Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ ИМЕНИ ГУМАРБЕКА ДАУКЕЕВА

Кафедра математики и математического моделирования

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Конспект лекций
для студентов образовательных программ
6В07111 – «Космическая техника и технологии»,
6В07112 – «Космическая инженерия»

Алматы 2022

СОСТАВИТЕЛЬ: А. К. Искакова. Дифференциальные уравнения. Конспект лекций для студентов образовательных программ 6В07111 – «Космическая техника и технологии», 6В07112 – «Космическая инженерия». – Алматы: АУЭС, 2022. – 90 с.

Постоянно возрастающая роль математических моделей во многих областях естественных и технических наук требует от современного инженера владения рядом специальных разделов математики. Дифференциальные уравнения представляют один из таких разделов. Дисциплина «Дифференциальные уравнения» является для студентов образовательных программ 6В07111 – «Космическая техника и технологии», 6В07112 – «Космическая инженерия» дисциплиной по выбору. Курс лекций состоит из двух модулей и рассчитан на 15 академических часов.

Библиогр. наим. – 9, рис. – 4, табл. – 4.

Рецензент: к.п.н., доцент Саламатина А. М.

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи имени Гумарбека Даукеева» на 2022 г.

МОДУЛЬ 1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Лекция 1. Задачи геометрического и физического характера, приводящие к дифференциальным уравнениям. Понятие об обыкновенном дифференциальном уравнении первого порядка, разрешенном относительно производной, и его решении

Цель лекции – рассмотреть задачи геометрического и физического характера, приводящие к дифференциальным уравнениям, примеры, ввести понятие обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной, и его решения.

1.1 Задачи геометрического и физического характера, приводящие к дифференциальным уравнениям, примеры

Когда решается какая-либо практическая задача с помощью алгебры, искомая величина обозначается через x и согласно условию задачи составляется алгебраическое уравнение, решая которое, мы находим искомое значение x. Но многие практические задачи из геометрии, механики, физики и других отраслей знания приводят к необходимости отыскания такой функции $y(x)$, которая удовлетворяла бы требованиям, вытекающим из условия поставленной задачи. Приведем примеры.

Пример 1. Как известно из физики, скорость свободно падающего тела в момент времени t равна $v = gt$, где $g = 9{,}81$ м/сек^2 – ускорение силы тяжести. Найти, на каком расстоянии от Земли находится тело в момент времени t, если оно начало падать с высоты y_0.

Решение. Выберем начало координат в точке на поверхности Земли, а ось Oy направим по вертикали вверх (рис. 1.1).

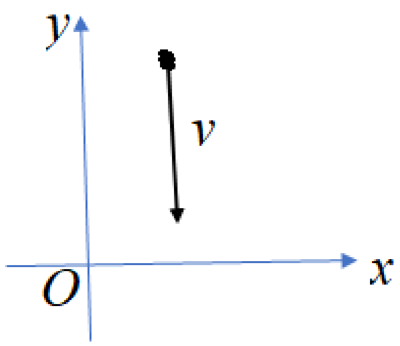

Рисунок 1.1

Тогда вектор скорости v будет направлен по вертикали вниз, а его проекция на ось Oy будет равна $(-gt)$. С другой стороны, скорость равна производной пути по времени $\frac{dy}{dt}$. Приравнивая оба выражения для скорости, получим уравнение:

$$\frac{dy}{dt} = -gt \quad \text{или} \quad dy = -gtdt.$$

Интегрируя обе части этого уравнения, получим:

$$y = -g\int tdt$$

или

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C. \qquad (1.1)$$

Мы получили множество функций, из которых требуется найти одну, удовлетворяющую начальному условию: при $t = 0,\ y = y_0$. Подставляя эти значения в уравнение (1.1), находим $\text{C} = y_0$. Таким образом, свободно падающее тело в момент времени *t* находится от Земли на расстоянии:

$$\text{y} = -\frac{gt^2}{2} + y_0.$$

Заметим, что в этом примере решением является не число, а функция.

Пример 2. Составить уравнение кривой, проходящей через точку с координатами $M(-2; 3)$, если угловой коэффициент касательной к этой кривой в любой ее точке равен абсциссе этой точки.

Решение. Согласно геометрическому смыслу производной, угловой коэффициент касательной к данной кривой в данной точке $M(x, y)$ равен $\frac{dy}{dx}$.

С другой стороны, согласно условию задачи, этот угловой коэффициент равен абсциссе точке касания. Таким образом, имеем:

$$\frac{dy}{dx} = x,$$

отсюда

$$dy = xdx.$$

Интегрируя обе части уравнения, находим:

$$y = \frac{x^2}{2} + C.$$

Это уравнение семейства парабол, так как *C* – произвольная постоянная, которая может принимать любое числовое значение. Из этого семейства парабол надо выделить кривую, проходящую через заданную точку $M(-2; 3)$. Подставляя координаты точки $M(-2; 3)$ в последнее уравнение, получим:

$$3 = \frac{(-2)^2}{2} + \text{C},$$

откуда C=1. При этом значении C получим функцию:

$$y = \frac{x^2}{2} + 1,$$

которая удовлетворяет всем условиям поставленной задачи, то есть это искомая функция.

Мы рассмотрели задачи геометрического и физического характера, приводящие к дифференциальным уравнениям.

1.2 Понятие об обыкновенном дифференциальном уравнении первого порядка, разрешенном относительно производной, и его решении

Определение. Уравнение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию y и ее производные или дифференциалы различных порядков, называется обыкновенным дифференциальным уравнением.

Определение. Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в данное уравнение.

Например, уравнения:

$y' \sin x + \cos x = 1$ – первого порядка;

$y'' - 5y' + 6y = 0$ – второго порядка;

$y''' = xy$ – третьего порядка и т. д.

Общий вид уравнения первого порядка:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.2}$$

Если уравнение (1.2) удается разрешить относительно $y'(x)$, то получим уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной:

$$y' = f(x, y).$$

Решением дифференциального уравнения называется функция y=y(x), удовлетворяющая этому уравнению.

График решения на плоскости xOy называется интегральной кривой уравнения.

Процесс нахождения решения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Если решение уравнения получено в неявном виде $\varphi(x, y) = C$, то оно обычно называется интегралом уравнения.

Пример 3. Показать, что функция y=sin2x служит решением дифференциального уравнения $y'' + 4y = 0$.

Решение. Находим производные первого и второго порядков:

$$y' = 2\cos 2x,$$

$$y'' = -4\sin 2x.$$

Подставив найденные выражения для y'' *и* y в заданное уравнение, получим:

$$y'' + 4y = -4\sin 2x + 4\sin 2x = 0, \qquad 0 = 0.$$

Мы получили тождество, то есть функция $y=sin2x$ является решением данного дифференциального уравнения.

Пример 4. Проверить, что функция y, определяемая уравнением:

$$y^3 + 3y - x^3 = 4,$$

является интегралом дифференциального уравнения $y' = \frac{x^2}{(y^2+1)}$.

Решение. По условию задачи функция задана в неявном виде. Продифференцируем обе части равенства $y^3 + 3y - x^3 = 4$ по переменной x, тогда получим:

$$3y^2y' + 3y' - 3x^2 = 0$$

или

$$y'(y^2+1) = x^2,$$

откуда находим, что

$$y' = \frac{x^2}{(y^2+1)}.$$

Ответ. Неявно заданная функция является интегралом заданного дифференциального уравнения.

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется общий вид уравнения первого порядка?
2. Как называется решение дифференциального уравнения, имеющее множество функций, из которых требуется найти одну, удовлетворяющую начальному условию?
3. Если задано семейство парабол и надо выделить кривую, проходящую через заданную точку $M(-2; 3)$, то координаты заданной точки являются **…** .
4. Как называется уравнение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию y и ее производные или дифференциалы различных порядков?
5. Как называется порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение?
6. Как определяется уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной?

7. Как называется функция $y=y(x)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению?

9. Как называется график решения дифференциального уравнения на плоскости?

10. Как называется процесс нахождения решения дифференциального уравнения?

11. Как называется решение дифференциальное уравнение, полученное в неявном виде $\varphi(x, y) = C$?

12. Чему равен порядок дифференциального уравнения $5(y''')^2 - 3y'' \cdot y^{IV} = 0$?

13. Чему равен порядок дифференциального уравнения $xy'' + y' = x(x + y'')$?

14. Чему равен порядок дифференциального уравнения $yy''' + xy'' + y = y(y' + y''')$?

Лекция 2. Начальные условия и задача Коши. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка. Особое решение

Цель лекции – рассмотреть уравнение первого порядка и его решение, геометрическое истолкование уравнения первого порядка и его решений, теорему существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка.

2.1 Уравнение первого порядка и его решение. Общий вид уравнения первого порядка имеет вид:

$$\boldsymbol{F(x, y\, y') = 0}. \tag{2.1}$$

Определение. Функция $\boldsymbol{y = y(x)}$, определенная и непрерывно дифференцируемая в интервале $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ и обращающая уравнение (2.1) в тождество $\boldsymbol{F(x, y\, y') \equiv 0}$, справедливое для всех значений x решения из интервала $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, называется решением уравнения (2.1) в интервале $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

График $\boldsymbol{y = y(x)}$ является гладкой кривой.

Определение. Уравнение, разрешенное относительно производной от искомой функции:

$$\boldsymbol{y' = f(x, y)} \tag{2.2}$$

или

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = f(x, y)}$$

называется нормальной формой уравнения первого порядка.

Условие, что при $x = x_0$ функция $y = y(x)$ должна равняться заданному числу y_0, называется начальным условием. Оно записывается в виде $y|_{x = x_0} = y_0$ или $y(x_0) = y_0$.

Задача отыскания решения уравнения, удовлетворяющего начальному условию, носит название задачи Коши.

Определение. Общим решением дифференциального уравнения 1-го порядка называется функция:

$$y = y(x, C),$$

удовлетворяющая следующим условиям:

1) функция является решением дифференциального уравнения при любом конкретном значении постоянной C;

2) для любых начальных условий $y|_{x = x_0} = y_0$, где $(x_0, y_0) \in D$ можно найти такое значение $C = C_0$, что функция $y = y(x, C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Равенство вида $\Phi(x, y, C) = 0$, неявно задающее общее решение, называется общим интегралом дифференциального уравнения.

Решение, полученное из общего решения (интеграла) дифференциального уравнения при фиксированном C, называется частным решением (интегралом) этого уравнения.

2.1 Геометрическое истолкование уравнения первого порядка и его решений. Установим связь между уравнением (2.2) и его интегральными кривыми. Предположим, что правая часть уравнения (2.2) определена и непрерывна в области G (рис. 2.1).

Пусть $\boldsymbol{y = y(x)}$ есть интегральная кривая этого уравнения, проходящая через точку $\boldsymbol{M(x, y)}$. Проведем касательную к этой интегральной кривой в точке M и обозначим через $\boldsymbol{\alpha}$ угол, образованный касательной MT с положительным направлением оси x. Тогда $\boldsymbol{tg\alpha = y'(x)}$, но $\boldsymbol{y'(x) = f(x, y(x))}$, поэтому:

$$\boldsymbol{tg\alpha = f(x, y(x))}.$$

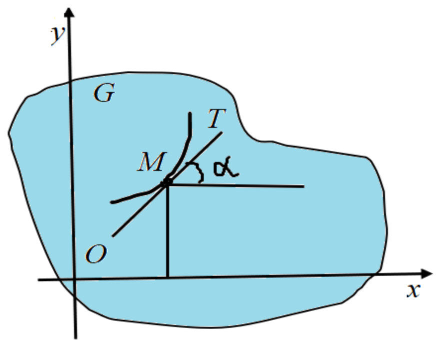

Рисунок 2.1

Таким образом, если через точку $\boldsymbol{M(x, y)}$ проходит интегральная кривая $\boldsymbol{y = y(x)}$, то наклон кривой к ней в этой точке определяется формулой:

$$\boldsymbol{tg\alpha = f(x, y)}, \tag{2.3}$$

то есть наклон касательной к интегральной кривой определен заранее самим дифференциальным уравнением.

Определение. Наклон касательной есть тангенс угла $\boldsymbol{\alpha}$, образованного касательной с положительным направлением оси *x*.

Наклоны касательных можно указать, не находя интегральных кривых. Для этого построим в каждой точке *M* области *G* отрезок (для определенности – единичной длины) с центром в точке *M* (рис. 2.2), составляющий с положительным направлением оси *x* угол $\boldsymbol{\alpha}$, тангенс которого определяется формулой (2.3). Получим поле направлений, определяемое уравнением (2.2).

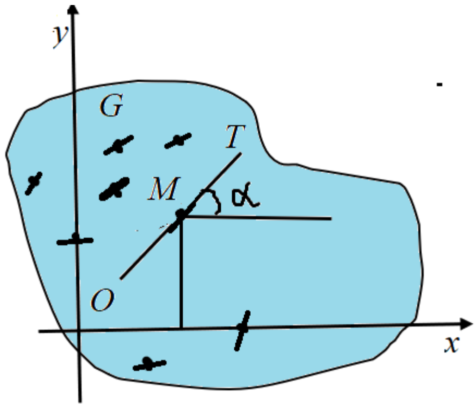

Рисунок 2.2

Определение. Кривая $\boldsymbol{w(x,y)=0}$, в каждой точке которой направление поля, определяемое дифференциальным уравнением (2.2), одно и то же, называется изоклиной этого уравнения.

