Коммерциялық емес акционерлік қоғам

АЛМАТЫ ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС УНИВЕРСИТЕТІ

Жоғары математика кафедрасы

ӨРІСТЕР ТЕОРИЯСЫНЫҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

5В071800 – Электр энергетикасы мамандығының студенттері үшін есептеу-сызбалық жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар

Алматы 2015

ҚҰРАСТЫРУШЫЛАР: Дулэпо В.М., Абдулланова Ж.С. Өрістер теориясының элементтері.5В071800 – Электрэнергетикасы мамандығы студенттері үшін есептеу-сызбалық жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар. – Алматы: АЭжБУ, 2015. – 27 б.

Берілген арнайы курстың әдістемелік нұсқаулықтарына «Қисық сызықты және беттік интегралдар»мен «Өрістер теориясы элементтері» деген қосымша тараулар енгізілген. Тараулардың теориялық бөлімдерінің сұрақтары және студенттерге арналған 13 жеке тапсырмалар мен оларды шешуге нұсқаулықтар берілген.

Ил. 3, кітапнама – 4 атау.

Пікір беруші: техника ғылымдарының кандидаты, проф. Л.К. Ибраева

«Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2015 жылғы жоспары бойынша басылды

Кіріспе

Бұл әдістемелік нұсқау 5В071800 мамандығының студенттеріне оқытатын «Өрістер теориясының элементтері» атты арнайы курсы бойынша есептеу-сызбалық жұмыстары болып табылады.

Есептеу-сызбалық жұмыс «Өрістер теориясының элементтері» атты арнайы курсы бойынша 5В071800 мамандығының студенттеріне арналған типтік бағдарламаға сәйкес жазылған. Бұл ЕСЖ оқытушылар мен студенттерге қолдануға ұсынылады.

Осы ЕСЖ көмегімен аудиториялық сабақтарда студенттердің өзіндік жұмыс жасауына және оқытушылардың студенттерге жеке үй тапсырмаларын беруіне ыңғайлы.

Бұл әдістемелік нұсқауға «Қисық сызықты және беттік интегралдар» мен «Өрістер теориясы элементтері» деген тараулар енгізілген. Тараулардың теориялық бөлімдерінің сұрақтары және студенттерге арналған 13 жеке тапсырмалар мен оларды шешуге нұсқаулықтар берілген.

ЕСЖ тапсырмалары жұқа дәптерде орындалады, әрбір нөмірдің екінші цифрі нұсқа нөмірін көрсетеді.

1 Есептеу-сызбалық жұмыс № 2. Қисық сызықты және беттік интегралдар. Өрістер теориясының элементтері

Мақсаты: студенттерге 1-ші және 2-ші текті қисық сызықты интегралдарды, 1-ші және 2-ші текті беттік интегралдарды есептеуге үйрету. Грин, Остроградский-Гаусс және Стокс формулаларының көмегімен интегралдарды есептеуге машықтандыру. Бағыт бойынша туынды, градиент, дивергенция, циркуляция, ротор, ағын ұғымдарымен таныстыру, оларды есепке қолдана білуді үйрету.

1.1 Есептік тапсырмалар

1-тапсырма. AB қисығы бойынша 1-ші текті қисық сызықты интегралды есептеңіз, мұнда AB – түзудің A мен B нүктелерін қосатын кесіндісі (тапсырма а) пункті үшін).

Тапсырмалар нұсқалары.

Нұсқа №	Жеке тапсырмалар		
	а)	б)	
1.1	$\int_L xy^2dl$	$\int_L xdx-2y^2dy$	A(-1;0); B(2;1)
1.2	$\int_L y^2xdl$	$\int_L x^2dy+ydx$	A(1;3); B(2;-4)
1.3	$\int_L xydl$	$\int_L x^3dx+2ydy$	A(1;1); B(2;4)
1.4	$\int_L (x+1)dl$	$\int_L 3xdy-y^2dx$	A(1;-1); B(2;3)
1.5	$\int_L (x^2+2)dl$	$\int_L 5xdx-4y^2dy$	A(-2;0); B(0;3)
1.6	$\int_L x^3ydl$	$\int_L (x+y)dx-dy$	A(-2;-1); B(1;2)
1.7	$\int_L (x^3+y)dl$	$\int_L x^2ydx+dy$	A(-3;0); B(0;2)
1.8	$\int_L x^2y^2dl$	$\int_L 4xdy\_ydx$	A(1;3); B(3;4)
1.9	$\int_L (4+x^2)dl$	$\int_L (3x+1)dy+dx$	A(-3;2); B(1;-2)
1.10	$\int_L (x+1)ydl$	$\int_L (4x+y)dx+ydy$	A(-4;-1); B(2;-3)
1.11	$\int (x^2+2)ydl$	$\int_L x^2dx-3xydy$	A(-2;-1); B(3;-4)
1.12	$\int_L x(y+1)dl$	$\int_{L:} (x\_y)dx+x^2ydy$	A(3;4); B(2;-3)

1.13	$\int_L (x+1)y^2 dl$	$\int_L x^2 dy - ydx$	A(-1;0); B(0;3)
1.14	$\int_L x(y+2)dl$	$\int_L \sqrt{x}dx + 2y^2 dy$	A(-1;2); B(2;3)
1.15	$\int_L x^2 y^2 dl$	$\int_L \sqrt[3]{x}dy - y^3 dx$	A(0;1); B(-2;3)
1.16	$\int_L x^3 y^2 dl$	$\int_L 5xdx - 4(y+1)dy$	A(-3;-1); B(1;2)
1.17	$\int_L (3+x^2)ydl$	$\int_L 3xdy - (2x+1)ydx$	A(-3;4); B(0;1)
1.18	$\int_L 4xyydl$	$\int_L y^2 xdy$	A(-2;-2); B(2;2)
1.19	$\int_L 5x^2 ydl$	$\int_L (x^2+y)dx$	A(0;-3); B(2;-4)
1.20	$\int_L 3xy^2 dl$	$\int_L 4x^2 dy - (y+1)dx$	A(1;-1); B(3;4)
1.21	$\int_L (x^3+y)dl$	$\int_L x^3 dx - \sqrt{x}ydy$	A(-3;-1); B(4;2)
1.22	$\int_L x^2 y^2 dl$	$\int_L \sqrt[3]{x}dy + \sqrt{x}ydx$	A(0;-3); B(2;2)
1.23	$\int_L (4+x^2)dl$	$\int_L x^2 dy - y^2 dx$	A(-3;0); B(4;5)
1.24	$\int_L (x+1)ydl$	$\int_L (2x+1)dx - dy$	A(0;2); B(3;3)
1.25	$\int_L (x^2+2)ydl$	$\int_L (4y+1)dx - dy$	A(-4;0); B(2;4)

2-тапсырма. AB қисығы бойынша 2-ші текті қисық сызықты интегралды есептеңіз, мұнда AB – түзудің A мен B нүктелерін қосатын кесіндісі (алдыңғы тапсырмада б) пунктін қараңыз).

3-тапсырма. 2-ші текті қисық сызықты интегралды тұйық контур бойынша Грин формуласының $\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ көмегімен есептеңіз, мұнда L - $x^2 + y^2 = R^2$ шеңбері.

Тапсырмалар нұсқалары.

3.1 $\oint_L (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy + 5x)dy$, L: $x^2 + y^2 = 12$.

3.2 $\oint_L \left(\frac{2xy^2}{1+x^2y^2} - 3y\right)dx + \left(\frac{2x^2y}{1+x^2y^2}\right)dy$, L: $x^2 + y^2 = 36$.

3.3 $\oint\limits_L -\left(\frac{1}{2}\cos 2y + y\sin 2x\right)dx + \left(x\sin 2y + \cos^2 x + x\right)dy$, L: $x^2 + y^2 = 4$.

3.4 $\oint\limits_L \left(y^2 e^{xy^2} + 3y\right)dx + \left(2xye^{xy^2} - 1\right)dy$, L: $x^2 + y^2 = 36$.

3.5 $\oint\limits_L \left(\frac{1}{x+y} - \cos x\cos y - 3x^2\right)dx + \left(\frac{1}{x+y} - \sin x\sin y\_4x\right)dy$, L: $x^2 + y^2 = 44$.

3.6 $\oint\limits_L \left(\frac{y}{x} + \ln y + 2y\right)dx + \left(\ln x + \frac{x}{y} + 1\right)dy$, L: $x^2 + y^2 = 9$.

3.7 $\oint\limits_L \left(e^{x+y} - \cos x\right)dx + \left(e^{x+y} + \sin y + 2x\right)dy$, L: $x^2 + y^2 = 25$.

3.8 $\oint\limits_L \left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} + 2x - 4y\right)dx + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} + 6y\right)dy$, L: $x^2 + y^2 = 2$.

3.9 $\oint\limits_L \left(e^{xy} + xye^{xy} + 2\right)dx + \left(x^2e^{xy} + x\right)dy$, L: $x^2 + y^2 = 3$.

