pi}{6^n}(x+1)^n$	8.30	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(2x-3)^n}{(9n+14)^n}$

9. Белгілі жіктелулерді қолданып, $f(x)$ функциясының Маклорен қатарына жіктеңіз.

№	$f(x)$	№	$f(x)$	№	$f(x)$
9.1	$x\cdot\sin\sqrt{x}$	9.11	$\ln(4+3x)$	9.21	$\sqrt[3]{1-\frac{x}{2}}$
9.2	$x\cdot e^{-3x^2}$	9.12	$e^{-3\sqrt{x}}$	9.22	$\frac{1}{1+3x}$
9.3	$\frac{1-\cos 5x}{x^2}$	9.13	$x\cdot e^{-5x^2}$	9.23	$\ln(3+x)$
9.4	$\cos^2\frac{7}{3}x$	9.14	$\cos^2\frac{3x}{2}x$	9.24	$\frac{1}{1-3x^2}$
9.5	$\frac{\cos 5x}{x}$	9.15	$\sin^2\frac{2}{5}x$	9.25	$\sqrt{5-2x}$
9.6	$\frac{e^{-\sqrt{x}}}{x}$	9.16	$\sqrt{x}\cdot\cos\frac{2}{3}x$	9.26	$\ln(2+x)$

9.7	$1-e^{-3x}$	9.17	$\sqrt{4+2x}$	9.27	$\sin^2 \frac{4}{3}x$
9.8	$\sqrt[4]{1+x^4}$	9.18	$x^3 \cdot e^{-x^2}$	9.28	$2x \cdot \sin^2 \frac{x}{3}$
9.9	$\frac{1}{\sqrt{16+x^4}}$	9.19	$\sqrt{x} \cdot \sin^2 \frac{2}{3}x$	9.29	$\sqrt{9-x}$
9.10	$\sqrt{4-\frac{x}{2}}$	9.20	$\frac{\sin 4x}{x}$	9.30	$\sin^2 \frac{4}{3}x$

10. $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінің маңайында Тейлор қатарына жіктеудің алғашқы үш мүшесін табу керек.

№	$f(x)$	x_0	№	$f(x)$	x_0
10.1	$\sqrt{x}$	3	10.16	$\sin\frac{x}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
10.2	e^{-x}	2	10.17	$\frac{1}{x}$	-2
10.3	6^x	2	10.18	$\sqrt{x}$	4
10.4	$\ln(e^x+x)$	0	10.19	2^x	1
10.5	$x^3 \cdot \ln x$	1	10.20	e^x	-2
10.6	$\frac{1}{1-x}$	2	10.21	$\cos x$	$\frac{\pi}{4}$
10.7	$\sin x$	$\frac{\pi}{4}$	10.22	$\frac{1}{1+x}$	2
10.8	$\ln(2+x)$	1	10.23	3^x	3
10.9	e^{-2x}	-1	10.24	$x \cdot \ln x$	1
10.10	$\sqrt{x+1}$	2	10.25	$\frac{1}{x}$	2
10.11	$\ln^2 x$	1	10.26	$\cos x$	$\frac{\pi}{3}$
10.12	10^x	0	10.27	$\ln 3x$	2
10.13	$\sin x$	$\frac{\pi}{6}$	10.28	5^x	1
10.14	$\ln 2x$	-1	10.29	$\cos\frac{x}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
10.15	4^x	2	`0.30	$\ln(1-x)$	0

1.3 Типтік нұсқаның шешуі

1. Берілген қатар үшін $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 3^n}$:

а) қатардың a_n жалпы мүшесінің формуласын құру керек және алғашқы бес мүшесін жазу керек;

б) қатардың n-ші дербес қосындысын жазу керек S_n;

в) қатардың қалдығын жазу керек r_n;

г) қатардың жинақтылығының қажетті шартын тексеру керек.

