Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра математики и математического моделирования

МАТЕМАТИКА 3

Методические указания и задания к выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 5В070300- Информационные системы

Часть 1

Алматы 2019

СОСТАВИТЕЛИ: Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Математика 3. Методические указания и задания к выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 5В070300- Информационные системы. Часть 1. - Алматы: АУЭС, 2019. - 33 стр.

Методические указания и задания содержат расчетно-графическую работу №1 дисциплины «Математика 3» для студентов специальности 5В070300 - Информационные системы. Эта дисциплина состоит из трёх разделов математики. Второй раздел посвящён теории вероятностей. Приведены теоретические вопросы программы, варианты заданий по основным понятиям, теоремам и законам теории вероятностей. Дано решение типового варианта вместе с необходимыми теоретическими сведениями.

Ил.11, табл. 14, библиогр.- 6 назв.

Рецензент: доцент Ю.М.Гармашова

Печатается по плану издания некоммерческого общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2019 г.

Введение

Понятие ряда относится к основным понятиям математического анализа. Оно применяется в теоретических исследованиях математического анализа, формировании многих его понятий, например, в определении показательной и тригонометрических функций комплексного переменного. Особенно большое применение имеют ряды в приближнных вычислениях: приближённое вычисление интегралов, приближённое решение дифференциальных уравнений и т.д. Известные таблицы логарифмов, тригонометрических функций составлены с использованием рядов.

Номер варианта студента определяется по списку группы. Расчетно-графическая работа должна выполняться четко и разборчиво в ученической тетради.

1 Расчетно-графическая работа №1. Элементы теории рядов

Цели: рассмотреть основные понятия числовых и функциональных рядов: понятия сходимости и расходимости ряда, суммы ряда, интервала, области сходимости. Исследовать сходимость рядов с помощью признаков сходимости.

1.1 Теоретические вопросы

1. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда.
2. Признаки сходимости. Необходимое условие сходимости ряда.
3. Признаки сравнения.
4. Признаки Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши.
5. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница. Оценка остатка ряда.
6. Знакопеременные ряды. Абсолютно и условно сходящиеся ряды.
7. Функциональные ряды. Область сходимости.
8. Равномерно сходящиеся ряды и их свойства.
9. Степенные ряды. Теорема Абеля.
10. Ряды Тейлора.

1.2 Расчётные задания

1. Для данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

а) составить формулу общего члена ряда a_n и написать первые пять членов;

б) записать n-ую частичную сумму ряда S_n ;

в) записать остаток ряда r_n ;

г) проверить необходимое условие сходимости ряда.

1.1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$	1.11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}$	1.21	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 5^n}$
1.2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{7^n}$	1.12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$	1.22	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}$
1.3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\ln(n+1)}$	1.13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n}$	1.23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+4^n}{10^n}$
1.4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)^2}$	1.14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^3+1}$	1.24	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n+5}}$
1.5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$	1.15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot(3n+3)}$	1.25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$
1.6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n+5}$	1.16	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(3n+1)}$	1.26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n}$
1.7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(5n+1)}$	1.17	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3^n}}$	1.27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(3n+1)}}$
1.8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n+2)}}$	1.18	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)^5}$	1.28	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-3)\cdot 6^n}$
1.9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[2]{(2n+1)}\cdot 3^n}$	1.19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2n+1)}$	1.29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2(n+1)}$
1.10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+2n-1)}$	1.20	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}$	1.30	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(2n+1)^2}$

2. Исследовать сходимость ряда:

а) по второму признаку сходимости, сравнивая данный ряд с рядом Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$;

б) по первому признаку сходимости.