3.10 $\oint\limits_L \left(ye^{xy} + y^2 - 7y\right)dx + \left(xe^{xy} + 2xy\right)dy$, L: $x^2 + y^2 = 9$.

3.11 $\oint\limits_L \left(y\cos(xy) + 2x - 3y\right)dx + \left(x\cos(xy) - 6x + 4y\right)dy$, L: $x^2 + y^2 = 4$.

3.12 $\oint\limits_L \left(3x - 2xy + y^2\right)dx + \left(2xy - x^2 - 3y^2\right)dy$, L: $x^2 + y^2 = 8$.

3.13 $\oint \left(5y + \cos x + 6xy^2\right)dx + \left(7x + 6x^2y\right)dy$, L: $x^2 + y^2 = 7$.

3.14 $\oint\limits_L \left(y^2e^{xy} - 3y\right)dx + e^{xy}(1 + xy)dy$, L: $x^2 + y^2 = 12$.

3.15 $\oint\limits_L (2 + \cos(xy))ydx + (1 + \cos(xy))xdy$, L: $x^2 + y^2 = 25$.

3.16 $\oint\limits_L (3y - \sin x)dx + \left(x - 2y\cos y^2\right)dy$, L: $x^2 + y^2 = 16$.

3.17 $\oint\limits_L \left(2x - \frac{1}{x^2y}\right)dx - \frac{1}{xy^2}dy$, L: $x^2 + y^2 = 6$.

3.18 $\oint\limits_L \frac{x+y}{xy}dx + \left(\frac{y-x}{y^2} + 2x\right)dy$, L: $x^2 + y^2 = 5$.

3.19 $\oint\limits_L \left(20x^3 - 21x^2y\_2y\right)dx + \left(3 + 4x - 7x^3\right)dy$, L: $x^2 + y^2 = 2$.

3.20 $\oint_L \left(ye^{xy} - 2\sin x\right)dx + \left(xe^{xy} + 5x\right)dy$, L: $x^2 + y^2 = 36.$

3.21 $\oint_L y\left(e^{xy} + 6\right)dx + x\left(e^{xy} + 5\right)dy$, L: $x^2 + y^2 = 16.$

3.22 $\oint_L \left(x - \frac{y}{x^2 - y^2}\right)dx + \left(\frac{x}{x^2 - y^2} - 2x\right)dy$, L: $x^2 + y^2 = 9.$

3.23 $\oint_L \frac{x\ln y + y}{x}dx + \left(\frac{y\ln x + x}{x} + 4x\right)dy$, L: $x^2 + y^2 = 25.$

3.24 $\oint_L (e^{x-y}(1 + x + y) + 8y)dx + e^{x-y}(1 - x - y)dy$, L: $x^2 + y^2 = 16.$

3.25 $\oint_L \left(3x^2 - 2xy + 7y\right)dx + \left(x - x^2 - 3y^2 - 4y\right)dy$, L: $x^2 + y^2 = 5.$

4-тапсырма. 1-ші текті беттік интегралды S беті бойынша есептеңіз, мұнда S- (p) жазықтығының координата жазықтықтарымен қиылған бөлігі.

Тапсырмалар нұсқаулары.

№	Тапсырмалар	№	Тапсырмалар
4.1	$\iint_S \left(2x + 3e + 2z\right)ds$, $(p): x + 3y + z = 3$	4.14	$\iint_S \left(9x + 2y + z\right)ds$, $(p): 2x + y + z = 4$
4.2	$\iint_S \left(2 + y - 7x + 9z\right)ds,$ $(p): 2x - y - 2z = -2$	4.15	$\iint_S \left(3x + 8y + 8z\right)ds$, $(p): x + 4y + 2z = 8$
4.3	$\iint_S \left(6x + y + 4z\right)ds,$ $(p): 3x + 3y + z = 3$	4.16	$\iint_S \left(4y - x + 4z\right)ds$, $(p): x - 2y + 2z = 2$
4.4	$\iint_S \left(x + 2y + 3z\right)ds,$ $(p): x + y + z = 2$	4.17	$\iint_S \left(7x + y + 2z\right)ds$, $(p): 3x - 2y + 2z = 6$
4.5	$\iint_S \left(3x - 2y + 6z\right)ds,$ $(p): 2x + y + 2z = 2$	4.18	$\iint_S \left(2x + 3y + z\right)ds$, $(p): 2x + 3y + z = 6$
4.6	$\iint_S \left(2x + 5y - z\right)ds,$ $(p): x + 2y + z = 2$	4.19	$\iint_S \left(4x - y + z\right)ds$, $(p): x - y + z = 2$

4.7	$\iint_S (5x-8y-z)ds$, $(p): 2x-3y+z=6$	4.20	$\iint_S (6x-y+8z)ds$, $(p): x+y+2z=2$
4.8	$\iint_S (3y-x-z)ds$, $(p): x-y+z=2$	4.21	$\iint_S (4x-4y-z)ds$, $(p): x+2y+2z=4$
4.9	$\iint_S (3y-2x-2z)ds$, $(p): 2x-y-2z=-2$	4.22	$\iint_S (2x+5y+z)ds$, $(p): x+y+2z=2$
4.10	$\iint_S (2x-3y+z)ds$, $(p): x+2y+z=2$	4.23	$\iint_S (4x-y+4z)ds$, $(p): 2x+2y+z=4$
4.11	$\iint_S (5x+y-z)ds$, $(p): x+2y+2z=2$	4.24	$\iint_S (5x+2y+2z)ds$, $(p): x+2y+z=2$
4.12	$\iint_S (3x+2y+2z)ds$, $(p): 3x+2y+2z=6$	4.25	$\iint_S (2x+5y+10z)ds$, $(p): 2x+y+3z=6$
4.13	$\iint_S (2x+3y-z)ds$, $(p): 2x+y+z=2$		

5-тапсырма. $u(M)=u(x,y,z)$ функциясы және M_1, M_2 нүктелері берілген. Осы функцияны M_1 нүктесінд $\vec{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ векторының бағыты бойынша туындысын есептеңіз.

Тапсырмалар нұсқаулары.

№	Тапсырмалар		
	$u(M)$	M_1	M_2
5.1	$x^2y+y^2z+z^2x$	(1,-1,2)	(3,4,-1)
5.2	$5xy^3z^2$	(2,1,-1)	(4,-3,0)
5.3	$\ln(x^2+y^2+z^2)$	(-1,2,1)	(3,1,-1)
5.4	$z\cdot e^{x^2+y^2+z^2}$	(0,0,0)	(3,-4,2)
5.5	$\ln(xy+yz+xz)$	(-2,3,-1)	(2,1,-3)
5.6	$\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}$	(1,1,1)	(3,2,1)
5.7	x^2y+xz^2-2	(1,1,1)	(2,-1,3)
5.8	$xe^y+ye^x-z^2$	(3,0,-2)	(4,1,3)

5.9	$3xy^2+z^2-xyz$	(1,2,2)	(3,-1,4)
5.10	$5x^2yz+xy^2z+yz^2$	(1,1,1)	(9,-3,9)
5.11	$\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$	(1,2,2)	(-3,2,-1)
5.12	$y^2z-2xyz+z^2$	(3,1,-1)	(-2,1,4)
5.13	$x^2+y^2+z^2-2xyz$	(1,-1,2)	(5,-1,4)
5.14	$\ln\left(1+x+y^2+z^2\right)$	(1,1,1)	(3,-5,1)
5.15	$x^2+2y^2-4z^2-5$	(1,2,1)	(-3,-2,6)
5.16	$\ln\left(x^3+y^3+z+1\right)$	(1,3,0)	(-4,1,3)
5.17	$x-2y+e^x$	(-4,-5,0)	(2,3,4)
5.18	x^4-3xyz	(2,2,-4)	(1,0,-3)
5.19	$3x^2y^3z$	(-2,-3,1)	(5,-2,0)
5.20	e^{xy+z^2}	(-5,0,2)	(2,4,-3)
5.21	x^{yz}	(3,1,4)	(1,-1,-1)
5.22	$\left(x^2+y^2+z^2\right)^3$	(1,2,-1)	(0,-1,3)
5.23	$(x+y)^z$	(1,5,0)	(3,7,-2)
5.24	x^2y+y^2z-3z	(0,-2,-1)	(12,-5,0)
5.25	$\dfrac{10}{x^2+y^2+z^2+1}$	(-1,2,-2)	(2,0,1)

6-тапсырма. $u(M)=u(x,y,z)$ функциясының $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктесіндегі ең үлкен өзгерісінің бағыты мен шамасын табыңыз.

Тапсырмалар нұсқаулары.