Шешуі:

а) $a_n=\frac{1}{(2n-1)\cdot 3^n}$ - қатардың жалпы мүшесінің формуласы:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 3^n}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3^2}+\frac{1}{5\cdot 3^3}+\frac{1}{7\cdot 3^4}+\frac{1}{9\cdot 3^5}+\ldots\ ;$$

б) қатардың n-ші дербес қосындысы S_n оның алғашқы n мүшесінің қосындысына тең, яғни $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$. Сондықтан біздің жағыдайда:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3^2}+\frac{1}{5\cdot 3^3}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 3^n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)\cdot 3^k}\ ;$$

в) r_n қатардың қалдығы берілген қатардан алғашқы n мүшесін азайтқанда пайда болған қатар, яғни $r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k$ немесе $r_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{n+k}$, Сондықтан $r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)\cdot 3^k}$;

г) қатардың жинақтылығының қажетті шарты: егер $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ қатары жинақты болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$; біздің жағыдайда $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 3^n}=0$, олай болса, қатардың жинақтылығының қажетті шарты орындалады.

2. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек:

а) берілген $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{(2n-1)\cdot(n^2+1)}$ қатарды салыстырудың екінші белгісі бойынша $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ Дирихле қатарымен салыстырып;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+\sin^2 n}$ қатарын салыстырудың бірінші белгісі бойынша.

Шешуі:

1) Қатарды салыстырудың бірінші белгісі: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (1) және $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ (2) оң мүшелі екі қатар берілсін; осы қатарлардың сәйкес мүшелерінің арасында $a_n \le b_n$ (n=1,2,3,…) теңсіздігі орын алсын, онда (2) қатардың жинақтылығынан (1) қатардың жинақтылығы шығады; (1) қатардың жинақсыздығынан (2) қатардың жинақсыздығы шығады.

2) Қатарды салыстырудың екінші белгісі: егер (1) және (2) қатарлары үшін нөлден өзге $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$ шегі табылса, онда екі қатар бірмезгілде жинақты немесе жинақсыз болады:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ Дирихле қатарының жинақтылығы p параметріне байланысты: егер $p>1$, онда қатар жинақты, егер $p\le 1$, онда қатар жинақсыз. Берілген қатарды қай Дирихле қатарымен салыстыру керектігін білу үшін p параметрін келесі еремен табамыз: p – жалпы мүшенің бөлімінің дәрежесінен алымның дәреженің азайтқанға тең. Біздің жағыдайда $a_n=\frac{n^2-1}{(2n-1)\cdot(n^2+1)}$, алымның дәрежесі 2-ге тең, бөлімінің дәрежесі 3-ке тең, олай болса p = 3 – 2 = 1. Сонымен, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{(2n-1)\cdot(n^2+1)}$ берілген қатарды салыстырудың екінші белгісі бойынша Дирихле қатарымен салыстырамыз $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (бұл гармоникалық қатар, ол жинақсыз):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2-1}{(2n-1)\cdot(n^2+1)}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)\cdot n}{(2n-1)\cdot(n^2+1)}=\frac{1}{2}=const,$$

шек нөлден өзге тұрақты болғандықтан, онда екі қатар бірмезгілде жинақсыз.

б) $\sin^2 n<1$ болғандықтан, онда $n^2+\sin^2 n<n^2+1$ және $\frac{n}{n^2+\sin^2 n}>\frac{n}{n^2+1}$, бірақ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ қатары жинақсыз (салыстырудың екінші белгісі бойынша $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ қатарымен салыстырамыз (жинақсыз):

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot n}{n^2+1}=1=const$). Олай болса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+\sin^2 n}$ қатары да салыстырудың бірінші белгісі бойынша жинақсыз.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n+1)!}$ қатарды Даламбер белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеу керек.

Шешуі:

Даламбер белгісі: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ қатары үшін $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ шегін табамыз; егер $q<1$, онда қатар жинақты, егер $q>1$, онда қатар жинақсыз, егер $q=1$, бұл жағыдайда басқа белгімен зерттеу керек. Берілген қатары үшін $a_n=\frac{3^n}{(2n+1)!}$, $a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(2n+3)!}$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{(2n+3)!}}{\frac{3^n}{(2n+1)!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot(2n+1)!}{(2n+3)!\cdot 3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{(2n+2)\cdot(2n+3)}=0<1,$ олай болса, Даламбер белгісі бойынша жинақты.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(3n+1)^n}$ қатарды Кошидің радикалдық белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеу керек.