2.1	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+2n-1)}$	2.11	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}$	2.21	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(2n+1)^2}$
	б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^3(2+\sin^2 n)}$		б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\cos^2 n}$		б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2}{n^5+\sin\frac{1}{n}}$

2.2	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(5n+1)}$	2.12	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3+n^3}}$	2.22	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(3n^3+1)}}$
	б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^3(2-\cos^2 n)}$		б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^4(1+\sin^2 n)}$		б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-2}{n^3(1+\sin^2 n)}$
2.3	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n+2)}}$	2.13	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)^5}$	2.23	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-3)\cdot(6n-2)}$
	б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^4(2+\sin^2 n)}$		б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^4+\sin\frac{1}{n}}$		б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^4(2-\cos^2 n)}$
2.4	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)^2}$	2.14	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^3+1}$	2.24	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(3n+3)}$
	б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n-\cos^2 n}$		б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^5(2-\cos^2 n)}$		б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3+\sin\frac{1}{n}}$
2.5	а)	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n-1)(n+2)}}$	2.15	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^3+5}}$	2.25	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n^2+1}\right)^2$
	б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+\sin^2 n}$		б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{n^5+\sin\frac{1}{n}}$		б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n-\cos^2 3n}$
2.6	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(3n+1)^2}$	2.16	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[5]{\frac{1}{3n^3+1}}$	2.26	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^4+5}}$
	б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^3(2-\cos^2 n)}$		б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^4(1+\sin^2 n)}$		б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^4+\sin^2 n}$
2.7	а)	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n-1}(n^2+2)}$	2.17	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(3n^4+3)}$	2.27	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^5+1}$
	б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^4(2+\sin^2 n)}$		б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^4(2-\cos^2}$		б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{n^5+\sin\frac{1}{n}}$
2.8	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(3n+1)^2}$	2.18	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[4]{\frac{n}{3n^3+1}}$	2.28	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)^2}$
	б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n^5+\sin^2 n}$		б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-2}{n^3(1+\sin^2 n)}$		б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^4(2-\cos^2 n)}$

2.9	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(3n-1)(4n^2+2)}$	2.19	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+1}{(6n^6+3)}$	2.29	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$
	б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+\sin^2 n}$		б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^3(2-\cos^2 n)}$		б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^4(2+\sin^2 n)}$
2.10	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$	2.20	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n^3+1}\right)^4$	2.30	а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(2n-1)^3}$
	б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^3(2+\sin^2 n)}$		б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\cos^2 n}$		б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2}{n^5+\sin\frac{1}{n}}$

3. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на сходимость с помощью признака Даламбера.

3.1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$	3.11	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{(n-1)!}$	3.21	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 5^n}$
3.2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{7^n}$	3.12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$	3.22	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n-1)^3}$
3.3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{(n+7)!}$	3.13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$	3.23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{10^n}$
3.4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)\cdot 3^n}$	3.14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{(n+2)!}$	3.24	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+10)^3}{5^n}$
3.5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}$	3.15	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{(n-1)!}$	3.25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n!}{\sqrt{(2n-1)}}$
3.6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{\sqrt{2^n}}$	3.16	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+3)!}{3^{n-1}}$	3.26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^2}{8^n}$
3.7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)}$	3.17	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{(n-1)!}$	3.27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(6n+1)\cdot 7^n}$
3.8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n+7}{2^n}$	3.18	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{(n+1)!}$	3.28	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n-1)(n+1)}$
3.9	$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n-1}{(n-2)!}$	3.19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-5}{5^{n/2}}$	3.29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^2}{10^n}$

3.10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n}{(n^2+7)}$	3.20	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!}{5^n(n-1)}$	3.30	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{(n-1)}}{10^n}$

4. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на сходимость с помощью радикального признака Коши.

4.1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$	4.11	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(tg\frac{\pi}{(2n-1)}\right)^{2n}$	4.21	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^n}{7^n}$
4.2	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln(n+3)}\right)^{3n}$	4.12	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{1}{(n+1)}\right)^{n}$	4.22	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln(n+3)}\right)^{n}$
4.3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(\ln(n+2))^n}$	4.13	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-n-1}{7n^2+3n+4}\right)^{n}$	4.23	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n^3}\right)^{2n}$
4.4	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}$	4.14	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{n}\cdot\frac{1}{5^n}$	4.24	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{2n+1}\right)^{2n}$
4.5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{(8n+14)^n}$	4.15	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{3^n}\right)^{n}$	4.25	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(tg\frac{\pi}{5^n}\right)^{3n}$
4.6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)^{3n}}$	4.16	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\left(\frac{n+1}{4n+1}\right)\right)^{n}$	4.26	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)^{2n}$
4.7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(\ln(n+5))^n}$	4.17	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5n-1}{7n^2+3n+4}\right)^{n}$	4.27	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{2n}$
4.8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^n 7^n}{(n+14)^n}$	4.18	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{\pi}{2n-4}\right)^{3n}$	4.28	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{4^n}\right)^{n}$
4.9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n+5)^{3n}}$	4.19	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\left(\frac{5n+1}{4n+1}\right)\right)^{n}$	4.29	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{5n+1}\right)^{n}$
4.10	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{n+1}\right)^{n^2}$	4.20	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\ln(2n+3)}\right)^{3n}$	4.30	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-n-1}{n^2+3n-5}\right)^{n}$

5. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на сходимость с помощью интегрального признака Коши.