Уравнения изоклин дифференциального уравнения (2.2) имеют вид:

$$\boldsymbol{f(x,y)=k}, \text{где } \boldsymbol{k=tg\alpha=const}.$$

Пример 1. Для уравнения $\boldsymbol{y'=x^2+y^2}$ изоклинами будут окружности (рис. 2.3)

$$\boldsymbol{x^2+y^2=k}.$$

При $\boldsymbol{k=0}$ изоклиной будет точка с координатами $(\boldsymbol{0,0})$. При $\boldsymbol{k=1}$ получим изоклину $\boldsymbol{x^2+y^2=1}$ – это окружность с центром в точке $(\boldsymbol{0,0})$ и радиусом, равным 1 и т. д. Интегральные кривые в каждой точке этой окружности наклонены к оси *x* под углом $\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$ (так как $\boldsymbol{k=tg\alpha=1\ \Rightarrow\ \alpha=\frac{\pi}{4}}$).

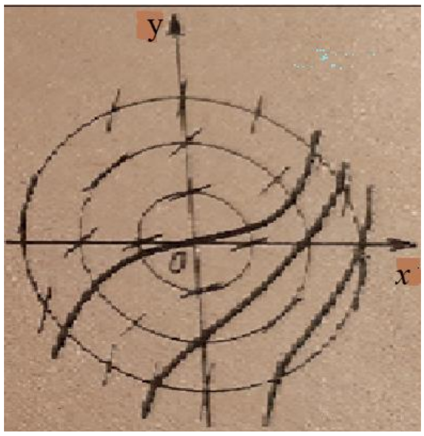

Рисунок 2.3

С увеличением *k* наклон интегральных кривых возрастает и интегральные кривые имеют вид, указанный схематически на рисунке 3. Построив семейство изоклин (в нашем случае – окружностей), можно получить методом изоклин сколь угодно точное представление об интегральных кривых.

2.3 Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка

Теорема (о существовании и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка). Если в уравнении $\boldsymbol{y'=f(x,y)}$ функция $\boldsymbol{f(x,y)}$ и ее частная производная $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}}$ непрерывны в некоторой области *D*, содержащей точку $(\boldsymbol{x_0,y_0})$ на плоскости *Oxy*, то в некоторой окрестности точки

$\boldsymbol{x_0}$ существует единственное решение этого уравнения $\boldsymbol{y = y(x)}$, удовлетворяющее условию: $\boldsymbol{y(x_0) = y_0}$.

Геометрический смысл теоремы заключается в том, что в указанной окрестности существует и притом единственная интегральная кривая уравнения, проходящая через точку (x_0, y_0).

Пример 2. Найти решение задачи Коши:

$$y' = 5sinx - \frac{2}{1+x^2}, \qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2.$$

Решение. Общее решение данного дифференциального уравнения записывается в виде неопределенного интеграла от функций, стоящих от функций в правой части этого уравнения:

$$y = \int \left(5sinx - \frac{2}{1+x^2}\right) dx = 5\int sinxdx - 2\int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= -5cosx - 2arctgx + C.$$

Таким образом, общее решение имеет вид:

$$\mathrm{y} = -5cosx - 2arctgx + C.$$

Найдем единственное значение C – произвольная постоянная. Для этого используем начальное условие $x = \frac{\pi}{4}$, $\mathrm{y} = -2$, тогда получим:

$$2 = -5cos\frac{\pi}{4} - 2arctg\frac{\pi}{4} + C,$$

$$-2 = -5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \cdot 1 + C, \qquad \text{отсюда} \qquad \mathrm{C} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Частное решение заданного уравнения имеет вид:

$$\mathrm{y} = -5cosx - 2arctgx + \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 2. Найти решение задачи Коши:

$$y' = \frac{3}{cos^2x}, \qquad \mathrm{y}(0) = 3.$$

Решение. Найдем сначала общее решение дифференциального уравнения, содержащее постоянную интегрирования C:

$$y(x) = \int \frac{3dx}{cos^2x} = 3tgx + C.$$

Теперь найдем единственное значение постоянной интегрирования C, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 3$. Для этого в последнем равенстве положим x=0, y=3, тогда получим:

$$3 = 3 \cdot tg0 + C.$$

Так как $tg0 = 0$, то C=3.Таким образом, решение задачи Коши имеет вид:

$$y(x) = 3(tgx + 1).$$

Определение. Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется особым решением.

Особое решение не содержится в формуле для общего решения ни при каком числовом значении произвольной постоянной, включая $C = \pm\infty$. Особое решение вида $y = y(x)$ может получаться из формулы общего решения лишь при $C = C(x)$ [или $C = C(y)$].

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение решения дифференциального уравнения первого порядка в интервале (a, b).
2. Как называется задача отыскания решения уравнения, удовлетворяющего начальному условию?
3. Каким условиям должно удовлетворять общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка?
4. Дайте определение изоклины дифференциального уравнения первого порядка.
5. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка.
6. Какое решение задачи Коши называется особым решением?
7. Может ли решением задачи Коши быть не число, а функция?

Лекция 3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородное уравнение. Линейное уравнение. Уравнение Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах, интегрирующий множитель

Цель лекции – рассмотреть дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, примеры, однородные уравнения и простейшее уравнение, приводящееся к однородному, примеры, линейное уравнение: построение общего решения, метод подстановки, метод вариации произвольного постоянного (метод Лагранжа), уравнение Бернулли, примеры, а также уравнение в полных дифференциалах, интегрирующий множитель, примеры.

3.1 Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, примеры

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными имеет вид:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0. \qquad (3.1)$$

Поделив обе части уравнения (3.1) на $N_1(y)\,M_2(x)$, получим уравнение:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0,$$

в котором переменные разделены. Общий интеграл (общее решение) уравнения находится почленным интегрированием обеих частей последнего уравнения:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

Пример 1. Для дифференциального уравнения $y' \cdot \cos x = \frac{y}{\ln y}$ найти частный интеграл, удовлетворяющий начальному условию $y(0) = 1$.

Решение. Полагая $y' = \frac{dy}{dx}$, перепишем данное уравнение в виде:

$$\cos x \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\ln y}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{\ln y}{y}dy = \frac{dx}{\cos x}.$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{\ln y}{y}dy = \int \frac{dx}{\cos x} + C$$

и найдем общее решение заданного дифференциального уравнения:

$$\frac{1}{2}ln^2 y = ln\,t\,g\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

Используя начальное условие $y(0) = 1$, то есть значения $x = 0,\ \ y = 1$, находим:

$$\frac{1}{2}ln^2 1 = ln\,t\,g\left(\frac{0}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C,$$

Отсюда:

$$0 = ln\,t\,g\left(\frac{\pi}{4}\right) + C,$$

так как $ln\,t\,g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, то получим $C = 0$, тогда частный интеграл (частное решение) имеет вид:

$$\frac{1}{2}ln^2 y = ln\,t\,g\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения $(1 + x^2)dy + ydx = 0$ при начальных условиях $y(1) = 1$.

Решение. По условию задачи нам задано уравнение с разделяющимися переменными. Преобразуем данное уравнение к виду:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1 + x^2}.$$

Мы получили уравнение с разделенными переменными, теперь, интегрируя обе части уравнения:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{1 + x^2}$$

получим общий интеграл (общее решение) данного уравнения:

$$ln|y| = -arctgx + C.$$

Чтобы найти частное решение заданного дифференциального уравнения, подставим в общее решение начальные условия и найдем произвольную *C*:

$$ln\,1 = -arctg1 + C, \quad \text{то есть} \quad C = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$ln\,y = -arctgx + \frac{\pi}{4},$$

откуда получаем искомое частное решение:

$$y = e^{\frac{\pi}{4} - arctgx}.$$

3.2 Однородное уравнение и простейшее уравнение, приводящееся к однородному, примеры

Функция $f(x, y)$ называется однородной измерения m, если:

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

Пример 3. Показать, что следующие функции являются однородными, и определить степень их однородности:

а) $f(x, y) = xy - y^2$, б) $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$, в) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

Решение. Для каждой заданной функции сделаем преобразования:

$$x = tx, \;\; y = ty.$$

а) $f(tx, ty) = tx \cdot ty - (ty)^2 =$

$$= t^2 xy - t^2 y^2 = t^2(xy - y^2) = t^2 f(x, y).$$

Получили $m = 2$, то есть заданная функция – однородная функция второй степени.

б) $f(tx, ty) = \frac{(tx)^2+(ty)^2}{tx \cdot ty} = \frac{t^2x^2+t^2y^2}{t^2x \cdot y} =$

$$= \frac{x^2 + y^2}{xy} = t^0 f(x, y) = f(x, y).$$

Получили $m = 0$, то есть заданная функция – однородная функция нулевой степени.

в) $f(tx, ty) = \sqrt[3]{(tx)^3 + (ty)^3} = \sqrt[3]{t^3x^3 + t^3y^3} = \sqrt[3]{t^3(x^3 + y^3)} =$

$$= t\sqrt[3]{x^3 + y^3} = t \cdot f(x, y).$$

Получили $m = 1$, то есть заданная функция – однородная функция первой степени.

Определение. Уравнение вида $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ называется однородным, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции одного измерения. Оно может быть приведено к виду:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y=ux$, где u – новая искомая функция. Дифференцируя равенство $y=ux$, получим:

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$$

или

$$y' = u'x + u.$$

Подставив y и $\frac{dy}{dx}$ в уравнение $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, получим:

$$x\frac{du}{dx} + u = f(u),$$

откуда получим уравнение с разделяющимися переменными u и x:

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Найдя общее решение (общий интеграл) последнего уравнения и заменив u на $\frac{y}{x}$, получим общее решение (интеграл) данного однородного уравнения.

Пример 4. Найти общий интеграл уравнения:

$$(xy + y^2)dx - (2x^2 + xy)dy = 0.$$

Решение. Разрешим данное уравнение относительно производной:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2}{2x^2 + xy}.$$

Поделив числитель и знаменатель правой части уравнения на x^2, получим:

$$y' = \frac{\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2 + \frac{y}{x}}. \tag{3.2}$$

Таким образом, y' есть функция отношения $\frac{y}{x}$, то есть данное уравнение – однородное. Введем новую функцию:

$$u = \frac{y}{x},$$

тогда $y=ux$ и $y' = \frac{du}{dx}x + u$. Уравнение (3.2) преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными:

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{u + u^2}{2 + u}$$

или

$$x\frac{du}{dx} = -\frac{u}{2 + u}.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{u + 2}{u}du.$$

Интегрируя обе части этого уравнения, получим:

$$ln|x| = -u - 2\,ln|u| - ln\,C \qquad \text{или} \qquad u = -\,ln|Cxu^2|$$

Откуда $Cxu^2 = e^{-u}$. Заменяя в последнем равенстве функцию u отношением $\frac{y}{x}$, окончательно находим общий интеграл данного уравнения: $y^2 = Cxe^{-\frac{y}{x}}$.

Пример 5. Найти общий интеграл уравнения $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$.

Решение. В данном уравнении $P(x, y) = x^2 + 2xy, Q(x, y) = xy$. Обе функции – однородные второго измерения (степени).

Введем подстановку $y = ux$, откуда $dy = xdu + udx$. Тогда уравнение примет вид:

$$(x^2 + 2x^2u)dx + ux^2(xdu + udx) = 0$$

или

$$(x^2 + 2x^2u + u^2x^2)dx + ux^3du = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{udu}{(u + 1)^2} = C,$$

преобразуем второй интеграл:

$$ln|x| + \int \frac{u + 1 - 1}{(u + 1)^2}dt = C$$

или

$$ln|x| + ln|u + 1| + \frac{1}{u + 1} = 0.$$

Возвращаясь к прежней неизвестной функции $u = \frac{y}{x}$, находим окончательный ответ:

$$ln|x + y| + \frac{x}{x + y} = C.$$

Пример 6. Найти частное решение уравнения $y' = \frac{y}{x} + sin\frac{y}{x}$ при начальном условии $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

Решение. В заданном уравнении сделаем подстановку:

$$\frac{y}{x} = t, y = tx, dy = xdt + tdx,$$

тогда получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$xdt + tdx = (t + sin\, t)dx \quad \Rightarrow \quad xdt = sin\, t\, dx.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dt}{sin\, t} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части уравнения, находим:

$$ln\left|tg\frac{t}{2}\right| = ln|x| + ln\, C,$$

откуда $\frac{t}{2} = arctgCx$. Произведя обратную замену $t = \frac{y}{x}$, найдем общее решение исходного уравнения $y = 2xarctgCx$. Теперь в найденное общее решение подставим заданные начальные условия и получим:

$$\frac{\pi}{2} = 2arctgC,$$

откуда $C = 1$. Искомое частное решение $y = 2xarctgx$.

3.3 Линейное уравнение: метод подстановки, метод вариации произвольного постоянного (метод Лагранжа), уравнение Бернулли, примеры

Определение. Дифференциальное уравнение называется линейным, если оно линейно (то есть первой степени) относительно искомой функции y и ее производной y'.