№	$u(x,y,z)$	$M_0(x_0,y_0,z_0)$.
6.1	$xyz+3xy^2-5yz^2$	(0,1,-2)
6.2	$x^2yz-2xyz^2+3xy^2z$	(2,0,2)
6.3	$2x^2y^2z-xyz^3+x^2yz^2$	(1,-1,0)
6.4	$x^2(y+z)-yz^2+2xyz$	(3,0,1)
6.5	$(xy-yz)z^2+xy^2z$	(-1,0,3)
6.6	$2xy^2-3xyz+2xz^2$	(2,1,0)
6.7	$(y+z)xyz-(x+y-z)yz^2$	(0,1,1)
6.8	$3xyz^2-4xy^2z+x^2y^2$	(0,-2,1)
6.9	$-x^2y+2xyz-3xz^2$	(0,1,2)
6.10	$xyz-z^3+2xy^2$	(-1,0,1)
6.11	$zx(y-x)-2xyz+z^3$	(1,2,0)
6.12	$x\left(y^2+z^2\right)+3xyz-z^3$	(-3,1,0)
6.13	$(y+z)x^2-2xy^2+xyz$	(1,0,4)

6.14	$xy(z-y)-2x^3+3xy^2$	(0,-1,2)
6.15	$(x+y)zx^2+2xy^2z-xyz^2$	(-1,0,1)
6.16	$xy^2-z+xyz(z-x)$	(2,1,0)
6.17	$(x+y)z^2+x(y^2+z^2)$	(0,1,1)
6.18	$x-yz\_xyz-xz^2$	(-1,1,0)
6.19	$x^3y+y^3z+z^3x$	(2,1,0)
6.20	$xy^2+yz^2-zx^2$	(-1,0,1)
6.21	$xyz-x^2y-2xy^2$	(0,2,-1)
6.22	$(x-z)y^2+(y-x)z^2$	(1,2,0)
6.23	$xy^2z+x^2yz+xyz^2$	(1,1,1)
6.24	$(x-yz)x^2-2xyz^2$	(-2,0,1)
6.25	$(x+y)z^2+(y+z)x^2$	(1,-1,0)

7-тапсырма. $\vec{a}(M)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ векторлық өрісі циркуляциясының $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктесіндегі ең үлкен тығыздығын табу керек.

Тапсырмалар нұсқаулары.

№	$\vec{a}(M)$	$M_0(x_0,y_0,z_0)$
7.1	$x^2\vec{i}-xy^2\vec{j}+z^2\vec{k}$	(0,1,-2)
7.2	$xy\vec{i}+yz\vec{j}+xz\vec{j}+xz\vec{k}$	(2,0,3)
7.3	$xy^2\vec{i}+yz^2\vec{j}-x^2\vec{k}$	(1,-2,0)
7.4	$xz\vec{i}+z\vec{j}+yz\vec{k}$	(3,0,1)
7.5	$xy\vec{i}+xyz\vec{j}-x\vec{k}$	(-1,0,3)
7.6	$yz\vec{i}-z^2\vec{j}+xyz\vec{k}$	(2,1,-1)
7.7	$y^2\vec{i}-xy\vec{j}+z^2\vec{k}$	(-2,1,1)
7.8	$xz\vec{i}-xyz\vec{j}+x^2z\vec{k}$	(0,1,1)
7.9	$xy\vec{i}-y^2z\vec{j}-xz\vec{k}$	(0,-2,1)
7.10	$xz\vec{i}-y\vec{j}-zy\vec{k}$	(0,1,2)
7.11	$y^2\vec{i}-xy^2\vec{j}+z^2\vec{k}$	(-1,2,1)
7.12	$xy\vec{i}-xy^2\vec{j}-xy^2\vec{j}+z^2\vec{k}$	(1,-1,1)
7.13	$(x+y)\bar{i}+yz\bar{j}+xz\bar{k}$	(2,1,0)
7.14	$xy\bar{i}-(y+z)\bar{j}+xz\bar{k}$	(4,0,1)
7.15	$x\bar{i}-zy\bar{j}+x^2z\bar{k}$	(-3,0,2)
7.16	$(x+y^2)\bar{i}+yz\bar{j}-x^2\bar{k}$	(1,0,4)
7.17	$xz\bar{i}-y\bar{j}+yz\bar{k}$	(0,-1,4)
7.18	$xy\bar{i}-x\bar{j}+yz\bar{k}$	(2,2,2)

7.19	$(x+y)\bar{i}+xyz\bar{j}-x\bar{k}$	(4,1,-3)
7.20	$(x-y)\bar{i}+yz\bar{j}-y\bar{k}$	(-4,1,0)
7.21	$(y-z)\bar{i}-z^2\bar{j}+xyz\bar{k}$	(3,0,1)
7.22	$yz\bar{i}-z^2\bar{j}+(x+y)z\bar{k}$	(1,3,0)
7.23	$z^2\bar{i}-xz\bar{j}+z^2\bar{k}$	(1,-2,1)
7.24	$xy\bar{i}+(x-z)\bar{j}+(y-x)\bar{k}$	(0,0,1)
7.25	$xz\bar{i}+(x-y)\bar{j}+x^2z\bar{k}$	(1,1,-2)

8-тапсырма. Берілген $\vec{a}(M)=P(x,y,z)\bar{i}+Q(x,y,z)\bar{j}+R(x,y,z)\bar{k}$, векторлық өрісі соленоидалды, потенциалды немесе гармоникалық болатынын анықтау керек.

Тапсырмалар нұсқаулары.

№	$\vec{a}(M)$
8.1	$(\alpha-\beta)x\bar{i}+(\gamma-\alpha)y\bar{j}+(\beta-\gamma)z\bar{k}$
8.2	$x^2y\bar{i}-2xy^2\bar{j}+2xyz\bar{k}$
8.3	$(yz-2x)\bar{i}+(xz+2y)\bar{j}+xy\bar{k}$
8.4	$(x^2-z^2)\bar{i}-3xy\bar{j}+(y^2+z^2)\bar{k}$
8.5	$2xyz\bar{i}-y(yz+1)\bar{j}+z\bar{k}$
8.6	$(2x-3y)\bar{i}+2xy\bar{j}-z^2k$
8.7	$(x^2-y^2)\bar{i}+(y^2-z^2)\bar{j}+(z^2-x^2)\bar{k}$
8.8	$yz\bar{i}+(x-y)\bar{j}+z^2\bar{k}$
8.9	$(y+z)\bar{i}+(x+z)\bar{j}+(x+y)\bar{k}$
8.10	$3x^2y\bar{i}-2xy^2\bar{j}-2xyz\bar{k}$
8.11	$(x+y)\bar{i}-2(y+z)\bar{j}+(z-x)\bar{k}$
8.12	$(yz-2x)\bar{i}+(xz+zy)\bar{j}+xy\bar{k}$
8.13	$yz\bar{i}+xz\bar{j}+xy\bar{k}$
8.14	$6xy\bar{i}+(3x^2-2y)\bar{j}+z\bar{k}$
8.15	$(2x-yz)\bar{i}+(2x-xy)\bar{j}+yz\bar{k}$
8.16	$(y-z)\bar{i}+3xyz\bar{j}+(z-x)\bar{k}$
8.17	$(y-z)\bar{i}+(x+z)\bar{j}+(x^2-y^2)\bar{k}$
8.18	$(x+y)\bar{i}-2xz\bar{j}-3(y+z)\bar{k}$
8.19	$z^2\bar{i}+(xz+y)\bar{j}+x^2y\bar{k}$
8.20	$xy(3x-4y)\bar{i}+x^2(x-4y)\bar{j}+3z^2\bar{k}$
8.21	$6x^2i+3\cos(3x+2z)\bar{j}+\cos(3y+2z)\bar{k}$
8.22	$(x+y)\bar{i}+(z-y)\bar{j}+2(x+z)\bar{k}$
8.23	$3(x-z)\bar{i}+(x^2-y^2)\bar{j}+3z\bar{k}$

8.24	$(2x-yz)\bar{i}+(xz-2y)\bar{j}+2xyz\bar{k}$
8.25	$3x^2\bar{i}+4(x-y)\bar{j}+(x-z)\bar{k}$

9-тапсырма. Стокс формуласының көмегімен (p) жазықтығының координаттар жазықтығымен қиылысуы нәтижесінде пайда болған үшбұрыш контуры бойынша өтетін $\vec{a}(M)$ векторлық өрісінің циркуляциясын есептеңіз (оң бағыт жазықтықтың сыртқы нормалі бойынша). Сызбасын салыңыз.

Тапсырмалар нұсқаулары.