5.1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)\ln(3n+1)}$	5.16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}$
5.2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+1)\sqrt{\ln(5n+1)}}$	5.17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+1)\ln^2(5n+1)}$
5.3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^4(n+2)}$	5.18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)\sqrt[3]{\ln(4n+1)}}$
5.4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)\sqrt{\ln(3n+1)}}$	5.19	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+12)\ln^5(n+12)}$
5.5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+1)\sqrt{\ln^3(5n+1)}}$	5.20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+5)\sqrt[3]{\ln(3n+5)}}$
5.6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+12)\sqrt[3]{\ln^2(n+12)}}$	5.21	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+5)\sqrt{\ln^3(5n+5)}}$
5.7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+1)\sqrt[3]{\ln^2(5n+1)}}$	5.22	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\sqrt{\ln^3(n+3)}}$
5.8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[3]{\ln^4(4n)}}$	5.23	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)\sqrt{\ln^5(3n+2)}}$
5.9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+12)\ln^3(2n+12)}$	5.24	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt{\ln^3(5n)}}$
5.10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln^4(2n+1)}$	5.25	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\sqrt[4]{\ln(n+2)}}$
5.11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(7n+1)\sqrt{\ln^7(7n+1)}}$	5.26	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{12} n}$
5.12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+6)\ln^8(n+6)}$	5.27	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)\sqrt[3]{\ln^4(n+4)}}$
5.13	$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)\ln(2n-3)}$	5.28	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+11)\sqrt[3]{\ln^5(n+11)}}$
5.14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+1)\sqrt{\ln^3(5n+1)}}$	5.29	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\sqrt[6]{\ln(n+5)}}$
5.15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+12)\sqrt[3]{\ln^6(n+12)}}$	5.30	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-3)\sqrt{\ln^5(5n-3)}}$

6. Исследовать знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ на условную или абсолютную сходимость.

6.1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+1)^2}$	6.11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n^3+1}$	6.21	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+5}}$
6.2	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)(n+2)}$	6.12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)\cdot(3n+3)}$	6.22	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2n+1}$
6.3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{n^2+5}$	6.13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(3n+1)}$	6.23	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{3^n}$
6.4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{5n+1}}$	6.14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{3^n}}$	6.24	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{(3n+1)}}$
6.5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{(n+2)}}$	6.15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(5n+1)^5}$	6.25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+2)}{6^n}$
6.6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)}$	6.16	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$	6.26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{5^n}$
6.7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{7n\sqrt{n+5}}$	6.17	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(n+1)!}$	6.27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}$
6.8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[2]{(2n+1)}}$	6.18	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(2n+1)}$	6.28	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}}$
6.9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$	6.19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{5^n}$	6.29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{10^n}$
6.10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2+2n-1)}$	6.20	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 6^n}{(n-1)!}$	6.30	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{(2n+1)^2}}$

7. Дан общий член функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$. Записать данный ряд в точке x_0 и исследовать сходимость полученного числового ряда.

№	$u_n(x)$	x_0	№	$u_n(x)$	x_0
7.1	$\frac{2^n(x+1)^n}{n^3+2}$	-1/2	7.16	$\frac{(x-5)^n}{n!}$	-1