Общий вид линейного уравнения первого порядка:

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{3.3}$$

Метод подстановки. Линейное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными, если искомую функцию y заменить произведением двух вспомогательных функций u и v, то есть сделать замену $y=uv$, тогда:

$$y' = u'v + v'u,$$

и уравнение (3.3) примет вид:

$$u'v + v'u + p(x)uv = q(x)$$

$$v[u' + p(x)u] + v'u = q(x). \tag{3.4}$$

Одну из вспомогательных функций, например u, можно выбрать произвольно. Подберем ее так, чтобы выражение в квадратных скобках обратилось в ноль, то есть в качестве u возьмем частное решение $u= u(x)$ уравнения с разделяющимися переменными:

$$u' + p(x)u = 0.$$

Подставляя выражение $u= u(x)$ в уравнение (3.4), получим уравнение относительно функции v:

$$v'u = q(x), \tag{3.5}$$

которое также является уравнением с разделяющимися переменными. Найдя общее решение уравнения (3.5) в виде $v=v(x,C)$, получим общее решение линейного уравнения (3.3):

$$y = u(x) \cdot v(x, C).$$

Пример 7. Найти общее решение уравнения $y' - yctgx = \frac{1}{\sin x}$.

Решение. Полагаем $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставим y и y' в заданное уравнение:

$$u'v + uv' - uvctgx = \frac{1}{\sin x}$$

или

$$u'v + u(v' - vctgx) = \frac{1}{\sin x}. \tag{3.6}$$

1) Решая уравнение $v' - vctgx = 0$, найдем его простейшее частное решение:

$$\frac{dv}{dx} = vctgx, \qquad \frac{dv}{v} = ctgxdx,$$

$$ln|v| = ln|sin\,x|,$$

тогда

$$v = sin\,x.$$

2) Подставляя найденное значение $v = sin\,x$ в уравнение (3.6), получим уравнение:

$$u'\,sin\,x = \frac{1}{sin\,x},$$

из которого находим u:

$$\frac{du}{dx} \cdot sin\,x = \frac{1}{sin\,x}; \qquad du = \frac{dx}{sin^2\,x},$$

тогда

$$u = ctgx + C.$$

Таким образом, общее решение $y = uv$ заданного уравнения имеет вид:

$$y = uv = (-ctgx + C)\,sin\,x = -\,cos\,x + C\,sin\,x.$$

Метод вариации произвольного постоянного (*метод Лагранжа*). Этот метод состоит в том, что сначала находят общее решение однородного уравнения $y' + p(x)y = 0$. Затем, полагая величину C функцией от x, ищут решение неоднородного уравнения (3.3), то есть находят функцию $C(x)$.

Пример 8. Проинтегрировать уравнение $y'\,cos^2\,x + y = tgx$ при начальных условиях $y(0) = 0$.

Решение. Решим уравнение методом вариации произвольного постоянного. Рассмотрим в начале однородное уравнение:

$$y'\,cos^2\,x + y = 0.$$

Для этого разделим переменные, проинтегрируем обе части уравнения и получим общее решение однородного уравнения:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{cos^2\,x} = 0, \qquad ln\,y + tgx = ln\,C\,, \qquad y = Ce^{-tgx}.$$

Далее будем искать решение заданного неоднородного уравнения в виде:

$$y = C(x)e^{-tgx},$$

где C(x) – неизвестная функция. Для функции:

$$y = C(x)e^{-tgx}$$

найдем ее первую производную:

$$y' = C'(x)e^{-tgx} - C(x)e^{-tgx}\, sec^2\, x.$$

Подставим найденные значения y и y' в заданное уравнение $y'\, cos^2\, x + y = tgx$ и придем к уравнению:

$$cos^2\, x\, C'(x)e^{-tgx} - C(x)e^{-tgx}\, sec^2\, x\, cos^2\, x + C(x)e^{-tgx} = tgx$$

или

$$C'(x)cos^2 xe^{-tgx} = tgx,$$

тогда

$$C(x) = \int \frac{e^{tgx} tgx}{cos^2\, x} dx = e^{tgx}(tgx - 1) + C.$$

Таким образом, общее решение заданного уравнения имеет вид:

$$y = tgx - 1 + Ce^{-tgx}.$$

Используя начальные условия $y(0) = 0$, то есть значения $x = 0, y = 0$, найдем произвольную постоянную C:

$$0 = tg0 - 1 + Ce^{-tg0},$$

отсюда $0 = -1 + C$, то есть $C = 1$. Подставим найденное значение C в общее решение. Таким образом, частное решение имеет вид:

$$y = tgx - 1 + e^{-tgx}.$$

Уравнение Бернулли. Уравнением Бернулли называется уравнение вида:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n,$$

где $n,\ \ n \neq 0;\ 1$ – действительное число.

Уравнение Бернулли сводится к линейному уравнению с помощью подстановки $u = y^{1-n}$.

Пример 9. Решить уравнение $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$.

Решение. Это уравнение Бернулли, так как в правой части содержится функция $f(x, y) = x^2 y^4$, содержащая переменную y. Найдем его решение методом вариации произвольной постоянной. Для этого интегрируем сначала линейное однородное уравнение:

$$y' + \frac{y}{x} = 0.$$

И получим общее решение этого однородного уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow lny = lnC - lnx \quad \Rightarrow \quad y = \frac{C}{x}.$$

Теперь ищем решение заданного уравнения Бернулли, полагая:

$$y = \frac{C(x)}{x}, \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}.$$

Подстановка y и y' в исходное уравнение дает:

$$\frac{C\prime(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = x^2\left[\frac{C(x)}{x}\right]^4, \quad \Rightarrow \quad \frac{C\prime(x)}{x} = \frac{[C(x)]^4}{x^2}.$$

Интегрируя полученное уравнение, найдем $C(x)$:

$$\frac{dC(x)}{[C(x)]^4} = \frac{dx}{x}, \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{3[C(x)]^3} = \ln x - \ln C, \quad \Rightarrow \quad C(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3\ln\frac{C}{x}}}.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения:

$$y = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{x\sqrt[3]{3\ln\frac{C}{x}}}.$$

Пример 10. Проинтегрировать уравнение $y' - ythx = ch^2x$.

Решение. Это линейное уравнение, решим его методом подстановки. Полагая $y = uv$, $y' = u'v + v'u$ имеем $u'v + v'u - uvthx = ch^2x$ или:

$$u(v' - vthx) + u'v = ch^2x.$$

Пусть $v' - vthx = 0$, откуда $\frac{dv}{v} = thxdx$, интегрируя которое, находим:

$$\ln v = \ln chx \qquad \text{или} \qquad v = chx.$$

Здесь постоянную интегрирования C не вводим, так как нам достаточно найти какое-либо частное решение этого вспомогательного уравнения. Для определения u получим используем уравнение $u'v = ch^2x$, подставляя найденное значение $v = chx$, получим уравнение $u'chx = ch^2x$, откуда находим:

$$u = \int chxdx = shx + C.$$

Так как решение исходного уравнения имеет вид $y = uv$, то, перемножая найденные значения u и v, находим общее решение заданного уравнения:

$$y = chx(shx + C).$$

3.4 Уравнение в полных дифференциалах, интегрирующий множитель, примеры

Если левая часть уравнения:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{3.7}$$

представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, то уравнение (3.7) называется уравнением в полных дифференциалах. В этом случае его можно переписать в виде $du(x, y) = 0$, так что общий интеграл:

$$u(x, y) = C. \tag{3.8}$$

Теорема. Для того чтобы уравнение (3.7) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области D, в которой функции $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ определены, непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ *и* $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, было выполнено условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{3.9}$$

В том случае, когда условие (3.9) выполнено, общий интеграл уравнения (3.7) можно записать в виде:

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y) dy = C \tag{3.10}$$

или

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y) dy = C, \tag{3.11}$$

где $M_0(x_0, y_0)$ — произвольная фиксированная точка области D.

Если же условие (3.9) не выполнено, то уравнение (3.7) не является уравнением в полных дифференциалах. Однако в некоторых случаях его можно привести к уравнению в полных дифференциалах умножением на функцию $\mu(x, y)$, которая называется интегрирующим множителем.

Интегрирующий множитель легко находится в следующих двух случаях:

1) когда он зависит только от x, то есть $\mu = \mu(x)$,

2) когда он зависит только от y, то есть $\mu = \mu(y)$.

Первый случай имеет место, если отношение:

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \varphi(x)$$

является функцией только от *x*, тогда интегрирующий множитель находится по формуле:

$$\mu = e^{\int \varphi(x)dx}.$$

Второй случай имеет место, если отношение:

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} = \psi(y)$$

является функцией только от *y*, тогда интегрирующий множитель определяется по формуле:

$$\mu = e^{-\int \psi(y)dy}.$$

Пример 11. Найти общий интеграл уравнения:

$$2xcos^2ydx + \left(8\sqrt[3]{y} - x^2sin2y\right)dy = 0.$$

Решение. Из условия задачи определим функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$:

$$P(x,y) = 2xcos^2y,\ Q(x,y) = 8\sqrt[3]{y} - x^2sin2y.$$

Проверим выполняется ли условие (3.9):

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2x(-2\sin y\cos y) = -2x\sin 2y,$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -2x\sin 2y.$$

Условие (3.9) выполнено, следовательно, заданное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Его общий интеграл находим по формуле (3.10), взяв в качестве точки $M_0(x_0, y_0)$ начало координат $M_0(0,0)$:

$$\int_0^x 2x\cos^2 y\,dx + \int_0^y 8\sqrt[3]{y}dy = C.$$

Проинтегрировав первый интеграл по переменной x, а второй интеграл по переменной y, получим, что общий интеграл (общее решение) имеет вид:

$$x^2 \cos^2 y + 6y\sqrt[3]{y} = C.$$

Пример 12. Найти общий интеграл уравнения:

$$(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0.$$

Решение. По условию задачи имеем:

$$P(x,y) = e^x + y + \sin y\,, \qquad Q(x,y) = e^y + x + x\cos y,$$

Тогда:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + \cos y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + \cos y.$$

Следовательно, левая часть уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, то есть:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x + y + \sin y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = e^y + x + x\cos y.$$

Проинтегрируем $\frac{\partial u}{\partial x}$ по переменной x:

$$u = \int (e^x + y + \sin y)dx + C(y) = e^x + xy + x\sin y + C(y).$$

Найдем произвольную функцию $C(y)$, продифференцировав последнее выражение по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + x\cos y + C'(y).$$

Получим уравнение:

$$x + x\cos y + C'(y) = x + x\cos y + e^y,$$

откуда находим:

$$C'(y) = e^y \quad \Rightarrow \quad C(y) = e^y.$$

Таким образом, общий интеграл уравнения имеет вид:

$$e^x + xy + x\sin y + e^y = C.$$

Пример 13. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $ydx + x(\ln x - y^3)dy = 0.$

Решение. По условию задачи $P(x,y) = y$, $Q(x,y) = x(\ln x - y^3)$, тогда:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + \ln x - y^3.$$

Условие полного дифференциала (3.9) не выполняется. Проверим, не допускает ли это уравнение интегрирующего множителя. Так как:

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{1 - 1 - \ln x + y^3}{x(\ln x - y^3)} = -\frac{1}{x} = \varphi(x),$$

то делаем вывод, что заданное уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x. Найдем его:

$$\mu = e^{\int \varphi(x)dx} = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}.$$

Умножая обе части исходного уравнения на найденный интегрирующий множитель $\mu = \frac{1}{x}$, получим уравнение:

$$\frac{y}{x}dx + (\ln x - y^3)dy = 0.$$

Это уравнение будет уравнением в полных дифференциалах, так как

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left(\frac{y}{x}\right)_y = \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (\ln x - y^3)_x = \frac{1}{x}.$$

Решим полученное уравнение с интегрирующим множителем. Взяв в качестве точки $M_0(x_0, y_0)$ точку $M_0(1,0)$, получим функцию:

$$Q(x_0, y) = \ln x_0 - y^3 = -y^3,$$

тогда по формуле (3.10):

$$\int_1^x \frac{y}{x}dx + \int_0^y (-y^3)dy = C,$$

то есть:

$$[y\,ln|x|]_1^x - \frac{y^4}{4} = C$$

или окончательно, общий интеграл данного уравнения будет иметь вид:

$$y\,ln|x| - \frac{y^4}{4} = C.$$

Пример 14. Найти общий интеграл уравнения:

$$(x\,cos\,y - y\,sin\,y)dy + (x\,sin\,y + y\,cos\,y)dx = 0.$$

Решение. По условию задачи имеем:

$$P(x, y) = x\,sin\,y + y\,cos\,y\,, \qquad Q(x, y) = x\,cos\,y - y\,sin\,y.$$

Условие (3.9) не выполняется:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x\,cos\,y + cos\,y - y\,sin\,y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = cos\,y.$$

Данное уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x:

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{x\cos y - y\sin y}{x\cos y - y\sin y} = 1.$$

Найдем этот интегрирующий множитель:

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx} = e^{\int dx} = e^x.$$

Умножая исходное уравнение на интегрирующий множитель e^x, получим уравнение:

$$e^x(x\,cos\,y - y\,sin\,y)dy + e^x(x\,sin\,y + y\,cos\,y)dx = 0.$$

Убедимся, что исходное уравнение, записанное с интегрирующим множителем, будет уравнением в полных дифференциалах. Действительно, во вновь полученном уравнении имеем:

$$P_1(x, y) = e^x(x\,sin\,y + y\,cos\,y),$$

$$Q_1(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y).$$

Отсюда

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[e^x(x\sin y + y\cos y)] = e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y),$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[e^x(x\cos y - y\sin y)] = e^x[x\cos y - y\sin y + \cos y].$$

Условие (3.9) выполнено, так как частные производные равны и, следовательно, левая часть вновь полученного уравнения равна $du(x,y)$. Таким образом, имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x(x\cos y - y\sin y), \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = e^x(x\sin y + y\cos y).$$

Интегрируя первое из этих равенств по y, получим:

$$u = \int e^x(x\cos y - y\sin y)dy + C(x) =$$

$$= xe^x\sin y + e^x y\cos y - e^x\sin y + C(x).$$

Найдем производную по переменной x от полученной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x} e^x\sin y + xe^x\sin y - e^x\sin y + e^x y\cos y + C'(x) =$$

$$= e^x(x\sin y + y\cos y) + C'(x).$$

Сравнивая найденное значение $\frac{\partial u}{\partial x}$ со значением $P(x,y)$, находим что $C'(x) = 0$, отсюда $C(x) = 0$. Следовательно, общий интеграл исходного уравнения имеет вид:

$$u(x,y) = xe^x\sin y + e^x y\cos y - e^x\sin y = C$$

или

$$e^x(x\sin y + y\cos y - \sin y) = C.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Общий вид дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
2. Дайте определение уравнения с разделяющимися переменными.
3. Какая функция называется однородной функцией измерения m?
4. Дайте определение однородного уравнения.
5. С помощью какой замены решается однородное уравнение?
6. Какое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением?
7. С помощью какой замены решается линейное уравнение?
8. Какие методы используются для решения линейного дифференциального уравнения?
9. Каков общий вид уравнения Бернулли?
10. С помощью какой подстановки уравнение Бернулли сводится к линейному уравнению?
11. Какое уравнение называется уравнением в полных дифференциалах?
12. Выполнение какого условия необходимо и достаточно для дифференциального уравнения, чтобы оно было уравнением в полных дифференциалах?

Лекция 4. Уравнения высших порядков. Уравнения, допускающие понижение порядка: разрешенное относительно производной порядка n, не содержащее неизвестной функции y и ее производных до (k-1) порядка, не содержащее в явном виде независимую переменную x

Цель лекции – ввести основные понятия об уравнениях высшего порядка. Рассмотреть уравнение $y^{(n)} = f(x)$, разрешенное относительно производной порядка n, уравнение $F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, не содержащее неизвестной функции y и ее производных до (k-1) порядка, уравнение $F(y, y', y'') = 0$, не содержащее в явном виде независимую переменную x, привести примеры.

4.1 Основные понятия об уравнениях высшего порядка

Если уравнение $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ удается разрешить относительно старшей производной, то есть записать в виде:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{4.1}$$

то такое уравнение называется уравнением, разрешенным относительно старшей производной.

Говорят, что решение уравнения второго порядка $F(x, y, y', y'') = 0$ удовлетворяет начальным условиям для заданных значений x_0, y_0, y_0', если:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'.$$

Геометрически это значит, что соответствующая интегральная кривая уравнения проходит через точку (x_0, y_0) плоскости Oxy и имеет в этой точке касательную с угловым коэффициентом y_0'.

Для уравнения n-го порядка (4.1) начальными условиями называют систему из n условий:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (4.2)$$

Отыскание решения уравнения (4.1), удовлетворяющего заданным начальным условиям (4.2), называется решением задачи Коши для этого уравнения.

Теорема Коши. Если функция $(n+1)$ переменной $f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$ непрерывна в некоторой области $D \subset R^{n+1}$ и имеет в ней непрерывные частные производные $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, то какова бы ни была точка $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$ из этой области, существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, определенное в некотором интервале, содержащем точку x_0, и удовлетворяющее начальным условиям (4.2).

Определение. Функция $y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, зависящая от n постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, называется общим решением уравнения (6.1) в некоторой области D плоскости Oxy, если она является решением этого уравнения для любых значений постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ и если любое решение уравнения, лежащее в области D, может быть записано в виде $y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ для конкретных $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Решения, получающиеся из общего при конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, называются частными решениями данного уравнения.

Неявно заданное общее или частное решения уравнения называются соответственно его общим и частным интегралами.

4. 2 Уравнение $y^{(n)} = f(x)$, разрешенное относительно производной порядка n, примеры

Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$, разрешенное относительно производной порядка n. Уравнение вида:

$$y^{(n)} = f(x) \qquad (4.3)$$

решается последовательным n-кратным интегрированием. При каждом интегрировании получается одна произвольная постоянная, а в окончательном результате – n произвольных постоянных.

Пример 1. Решить уравнение: $y''' = \frac{1}{x^3}$.

Решение. Заданное уравнение – третьего порядка. Для нахождения решения исходного уравнения необходимо его трижды проинтегрировать. Последовательно интегрируя данное уравнение, имеем:

$$y'' = \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + C_1,$$

$$y' = \int \left(-\frac{1}{2x^2} + C_1\right) dx = \frac{1}{2x} + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int \left(\frac{1}{2x} + C_1 x + C_2\right) dx = \frac{1}{2} ln|x| + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3 =$$

$$= \frac{1}{2} ln|x| + \bar{C}_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y''' = 3$.

Решение. Трижды интегрируя заданное уравнение третьего порядка, получим общее решение:

$$y'' = 3 \int dx = 3x + C_1,$$

$$y' = \int (3x + C_1) dx = 3 \int x dx + C_1 \int dx = \frac{3x^2}{2} + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int \left(\frac{3x^2}{2} + C_1 x + C_2\right) dx = \frac{x^3}{2} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Таким образом, общее решение заданного уравнения третьего порядка имеет вид:

$$y = \frac{x^3}{2} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Пример 3. Решить задачу Коши: $y'' = xe^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Решение. Заданное дифференциальное уравнение – второго порядка. Дважды интегрируя, найдем общее решение заданного уравнения. Результат первого интегрирования:

$$y' = \int xe^x dx = \left| \begin{array}{c} \text{интегрируем по частям} \\ u = x \\ du = dx \\ dv = e^x dx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| =$$

$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C_1.$$

Второй раз проинтегрировав, получим:

$$y = \int (xe^x - e^x + C_1)dx = \int xe^x dx - \int e^x dx + C_1 \int dx =$$

$$= xe^x - e^x - e^x + C_1 x + C_2 = xe^x - 2e^x + C_1 x + C_2.$$

Таким образом, общее решение имеет вид:

$$y = xe^x - 2e^x + C_1 x + C_2.$$

Для нахождения решения задачи Коши (частного решения) составим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = xe^x - 2e^x + C_1 x + C_2, \\ y' = xe^x - e^x + C_1. \end{cases}$$

Заданные начальные условия:

$$y(0) = 1, \text{то есть } x = 0, y = 1,$$

$$y'(0) = 0, \text{то есть } x = 0, y' = 0$$

подставим в полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 \cdot e^0 - 2e^0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 1, \\ 0 \cdot e^0 - e^0 + C_1 = 0. \end{cases}$$

Найдем значения постоянных C_1, C_2:

$$-2 + C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 3,$$

$$-1 + C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1.$$

Подставив найденные значения C_1, C_2 в общее решение заданного дифференциального уравнения второго порядка, запишем искомое частное решение в виде:

$$y = xe^x - 2e^x + C_1 x + C_2 = xe^x - 2e^x + x + 3.$$

4.3 Уравнение $F\left(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}\right)=0$, не содержащее неизвестной функции y и ее производных до (k-1) порядка, примеры

Рассмотрим уравнения вида $F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)})=0$, то есть уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка k-1 включительно. С помощью замены $y^{(k)}=p^{(n)}(x)$ порядок уравнения понижается на k единиц:

$$F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)})=0.$$

Предположим, что для полученного уравнения мы можем найти общее решение $p(x)=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$, тогда искомая функция $y(x)$ получается путем k кратного интегрирования функции $\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$.

Рассмотрим на примере уравнения второго порядка, не содержащего искомой функции:

$$F(x, y', y'')=0.$$

Используем подстановку $y'=p(x)$, откуда $y''=p'$, тогда уравнение преобразуется в уравнение первого порядка:

$$F(x, p, p')=0.$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения $xy''=y' \, ln\frac{y'}{x}$.

Решение. Данное уравнение не содержит искомой функции $y(x)$. Обозначим $y'=p(x)$, $y''=p'$ и получим уравнение:

$$xp'=p \, ln\frac{p}{x}.$$

Таким образом, мы получили однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Для его решения воспользуемся подстановкой $p=ux$, откуда $p'=xu'+u$. Следовательно, приходим к уравнению:

$$x(xu'+u)=ux \, ln\frac{ux}{x} \quad \Rightarrow \quad xu'+u=ulnu \quad \Rightarrow$$

$$xu'=ulnu-u \;\Rightarrow\; xu'=u(lnu-1) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u(ln\,u-1)}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части последнего уравнения, получим:

$$\int\frac{du}{u(ln\,u-1)}=\left|\begin{matrix} t=lnu-1 \\ dt=\frac{1}{u}du \end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{t}=ln|t|+C=ln|lnu-1|+C.$$

$$\int \frac{dx}{x} = ln|x| + lnC_1 = ln|xC_1|.$$

Приравнивая полученные выражения, имеем:

$$ln|xC_1| = ln|ln\,u - 1| \quad \Rightarrow \quad xC_1 = ln\,u - 1 \quad \Rightarrow \quad u = e^{C_1 x+1}.$$

Возвращаясь к старой переменной y, получим:

$$\frac{p}{x} = e^{C_1 x+1} \qquad \text{или} \qquad y' = xe^{C_1 x+1}.$$

Проинтегрируем полученное уравнение первого порядка и получим искомое общее решение заданного уравнения:

$$y = \int xe^{C_1 x+1}\,dx = \left| \begin{array}{c} u = x \\ du = dx \\ dv = e^{C_1 x+1}dx \\ v = \int e^{C_1 x+1}dx = \frac{1}{C_1}e^{C_1 x+1} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{C_1}xe^{C_1 x+1} - \frac{1}{C_1}\int e^{C_1 x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{C_1}xe^{C_1 x+1} - \frac{1}{C_1^2}e^{C_1 x+1} + C_2.$$

4.4 Уравнение $F(y, y', y'') = 0$, не содержащее в явном виде независимую переменную x, примеры

Уравнения вида $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, не содержащие явно независимой переменной, решаются с помощью подстановок:

$$y' = p(y), \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}, \qquad y''' = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}, \quad \ldots$$

то есть порядок уравнения понижается на единицу.

Рассмотрим уравнение второго порядка, не содержащее независимой переменной x:

$$F(y, y', y'') = 0.$$

При помощи подстановки $y' = p(y)$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$ это уравнение сводится к уравнению первого порядка:

$$F\left(y,p,p\frac{dp}{dy}\right)=0.$$

Пример 5. Решить уравнение: $y''tgy=2y'^2$.

Решение. Это уравнение не содержит независимой переменной x. При помощи подстановки $y'=p(y)$, $y''=p\frac{dp}{dy}$ данное уравнение преобразуем к виду:

$$p\frac{dp}{dy}tgy=2p^2.$$

Интегрируя полученное уравнение с разделяющимися переменными, находим:

$$\frac{pdp}{p^2}=\frac{2dy}{tgy}\quad\Rightarrow\quad\frac{dp}{p}=\frac{2cosydy}{siny}\quad\Rightarrow\quad lnp=2ln|siny|+lnC_1$$

$$\Rightarrow\quad p=C_1sin^2y.$$

Возвращаясь к старым переменным, меняем p на $\frac{dy}{dx}$, тогда получим:

$$\frac{dy}{dx}=C_1\,sin^2\,y\qquad\text{или}\qquad\frac{dy}{sin^2\,y}=C_1dx,$$

откуда находим общий интеграл данного уравнения:

$$-ctgy=C_1x+C_2.$$

Пример 6. Найти частное решение уравнения $2yy'^3+y''=0$, удовлетворяющее начальным условиям y(0)=0, y'(0)=-3.

Решение. В начале найдем общее решение заданного дифференциального уравнения. Полагая $y'=p(y)$, $y''=p\frac{dp}{dy}$, преобразуем данное уравнение к виду:

$$2yp^3+p\frac{dp}{dy}=0\qquad\text{или}\qquad\frac{dp}{p^2}=-2ydy.$$

Интегрируя обе части уравнения, получим:

$$\frac{1}{p}=y^2+C_1;\qquad p=\frac{1}{y^2+C_1};\qquad\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y^2+C_1}.$$

Используя второе начальное условие y'(0)=-3, получим -3=1/C_1, то есть C_1=-1/3. Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2 - \frac{1}{3}} \qquad \text{или} \qquad \left(y^2 - \frac{1}{3}\right) dy = dx.$$

Интегрируя обе части последнего уравнения, находим:

$$\frac{(y^3 - y)}{3} = x + C_2.$$

Используя теперь первое начальное условие $y(0)=0$, получим $C_2=0$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид: $y^3 - y = 3x$.