Шешуі:

Кошидің радикалдық белгісі: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ қатары үшін $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$ шегін табамыз; егер $q<1$, онда қатар жинақты, егер $q>1$, онда қатар жинақсыз, егер $q=1$, басқа белгімен зерттеу керек. Берілген қатары үшін $a_n=\frac{5^n}{(3n+1)^n}$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{5^n}{(3n+1)^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{(3n+1)}=0<1,$ олай болса, Кошидің радикалдық белгісі бойынша жинақты.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln(2n+1)}$ қатарды Кошидің интегралдық белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеу керек.

Шешуі:

Кошидің интегралдық белгісі: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатарының барлық мүшелері оң және өспейтін, яғни $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ...$ және $a_n = f(n)$ үзіліссіз, өспелі емес функция болсын, онда берілген қатар және меншіксіз интеграл $\int_1^{\infty} f(n)dn$ бірмезгілде жинақты немесе жинақсыз болады. Берілген қатар үшін $a_n = f(n) = \frac{1}{(2n+1)\ln(2n+1)}$. Қатардың барлық мүшелері оң және өспелі емес; меншіксіз интегралды зерттейміз $\int_1^{\infty} f(n)dn$:

$$\int_1^{\infty} f(n)dn = \int_1^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln(2n+1)}dn = \left| \begin{array}{l} t = \ln(2n+1) \to dt = \dfrac{2}{(2n+1)}dn \\ n = 1 \to t = \ln 3; \quad n = \infty \to t = \infty \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_{\ln 3}^{\infty} \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t|\Big|_{\ln 3}^{\infty} = \frac{1}{2}\left(\ln\infty - \ln|\ln 3|\right) = \infty,$$ яғни меншіксіз интеграл $\int_1^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln(2n+1)}dn$ жинақсыз. Сондықтан берілген қатар да жинақсыз.

6. Таңбалары ауыспалы қатарды $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ шартты немесе абсолютті жинақтылыққа зерттеу керек.

Таңбалары ауыспалы қатар үшін үш мүмкін варианттар бар: қатар абсолютті жинақты; қатар шартты жинақты; қатар жинақсыз.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатарын жинақтылыққа зерттеуді (бұл қатардың мүшелерінің таңбалары ауысып отырады) келесі жоспар бойынша жүргізуге болады:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (*) қатарын құру; (*) қатарын оң қатарлардың жинақтылық белгілерінің біреуі бойынша жинақтылыққа зерттеу.

2) Егер (*) жинақты болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютті жинақты (соңы); егер (*) жинақсыз болса, онда зерттеуді жалғастырамыз.

3) Лейбниц шарттарының орындалуын тексеру керек: $|a_1| > |a_2| > |a_3| > ...$ және $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$; егер бұл шарттар орындаоса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

шартты жинақты (соңы); егер Лейбниц шарттары орындалмаса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақсыз (соңы).

Үш қатарды шартты немесе абсолютті жинақтылыққа зерттейміз:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)^{\frac{5}{3}}}$.

Шешуі: (*) қатарын құрамыз $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(n+2)^{\frac{5}{3}}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^{\frac{5}{3}}}$. Дирихле қатарымен салыстырамыз $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ ($p = \frac{5}{3} > 1$, жинақты) салыстырудың екінші белгісі бойынша: $\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{(n+2)^{\frac{5}{3}}}}{\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}} = 1$, Сондықтан екі қатар да бірмезгілде жинақты. (*) қатары жинақты жинақты болғандықтан, берілген қатар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)^{\frac{5}{3}}}$ абсолютті жинақты.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{(n+1)^2}}$.

Шешуі: (*) қатарын құрамыз $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{(n+1)^2}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{5}}}$. Оны Дирихле қатарымен салыстырамыз $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{5}}}$ ($p = \frac{2}{5} < 1$, жинақсыз) салыстырудың екінші белгісі бойынша: $\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{5}}}}{\frac{1}{n^{\frac{2}{5}}}} = 1$, екі қатар да бірмезгілде жинақсыз. Яғни (*) қатары жинақсыз. Олай болса, берілген қатар абсолютті жинақты бола алмайды. Лейбниц шарттарының орындалуын тексерейік:

1) $\frac{1}{\sqrt[5]{2^2}} > \frac{1}{\sqrt[5]{3^2}} > \frac{1}{\sqrt[5]{4^2}} > \ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{(n+1)^2}} = 0.$