7.2	$\frac{(x-1)^{2n}}{n^2+1}$	3	7.17	$\frac{(n+1)^2 x^n}{4^n}$	-5
7.3	$\frac{(x-2)^n \sin\frac{\pi}{2^n}}{n}$	1	7.18	$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{3n}\frac{(x-5)^n}{5^n}$	4
7.4	$\frac{(x-3)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$	2	7.19	$(x-1)^n\, tg\,\frac{\pi}{4^n}$	-1
7.5	$\frac{(n+1)!\,(2x+1)^n}{\sqrt{n+1}}$	-3	7.20	$\frac{\sqrt{\ln(n+1)}\,x^n}{n+1}$	-1
7.6	$\frac{(2x+3)^n}{2^n\cdot n^2}$	-2	7.21	$\frac{(5x-6)^n}{(n+1)!}$	0
7.7	$\frac{(x+5)^{n^2}}{(n+1)^n}$	-6	7.22	$(x+1)^n \sin\frac{3\pi}{n^2+1}$	1
7.8	$\frac{(3x-1)^n}{5^n\cdot n}$	2	7.23	$\frac{(x+5)^{2n-1}}{2^n\cdot n}$	-3
7.9	$\frac{n\cdot(x+1)^n}{9^n}$	-2	7.24	$\frac{n!\cdot(4x-3)^n}{2^{n+1}}$	0
7.10	$n\cdot 5^n\cdot(3x+2)^{n+1}$	0	7.25	$4^n\cdot(x+1)^n$	1/8
7.11	$\frac{(n+1)^3\cdot x^n}{4^n}$	-5	7.26	$(x+1)^n\, tg\,\frac{1}{n}$	-2
7.12	$\frac{(5-x)^n}{1+n^3}$	6	7.27	$\frac{(x+10)^n\cdot 10^n}{(n+2)!}$	-11
7.13	$\frac{(2x+3)^n\cdot(n+1)^3}{5^{n+1}}$	-2	7.28	$\frac{x^{2n}}{n}\, tg\,\frac{\pi}{3^n}$	-6
7.14	$\frac{(3x+1)^n\cdot n!}{\sqrt{n^2+1}}$	2/3	7.29	$\frac{(4x+3)^n\cdot 2^n}{n}$	-1/4
7.15	$(x+5)^n \sin\frac{\pi}{n^2+1}$	-6	7.30	$\frac{(3-2x)^n}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$	1

8. Найти радиус и интервал сходимости данного степенного ряда.

8.1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(\ln(n+2))^n}$	8.16	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}(x-3)^n$

8.2	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n^3}\right)^{2n}(x+1)^n$	8.17	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2}{7n^2+3n+4}\right)^{n}(x-2)^n$
8.3	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{(n+3)}\right)^{3n}\cdot(2x-1)^n$	8.18	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{2n+1}\right)^{2n}(2x+1)^n$
8.4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n(x-3)^n}{(8n+14)}$	8.19	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{3^n}\right)x^n$
8.5	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(tg\frac{\pi}{5^n}\right)^{3n}\cdot(x-1)^n$	8.20	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)\cdot 3^n}(x-1)^n$
8.6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{n!}(5x+1)^n$	8.21	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+10)^3}{5^n}(3x-1)^n$
8.7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^n$	8.22	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4^{n-1}(x+1)^n}{\sqrt[3]{n-1}}$
8.8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{\sqrt{(2n-1)}}(x+2)^n$	8.23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{2^n}x^{2n}$
8.9	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+3)!\,x^n}{3^{n-1}}$	8.24	$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[5]{\frac{1}{3n^3+1}}(4x+1)^n$
8.10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^{2n}}{(n+1)}$	8.25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(3n+3)}(x-5)^n$
8.11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(6n+1)\cdot 7^n}$	8.26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n+7}{2^n}(2x+1)^n$
8.12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(3n+1)^2}(x+3)^n$	8.27	$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[5]{\frac{1}{3n^3+1}}(2x-3)^n$
8.13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)x^{2n}}{2^n(n^2+2)}$	8.28	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(3n+3)}x^n$
8.14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{3^n}x^n$	8.29	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n^3+1}\right)^n(5-2x)^n$
8.15	$\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{\pi}{6^n}(x+1)^n$	8.30	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(2x-3)^n}{(9n+14)^n}$

9. Используя известные разложения, найти ряд Маклорена функции $f(x)$.