Вопросы для самоконтроля

1. Общий вид уравнения, разрешенного относительно старшей производной.
2. Какие решения называются частными решениями дифференциального уравнения?
3. Каков общий вид уравнения, разрешенного относительно производной порядка n?
4. Сколько произвольных постоянных имеет общее решение уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$?
5. Каков общий вид уравнения, не содержащего явно искомой функции и ее производных до порядка k-1 включительно?
6. С помощью какой замены понижается порядок уравнения, не содержащего явно искомой функции и ее производных до порядка k-1 включительно?
7. Как называются уравнения вида $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$?
8. Как решаются уравнения, не содержащие явно независимой переменной?

Лекция 5. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

Цель лекции – рассмотреть линейные однородные дифференциальные уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, привести примеры, дать постановку задачи Коши для однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка, привести примеры.

5.1 Линейные однородные дифференциальные уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, примеры

Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{5.1}$$

где p, q – некоторые постоянные.

Будем искать решение уравнения (5.1) в виде:

$$y(x) = e^{kx}, \tag{5.2}$$

где k – пока неизвестное число. Подставив функцию (5.2) в уравнение (5.1), получим квадратное уравнение:

$$k^2 + pk + q = 0, \tag{5.3}$$

которое называется характеристическим уравнением для однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка (5.1).

Теорема. Пусть k_1 и k_2 – корни характеристического уравнения (5.3), тогда возможны три случая:

1) Если корни характеристического уравнения k_1 и k_2 – действительные и различные, то общее решение уравнения (5.1) имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

2) Если корни характеристического уравнения равны $k_1 = k_2$ между собой, то есть действительные и кратные, то общее решение уравнения (5.1) имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}.$$

3) Если корни характеристического уравнения $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta,\ \beta \neq 0$ комплексные числа, то общее решение уравнения (5.1) имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta\, x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta\, x.$$

Рассмотрим первый случай: корни характеристического уравнения действительные и различные числа.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' + 6y' + 8y = 0$.

Решение. Это однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, его характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2 + 6k + 8 = 0.$$

Найдем корни характеристического уравнения:

$$k_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2},$$

$$k_1 = -2, \quad k_2 = -4.$$

Корни характеристического уравнения действительные и различные, то есть общее решение заданного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-4x}.$$

Рассмотрим второй случай: корни характеристического уравнения действительные и кратные.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Решение. Это однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, его характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2 - 6k + 9 = 0.$$

Найдем корни характеристического уравнения:

$$k_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6}{2} = 3,$$

$$k_1 = k_2 = 3.$$

Корни характеристического уравнения действительные и двукратные, тогда общее решение имеет вид:

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x) = e^{3x}(C_1 + C_2 x).$$

Рассмотрим третий случай: корни характеристического уравнения комплексные.

Пример 3**.** Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Решение. Это однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, его характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2 + 2k + 5 = 0.$$

Найдем корни характеристического уравнения:

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4 \cdot i}{2} = -1 \pm 2i,$$

$$k = \alpha + \beta i; \quad \alpha = -1; \quad \beta = 2.$$

Это случай, когда корни характеристического уравнения комплексные числа:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x),$$

тогда общее решение уравнения имеет вид:

$$y = e^{-1 \cdot x}(C_1 cos2x + C_2 sin2x).$$

5.2 Задача Коши для однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, примеры

Задача Коши для однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами задается в виде:

$$y'' + py' + qy = 0$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{5.4}$$

$$y'(x_0) = y_0'.$$

Пример 4. Решить задачу Коши:

$$y'' - 5y' + 4y = 0; y(0) = 1; y'(0) = 1.$$

Решение. Найдем общее решение однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка. Его характеристическое уравнение имеет действительные и различные корни:

$$k^2 - 5k + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad D = \sqrt{9} = 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 4, \quad k_2 = 1.$$

Общее решение имеет вид:

$$y = e^{4x}C_1 + e^{x}C_2.$$

Для того чтобы решить задачу Коши, то есть чтобы найти частное решение заданного дифференциального уравнения, вычислим производную:

$$y' = 4e^{4x}C_1 + e^{x}C_2.$$

Составим систему из двух уравнений с двумя неизвестными, затем, используя начальные условия $y(0) = 1; y'(0) = 1$, найдем неизвестные C_1, C_2:

$$\begin{cases} y = e^{4x}C_1 + e^{x}C_2 \\ y' = 4e^{4x}C_1 + e^{x}C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 4C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 1 - C_1 \\ 4C_1 + 1 - C_1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = 1 - C_1 & \Rightarrow \quad C_2 = 1 \\ 3C_1 = 0 & \Rightarrow \quad C_1 = 0 \end{cases}$$

Таким образом, подставив найденные значения $C_1 = 0, C_2 = 1$ в общее решение $y = e^{4x}C_1 + e^xC_2$, запишем решение заданной задачи Коши: $y_0 = e^x$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой вид имеет однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка?
2. Если задано уравнение $y'' + py' + qy = 0$, то как называется уравнение вида $k^2 + pk + q = 0$?
3. Какой вид имеет общее решение однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка, если корни характеристического уравнения – действительные и различные числа?
4. Какой вид имеет общее решение однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка, если корни характеристического уравнения – действительные и кратные числа?
5. Какой вид имеет общее решение однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка, если корни характеристического уравнения – комплексные числа?
6. Сколько начальных условий задается в задаче Коши для однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка?

Лекция 6. Методы решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью

Цель лекции – ввести понятие линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, рассмотреть метод подбора частного решения (метод неопределенных коэффициентов), метод вариации произвольных постоянных, привести примеры.

6.1 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y'' + py' + qy = f(x). \qquad (6.1)$$

Соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y'' + py' + qy = 0. \qquad (6.2)$$

Для нахождения общего решения уравнения (6.1) сначала надо найти общее решение y_0 уравнения (6.2), а затем найти какое-либо частное решение y^*

уравнения (6.1). Их сумма есть общее решение данного неоднородного уравнения (6.1):

$$y = y_0 + y^*.$$

Рассмотрим два метода нахождения частного решения – метод подбора частного решения (метод неопределенных коэффициентов) и метод вариации произвольных постоянных.

6.2 Метод подбора частного решения (метод неопределенных коэффициентов, пример

Метод неопределенных коэффициентов позволяет найти частное решение уравнения (6.1) для следующих случаев. Если правая часть уравнения (6.1) имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x], \tag{6.3}$$

где α и β – действительные числа, $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены соответственно n и m степени с действительными коэффициентами, то частное решение уравнения (6.1) ищется в виде:

$$y^* = x^s e^{\alpha x}[M_k(x) \cos \beta x + N_k(x) \sin \beta x], \tag{6.4}$$

где $M_k(x), N_k(x)$ – многочлены степени k (k – наибольшая из степеней n и m) с неопределенными буквенными коэффициентами, s – кратность, с которой $\alpha + \beta i$ входит в число корней характеристического уравнения:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

соответствующего однородному дифференциальному уравнению (6.2).

Для того чтобы найти коэффициенты многочленов $M_k(x), N_k(x)$, искомое частное решение (6.4) подставляют в левую часть дифференциального уравнения (6.1) и производят соответствующие упрощения; затем в полученном тождестве приравнивают коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях, что дает систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов, из которой определяют эти коэффициенты.

Укажем вид частного решения y^* для некоторых частных случаев функции $f(x)$:

1) если $\underbrace{\alpha = 0, \beta = 0}_{\alpha+\beta i=0}$, то $f(x) = P_n(x)$ и частное решение ищется в виде:

$$y^* = x^s(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n),$$

где s – кратность, с которой число ноль входит в число корней характеристического уравнения.

2) если $\underbrace{\beta = 0}_{\alpha+\beta i=\alpha}$ то $f(x) = e^{\alpha x} P_n x$ и частное решение ищется в виде:

$$y^* = x^s e^{\alpha x}(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n),$$

где s – кратность, с которой α входит в число корней характеристического уравнения;

3) если $\underbrace{\alpha = 0}_{\alpha+\beta i=\beta i}$, n=m=0, то $f(x) = A\cos\beta\, x + B\sin\beta\, x$ и частное решение ищется в виде:

$$y^* = x^s(A_0 \cos\beta\, x + B_0 \sin\beta\, x),$$

где s – кратность, с которой βi входит в число корней характеристического уравнения.

В том случае, если правая часть уравнения (6.1) есть сумма функций вида:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_r(x),$$

то надо предварительно найти частные решения y_1*,...,y_r*, соответствующие функциям $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_r(x)$, тогда частное решение уравнения (6.1) запишется в виде:

$$y^* = y_1^* + y_2^* + \cdots + y_r^*.$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' + 8y' + 16y = -10e^{-4x}$.

Решение. Найдем y_0 – общее решение однородного уравнения:

$$y'' + 8y' + 16y = 0.$$

Для этого составим его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$ и найдем корни $\lambda_1 = \lambda_2 = -4$. Корни характеристического уравнения действительные и кратные, следовательно, общее решение имеет вид:

$$y_0 = (C_1 + C_2 x)e^{-4x}.$$

Найдем теперь частное решение y*. В заданном уравнении правая часть имеет вид: $f(x) = -10e^{-4x}$. Определим $n = 0,\ P_0 = -10,\ \alpha = -4, \beta = 0$. Так как $\alpha + \beta i = -4$ есть двукратный корень характеристического уравнения, то s=2 и частное решение y* надо искать в виде:

$$y^* = Ax^2 e^{-4x},$$

где A – неопределенный коэффициент, подлежащий определению.

Найдем производные y'^* и y''^*:

$$y'^* = (-4Ax^2 + 2Ax)e^{-4x},$$

$$y''^* = (16Ax^2 - 16Ax + 2A)e^{-4x}.$$

Подставляя найденные выражения $y*$, $y*'$ и у*" в заданное уравнение, сокращая обе его части на e^{-4x} и приводя подобные члены, в итоге получим $2A = -10$, откуда $A = 5$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид:

$$\text{y} *= -5x^2 e^{-4x},$$

а общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y = y_0 + y^* = (C_1 + C_2 x)e^{-4x} - 5x^2 e^{-4x}.$$

6.3 Метод вариации произвольных постоянных, пример

Более общим методом решения линейного неоднородного уравнения (6.1) является метод вариации произвольных постоянных.

Пусть y_1 и y_2 – линейно независимые частные решения однородного уравнения (6.3), тогда общее решение неоднородного уравнения (6.1) следует искать в виде:

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2, \tag{6.5}$$

где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases} \tag{6.6}$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, находим:

$$C_1'(x) = \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)}, \qquad C_2'(x) = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)}, \tag{6.7}$$

где

$$W(y_1 y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

– определитель Вронского (вронскиан), составленный для решений y_1 и y_2. Интегрируя равенства (6.7), получим:

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx + C_1, \qquad C_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx + C_2.$$

Затем, подставляя найденные функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ в соотношение (6.5), получим общее решение линейного неоднородного уравнения (6.1).

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = tg2x$.

Решение. В данном случае частное решение уравнения методом неопределенных коэффициентов найти нельзя, так как в отличие от предыдущего примера правая часть уравнения представляет собой функцию другой структуры. Поэтому для нахождения общего решения уравнения воспользуемся методом вариации произвольных постоянных.

Соответствующее однородное уравнение имеет вид y''+4y=0. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Следовательно, общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$y = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x, \tag{6.8}$$

где функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ определяются из системы уравнений вида (6.7):

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0 \\ -2C_1'(x)\sin 2x + 2C_2'(x)\cos 2x = tg2x \end{cases}.$$

Решая эту систему, находим:

$$C_1'(x) = -\frac{\sin 2x \cdot tg2x}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2}\frac{\sin^2 2x}{\cos 2x},$$

$$C_2'(x) = \frac{\cos 2x \cdot tg2x}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Интегрируя полученные равенства, получим:

$$C_1'(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x}dx + C_1 = \frac{1}{2}\int\left(\cos 2x - \frac{1}{\cos 2x}\right)dx + C_1 =$$

$$= \tfrac{1}{4}\sin 2x - \tfrac{1}{4}\ln\left|tg\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right)\right| + C_1,$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx + C_2 = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_2.$$

Подставляя $C_1(x)$, $C_2(x)$ в (6.8), находим общее решение данного уравнения:

$$y=\left[\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}\ln\left|tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C_1\right]\cos 2x+\left(-\frac{1}{4}\cos 2x+C_2\right)\sin 2x=$$

$$=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x\ln\left|tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Вопросы для самоконтроля

,

1. Какой вид имеет неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка?
2. Если задано уравнение $y''+py'+qy=f(x)$, то как называется уравнение вида $y''+py'+qy=0$?
3. Из суммы каких решений состоит общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения?
4. Какие методы нахождения частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения вы знаете?
5. Какой вид имеет определитель Вронского (вронскиан), составленный для решений y_1 и y_2?

Лекция 7. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами и методы их решения

Цель лекции – ввести понятие линейного неоднородного и однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотреть задачу Коши, линейный дифференциальный оператор и его свойства, а также метод неопределенных коэффициентов и метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами.