№	$\vec{a}(M)$	(p)
9.1	$(2x-3y)\bar{i}+(x+4y)\bar{j}-6z\bar{k}$	$x+2y-z=2$
9.2	$3x\bar{i}-y^2z\bar{j}+yz^2\bar{k}$	$x-y+3z=3$
9.3	$(4x+z)\bar{i}+(2z-y)\bar{j}+(3x+2y)\bar{k}$	$x-2y+z=4$
9.4	$-x^2y\bar{i}+xy^2\bar{j}+3z^2\bar{k}$	$x+2y+z=2$
9.5	$(3y-2z)\bar{j}$	$x+y-2z=4$
9.6	$-3x^2y\bar{i}+3xy^2\bar{j}+z^3\bar{k}$	$x+2y-z=2$
9.7	$(2y-x)\bar{i}+(2x+5y)\bar{j}+(4y-3z)\bar{k}$	$x-y+z=2$
9.8	$-x^2z\bar{i}+3y\bar{j}+xz^2\bar{k}$	$2x-y+2z=4$
9.9	$(5x+2y)\bar{i}+(2x+3y)\bar{j}+(z+2y)\bar{k}$	$x-y-z=1$
9.10	$4x^2y\bar{i}-4xy^2\bar{j}+(5z+3)\bar{k}$	$2x-3y+2z=6$
9.11	$(x-3z)\bar{i}+4y\bar{j}+(2x+z)\bar{k}$	$2x+y+z=4$
9.12	$x^2z\bar{i}+3y\bar{j}-xz^2\bar{k}$	$x+2y+z=2$
9.13	$(x-3y)\bar{i}+(2x-y)\bar{j}+4z\bar{k}$	$x+3y-z=3$
9.14	$-3x^2y\bar{i}+3xy^2\bar{j}+2z\bar{k}$	$2x+y+3z=6$
9.15	$(4x-1)\bar{i}+(2y+z)\bar{j}(5y-z)\bar{k}$	$4x+y+2z=4$
9.16	$(x+2y)\bar{i}+(2x+y)\bar{j}+(2y+z)\bar{k}$	$x-2y+z=4$
9.17	$(x-2z)\bar{i}+3y\bar{j}+(2x+3z)\bar{k}$	$x-2y+3z=6$
9.18	$(3x+5)\bar{i}+(y-2z)\bar{j}+(2y+z)\bar{k}$	$-2x+y+2z=4$
9.19	$3y\bar{i}+(2y+3z)\bar{j}+(3y-2z)\bar{k}$	$x-2y-2z=2$
9.20	$(2x-3z)\bar{i}+5y\bar{j}+(x+2z)\bar{k}$	$x-y+2z=2$
9.21	$(5x-3)\bar{i}+(2y-3z)\bar{j}+(3y+2z)\bar{k}$	$x+2y+z=6$
9.22	$(x-2y)\bar{i}+(3y+2z)\bar{j}+(2y-5z)\bar{k}$	$x+y-2z=4$
9.23	$(x+2z)\bar{i}+(y+4z)\bar{j}+(4y-3z)\bar{k}$	$x+2y-3z=6$
9.24	$(x+4z)\bar{i}+(y+2z)\bar{j}+(4x+3z)\bar{k}$	$-2x+y+z=4$
9.25	$(x-2y)\bar{i}+(3z+2y)\bar{j}+(3y-4z)\bar{k}$	$x+y+3z=3$

10-тапсырма. $\vec{a}(M)$ векторлық өрісінің $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \\ 0 \le t \le 1. \end{cases}$ параметрлік түрде берілген L қисығы бойынша жұмысын есептеу керек.

Тапсырмалар нұсқаулары.

№	$\vec{a}(M)$	$x(t)$	$y(t)$	$z(t)$
10.1	$(x^2+2)\bar{i}+(y+1)\bar{j}-z\bar{k}$	$2t$	t^2	$t-1$
10.2	$(x-y)\bar{i}-(z+x^2)\bar{j}+xy\bar{k}$	t^3	2	$3t$
10.3	$-(z+x^2)\bar{i}+(y-2)\bar{j}-xyz\bar{k}$	$t+1$	t^2	4
10.4	$(z^2-1)\bar{i}-(xy-z)\bar{j}+x^2\bar{k}$	3	$t-4$	t^2
10.5	$(xy+2)\bar{i}+(yz-x)\bar{j}-z^2\bar{k}$	$t+1$	t^2	2
10.6	$-x\bar{i}+(xyz-1)\bar{j}+(z+x)\bar{k}$	$2\,t^2$	1	$3t-1$
10.7	$(y^2+1)\bar{i}-(xy+z)\bar{j}-z\bar{k}$	$4t$	2	t^3
10.8	$(xyz-1)\bar{i}+(x+2)\bar{j}-xy\bar{k}$	5	t^2+1	t
10.9	$(z-x)\bar{i}-(y+z^2)\bar{j}-z\bar{k}$	$t+4$	1	$2t^2-1$
10.10	$(-y+zx)\bar{i}+(x+2)\bar{j}-z^3\bar{k}$	2	t^2-1	$3t$
10.11	$(x^2+1)\bar{i}-(x-z^2)\bar{j}+xy\bar{k}$	$t-1$	5	t^3
10.12	$(yz-1)\bar{i}+xyz\bar{j}-(z-1)\bar{k}$	2	$3t$	$4\,t^2$
10.13	$(xy-1)\bar{i}+xy\bar{j}+(z^2+1)\bar{k}$	$t-1$	$t+1$	2
10.14	$z^2x\bar{i}-(xy+1)\bar{j}-x^2\bar{k}$	4	t^2-1	t^3
10.15	$xz\bar{i}-xy\bar{j}+(z+1)\bar{k}$	$t+2$	t^2	2
10.16	$(z+2)\bar{i}+(z-3)\bar{j}+xy\bar{k}$	t^2-1	$2t$	$t-1$
10.17	$(x+y+z)\bar{i}-xy\bar{j}+(z^3+1)\bar{k}$	$3t-1$	t^2	7
10.18	$(y-z)\bar{i}+xz\bar{j}-(z-1)\bar{k}$	t^2+1	1	$t-2$
10.19	$(z-x)\bar{i}-(y+z^2)\bar{j}+x^2\bar{k}$	$2t$	3	$3t^2-1$
10.20	$yz\bar{i}+(x+yz)\bar{j}-y^2\bar{k}$	5	$t+1$	t^2-1
10.21	$xyz\bar{i}+(x+1)\bar{j}-zx\bar{k}$	$2t+2$	$3t^2$	2
10.22	$(z^2-4)\bar{i}-xz\bar{j}+xy^2\bar{k}$	$2t$	$3t^3-2$	2
10.23	$(x-1)\bar{i}-xy^2\bar{j}+xyz\bar{k}$	$t+1$	2	t^2
10.24	$(y+zx)\bar{i}-yz\bar{j}+(x^2+1)\bar{k}$	2	$t+1$	t^2
10.25	$(x+zy)\bar{i}+(y+1)\bar{j}-zx\bar{k}$	t^3-1	$t-1$	2

11-тапсырма. (p) жазықтығының бірінші октантта орналасқан бөлігі арқылы өтетін $\vec{a}(M)$ векторлық өрістің ағынын есептеу керек (жазықтықтың нормалі Oz өсімен сүйір бұрыш жасайды).

Тапсырмалар нұсқаулары.

№	$\vec{a}(M)$	(p)
11.1	$x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$	$x+y+z=1$
11.2	$y\bar{j}+z\bar{k}$	$x+y+z=1$
11.3	$2x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$	$x+y+z=1$
11.4	$x\bar{i}+3y\bar{j}+2z\bar{k}$	$x+y+z=1$
11.5	$2x\bar{i}+3y\bar{j}$	$x+y+z=1$
11.6	$x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$	$x+2y+2z=2$
11.7	$x\bar{i}+2y\bar{j}+z\bar{k}$	$x+2y+2z=2$
11.8	$y\bar{j}+3z\bar{k}$	$x+2y+2z=2$
11.9	$x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$	$6x+3y+2z=6$
11.10	$2x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$	$6x+3y+2z=6$
11.11	$3x\bar{i}+2z\bar{k}$	$6x+3y+2z=6$
11.12	$2x\bar{i}+3y\bar{j}+z\bar{k}$	$2x+6y+3z=6$
11.13	$x\bar{i}+3y\bar{j}-z\bar{k}$	$2x+6y+3z=6$
11.14	$-2x\bar{i}+y\bar{j}+4z\bar{k}$	$2x+6y+3z=6$
11.15	$x\bar{i}-y\bar{j}+6z\bar{k}$	$3x+2y+6z=6$
11.16	$2x\bar{i}+5y\bar{j}+5z\bar{k}$	$3x+2y+6z=6$
11.17	$x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$	$4x+y+2z=2$
11.18	$2x\bar{i}+y\bar{j}-2z\bar{k}$	$4x+y+2z=2$
11.19	$x\bar{i}+y\bar{j}+2z\bar{k}$	$4x+y+2z=2$
11.20	$-x\bar{i}+y\bar{j}+12z\bar{k}$	$4x+y+2z=2$
11.21	$x\bar{i}+3y\bar{j}+8z\bar{k}$	$2x+4y+z=2$
11.22	$x\bar{i}-y\bar{j}+6z\bar{k}$	$2x+4y+z=2$
11.23	$x\bar{i}+2y\bar{j}+5z\bar{k}$	$2x+4y+z=2$
11.24	$x\bar{i}+4y\bar{j}+5z\bar{k}$	$2x+4y+z=2$
11.25	$x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$	$2x+3y+z=1$

12-тапсырма. Остроградский-Гаусс формуласының көмегімен, (p) жазықтығы мен координаттар жазықтықтары қиылысуы нәтижесінде пайда болған пирамиданың сыртқы беті арқылы өтетін $\vec{a}(M)$ векторлық өрісінің ағынын есептеу керек.