№	$f(x)$	№	$f(x)$	№	$f(x)$

9.1	$x \cdot \sin\sqrt{x}$	9.11	$\ln(4+3x)$	9.21	$\sqrt[3]{1-\frac{x}{2}}$
9.2	$x \cdot e^{-3x^2}$	9.12	$e^{-3\sqrt{x}}$	9.22	$\frac{1}{1+3x}$
9.3	$\frac{1-\cos 5x}{x^2}$	9.13	$x \cdot e^{-5x^2}$	9.23	$\ln(3+x)$
9.4	$\cos^2\frac{7}{3}x$	9.14	$\cos^2\frac{3x}{2}x$	9.24	$\frac{1}{1-3x^2}$
9.5	$\frac{\cos 5x}{x}$	9.15	$\sin^2\frac{2}{5}x$	9.25	$\sqrt{5-2x}$
9.6	$\frac{e^{-\sqrt{x}}}{x}$	9.16	$\sqrt{x}\cdot\cos\frac{2}{3}x$	9.26	$\ln(2+x)$
9.7	$1-e^{-3x}$	9.17	$\sqrt{4+2x}$	9.27	$\sin^2\frac{4}{3}x$
9.8	$\sqrt[4]{1+x^4}$	9.18	$x^3\cdot e^{-x^2}$	9.28	$2x\cdot\sin^2\frac{x}{3}$
9.9	$\frac{1}{\sqrt{16+x^4}}$	9.19	$\sqrt{x}\cdot\sin^2\frac{2}{3}x$	9.29	$\sqrt{9-x}$
9.10	$\sqrt{4-\frac{x}{2}}$	9.20	$\frac{\sin 4x}{x}$	9.30	$\sin^2\frac{4}{3}x$

10. Найти три первых члена разложения в ряд Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки x_0.

№	$f(x)$	x_0	№	$f(x)$	x_0
10.1	$\sqrt{x}$	3	10.16	$\sin\frac{x}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
10.2	e^{-x}	2	10.17	$\frac{1}{x}$	-2
10.3	6^x	2	10.18	$\sqrt{x}$	4
10.4	$\ln(e^x+x)$	0	10.19	2^x	1
10.5	$x^3\cdot\ln x$	1	10.20	e^x	-2
10.6	$\frac{1}{1-x}$	2	10.21	$\cos x$	$\frac{\pi}{4}$
10.7	$\sin x$	$\frac{\pi}{4}$	10.22	$\frac{1}{1+x}$	2
10.8	$\ln(2+x)$	1	10.23	3^x	3

10.9	e^{-2x}	-1	10.24	$x \cdot \ln x$	1
10.10	$\sqrt{x+1}$	2	10.25	$\frac{1}{x}$	2
10.11	$\ln^2 x$	1	10.26	$\cos x$	$\frac{\pi}{3}$
10.12	10^x	0	10.27	$\ln 3x$	2
10.13	$\sin x$	$\frac{\pi}{6}$	10.28	5^x	1
10.14	$\ln 2x$	-1	10.29	$\cos\frac{x}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
10.15	4^x	2	`0.30	$\ln(1-x)$	0

1.3 Решение типового варианта

1. Для данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot 3^n}$:

а) составить формулу общего члена ряда a_n и написать первые пять членов;

б) записать n-ую частичную сумму ряда S_n ;

в) записать остаток ряда r_n ;

г) проверить необходимое условие сходимости ряда.

Решение:

а) $a_n = \frac{1}{(2n-1)\cdot 3^n}$ - формула общего члена ряда. Первые пять членов ряда:

$$\frac{1}{1\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 3^2}, \frac{1}{5\cdot 3^3}, \frac{1}{7\cdot 3^4}, \frac{1}{9\cdot 3^5};$$

б) n-ая частичная сумма ряда S_n равна сумме первых n членов ряда, т.е. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, поэтому в нашем случае:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 3^2} + \frac{1}{5\cdot 3^3} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\cdot 3^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\cdot 3^k};$$

в) остаток ряда r_n является рядом, полученным из исходного удалением первых n членов ряда, т.е. $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ или $r_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$, поэтому:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)\cdot 3^k};$$

г) необходимое условие сходимости ряда: если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; в нашем случае:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot 3^n} = 0,$$

следовательно, необходимое условие сходимости ряда выполняется.

2. Исследовать сходимость:

а) ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{(2n-1)\cdot(n^2+1)}$ по второму признаку сходимости, сравнивая данный ряд с рядом Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$;

б) ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+\sin^2 n}$ по первому признаку сходимости.