7.1 Линейные неоднородные и однородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами. Задача Коши

Уравнение вида:

$$y^{(n)}+b_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+b_1(x)y'+b_0(x)y=f(x), \qquad (7.1)$$

где $b_{i-1}(x)$, $f(x)\in C(a,b)$ непрерывны на (a,b), $i=1,2,\dots,n$, называется линейным дифференциальным уравнением n-го порядка.

Функция $f(x)$ называется правой частью уравнения (7.1), а функции $b_{i-1}(x), i=1,2,\dots,n$ – коэффициентами уравнения (7.1).

Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение (7.1) называется однородным линейным дифференциальным уравнением n-го порядка. Уравнение (7.1) с ненулевой правой частью $f(x)\neq 0$ называют неоднородным линейным дифференциальным уравнением.

Задача Коши для уравнения (7.1) с начальными условиями:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0', \\ -------- \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{7.2}$$

Теорема Пикара – Пеано – Коши (существования и единственности решения). Если в дифференциальном уравнении (7.1) $b_{i-1}(x), i = 1,2, \dots, n$, $f(x) \in C(a,b)$ и $x_0 \in (a,b)$, то линейное дифференциальное уравнение (7.1) имеет единственное решение на интервале (a,b), удовлетворяющее начальным условиям (7.2).

7.2 Линейный дифференциальный оператор и его свойства

Линейным дифференциальным оператором n-го порядка называется выражение:

$$L_n[y(x)] = y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + b_1(x)y' + b_0(x)y =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} b_i\,(x)y^{(i)}(x),$$

где $b_{i-1}(x) \in C(a,b), i = 0,1, \dots, n-1, b_n(x) = 1$.

Линейное дифференциальное уравнение (7.1) можно переписать в сокращенном операторном виде: $L_n[y(x)] = f(x)$.

Свойства линейного дифференциального оператора:

1) Постоянный множитель можно выносить за знак линейного дифференциального оператора:

$$L_n[Cy(x)] = CL_n[y(x)].$$

2) Линейный дифференциальный оператор от сумм конечного числа функций равен сумме линейных дифференциальных операторов слагаемых:

$$L_n\left[\sum_{l=1}^{k} y_l\,(x)\right] = \sum_{l=1}^{k} L_n\,[y_l(x)].$$

7.3 Однородные линейные дифференциальные уравнения (ОЛДУ)

Рассмотрим следующие свойства ОЛДУ

$$L_n(y) = \textstyle\sum_{i=0}^{n} b_i\,(x)y^{(i)} = 0 \tag{7.3}$$

1) Если $y_1(x)$ является решением ОЛДУ (7.3), C – некоторое число, то функция $Cy_1(x)$ также является решением этого уравнения.

2) Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями ОЛДУ (7.3), то их сумма также является решением уравнения (7.3).

3) Если функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ являются решениями ОЛДУ (7.3), то их линейная комбинация:

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

также является решением этого уравнения.

7.4 Линейная независимость функций

Функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, определенные на интервале (a, b), называются линейно независимыми на этом интервале, если соотношение:

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b) \tag{7.4}$$

выполняется только при всех $C_i = 0,\ i = 1,2, \dots, n$ (то есть если это соотношение не выполняется для отличных от нуля чисел C_i).

Система n функций $\{y_i(x)\}_1^n$ называется линейно зависимой на интервале (a, b), если существуют числа C_i, не все равные нулю, такие, что выполняется соотношение (7.4).

Функциональный определитель вида:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & \mathrm{y}_{\mathrm{n}}(\mathrm{x}) \\ y_1(x) & y_2'(x) & \dots & \mathrm{y}_{\mathrm{n}}'(\mathrm{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского (вронскианом) n-го порядка для системы функций $\{y_i(x)\}_1^n$.

Теорема (необходимое и достаточное условие линейной независимости решений). Для того чтобы частные решения ОЛДУ (7.3) $\{y_i(x)\}_1^n$ были линейно независимыми на интервале (a, b), необходимо и достаточно, чтобы вронскиан, составленный их них, был отличен от нуля в любой точке интервала (a, b), то есть $W(x) \neq 0$ для $\forall x \in (a, b)$.

7.5 Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения *n*-го порядка

Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение:

$$y^{(n)} + b_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + b_1(x) y' + b_0(x) y = 0. \tag{7.5}$$

Если n частных решений $\{y_i(x)\}_1^n$ ОЛДУ (7.5) линейно независимы, то эта система $\{y_i(x)\}_1^n$ называется фундаментальной системой решений уравнения (7.5).

Теорема. Если $\{y_i(x)\}_1^n$ – фундаментальная система решений уравнения (7.5), то функция:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

является общим решением этого линейного дифференциального уравнения.

Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Рассмотрим ОЛДУ n-го порядка:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{7.6}$$

где $a_{i-1} = const, \quad i = 1,2, \dots, n.$

Будем искать решение уравнения (7.6) в виде:

$$y(x) = e^{\lambda x}, \tag{7.7}$$

где λ – пока неизвестное постоянное число.

Уравнение:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{7.8}$$

называется характеристическим уравнением для ЛДУ (7.6).

Возможны четыре случая:

1. Корни характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – действительные и различные числа, тогда общим решением однородного уравнения (7.6) является функция:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

2. Пусть, например, $\lambda = \lambda_1$ есть действительный корень кратности k, тогда этому корню соответствует k решений из фундаментальной системы решений вида:

$$y_1 = e^{\lambda x},$$

$$y_2 = x e^{\lambda x},$$

$$y_3 = x^2 e^{\lambda x},$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$y_k = x^{k-1} e^{\lambda x}.$$

3. Предположим, что имеется $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \beta \neq 0$ некратный комплексный корень, тогда ему соответствует пара решений из фундаментальной системы решений вида:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \qquad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

4. Предположим, что корень $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \beta \neq 0$ характеристического уравнения имеет кратность k. В этом случае соответствующая часть общего решения ОЛДУ имеет вид:

$$y(x) = e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x +$$

$$+(C_{k+1} + C_{k+2} x + \cdots + C_{2k} x^{k-1}) \sin \beta x].$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$.

Решение. Задано дифференциальное уравнение третьего порядка. Запишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Раскладывая левую часть уравнения на множители, получим:

$$\lambda^2(\lambda - 1) - 4(\lambda - 1) = 0 \quad \text{или} \quad (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0.$$

Следовательно, $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 2$ – корни характеристического уравнения. Так как корни характеристического уравнения действительные и различные числа, то общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{2x}.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$.

Решение. Это однородное ЛДУ третьего порядка, его характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^3 - 2k^2 - 5k + 6 = 0.$$

Представим характеристическое уравнение в виде произведения двух сомножителей $(k - 1)(k^2 - k - 6) = 0$. Найдем корни этого характеристического уравнения. Рассмотрим первый множитель: $k - 1 = 0$, отсюда $k_1 = 1$. Найдем корни второго множителя. Это квадратное уравнение:

$$k^2 - k - 6 = 0,$$

$$k_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}.$$

Таким образом, корни $k_2 = 3,\ \ k_3 = -2$ характеристического уравнения – действительные и различные (случай 1), следовательно, общее решение заданного уравнения имеет вид:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} + C_3e^{k_3x} = C_1e^x + C_2e^{3x} + C_3e^{-2x}.$$

Пример 3. Дано уравнение $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$. Требуется найти его общее решение.

Решение. Это однородное ЛДУ третьего порядка, его характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^3 - 5k^2 + 17k - 13 = 0.$$

Найдем корни характеристического уравнения:

$$(k-1)(k^2 - 4k + 13) = 0.$$

Рассмотрим первый множитель: $k - 1 = 0$, отсюда $k_1 = 1$. Найдем корни второго множителя:

$$k^2 - 4k + 13 = 0$$

$$k_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i,$$

$$k = \alpha + \beta i; \quad \alpha = 2; \quad \beta = 3.$$

Таким образом, один корень характеристического уравнения –действительный (случай 1), а два других корня – комплексные числа (случай 3):

$$y = C_1e^{k_1x} + e^{\alpha x}(C_2 cos\beta x + C_3 sin\beta x).$$

Общее решение уравнения имеет вид:

$$y = C_1e^x + e^{2x}(C_2 cos3x + C_3 sin3x).$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y^{(4)} + 4y'' + 3y = 0$.

Решение. Это однородное ЛДУ четвертого порядка, его характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^4 + 4k^2 + 3 = 0.$$

Это биквадратное уравнение, найдем его корни:

$$t = k^2 \qquad t^2 + 4t + 3 = 0 \quad t_{1,2} = \frac{-4 \pm 2}{2},$$

$$t_1 = -3, \quad t_2 = -1.$$

При $t_1 = -3$ получим: $k^2 = -3$ или $k^2 = 3 \cdot (-1)$, тогда:

$$k = \pm\sqrt{3}i = \alpha_1 + \beta_1$$

или

$$\alpha_1 = 0; \quad \beta_1 = \sqrt{3}.$$

При $t_2 = -1$ получим: $k^2 = -1$ или $k^2 = i^2$. Отсюда:

$$k = \pm i = \alpha_2 + \beta_2$$

или

$$\alpha_2 = 0; \quad \beta_2 = 1.$$

Все корни характеристического уравнения – комплексные числа, тогда общее решение имеет вид:

$$y = e^{\alpha_1 x}(C_1 cos\beta_1 x + C_2 sin\beta_1 x) + e^{\alpha_2 x}(C_3 cos\beta_2 x + C_4 sin\beta_2 x).$$

Таким образом, для нашего случая:

$$y = e^{0\cdot x}\left(C_1 cos\sqrt{3}x + C_2 sin\sqrt{3}x\right) + e^{0\cdot x}(C_3 \cos(1\cdot x) + C_4 \sin(1\cdot x))$$

или

$$y = C_1 cos\sqrt{3}x + C_2 sin\sqrt{3}x + C_3 cosx + C_4 sinx.$$

Мы рассмотрели однородное ЛДУ n-го порядка, его характеристическое уравнение для ЛДУ и возможные случаи, когда корни характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$:

1) действительные различные;
2) есть действительный корень кратности k;
3) есть некратный комплексный корень ($\lambda_j = \alpha + \beta i, \beta \neq 0$);
4) есть корень $\lambda_j = \alpha + \beta i, \beta \neq 0$ кратности k.

Во всех перечисленных случаях мы показали вид соответствующей части общего решения однородного ЛДУ.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Пусть задано неоднородное ЛДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x). \tag{7.9}$$

Соответствующее ему однородное уравнение имеет вид:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{7.10}$$

Теорема. Общее решение линейного неоднородного уравнения (7.9) имеет вид $y = y_0 + y^*$, где y_0 – общее решение соответствующего ему однородного уравнения (7.11), y^* – частное решение уравнения (7.9).

7.6 Метод неопределенных коэффициентов решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим неоднородное ЛДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами (7.9).

I. Пусть правая часть $f(x) = e^{ax}P_m(x)$, где $P_m(x)$ – многочлен степени m.

1) Если число a не является корнем характеристического уравнения для (7.9), то частное решение неоднородного уравнения ищется в той же форме, то есть:

$$y^*(x) = e^{ax}(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_mx^m),$$

где $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m$ – некоторые числа. Для их нахождения нужно подставить y^* в уравнение (7.9).

2) Пусть число a совпадает с корнем характеристического уравнения кратности s. Тогда частное решение (7.9) ищется в той же форме, но с сомножителем x^s, то есть:

$$y^* = x^s e^{ax}(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_mx^m).$$

И далее аналогично пункту 1.

II. Пусть правая часть уравнения (7.9) есть функция вида:

$$f(x) = e^{ax}(P_m(x)\cos b\,x + Q_l(x)\sin b\,x).$$

1) Если комплексное число $a + bi$ $(b \neq 0)$ не является корнем характеристического уравнения, тогда частное решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$y^* = e^{ax}(\bar{P}_{m_1}(x)\cos b\,x + \bar{Q}_{m_1}(x)\sin b\,x),$$

где $\bar{P}_{m_1}(x), \bar{Q}_{m_1}(x)$ – многочлены степени $m_1 = max(m, l)$ с неопределенными коэффициентами.

2) Если $a + bi$ $(b \neq 0)$ является корнем характеристического уравнения кратности s, тогда частное решение неоднородного ЛДУ (7.9) ищется в виде:

$$y^* = x^s e^{ax}(\bar{P}_{m_1}(x)\cos b\,x + \bar{Q}_{m_1}(x)\sin b\,x), \quad m_1 = max(m, l).$$

Вывод. Частное решение неоднородного ЛДУ со специальной правой частью определяется более простым способом – методом неопределенных коэффициентов.

7.7 Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами

Пусть дано неоднородное ЛДУ n-го порядка (7.9). Предположим, что найдена фундаментальная система решений однородного уравнения $y_1(x), y_2(y), \dots, y_n(x)$.

Теорема. Частное решение уравнения (7.9) записывается в виде:

$$y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n,$$

где функции $C_1'(x), C_2'(x), \dots, C_n'(x)$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \dots + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \dots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ - \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Решая эту систему линейных алгебраических уравнений методом Крамера, получим (для $i = 1,2, \dots, n$):

$$C_i'(x) = \frac{W_i(x)}{W(x)},$$

где определители $W_i(x)$ получаются из главного $W(x)$ заменой элементов i-го столбца столбцом свободных членов системы.