Тапсырмалар нұсқаулары.

№	$\vec{a}(M)$	(p)
12.1	$(x+\cos zy)\bar{i}+2y\bar{j}+(3z-e^{x})\bar{k}$	$x+y+2z=4$
12.2	$(2x+e^{y})\bar{i}-(y+x^{z})\bar{j}+(4z+xy)\bar{k}$	$x+2y+z=6$
12.3	$(x-e^{zy})\bar{i}+(x^{z+1}+2y)\bar{j}-(z+x)\bar{k}$	$2x+3y+z=6$

12.4	$\left(3x-\sin y^2\right)\bar{i}+\left(2y-z^x\right)\bar{j}+\left(z-tgx\right)\bar{k}$	$-x+2y+3z=6$
12.5	$\left(2x+\cos yz\right)\bar{i}-\left(y-tgz\right)\bar{j}+2z\bar{k}$	$x+2y+2z=4$
12.6	$\left(x-\arcsin y\right)\bar{i}+\left(2y+\sin z\right)\bar{j}-\left(z+e^x\right)\bar{k}$	$x+y+z=1$
12.7	$\left(4x+\sin y^z\right)\bar{i}-\left(2y-ctgxz\right)\bar{j}-\left(z+xy\right)\bar{k}$	$-x+y+3z=3$
12.8	$\left(2x-\ln yz\right)\bar{i}+\left(y+\cos x\right)\bar{j}-\left(2z+x^y\right)\bar{k}$	$3x+y+z=6$
12.9	$\left(x+tgy\right)\bar{i}+\left(2y+e^x\right)\bar{j}-\left(z-\ln x\right)\bar{k}$	$2x+y+z=4$
12.10	$\left(3x-e^{yz}\right)\bar{i}-\left(2y+\cos z\right)\bar{j}+\left(z-\sin y\right)\bar{k}$	$x-y+2z=4$
12.11	$\left(2x+\ln(y+1)\right)\bar{i}+\left(2y-\cos z^x\right)\bar{j}+\left(3-2z\right)\bar{k}$	$-2x+3y+z=6$
12.12	$\left(thz+x\right)\bar{i}-\left(\sin x+y\right)\bar{j}+\left(2z-y\right)\bar{k}$	$x+y-z=1$
12.13	$\left(\ln yz+2x\right)\bar{i}+\left(\cos z+y\right)\bar{j}+\left(y^x-z\right)\bar{k}$	$x+2y-3z=6$
12.14	$\left(3x-\ln y\right)\bar{i}+\left(e^x-2y\right)\bar{j}+\left(z-x\ln y\right)\bar{k}$	$2x-y-z=4$
12.15	$\left(tgz-x\right)\bar{i}+\left(e^{xz}+3y\right)\bar{j}+\left(\sin x-z\right)\bar{k}$	$x+y-2z=2$
12.16	$\left(x+ye^z\right)\bar{i}+\left(x\ln x-y\right)\bar{j}+\left(2z+e^x\right)\bar{k}$	$-x+y+2z=3$
12.17	$\left(\arcsin y-2x\right)\bar{i}+\left(3y+\sin z\right)\bar{j}+\left(z+1\right)\bar{k}$	$x+y+3z=6$
12.18	$\left(e^{yz}+3x\right)\bar{i}-\left(2y+\cos zx\right)\bar{j}+\left(tgx+z\right)\bar{k}$	$3x-2y+z=6$
12.19	$\left(x-y\ln z\right)\bar{i}-\left(3\sin x-2y\right)\bar{j}+\left(e^x-z\right)\bar{k}$	$2x+2y-z=4$
12.20	$\left(ye^z-2x\right)\bar{i}+\left(3y-\sin z\right)\bar{j}+\left(tgxy+z\right)\bar{k}$	$-3x+2y-z=6$
12.21	$\left(e^z+x\right)\bar{i}-\left(x\ln z-2y\right)\bar{j}+\left(z-\sin x\right)\bar{k}$	$2x-2y+z=4$
12.22	$\left(\ln z+2x\right)\bar{i}+\left(e^x-y\right)\bar{j}+\left(tgy+z\right)\bar{k}$	$x-y+3z=3$
12.23	$\left(e^y+2x\right)\bar{i}-\left(x\ln z+2y\right)\bar{j}+\left(z+x\cos y\right)\bar{k}$	$-2x+y+3z=6$
12.24	$\left(arctgy+3x\right)\bar{i}-\left(2y+e^x\right)\bar{j}+\left(z-tgx\right)\bar{k}$	$x+2y+z=4$
12.25	$\left(2x-y\ln z\right)\bar{i}+\left(2y-e^x\right)\bar{j}+\left(z-\cos x\right)\bar{k}$	$x-2y+3z=6$

13-тапсырма. $\vec{a}(M)$ векторлық өрісі потенциалды екенін көрсетіп, сол өрістің потенциалын табу керек.

Тапсырмалар нұсқаулары.

№	$\vec{a}(M)$
13.1	$3x^2e^y\bar{i}+\left(x^3e^y-1\right)\bar{j}$
13.2	$\left(3x^2-2xy+y\right)\bar{i}+\left(x-x^2-3y^2-4y\right)\bar{j}$
13.3	$\left(3x^2-2xy+y^2\right)\bar{i}+\left(2xy-x^2-3y^2\right)\bar{j}$
13.4	$\left(2xe^{x^2-y^2}-\sin x\right)\bar{i}+\left(\sin y-2ye^{x^2-y^2}\right)\bar{j}$
13.5	$\left(20x^2-21x^2y+2y\right)\bar{i}+\left(3+2x-7x^3\right)\bar{j}$
13.6	$\left(y-\sin x\right)\bar{i}+\left(x-2y\cos y^2\right)\bar{j}$
13.7	$\left(5y+\cos x+6xy^2\right)\bar{i}+\left(5x+6x^2y\right)\bar{j}$
13.8	$\left(e^{x+y}-\cos x\right)\bar{i}+\left(e^{x+y}+\sin y\right)\bar{j}$

13.9	$\left(2x-3y^2+1\right)\bar{i}+\left(2-6xy\right)\bar{j}$
13.10	$\left(x^2-2y\right)\bar{i}+\left(y^2-2x\right)\bar{j}$
13.11	$\left(3x^2+6x^2y+3xy^2\right)\bar{i}+\left(2x^3+3x^2y\right)\bar{j}$
13.12	$xy^2\bar{i}+y\left(x^2+y^2\right)\bar{j}$
13.13	$2\left(3xy^2+2x^3\right)\bar{i}+3\left(2x^2y+y^2\right)\bar{j}$
13.14	$\left(x^2-4xy-2y^2\right)\bar{i}+\left(y^2-4xy-2x^2\right)\bar{j}$
13.15	$\left(\cos\left(x^2+y^2\right)+\sin x\right)\bar{i}+2y\cos\left(x+y^2\right)\bar{j}$
13.16	$\left(5xy^2-x^3\right)\bar{i}+\left(5x^2y-y\right)\bar{j}$
13.17	$xe^{y^2}\bar{i}+\left(x^2ye^{y^2}+tg^2y\right)\bar{j}$
13.18	$\left(y^3+\cos x\right)\bar{i}+\left(3xy^2+e^y\right)\bar{j}$
13.19	$e^y\bar{i}+\left(\cos y+xe^y\right)\bar{j}$
13.20	$\left(3x^2+4y^2\right)\bar{i}+\left(8xy+e^y\right)\bar{j}$
13.21	$\left(y^2+y\sec^2 x\right)\bar{i}+\left(2xy+tgx\right)\bar{j}$
13.22	$\left(3x^2y+2y+3\right)\bar{i}+\left(x^3+2x+3y^2\right)\bar{j}$
13.23	$\left(\sin 2x-2\cos(x+y)\right)\bar{i}-2\cos(x+y)\bar{j}$
13.24	$\left(2x-1-\frac{y}{x^2}\right)\bar{i}-\left(2y-\frac{1}{x}\right)\bar{j}$
13.25	$\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4}\right)\bar{i}-\frac{2y}{x^3}\bar{j}$

1.2 Типтік нұсқаның шешуі

1-тапсырма. Берілген $\int\limits_L x\cdot arctg\frac{y}{x}dl$ 1–ші текті қисық сызықты интегралын есептеңіз, мұнда L - $y = 4x$ түзуінің A(0; 0) нүктесінен B(1; 4) нүктесіне дейінгі кесіндісі.

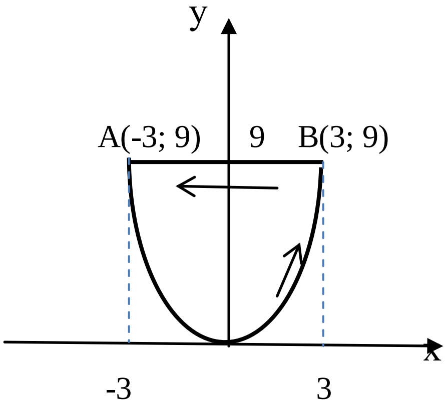
Шешуі: бұл қисық сызықты интегралды есептеу үшін қисық сызықты интегралды анықталған интегралға келтіретін формуланы қолданамыз:

$$\int\limits_L x\cdot arctg\frac{y}{x}dl=\int\limits_0^1 x\cdot arctg\frac{4x}{x}\sqrt{1+16}\,dx=\sqrt{17}arctg\,4\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{\sqrt{17}}{2}arctg4.$$

Жауабы: $\frac{\sqrt{17}}{2}arctg4$.