Решение.

Первый признак сходимости: пусть даны два ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2); пусть между соответствующими членами рядов имеет место неравенство $a_n \le b_n$ (n=1,2,3,…), тогда из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1); из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Второй признак сравнения: если для рядов (1) и (2) существует отличный от нуля предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, то оба ряда одновременно сходятся или расходятся.

а) сходимость ряда Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ зависит от параметра p: если $p > 1$, то ряд сходится, если $p \le 1$, то ряд расходится. Чтобы узнать, с каким конкретно рядом Дирихле сравнивать данный ряд, найдём параметр p по правилу: p равно разности - степень знаменателя общего члена ряда минус степень числителя. В нашем случае:

$$a_n = \frac{n^2-1}{(2n-1)\cdot(n^2+1)},$$

степень числителя равна 2, степень знаменателя равна 3, значит $p = 3 - 2 = 1$.

Итак, данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{(2n-1)\cdot(n^2+1)}$ сравним по второму признаку сравнения с рядом Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (это гармонический ряд, он расходится):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n^2-1}{(2n-1)\cdot(n^2+1)}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-1)\cdot n}{(2n-1)\cdot(n^2+1)} = \frac{1}{2} = const \quad ,$$

т.к. предел константа не равная нулю, то оба ряда одновременно расходятся.

б) так как $\sin^2 n < 1$, то $n^2 + \sin^2 n < n^2 + 1$ и $\frac{n}{n^2+\sin^2 n} > \frac{n}{n^2+1}$, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ расходится (по второму признаку сравнения сравним его с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (расх.):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n}{n^2+1}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot n}{n^2+1} = 1 = const \quad).$$

Следовательно по первому признаку сходимости расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+\sin^2 n}$.

3. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n+1)!}$ на сходимость с помощью признака Даламбера.

Решение.

Признак Даламбера: для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ находим предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$; если $q < 1$, то ряд сходится, если $q > 1$, то расходится, если $q = 1$, то этот признак не работает. Для данного ряда:

$$a_n = \frac{3^n}{(2n+1)!}, \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(2n+3)!};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3^{n+1}}{(2n+3)!}}{\dfrac{3^n}{(2n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\cdot(2n+1)!}{(2n+3)!\cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(2n+2)\cdot(2n+3)} = 0 < 1,$$

следовательно, по признаку Даламбера ряд сходится.

4. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(3n+1)^n}$ на сходимость с помощью радикального признака Коши.

Решение.

Радикальный признак Коши: для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ находим предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$; если $q < 1$, то ряд сходится, если $q > 1$, то расходится, если $q = 1$, то этот признак не работает. Для данного ряда:

$$a_n = \frac{5^n}{(3n+1)^n};$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5^n}{(3n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{(3n+1)} = 0 < 1,$$

значит, по радикальному признаку Коши ряд сходится.

5. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln(2n+1)}$ на сходимость с помощью интегрального признака Коши.

Решение.

Интегральный признак Коши: пусть все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и не возрастают, т.е. $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$ и $a_n = f(n)$ непрерывная и не возрастающая функция, тогда исходный ряд и несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(n)dn$ одновременно сходятся или расходятся. Для данного ряда:

$$a_n = f(n) = \frac{1}{(2n+1)\ln(2n+1)},$$

ясно, что все члены ряда положительны и не возрастают; исследуем несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(n)dn$:

$$\int_1^{\infty} f(n)dn = \int_1^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln(2n+1)}dn = \left| \begin{array}{l} t = \ln(2n+1) \to dt = \dfrac{2}{(2n+1)}dn \\ n = 1 \to t = \ln 3; \quad n = \infty \to t = \infty \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_{\ln 3}^{\infty} \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t|\Big|_{\ln 3}^{\infty} = \frac{1}{2}\left(\ln \infty - \ln|\ln 3|\right) = \infty,$$ т.е. несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln(2n+1)}dn$ расходится. Поэтому и исходный ряд расходится.

6. Исследовать на условную или абсолютную сходимость знакочередующийся ряд.