Ол шарттар орындалады, сондықтан берілген қатар шартты жинақты.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(4n-1)}.$

Шешуі: (*) қатарын құрамыз $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n n}{(4n-1)}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n-1}.$ Бұл қатар жинақсыз, себебі қатардың жинақтылығының қажетті шарты орындалмайды: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{4n-1} = \frac{1}{4} \neq 0$. Олай болса, берілген қатар абсолютті жинақты бола алмайды. Лейбниц шарттарының орындалуын тексерейік:

1) $\frac{1}{3} > \frac{2}{7} > \frac{3}{11} > \ldots;$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{4n-1} = \frac{1}{4} \neq 0.$

Көріп отырғандай, Лейбниц шарттары орындалмайды. Сондықтан берілген қатар жинақсыз.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(2x+1)^n}{(n+2)^3}$ функционалдық қатардың жалпы мүшесі берілген.

Берілген қатарды $x_0 = -\frac{1}{3}$ нүктесінде жазып, алынған сандық қатарды жинақтылыққа зерттеу керек.

Шешуі: x_0 -ді берілген қатардағы x-тің орнына қоямыз:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\left(2\cdot\frac{-1}{3}+1\right)^n}{(n+2)^3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{(n+2)^3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^3}.$$

Оң сандық қатар алынды. Ол қатарды жинақтылыққа зерттеу үшін салыстырудың екінші белгісін қолданамыз: оны Дирихле қатарымен $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ салыстырамыз ($p = 3 > 1$, жинақты) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+2)^3}}{\frac{1}{n^3}} = 1$. Олай болса, екі қатар да бірмезгілде жинақты.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+4}{2n}\right)^n(3x-5)^n$ дәрежелік қатардың жинақталу радиусы мен интервалын табу керек.

Шешуі: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ дәрежелік қатардың жинақталу радиусы $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ немесе $R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ формулаларының біреуі бойынша табылады**.** Жинақталу интервалы $|x-x_0|<R$ теңсіздігін шешу арқылы анықталады.

Берілген қатарды стандарт түрге келтірейік:
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+4}{2n}\right)^n(3x-5)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+4}{2n}\right)^n\cdot 3^n\cdot\left(x-\frac{5}{3}\right)^n$. Сонымен, қатар коэффициенті $a_n=\left(\frac{n+4}{2n}\right)^n\cdot 3^n=\left(\frac{3\cdot(n+4)}{2n}\right)^n$, $x_0=\frac{5}{3}$. Сондықтан жинақталу радиусы $R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ формуласы бойынша есептейміз:

$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{3\cdot(n+4)}{2n}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3\cdot(n+4)}=\frac{2}{3}$, яғни радиус $R=\frac{2}{3}$.

Жинақталу интервалын $\left|x-\frac{5}{3}\right|<\frac{2}{3}$ теңсіздігін шешу арқылы табамыз.

$$-\frac{2}{3}<x-\frac{5}{3}<\frac{2}{3}\quad\Rightarrow\quad-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}<x<\frac{2}{3}+\frac{5}{3}\quad\Rightarrow\quad 1<x<\frac{7}{3}.$$

Тағы бір мысал қарастырайық: қатардың жинақтылық радиусы мен интервалын табу керек $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{5^n}(5x+1)^n$.

Шешуі: берілген қатарды стандарт түрге келтірейік:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{5^n}(5x+1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+1)\cdot 5^n}{5^n}\left(x+\frac{1}{5}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+1)\left(x+\frac{1}{5}\right)^n.$$

Сонымен, $a_n=(n^2+1)$, $x_0=-\frac{1}{5}$. Сондықтан қатардың жинақтылық радиусын $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ формуласымен есептейміз. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{(n+1)^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n^2+2n+2}=1$. Қатардың жинақтылық интервалын $\left|x+\dfrac{1}{5}\right|<1$ теңсіздігін шешу арқылы табамыз $-1<x+\dfrac{1}{5}<1$ $\Rightarrow$ $-1-\dfrac{1}{5}<x<1-\dfrac{1}{5}$ $\Rightarrow$ $-\dfrac{6}{5}<x<\dfrac{4}{5}$.

8. Белгілі жіктелулерді қолданып, $f(x)=\ln(10+x)$ функциясының Маклорен қатарына жіктеңіз.