2-тапсырма. Берілген $\int\limits_L 2x\cdot(y-1)dx+x^2dy$ 2–ші текті қисық сызықты интегралын есептеңіз, мұнда L – $y=x^2$ параболасы және $y=9$ түзуімен шектелген фигураны оң бағытта айналғанда айда болған контур сызығы.

Шешуі:



L контуры әртүрлі екі сызықтан тұрғандықтан оны екі бөлікке L_1 мен L_2-ге бөлеміз:

$$\int_{L_1} 2x\cdot(y-1)dx + x^2dy + \int_{L_2} 2x\cdot(y-1)dx + x^2dy =$$

$$= \begin{vmatrix} L_1: \; y = x^2 \;, dy = 2xdx, \; -3 \le x \le 3, \\ L_2: y = 9, \text{ dy} = 0, \; -3 \le x \le 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \int_{-3}^{3} 2x\left(x^2-1\right)dx + x^2 2xdx + \int_{-3}^{3} 2x\left(9-1\right)dx + x^2\cdot 0 = \int_{-3}^{3}\left(4x^2-2x\right)dx + 16\int_{-3}^{3} xdx = 0.$$

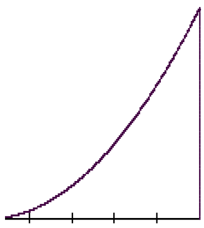
Жауабы: 0.

3-тапсырма. 2-ші текті қисық сызықты интегралды тұйық контур бойынша Грин формуласының көмегімен есептеңіз,

$$I = \oint_L \left(e^{x^2} - 5y^2 - 7\sin x^2\right)dx + \left(\sin y^2 + 2x^2 - \sqrt[3]{1+2y^2}\right)dy \,,$$

мұнда L – D облысын оң бағытта айналып өтетін контур сызығы: $0<x<1$, $0<y<x$.

Шешуі:



Берілген интегралда $P = e^{x^2} - 5y^2 - 7\sin x^2$ мен $Q = \sin y^2 + 2x^2 - \sqrt[3]{1+2y^2}$ функциялары өздерінің 1-ші ретті туындыларымен бірге үзіліссіз, сондықтан Грин формуласын қолданамыз.

$$I = \oint_L \left(e^{x^2} - 5y^2 - 7\sin x^2\right)dx + \left(\sin y^2 + 2x^2 - \sqrt[3]{1+2y^2}\right)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy =$$

$$= \iint_D \left(4x - (-10y)\right)dxdy = 2\int_0^1 dx \int_0^{x^2} \left(2x+5y\right)dy = 2\int_0^1 \left(2x^3 + 2{,}5x^4\right)dx = 2 \ .$$

Жауабы: 2.

4-тапсырма. $\iint_S \left(3x - y + z\right)ds$ 1–ші текті беттік интегралын S беті бойынша есептеңіз, мұнда S: x-2y+z =2 – (p) жазықтығынан координаттар жазықтықтары қиып түскен бөлігі.

Шешуі: жазықтықтың теңдеуінен:

$$z = 2 - x + 2y, \quad z'_x = -1, \quad z'_y = 2, \ ds = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dxdy = \sqrt{6}dxdy.$$

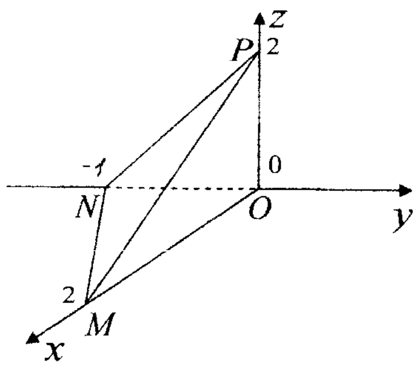
$$\iint_S \left(3x - y + z\right)ds = \iint_D \left(3x - y + 2 - x + 2y\right)\sqrt{6}dxdy = \iint_D \left(2x + y + 2\right)\sqrt{6}dxdy =$$

$$= \sqrt{6}\int_{-1}^{0} dy \int_0^{2+2y} \left(2x + y + 2\right)dx = \sqrt{6}\int_0^{2+2y} dy\left(x^2 + (y+2)x\right)\Big|_0^{2+2y} =$$

$$= \sqrt{6}\int_{-1}^{0} \left(4 + 8y + 4y^2 + 2y + 2y^2 + 4 + 4y\right)dy = \sqrt{6}\int_{-1}^{0}\left(6y^2 + 14y + 8\right)dy =$$

$$= \sqrt{6}\left(2y^3 + 7y^2 + 8y\right)\left(2y^3 + 7y^2 + 8y\right)\Big|_{-1}^{0} = 3\sqrt{6}.$$

Беттік интегралды D облысы бойынша есептелетін қос интегралға келтіреміз, мұнда D–MON үшбұрышы, ол S беттің xOy жазықтығына проекциясы:



Жауабы: $3\sqrt{6}$.

5-тапсырма. $u(M) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ функциясы және $M_1(-2; 3; 6)$, $M_2(-1; 1; 4)$ нүктелері берілген. Осы функцияның M_1 нүктесіндегі $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ векторының бағыты бойынша туындысын есептеңіз.

Шешуі: *u(M)* функциясының $\vec{a}$ векторы бағыты бойынша туындысы мына формуламен табылады:

$$\frac{du}{d\vec{a}}(M_1)=u'_x(M_1)\cos\alpha+u'_y(M_1)cos\beta+u'_z(M_1)\cos\gamma,$$

мұнда $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ - $\vec{a}=\overline{M_1M_2}$ векторының бағыттаушы косинустары және олар бірлік вектордың координаттары болып табылады. $\vec{a^0}=\frac{\overline{M_1M_2}}{\left|\overline{M_1M_2}\right|}=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$.

Енді берілген формуланың компоненттерін табайық:

$$u'_x(M_1)=\left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_1}=\frac{-2}{\sqrt{4+9+36}}=-\frac{2}{7}\ ;$$

$$u'_y(M_1)=\left.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_1}=\frac{3}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{3}{7};$$

$$u'_z(M_1)=\left.\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_1}=\frac{6}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{6}{7};$$

$$\overline{M_1M_2}=\{-1-(-2);1-3;4-6\}=\{1;-2;-2\};\ \left|\overline{M_1M_2}\right|=\sqrt{1+4+4}=3;$$

$$\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}=\left\{\frac{1}{3};\frac{-2}{3};\frac{-2}{3}\right\}.$$

Осылайша, $u'_{\vec{a}}(M_1)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{7}\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)+\frac{6}{7}\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)=-\frac{20}{21}$.

Жауабы: $-\frac{20}{21}$.

6-тапсырма. $u(M)=x^2-2xy+3z^3$ функциясының $M_0(0;2;1)$ нүктесіндегі ең үлкен өзгерісінің бағыты мен шамасын табыңыз.

Шешуі: функцияның ең үлкен өзгерісінің бағытын оның градиенті көрсетеді, ал ең үлкен өзгерісінің шамасы градиенттің модуліне тең.

$$\overline{grad}u(M_0)=u'_x(M_0)\vec{i}+u'_y(M_0)\vec{j}+u'_z(M_1)\vec{\mathrm{k}},$$

$$u'_x(M_0)=(2x-2y)\big|_{M_0}=-4\ ,$$

$$u'_y(M_0)=-2x\big|_{M_0}=0\ ,\ u'_z(M_0)=9z^2\big|_{M_0}=9,$$

$$\overline{grad}\,u(M_0)=-4\vec{i}+9\vec{k}\ ,\quad \left|\overline{grad}\,u(M_0)\right|=\sqrt{16+81}=\sqrt{97}.$$

Жауабы: $\overline{grad}\,u(M_0)=-4\vec{i}+9\vec{k}$ - функцияның ең үлкен өзгерісінің бағыты, $\left|\overline{grad}\,u(M_0)\right|=\sqrt{97}$ -ең үлкен өзгерісінің шамасы.

7-тапсырма. $\vec{a}(M)=xy^2z^2\vec{i}+x^2yz^2\vec{j}+xyz\vec{k}$ векторлық өрісінің $M_0(1;2;1)$ нүктесіндегі циркуляциясының ең үлкен тығыздығын есептеңіз.