Для знакочередующегося ряда возможны три варианта: ряд сходится абсолютно; ряд сходится условно; ряд расходится. При исследовании на сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (знаки членов этого ряда чередуются) следует придерживаться следующего плана:

1) Составить ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (*) ; проверить сходимость ряда (*) по одному из признаков сходимости положительных рядов.

2) Если (*) сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно (конец); если (*) расходится, то продолжаем.

3) Проверить выполнение условий Лейбница: $|a_1| > |a_2| > |a_3| > \ldots$ и $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$; если эти условия выполняются, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно (конец); если условия Лейбница не выполняются, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится (конец).

Исследуем на условную или абсолютную сходимость три ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)^{\frac{5}{3}}}$.

Решение.

Составим ряд (*) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(n+2)^{\frac{5}{3}}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^{\frac{5}{3}}}$. Сравним его с рядом Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ ($p = \frac{5}{3} > 1$, сходится) по второму признаку сравнения: $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+2)^{\frac{5}{3}}}}{\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}} = 1$, поэтому оба ряда сходятся одновременно. Так как ряд (*) сходится, то данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)^{\frac{5}{3}}}$ сходится абсолютно.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{(n+1)^2}}$.

Решение.

Составим ряд (*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{(n+1)^2}} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{5}}}$. Сравним его с рядом Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{5}}}$ ($p = \frac{2}{5} < 1$, расходится) по второму признаку сравнения: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{5}}}}{\frac{1}{n^{\frac{2}{5}}}} = 1$, отсюда оба ряда расходятся одновременно, т.е. ряд (*) расходится. Следовательно, исходный ряд не может сходиться абсолютно. Проверим выполнение условий Лейбница:

1) $\frac{1}{\sqrt[5]{2^2}} > \frac{1}{\sqrt[5]{3^2}} > \frac{1}{\sqrt[5]{4^2}} > \ldots$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{(n+1)^2}} = 0$.

Они выполняются, поэтому данный ряд сходится условно.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(4n-1)}$.

Решение.

Составим ряд (*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n n}{(4n-1)} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n-1}$. Этот ряд расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{4n-1} = \frac{1}{4} \neq 0$. Следовательно, исходный ряд не может сходиться абсолютно. Проверим выполнение условий Лейбница:

1) $\frac{1}{3} > \frac{2}{7} > \frac{3}{11} > \ldots$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{4n-1} = \frac{1}{4} \neq 0$.

Таким образом, условия Лейбница не выполняются. Поэтому данный ряд расходится.

7. Дан функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(2x+1)^n}{(n+2)^3}$. Записать данный ряд в точке $x_0=-\frac{1}{3}$ и исследовать сходимость полученного числового ряда.

Решение.

Подставим x_0 вместо x в данный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\left(2\cdot\frac{-1}{3}+1\right)^n}{(n+2)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{(n+2)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^3}.$$

Получен положительный числовой ряд, для исследования сходимости которого применим второй признак сравнения: сравним его с рядом Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$: ($p=3>1$, сходится) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+2)^3}}{\frac{1}{n^3}}=1$.

Таким образом, оба ряда одновременно сходятся.

8. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+4}{2n}\right)^n(3x-5)^n$.

Решение.

Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ находится по одной из формул:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{или} \quad R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Интервал сходимости определяется из решения неравенства $|x-x_0|<R$.

Приведем данный ряд к стандартному виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+4}{2n}\right)^n(3x-5)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+4}{2n}\right)^n\cdot 3^n\cdot\left(x-\frac{5}{3}\right)^n.$$

Итак, коэффициент ряда равен:

$$a_n=\left(\frac{n+4}{2n}\right)^n\cdot 3^n=\left(\frac{3\cdot(n+4)}{2n}\right)^n;\ x_0=\frac{5}{3}.$$

Поэтому радиус сходимости ряда находим по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{3\cdot(n+4)}{2n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3\cdot(n+4)} = \frac{2}{3}$$, то есть радиус $R = \frac{2}{3}$.

Находим интервал сходимости ряда, решая неравенство:

$$\left|x - \frac{5}{3}\right| < \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3} < x - \frac{5}{3} < \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3} + \frac{5}{3} < x < \frac{2}{3} + \frac{5}{3} \Rightarrow 1 < x < \frac{7}{3}.$$

Рассмотрим ещё один пример: найти радиус и интервал сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n}(5x+1)^n.$$

Решение.