Вывод. Метод Лагранжа – универсальный. Он позволяет при помощи квадратур определить частное решение неоднородного ЛДУ, если известно общее решение соответствующего ОЛДУ.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением n-го порядка?

2. Как называется линейное дифференциальное уравнение n-го порядка, если его правая часть тождественно равна нулю?

3. Как по-другому называется теорема Пикара – Пеано – Коши?

4. Свойства линейного дифференциального оператора.

5. Сколько и какие случаи для корней характеристического уравнения вы знаете?

6. Какие виды общего решения однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка вы знаете?

Лекция 8. Нормальная система дифференциальных уравнений. Метод исключения. Метод интегрируемых комбинаций

Цель лекции – рассмотреть нормальную систему дифференциальных уравнений, метод исключения и метод интегрируемых комбинаций, привести примеры.

8.1 Нормальная система дифференциальных уравнений

Нормальной системой дифференциальных уравнений называется система вида:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}, \tag{8.1}$$

где $y_1, y_2, \dots, y_n$ – неизвестные функции независимой переменной x.

Здесь число уравнений равно числу неизвестных функций.

Если правые части нормальной системы дифференциальных уравнений являются линейными функциями относительно $y_1, y_2, \dots, y_n$, то система дифференциальных уравнений называется линейной.

Решением системы (8.1) называется совокупность n функций $y_1, y_2, \dots, y_n$ удовлетворяющих всем уравнениям системы.

Частным решением системы (8.1) называется решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_1 = y_{10}, \;\; y_2 = y_{20}, \dots, y_n = y_{n0}$$

при $x = x_0$, где $x_0, y_{10}, y_{n0}, \dots, y_{n0}$ – заданные числа.

Семейство решений системы (8.1), зависящее от n произвольных независимых постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ \dots \;\; \dots \;\; \dots \;\; \dots \;\; \dots \;\; \dots \;\; \dots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{cases}$$

называют общим решением этой системы.

8.2 Метод исключения, примеры

Решение нормальной системы методом исключения можно свести к решению одного дифференциального уравнения n-го порядка, содержащему одну неизвестную функцию. Сведение нормальной системы к одному уравнению может быть достигнуто дифференцированием одного из уравнений системы и исключением всех неизвестных, кроме одного (так называемый метод исключения).

В некоторых случаях, комбинируя уравнения системы, после несложных преобразований удается получить легко интегрируемые уравнения (так называемый метод интегрируемых комбинаций), что позволяет найти решение заданной системы.

Пример 1. Решить систему дифференциальных уравнений методом исключения:

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 4y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 5y_2 \end{cases}.$$

Решение. Дифференцируем первое уравнение системы по переменной x:

$$y_1'' = 5y_1' + 4y_2'. \tag{8.2}$$

Из первого уравнения определим y_2:

$$y_2 = \frac{1}{4}(y_1' - 5y_1).$$

Тогда из второго уравнения имеем:

$$y_2' = 4y_1 + 5 \cdot \frac{1}{4}(y_1' - 5y_1),$$

то есть

$$y_2' = \frac{5}{4}y_1' - \frac{9}{4}y_1.$$

Подставляя полученное для y_2' выражение в соотношение (8.2), имеем:

$$y_1'' = 5y_1' + 4\left(\frac{5}{4}y_1' - \frac{9}{4}y_1\right).$$

Таким образом приходим к уравнению второго порядка с одной неизвестной функцией y_1:

$$y_1'' - 10y_1' + 9y_1 = 0.$$

Мы получили однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Решая его, находим общее решение:

$$y_1 = C_1e^x + C_2e^{9x}.$$

Тогда

$$y_2 = \frac{1}{4}(y_1' - 5y_1) =$$

$$= \frac{1}{4}(C_1e^x + 9C_2e^{9x} - 5C_1e^x - 5C_2e^{9x}) = -C_1e^x + C_2e^{9x}.$$

Итак, общее решение системы имеет вид:

$$y_1 = C_1e^x + C_2e^{9x}, \quad y_2 = -C_1e^x + C_2e^{9x}.$$

8.3 Методом интегрируемых комбинаций, пример

Пример 2. Решить систему дифференциальных уравнений с начальными условиями $x(0) = 1,\ y(0) = 2$ методом интегрируемых комбинаций:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{2x+3y} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{2x+3y} \end{cases}.$$

Решение. Составим первую интегральную комбинацию. Разделив первое уравнение на второе, получим:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}, \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}.$$

Проинтегрировав обе части последнего уравнения и применив свойства логарифмов, получим:

$$lnx = lny + lnC_1, \qquad x = C_1y.$$

Составим вторую интегральную комбинацию. Сложив удвоенное первое и утроенное второе уравнения, получим:

$$2\frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} = 1, \quad 2dx + 3dy = dt.$$

Проинтегрировав обе части последнего уравнения, получим:

$$2x + 3y = t + C_2.$$

Из системы уравнений $x = C_1y$ и $2x + 3y = t + C_2$ находим общее решение системы:

$$x = \frac{C_1(t + C_2)}{2C_1 + 3}, \quad y = \frac{t + C_2}{2C_1 + 3}.$$

Применив начальные условия, получим:

$$1 = \frac{C_1 C_2)}{2C_1 + 3}, \quad 2 = \frac{C_2}{2C_2 + 3}.$$

Следовательно, $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = 8$. Подставив в общее решение найденные значения C_1, C_2, получим частные решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

$$x = \frac{1}{8}t + 1, \quad y = \frac{1}{4}t + 2.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какая система дифференциальных уравнений называется нормальной системой дифференциальных уравнений?
2. Какое соответствие должно быть между числом уравнений системы и числом неизвестных функций?
3. В чем суть метода исключения при решении нормальной системы дифференциальных уравнений?
4. Каким образом при решении нормальной системы методом исключения можно свести нормальную систему к одному уравнению?
5. В чем суть метода интегрируемых комбинаций?

Модуль 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Лекция 9. Численные методы решения дифференциальных уравнений первого порядка

Цель лекции – ввести понятие погрешности вычислений. Рассмотреть задачу Коши, метод последовательных приближений решения дифференциальных уравнений первого порядка, привести примеры.

9.1 Погрешность вычислений

При вычислении каких-либо значений функций, решении уравнений, измерении каких-то величин и т. д. получаются приближенные числа. Эти приближенные числа берутся с округлением до определенного знака. Кроме того, существуют формулы, результатами которых также являются приближенные значения. Все приближенные значения имеют так называемые погрешности вычислений. Методы, погрешность вычислений которых мала, считаются оптимальными для решения поставленной задачи. Это порождает необходимость определения оптимального количества знаков в процессе вычислений и в конечном результате, то есть получения оценки погрешности вычисления.

Определение. Абсолютная величина разности между приближенным и точным значениями числа называется оценкой погрешности приближенного числа:

$$|a - a_0| \leq \Delta_a,$$

где a – приближенное число, a_0 – точное значение числа, Δ_a – абсолютная погрешность приближенного числа a.

Число Δ_a – достаточно малая величина.

Определение. Относительной погрешностью δ_a приближенного числа a называется величина:

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}, a \neq 0.$$

Относительная погрешность указывается или в процентах, или числом с тремя-четырьмя знаками после запятой.

9.2 Задача Коши

Задача Коши для дифференциального уравнения есть процесс вычисления функции $y = y(x)$, удовлетворяющей уравнению:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

и заданным начальным условиям:

$$\begin{aligned} &y(x_0) = y_0; \\ &y'(x_0) = y_0'; \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots; \\ &y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{aligned}$$

где $x_0, y_0, y_0' \ldots, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа.

Постановка задачи Коши для системы дифференциальных уравнений: найти решения $y_1, y_2 \ldots, y_n$ для заданной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, .., y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2\left(x, y_{1,} y_2, \ldots, y_n\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases},$$

удовлетворяющие заданным начальным условиям:

$$y_1(x_0) = y_{10},\quad y_2(x_0) = y_{20},\quad \dots,\quad y_n(x_0) = y_{n0}.$$

Рассмотрим численные методы решения дифференциальных уравнений первого порядка, дающие приближенное решение дифференциального уравнения в виде таблицы.

9.3 Метод последовательных приближений, пример

Рассмотрим задачу Коши дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' = f(x, y), \tag{9.1}$$

$$y(\mathrm{x}_0) = \mathrm{y}_0, \tag{9.2}$$

то есть нам задано дифференциальное уравнение первого порядка с начальным условием $x = \mathrm{x}_0, y = \mathrm{y}_0$.

Метод последовательных приближений – это численный метод решения дифференциального уравнения первого порядка, дающий приближенное решение дифференциального уравнения в виде таблицы с применением формулы:

$$y_n(x) = \mathrm{y}_0 + \int_{\mathrm{x}_0}^{\mathrm{x}} f(x, y_{n-1}(x))dx. \tag{9.3}$$

В рекуррентной формуле (9.3) начальное приближение $y_0(\mathrm{x})$ выбирается произвольно.

Теорема. Если правая часть функции $f(x, y)$ в некотором замкнутом прямоугольнике R: $\{|x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$ удовлетворяет условию Липшица по переменной *y*:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le N|y_1 - y_2|, N = const, \tag{9.4}$$

то независимо от выбора начальной функции последовательные приближения $y_n(x)$ сходятся на некотором отрезке $[\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_0 + h]$ к решению задачи (9.1) – (9.2).

Пусть заданная функция определена и непрерывна в области:

$$\{|x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\},$$

тогда приближенное решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка имеет погрешность на сегменте $[\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_0 + h]$ вида:

$$\varepsilon_\text{п} = |y(x) - y_n(x)| \le MN^n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{9.5}$$

где $y(x)$ – точное решение, $y_n(x)$ – приближенное решение.

Для погрешности на сегменте $[\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_0 + h]$ справедливо:

$$M = \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|, \qquad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right). \qquad (9.6)$$

Пример. Вычислить три последовательных приближения решения задачи Коши:

$$y' = x^2 + y^2, \qquad y(0) = 0.$$

Решение. По условию задачи имеем $x_0 = 0, y_0 = 0$. Получим интегральное уравнение вида:

$$y(x) = \int_0^x (x^2 + y^2)dx.$$

Последовательно, используя рекуррентную формулу (9.3), найдем требуемые три последовательных приближения решения задачи Коши.

1 *шаг*. При $y_0(x) \equiv 0$ получим значение $y_1(x)$:

$$y_1(x) = \int_0^x (x^2 + y_0^2(x))dx = \int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3}.$$

2 *шаг*. Теперь, используя первое приближение $y_1(x) = \frac{x^3}{3}$, получим значение $y_2(x)$:

$$y_2(x) = \int_0^x (x^2 + y_1^2)dx = \int_0^x (x^2 + \frac{x^6}{9})dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63};$$

3 *шаг*. Аналогично, используя второе приближение $y_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$, вычислим значение $y_3(x)$:

$$y_3(x) = \int_0^x (x^2 + y_2^2)dx = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{9} + \frac{2}{189}x^{10} + \frac{x^{14}}{3969}\right)dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}.$$

Для оценки погрешности третьего приближения используем формулу (9.5). Пусть *a*=1, *b*=0.5, тогда получим:

$$M = \max|f(x,y)| = \max|x^2 + y^2| = 1{,}25;$$

$$N = \max|f'_y(x,y)| = \max|2y| = 1.$$

Учитывая условие (9.6), имеем h=0,4. Таким образом, приближенное решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка на сегменте [0;0,4] имеет погрешность:

$$\max_{[0:0,4]}|y(x) - y_3(x)| \leq \frac{5 \cdot (0,4)^4}{96} \approx 0,00133.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение оценки погрешности приближенного числа.
2. Какова связь между методами, погрешность вычислений которых мала, и численным решением поставленной задачи?
3. Дайте определение относительной погрешности приближенного числа.
4. В чем заключается суть метода последовательных приближений?
5. Как выбирается начальное приближение $y_0(\mathrm{x})$ в рекуррентной формуле метода последовательных приближений?

Лекция–10. Решение дифференциального уравнения первого порядка и системы дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера. Метод Рунге – Кутта четвертой степени точности решения дифференциального уравнения первого порядка

Цель лекции – рассмотреть метод Эйлера, ввести понятие ломаной Эйлера, оценки погрешности метода Эйлера, примеры. Рассмотреть метод Рунге – Кутта четвертой степени точности решения дифференциального уравнения первого порядка, схему метода Рунге – Кутта, дать оценку погрешности.

10.1 Метод Эйлера, ломаная Эйлера, оценка погрешности, примеры

Для задачи Коши:

$$y' = f(x, y), \qquad (10.1)$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad (10.2)$$

требуется методом Эйлера получить решение дифференциального уравнения в виде таблицы приближенных значений неизвестной функции $y(x)$.