Шешуі: $\vec{a}(M)$ векторлық өрісінің M_0 нүктесіндегі циркуляциясының ең үлкен тығыздығы ротор бағытымен анықталады, ал сандық мәні оның модуліне тең.

$$rot\,\vec{a}(M)=\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^2 & x^2yz^2 & xyz \end{pmatrix}=\left(\frac{\partial(xyz)}{\partial y}-\frac{\partial\left(x^2yz^2\right)}{\partial z}\right)\vec{i}-$$

$$-\left(\frac{\partial(xyz)}{\partial x}-\frac{\partial\left(xy^2z^2\right)}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial\left(x^2yz^2\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(xy^2z^2\right)}{\partial y}\right)\vec{k}=\left(xz-2x^2yz\right)\vec{i}-$$

$$-\left(yz-2xy^2z\right)\vec{j}+\left(2xyz^2-2xyz^2\right)\vec{k}=\left(xz-2x^2yz\right)\vec{i}+\left(2xy^2z-yz\right)\vec{j}.$$

$$rot\,\vec{a}(M_0)=-3\vec{i}+6\vec{j},$$

$$\left|rot\,\vec{a}(M_0)\right|=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}\ .$$

Жауабы: векторлық өрістің циркуляциясының ең үлкен тығыздығы $rot\,\vec{a}(M_0)=-3\vec{i}+6\vec{j}$ роторының бағытында анықталады, ал сандық мәні - $3\sqrt{5}$.

8-тапсырма. $\vec{a}(M)=(2xy+z)\vec{i}+\left(x^2-2y\right)\vec{j}+x\vec{k}$ векторлық өрісі соленоидалды, потенциалды, гармониялық болатындығын анықтау керек.

Шешуі: $\vec{a}(M)$ векторлық өрісі соленоидалды деп аталады, егер өрістің әрбір нүктесінде $div\,\vec{a}(M)=0$ теңдігі орындалса. $\vec{a}(M)$ векторлық өрісі *потенциалды* деп аталады, егер өрістің әрбір нүктесінде $rot\,\vec{a}(M)=0$ теңдігі орындалса. Егер өріс соленоидалды да, потенциалды да болса, онда оны *гармониялық* өріс деп атайды. Сонымен,

$div\,\vec{a}(M)=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=2y-2+0=2y-2\neq 0$, яғни $\vec{a}(M)$ өрісі соленоидалды емес.

$$rot\,\vec{a}(M)=\begin{pmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy+z & x^2-2y & x \end{pmatrix}=\left(\frac{\partial(x)}{\partial y}-\frac{\partial(x^2-2y)}{\partial z}\right)\vec{i}\,-$$

$$\left(\frac{\partial(x)}{\partial x}-\frac{\partial(2x+z)}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial(x^2-2y)}{\partial x}-\frac{\partial(2xy+z)}{\partial y}\right)\vec{k}=(0-0)\vec{i}\,-$$

$$-(1-1)\vec{j}+(2x-2x)\vec{k}=0,$$

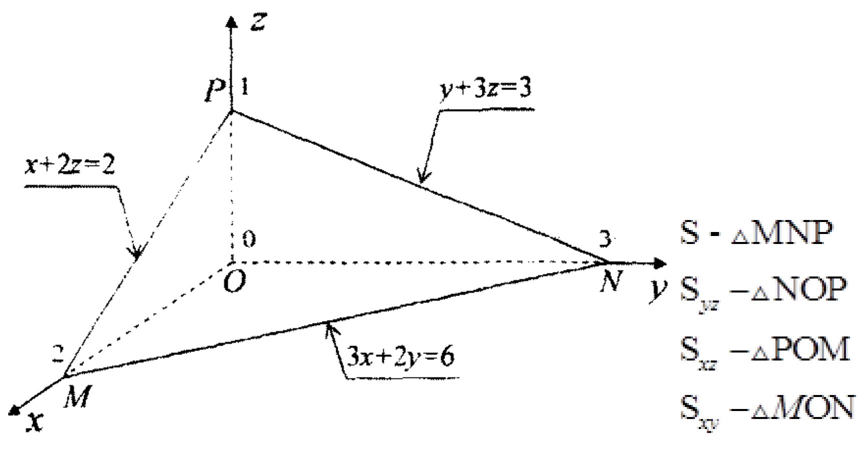
яғни, өріс потенциалды.

Жауабы: $\vec{a}(M)$ векторлық өрісі потенциалды, бірақ соленоидалды емес, сондықтан өріс гармониялық емес.

9-тапсырма. Стокс формуласының көмегімен, $\vec{a}(M)=(x+3y+2z)\vec{i}+(2x+z)\vec{j}+(x-y)\vec{k}$ векторлық өрісінің 3x+2y+6z=6 теңдеуімен берілген (р) жазықтығы және координаттар жазықтықтарының қиылысуынан пайда болған үшбұрыш контуры бойынша циркуляциясын табу керек (бағыты берілген жазықтықтармен шектелген пирамиданың сыртқы бетінің $\vec{n}$ нормалімен оң бағыттас). Сызбасын салу керек.

Шешуі: Стокс формуласы бойынша: $Ц=\oint_L \vec{a}\cdot\overrightarrow{dr}=\iint_S rot\,\vec{a}\cdot\overrightarrow{ds}$,

мұнда $\iint_S rot\,\vec{a}\cdot\overrightarrow{ds}$ - 2-ші текті беттік интеграл, $rot\,\vec{a}\cdot\overrightarrow{ds}$ - $rot\,\vec{a}$ мен $\overrightarrow{ds}$ векторларының скаляр көбейтіндісі.



(р) жазықтығының сыртқы жағының нормаль векторы $\vec{n}$ (суретте) координаттар жазықтықтарымен сүйір бұрыштар жасайды. Сондықтан беттік интегралды есептегенде оның таңбасын өзгертпейміз.

$rot\,\vec{a}$ векторын есептейік.

$$rot\,\vec{a} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+3y+2z & 2x+z & x-y \end{pmatrix} = |\,8-\textit{ші тапсырма шешуіне қара}\,| =$$

$$= (-1-1)\vec{i} - (1-2)\vec{j} + (2-3)\vec{k} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}.$$

Анықтама бойынша $\overrightarrow{ds} = dydz\cdot\vec{i} + dxdz\cdot\vec{j} + dxdy\cdot\vec{k}$ - векторлық түрдегі ауданның дифференциалы.

Сондықтан,

$$Ц = \iint_S rot\,\vec{a}\cdot ds = \iint_S (-2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})\cdot(dydz\cdot\vec{i} + dxds\cdot\vec{j} + dxdy\cdot\vec{k}) =$$

$$= \iint_S -2dydz + dxdz - dxdy = -2\iint_{Syz} dydz + \iint_{Sxz} dxdz - \iint_{Sxy} dxdy =$$

$$= -2\int_0^3 dy \int_0^{1-\frac{y}{3}} dz + \int_0^1 dz \int_0^{2-2x} dx - \int_0^2 dx \int_0^{3-\frac{3x}{2}} dy = -2\left(y - \frac{y^2}{6}\right)\Big|_0^3 + \left(2z - z^2\right)\Big|_0^1 -$$

$$-\left(3x - \frac{3}{4}x^2\right)\Big|_0^2 = -2\left(3 - \frac{9}{6}\right) + (2-1) - (6-3) = -5.$$

Жауабы: Ц = -5.

10-тапсырма. $\vec{a} = (x+y)\vec{i} - (y^2+2)\vec{j} + z\vec{k}$ векторлық өрісінің параметрлік түрде берілген L қисығы бойымен жұмысын есептеу керек,

мұнда $$L: \begin{cases} x = t^2, \\ y = 2, \quad\quad 0 \le t \le 1. \\ z = t+1, \end{cases}$$

Шешуі: векторлық өрістің L қисығы бойымен жұмысы 2-ші текті қисықсызықты интегралмен есептеледі $A = \int_L Pdx + Qdy + Rdz$ (координаталық түрде жазылған). Осылайша,

$$A = \int_L (x+y)dx - (y^2+2)dy + zdz = \begin{vmatrix} x = t^2, \ dx = 2tdt \\ y = 2, \ \ dy = 0 \\ z = t+1, dz = dt \\ 0 \le t \le 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \int_0^1 \left(t^2+2\right)2tdt - \left(4+2\right)\cdot 0 + \left(t+1\right)dt = \int_0^1 \left(2t^2+5t+1\right)dt =$$

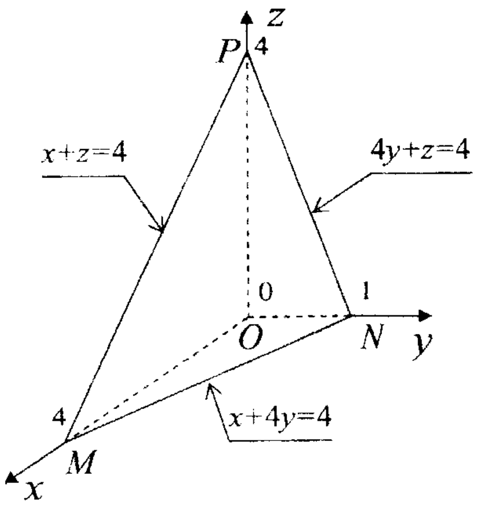
$$= \left(\frac{2t^4}{4} + \frac{5t^2}{2} + t\right)\Bigg|_0^1 = 4.$$

Жауабы: A = 4.