Приведем данный ряд к стандартному виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n}(5x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)\cdot 5^n}{5^n}\left(x+\frac{1}{5}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(n^2+1)\left(x+\frac{1}{5}\right)^n.$$

Итак, $a_n = (n^2+1)$, $x_0 = -\frac{1}{5}$. Поэтому радиус сходимости ряда находим по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|;$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} = 1.$$

Интервал сходимости ряда находим, решая неравенство:

$$\left|x+\frac{1}{5}\right| < 1 \Rightarrow -1 < x + \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow -1 - \frac{1}{5} < x < 1 - \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{6}{5} < x < \frac{4}{5}.$$

9. Используя известные разложения, найти ряд Маклорена функции: $f(x) = \ln(10+x)$.

Решение.

Всякая функция бесконечно дифференцируемая в интервале $|x - x_0| < r$ или $x_0 - r < x < x_0 + r$ может быть разложена в этом интервале в сходящийся к ней ряд Тэйлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots.$$

При $x_0 = 0$ ряд Тейлора принято называть рядом Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots .$$

Известны следующие разложения в ряд Тейлора (Маклорена):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \quad -1 < x < 1;$$

$$(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

Область сходимости последнего разложения зависит от степени m: если $m \geq 0$, то область сходимости $-1 \leq x \leq 1$; если $-1 < m < 0$, то область сходимости $-1 < x \leq 1$; если $m \leq -1$, то область сходимости $-1 < x < 1$.

Рассмотрим данную функцию $f(x) = \ln(10 + x)$. Чтобы использовать известные разложения, надо привести её к соответствующему виду:

$$f(x) = \ln(10 + x) = \ln\left[10 \cdot \left(1 + \frac{x}{10}\right)\right] = \ln 10 + \ln\left(1 + \frac{x}{10}\right).$$

Теперь используем формулу:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \quad -1 < x < 1,$$

куда вместо x подставим $\frac{x}{10}$. Получим искомое разложение:

$$f(x) = \ln 10 + \left(\frac{x}{10} - \frac{x^2}{10^2 \cdot 2} + \frac{x^3}{10^3 \cdot 3} - \frac{x^4}{10^4 \cdot 4} + \ldots\right).$$

Областью сходимости полученного ряда будет интервал:

$$-1 < \frac{x}{10} < 1 \Rightarrow -10 < x < 10 .$$

10. Найти три первых члена разложения в ряд Тейлора функции $f(x)=\sin^2 x$ в окрестности точки $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Решение.

Как было выше сказано, ряд Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 имеет вид:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

Найдём производные данной функции и значения функции и производных в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$:

$$f(x) = \sin^2 x; \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4};$$

$$f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x; \quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$f''(x) = 2\cos 2x; \quad f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1, \dots$$

Подставим найденные значения в ряд:

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 1!}(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2!}(x - \frac{\pi}{6})^2 + \dots$$

- это ответ. Заметим, что если значения некоторых производных будет равны нулю, то надо найти столько не равных нулю, чтобы в правой части разложения было три слагаемых.

Список литературы

1 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: В 3 ч./ А.П. Рябушко, В.В. Бархатов и др./ Под редакцией А.П. Рябушко. - Минск: Вышейшая школа, 1991. - Ч.3. – 351 с.

2 Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. – М.: Высш. шк., 1986.-Ч.1 - 352 с.

3 Кузнецов А.А. Сборник заданий по высшей математике: Типовые расчёты. - М.: Высш.шк., 1983. – 176 с.

Содержание

Сводный план 2019 г., поз. 150

Астраханцева Людмила Николаевна
Байсалова Маншук Жумамуратовна

МАТЕМАТИКА 3

Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 5В070300- Информационные системы
Часть 1

Редактор Л.Т.Сластихина
Специалист по стандартизации Г.И.Мухаметсариева

Подписано в печать_______ Формат 60х84 1/16
Тираж 25 экз. Бумага типографская №1
Объем 1,5 уч.-из.л. Заказ______ цена 750 тг.

Копировально-множительное бюро
некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013, Алматы, ул.Байтурсынова, 126/1