Шешуі: $|x-x_0|<r$ немесе $x_0-r<x<x_0+r$ интервалында шексіз дифференциалданатын кез келген функция осы интервалда өзіне жинақталатын Тейлор қатарына жіктеледі:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots.$$

$x_0=0$ болғанда Тейлор қатарын Маклорен қатары дейді:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots.$$

Тейлор (Маклорен) қатарына белгілі жіктелулер:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\ -\infty<x<+\infty;$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots,\ -\infty<x<+\infty;$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots,\ -\infty<x<+\infty;$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots,\ -1<x<1;$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$$

Соңғы қатардың жинақталу облысы m дәрежесіне байланысты:
Егер $m\geq 0$, онда қатардың жинақталу облысы $-1\leq x\leq 1$; егер $-1<m<0$, онда қатардың жинақталу облысы $-1<x\leq 1$; егер $m\leq -1$, онда қатардың жинақталу облысы $-1<x<1$.

Берілген функцияны қарастырайық $f(x)=\ln(10+x)$. белгілі жіктелулерді қолдану үшін оны сәйкес түрге келтіру керек:

$$f(x)=\ln(10+x)=\ln\left[10\cdot\left(1+\frac{x}{10}\right)\right]=\ln 10+\ln\left(1+\frac{x}{10}\right).$$

Енді $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...,\ -1<x<1$ формуласын қолданамыз, ол үшін x орнына $\frac{x}{10}$-ті қоямыз. Ізделінді жіктеуді аламыз: $f(x)=\ln 10+\left(\frac{x}{10}-\frac{x^2}{10^2\cdot 2}+\frac{x^3}{10^3\cdot 3}-\frac{x^4}{10^4\cdot 4}+...\right)$. Алынған қатардың жинақтылық облысы $-1<\frac{x}{10}<1$ интервалы болады немесе $-10<x<10$.

9. $f(x)=\sin^2 x$ функциясының $x_0=\frac{\pi}{6}$ нүктесінің маңайында Тэйлор қатарына жіктеудің алғашқы үш мүшесін табу керек.

Шешуі: жоғарыда айтылғандай, $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінің маңайында Тэйлор қатарына *жіктеуі*:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+...$$

Берілген функцияның туындысын және функция туындысының $x_0=\frac{\pi}{6}$ нүктесіндегі мәндерін табамыз:

$f(x)=\sin^2 x$; $\quad f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$;

$f'(x)=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$; $\quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$f''(x)=2\cos 2x$; $\quad f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$, …

Табылған мәндерді қатарға қоямыз:

$$f(x)=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 1!}(x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{6})^2+...$$

- бұл жауап. Айта кетелік, егер функция туындысының кейбір мәндері нөлге тең болса, онда жіктеудің оң жағында үш қосылғыш болатындай нөлден өзге мәндерін табу керек.

Әдебиеттер тізімі

1 Сағынтаев С., Сағынтаева С. Жоғарғы математика: Оқулық/ - Астана: ҚазЭҚСХУ БПО, 2015. - 545 б.

2 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: В 3ч./А.П. Рябушко, В.В. Бархатов и др./ Под редакцией А.П. Рябушко. - Минск: Вышейшая школа, 1991. - Ч.3. – 351 с.

3 Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2ч. – М.: Высш. шк., 1986. - Ч.1 - 352 с.

4 Кузнецов А.А. Сборник заданий по высшей математике: Типовые расчёты. - М.: Высш.шк., 1983. - 176 с.

Мазмұны

2019 ж. жиынтық жоспары, реті 149

Астраханцева Людмила Николаевна
Байсалова Мәншүк Жұмамұратқызы

МАТЕМАТИКА 3

5В070300 - Ақпараттық жүйелер мамандығы бойынша оқитын студенттер үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар
1 бөлім

Редактор Ж.Изтелеуова
Стандарттау бойынша маман Г.И.Мухаметсариева

Басуға_________ қол қойылды
Таралымы 25 дана
Көлемі 1,5 баспа табақ

Пішімі 60х84 1/16
Баспаханалық қағаз №1
Тапсырыс Бағасы 750 тг.

«Алматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірме-көбейткіш бюросы
050013, Алматы, Байтұрсынұлы көшесі, 126/1