11-тапсырма. x+4y+z=4 теңдеуімен берілген (р) жазықтығының бірінші октантта орналасқан бөлігі арқылы өтетін $\vec{a} = \left(2z - x\right)\vec{i} + \left(x + 2z\right)\vec{j} + 3z\vec{k}$ векторлық өрістің ағынын есептеу керек (жазықтықтың нормалі Oz өсімен сүйір бұрыш жасайды).

Шешуі: (р) жазықтығының теңдеуін кесінділердегі теңдеу түріне келтіріп сәйкес сызбасын саламыз.

(р): $\dfrac{x}{4} + y + \dfrac{z}{4} = 1.$ Өрістің ағыны есептелетін жазықтықтың бөлігі S ($\triangle$MNP) арқылы белгіленген, ал $M(4;0;0), N(0;1;0), P(0;0;4)$- үшбұрыш төбелерінің координаттары.



$\left.\begin{array}{l} S - \triangle MNP \\ S_{yz} - \triangle NOP \\ S_{xz} - \triangle POM \\ S_{xy} - \triangle MON \end{array}\right\}$ - S-тің координаттар жазықтықтарына проекциялары.

x+4y+z=4 жазықтығына нормаль $\vec{n}$ векторының бірлік векторының координаттары

$$\vec{n}\left(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\right) = \vec{n}\left(\frac{1}{\sqrt{17}}; \frac{4}{\sqrt{17}}; \frac{1}{\sqrt{17}}\right),$$

мұнда $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{17}} > 0$, сондықтан γ бұрышы Oz осімен сүйір бұрыш жасайды, яғни өріс ағыны $\triangle$MNP үшбұрышының сыртқы жағы арқылы өтеді.

Өріс ағынының анықтамасы бойынша:

$$П = \iint_S P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dxdy =$$

$$= \iint_S (2z - x)dydz + (x + 2z)dxdz + 3zdxdy =$$

$$= \iint_S (2z - (4 - 4y - z))dydz + (x + 2z)dxdz + 3(4 - x - 4y)dxdy =$$

$$= \iint_{Syz} (3z + 4y - 4)dydz + \iint_{Sxz} (x + 2z)dxdz + 3\iint_{Sxy} (4 - x - 4y)dxdy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{4-4y} (3z + 4y - 4)dz + \int_0^4 dz \int_0^{4-z} (x + 2z)dx + 3\int_0^4 dx \int_0^{4-z} (4 - x - 4y)dy =$$

$$= \int_0^1 (\frac{3}{2} \cdot 16(1 - y)^2 - 16(1 - y)^2)dy + \int_0^4 (\frac{(4 - z)^2}{2} + 2z(4 - z)dz +$$

$$+ 3\int_0^4 \left(\frac{1}{4}(4 - x)^2 - \frac{(4 - x)^2}{8}\right)dx = 8\int_0^1 (1 - y)^2 dy + \frac{1}{2}\int_0^4 (16 + 8z - 3z^2)dz +$$

$$+ 3\int_0^4 \frac{(4 - x)^2}{8}dx = \frac{8}{3}(y - 1)^3 \Big|_0^1 + (8z + 2z^2 - \frac{z^3}{2}) \Big|_0^4 + \frac{3}{8}\frac{(x - 4)^3}{3} \Big|_0^4 = 42\frac{2}{3}.$$

Жауабы: $П = 42\frac{2}{3}$.

12-тапсырма. Остроградский-Гаусс формуласының көмегімен, (p): x-2y+2z=4 жазықтығы мен координаттар жазықтықтары қиылысуы нәтижесінде пайда болған пирамиданың сыртқы беті арқылы өтетін $\vec{a} = (x + z)\vec{i} + (2y - x)\vec{j} + z\vec{k}$ векторлық өрісінің ағынын есептеу керек.

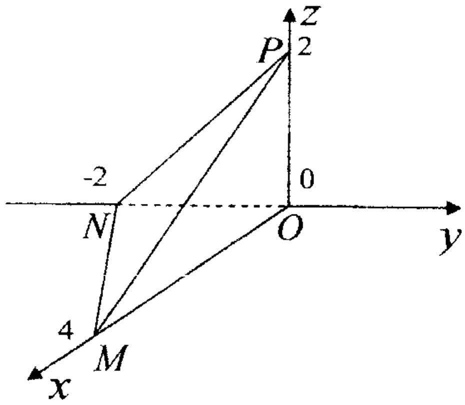
Шешуі: (p): x-2y+2z=4 $\rightarrow$ $\frac{x}{4} - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$, пирамида төбелерінің координаттары: $M(4;0;0)$, $N(0;-2;0)$, $P(0;0;2)$

Пирамиданың толық беті тұйық бет болғандықтан, Остроградский-Гаусс формуласын қолданайық:

$$П = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdydz.$$

Табамыз:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial\left(x+z\right)}{\partial x}=1,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial\left(2y-x\right)}{\partial y}=2,$$
$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial\left(z\right)}{\partial x}=1.$$



Сонымен, $\Pi=\iiint\limits_V(1+2+1)dxdydz=4\iiint\limits_V dxdydz.$

$\iiint\limits_V dxdydz$ интегралы MNPO –тік бұрышты пирамиданың көлеміне тең болғандықтан, оны есептеу үшін келесі математикалық формуланы қолданамыз.

$$\Pi=4\iiint\limits_V dxdydz=4\cdot\frac{1}{6}\cdot2\cdot2\cdot4=\frac{32}{3}.$$

Жауабы: $\Pi=\dfrac{32}{3}$.

13-тапсырма. $\vec{a}=\left(2xy+3y^2+9y\right)\vec{i}+\left(x^2+6xy+9x\right)\vec{j}$ векторлық өрісі потенциалды екендігін көрсетіп, оны есептеу керек.

Шешуі: потенциалды өрістің роторы 0-ге тең болғандықтан соны тексереміз.

$$rot\,\vec{a}=\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xy+3y^2+9y & x^2+6xy+9x & 0\end{pmatrix}=\left(0-0\right)\vec{i}-\left(0-0\right)\vec{j}+$$
$$=\left(2x+6y-\left(2x+6y\right)\right)\vec{k}=0.$$

Сондықтан, $\vec{a}$ өрісі потенциалды. Ал $u=u\left(x;y\right)$ потенциалын келесі формуламен есептейміз $u\left(x;y\right)=\int\limits_{x_0}^{x}P\left(x;y_0\right)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q\left(x;y\right)dy+C.$ Бастапқы нүкте $\left(x_0;y_0\right)$ ретінде (0; 0) нүктесін аламыз.

$$u\left(x;y\right)=\int\limits_0^x(2x\cdot0+3\cdot0+9\cdot0)dx+\int\limits_0^y\left(x^2+6xy+9x\right)dy+C=x^2y+3xy^2+9xy+\mathrm{C}.$$

Жауабы: $u\left(x;y\right)=x^2y+3xy^2+9xy+\mathrm{C}$.

1.3 Теориялық сұрақтар

1. 1-ші және 2-ші текті қисық сызықты интегралдарды есептеу.
2. Грин формуласы.
3. 1-ші және 2-ші текті беттік интегралдарды есептеу.
4. Скаляр өрістер: бағыт бойынша туынды, градиент.
5. Векторлық өрістер: дивергенция, циркуляция, ротор, ағын.
6. Остроградский-Гаусс және Стокс формулалары.
7. Соленоидалды, потенциалды және гармониялық өрістер.

Әдебиеттер тізімі

1 Мустахишев К.М. Атабай Б.Ж. Амалдық есептеулерді қолданып дифференциалдық теңдеулерді шешу. Электр энергетикасы мамандығы студенттері үшін дәрістер жинағы.-Алматы: АЭжБУ, 2014.-29 б.

2 Семқұл Б.М. (Рябушко А.П. аудармасы) Жоғары математика бойынша жеке тапсырмалар. 3, 4 бөлім. – Қарағанды, 2011.-365 б.

3 Байарыстанов А.О. Жоғары математика және өзіндік жұмыстар жинағы.-Алматы: «Нұр-Принт» (Электронды кітап), 2011.-372 б.

4 Хасеинов К.А. Математика канондары. – Алматы: 2011.-342 б.

Мазмұны

2015 ж. жиынтық жоспары, реті 176

Дулэпо Вячеслав Михайлович
Абдулланова Жанар Советқалиқызы

ӨРІСТЕР ТЕОРИЯСЫНЫҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

5В071800 – Электр энергетикасы мамандығының студенттері үшін есептеу-сызбалық жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар

Редакторы Ж.А. Байбураева
Стандарттау бойынша маман Н.Қ. Молдабекова

Басуға қол қойылды_______ Пішіні 60х84 1/16
Таралымы 100 дана Баспаханалық қағаз №1
Көлемі 1,7 есептік-баспа табақ Тапсырыс . Бағасы 850 тг.

«Алматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірме-көбейткіш бюросы
050013, Алматы, Байтурсынұлы көшесі, 126