Будем искать приближенные значения $y(x_i) \approx y_i$ для задачи (10.1) – (10.2) по формуле итераций вида:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \qquad (i = 0,1,2, \ldots). \qquad (10.3)$$

Рассмотрим равноудаленные точки $x_i = x_0 + ih,$ $(i = 0,1,2, \ldots)$, где h – достаточно малое изменений значений $x_i, i = 0,1,2, ...$

Определение. Отрезок M_iM_{i+1} ломаной $M_0M_1M_2\dots$ с вершинами $M_i(x_i,y_i)$ $(i=0,1,2,\dots)$, имеющий направление, совпадающее с направлением той интегральной кривой уравнения (10.1), которая проходит через точку M_i, называется ломаной Эйлера.

Предположим, что правая часть дифференциального уравнения (10.1) в некотором прямоугольнике $\{|x-x_0|\le a, |y-y_0|\le b\}$ удовлетворяет условиям:

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le N|y_1-y_2|, \tag{10.4}$$

$$\left|\frac{df}{dx}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le M, \tag{10.5}$$

где M, N – некоторые постоянные.

Получим для метода Эйлера решения дифференциального уравнения первого порядка оценку погрешности вида:

$$|y(x_n)-y_n|\le \frac{hM}{2N}[(1+hN)^n-1], \tag{10.6}$$

где $y(x_n)$ – значение точного решения уравнения при $x=x_n$, y_n – приближенное значение, полученное на n-ом шаге итерации.

Для метода Эйлера решения дифференциального уравнения первого порядка оценка погрешности вида (10.6) трудоемка, поэтому используется метод двойного пересчета. Суть метода двойного пересчета состоит в том, что расчеты выполняются дважды. Причем, во второй раз вычисления проводят с шагом $h/2$ и погрешность при шаге $h/2$ оценивают по формуле:

$$|y_n^*-y(x_n)|\approx|y_n^*-y_n|.$$

Системы дифференциальных уравнений и дифференциальные уравнения высших порядков также решаются методом Эйлера. Рассмотрим задачу Коши для системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y' = f_1(x,y,z) \\ z' = f_2(x,y,z) \end{cases}$$

$$y(x_0)=y_0, z(x_0)=z_0.$$

Для вычисления приближенных значений $y(x_i)\approx y_i, z(x_i)\approx z_i$ заданной системы дифференциальных уравнений применим формулы:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf_1(x_i,y_i,z_i) \\ z_{i+1} = z_i + hf_2(x_i,y_i,z_i), (i=0,1,2,\dots) \end{cases}.$$

Пример-1. Методом Эйлера решить задачу Коши:

$$y' = y - \frac{2x}{y}, y(0) = 1.$$

Решения искать на сегменте [0,1] с шагом h=0,2. Результат записать в виде таблицы.

Решение. По условию задачи сегмент [0,1] делится на отрезки точками с шагом $h = \frac{0+1}{5} = 0.2$, то есть будем искать значения функции $f(x_i, y_i)$ в точках $x_{i+1} = x_i + h$. Согласно формуле (10.3) метода Эйлера запишем итерационную формулу для заданного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y_{i+1} = y_i + 0{,}2 \cdot \left(y_i + \frac{2x_i}{y_i}\right), \qquad (i = 0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5).$$

В первой строке таблицы при i=0 записываются начальные приближения $x_0 = 0, y_0 = 1{,}0000$ и значение функции $f(x_0, y_0) = 1$, затем вычисляется значение $\Delta y_0 = hf(x_0, y_0) = 0{,}2$. Тогда по формуле (10.3) при i=0 получим первое значение функции:

$$y_1 = 1 + 0{,}2 = 1{,}2.$$

Значения $x_1 = 0{,}2, y_1 = 1{,}2000$ записываются во второй строке при i=1. Используя эти значения, можно вычислить $f(x_1, y_1) = 0{,}8667$, затем:

$$\Delta y_1 = hf(x_1, y_1) = 0{,}2 \cdot 0{,}8667 = 0{,}1733.$$

Тогда получим $x_2 = 0{,}4$ и следующее приближение:

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1{,}2 + 0{,}1733 = 1{,}3733.$$

При i=2, 3, 4, 5 вычисления ведутся аналогично. Результаты вычислений приведены в таблице 10.1.

Таблица 10.1 – Решение дифференциального уравнения методом Эйлера

i	x_i	y_i	Вычисление $f(x_i, y_i)$		Δy_i	Точное решение $y = \sqrt{2x+1}$
			$\frac{2x_i}{y_i}$	$y_i = \frac{2x_i}{y_i}$		
0	0	1,0000	0	1,0000	0,2000	1,0000
1	0,2	1,2000	0,3333	0,8667	0,1733	1,1832
2	0,4	1,3733	0,5928	0,7805	0,1561	1,3416
3	0,6	1,5294	0,7846	0,7458	0,1492	1,4832
4	0,8	1,6786	0,9532	0,7254	0,1451	1,6124
5	1,0	1,8237				1,7320

Учитывая, что $y = \sqrt{2x+1}$ – точное решение, найденное аналитическим методом, вычислим абсолютную погрешность $\varepsilon = 0{,}0917$ и относительную погрешность, которая равна 5%.

Пример 2. Методом Эйлера с шагом $h = 0{,}1$ найти первые четыре значения функции y для дифференциального уравнения $y' = x + y$ с начальным условием $y(0) = 1$.

Решение. Из заданного начального условия $x_0 = 0, y_0 = 1$ найдем следующие значения аргумента:

$$x_0 = 0;$$

$$x_1 = x_0 + 1 \cdot h = 0{,}1;$$

$$x_2 = x_0 + 2 \cdot h = 0{,}2;$$

$$x_3 = x_0 + 3 \cdot h = 0{,}3.$$

Значения функции y находим по формулам:

$$y_1 = y_0 + h \cdot (x_0 + y_0) = 1 + 0{,}1 \cdot (0 + 1) = 1{,}1;$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot (x_1 + y_1) = 1{,}22;$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot (x_2 + y_2) = 1{,}36;$$

$$y_4 = y_3 + h \cdot (x_3 + y_3) = 1{,}52.$$

Ответ:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,1	1,22	1,36	1,52

10.2 Метод Рунге – Кутта четвертой степени точности решения дифференциального уравнения первого порядка, схема метода Рунге – Кутта, оценка погрешности, пример

Рассмотрим задачу Коши (10.1) – (10.2) решения дифференциального уравнения первого порядка численным методом.

Предположим, что в точке x_i задано приближенное значение y_i уравнения (10.1), где $i = 0,1,2,\ldots$ Тогда для метода Рунге – Кутта справедливы формулы приближенного вычисления численных значений y_{i+1} в точках $x_{i+1} = x_i + k$:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \\ \Delta y_i = \frac{1}{6}\left(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}\right), \end{cases} \qquad (10.7)$$

где

$$
\begin{aligned}
&K_1^{(i)} = hf(x_i, y_i),\\
&K_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}\right),\\
&K_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}\right),\\
&K_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}).
\end{aligned}
\tag{10.8}
$$

Процесс решения поставленной задачи методом Рунге-Кутта трудоемкий, рекомендуется использовать схему, указанную в таблице 10.2.

Таблица 10.2 – Схема метода Рунге – Кутта

i	x	y	K=hf(x,y)	Δy
1	2	3	4	5
0	x_0	y_0	$K_1^{(0)}$	$K_1^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}$	$K_2^{(0)}$	$2K_2^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}$	$K_3^{(0)}$	$2K_3^{(0)}$
	$x_0 + h$	$y_0 + K_3^{(0)}$	$K_4^{(0)}$	$K_4^{(0)}$
				Δy_0
1	x_1	y_1		

Порядок заполнения таблицы:

1 *шаг.* Все значения $K_1^{(i)}, K_2^{(i)}, K_3^{(i)}, K_4^{(i)}$ формулы (10.8) для этого шага вычисляются при значении $i = 0$.

Первая строка таблицы: в столбцы 2 и 3 записываем заданные начальные значения x_0, y_0, вычисляем значение $K_1^{(0)}$ по первой формуле (10.8) и записываем в четвертый и пятый столбцы.

Вторая строка таблицы: вычисляем для столбцов 2 и 3 значения $x_0 + \frac{h}{2}$, $y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}$, затем вычисляем значение $K_2^{(0)}$ по второй формуле (10.8) и записываем в четвертый столбец, в пятый столбец записываем удвоенное произведение $K_2^{(0)}$.

Третья строка таблицы: вычисляем для столбцов 2 и 3 значения $x_0 + \frac{h}{2}$ и $y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}$, далее по третьей формуле (10.8) вычисляем значение $K_3^{(0)}$ и записываем в четвертый столбец, в пятый столбец записываем удвоенное произведение $K_3^{(0)}$.

Четвертая строка: вычисляем значения $x_0 + h$, $y_0 + K_3^0$ для столбцов 2 и 3 таблицы, вычисляем значение $K_4^{(0)}$ и записываем в четвертый столбец, в пятый столбцы.

По формуле Рунге – Кутта (10.7) вычисляем значение Δy_0. Таким образом вычислили первое значение искомой функции $y_1 = y_0 + \Delta y_0$.

Первый шаг итерационного процесса закончен. Затем повторяем итерационный процесс, принимая за начальное приближение точку (x_1, y_1), то есть заполняем таблицу при значении $i = 1$.

Шаг расчета h можно менять при переходе от одной точки к другой. Правильность выбора шага можно h контролировать формулой:

$$\Theta = \left|\frac{K_2^{(i)} - K_3^{(i)}}{K_1^{(i)} - K_2^{(i)}}\right|.$$

Метод Рунге – Кутта имеет четвертый порядок точности h^4. Значение Θ должно быть достаточно малым числом, то есть его значение не должно превышать нескольких сотых, иначе шаг h вычислений необходимо уменьшить.

Грубую оценку погрешности можно получить с помощью двойного просчета по формуле:

$$|y_n^* - y(x_n)| \approx \frac{|y_n^* - y_n|}{15},$$

где $y(x_n)$ – значение точного решения заданного дифференциального уравнения в точке x_n, а значения y_n^*, y_n, соответственно, приближенные значения, полученные с шагом $\frac{h}{2}$ и h.

Пример 3. Найти численное решение дифференциального уравнения $y' = y - \frac{2x}{y}$ на отрезке [0,1], удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$ методом Рунге – Кутта с шагом $h=0{,}2$.

Решение. По условию задачи $x_0 = 0, y_0 = 1$. По методу Рунге – Кутта вычисление приближенного значения производим по формулам (10.8).

1 *шаг*. Пусть $i = 0$. По условию задачи $x_0 = 0, y_0 = 1$. Вычислим значения $K_1^{(0)}, K_2^{(0)}, K_3^{(0)}, K_4^{(0)}$:

$$K_1^{(0)} = 0{,}2 \cdot \left(y_0 - \frac{2x_0}{y_0}\right) = 0{,}2 \cdot \left(1 - \frac{2\cdot 0}{1}\right) = 0{,}2;$$

$$K_2^{(0)} = 0{,}2 \cdot \left[y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2} - \frac{2\cdot\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)}{y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}}\right] = 0{,}2 \cdot \left[1{,}1 - \frac{0{,}2}{1{,}1}\right] = 0{,}1836;$$

$$K_3^{(0)} = 0{,}2 \cdot \left[y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2} - \frac{2\cdot\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)}{y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}}\right] = 0{,}1817;$$

$$K_4^{(0)} = 0{,}2 \cdot \left[y_0 + K_3^{(0)} - \frac{2\cdot(x_0+h)}{y_0+K_3^{(0)}}\right] = 0{,}1686.$$

Занесем вычисленные значения при $i = 0$ в таблицу 10.2.

Таблица 10.2 – Схема метода Рунге – Кутта

i	*x*	*y*	*K*=*hf*(*x*,*y*)	Δy
1	2	3	4	5
0	0	1	0,2	0,2
	0,1	1,1	0,1836	0,3672
	0,1	1,0918	0,1817	0,3634
	0,2	1,1817	0,1686	0,1686
				$\Delta y_0 = 0{,}1832$
1	$x_1 = 0{,}2$	$y_1 = 1{,}1832$		

Тогда по формуле (10.7) получим:

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(0{,}2 + 0{,}3672 + 0{,}3634 + 0{,}1686) = 0{,}1832.$$

Следовательно:

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}1832 = 1{,}1832.$$

Вычислим следующее значение $x_1 = 0 + 0{,}2 = 0{,}2$. Таким образом, первый шаг итерационного процесса закончен, мы получили значения:

$$y_1 = 1{,}1832 \quad \text{и} \quad x_1 = 0{,}2.$$

2 *шаг*. При $i = 1$ имеем $x_1 = 0{,}2; y_1 = 1{,}1832$. Предварительно вычислим значения $K_1^{(1)}, K_2^{(1)}, K_3^{(1)}, K_4^{(1)}$:

$$K_1^{(1)} = 0{,}2 \cdot \left(y_1 - \frac{2x_1}{y_1}\right) = 0{,}1690;$$

$$K_2^{(1)} = 0{,}2\left[y_1 + \frac{K_1^{(1)}}{2} - \frac{2\left(x_1+\frac{h}{2}\right)}{y_1+\frac{K_1^{(1)}}{2}}\right] = 0{,}1589;$$

$$K_3^{(1)} = 0{,}2\left[y_1 + \frac{K_2^{(1)}}{2} - \frac{2\left(x_1+\frac{h}{2}\right)}{y_1+\frac{K_2^{(1)}}{2}}\right] = 0{,}1575;$$

$$K_4^{(1)} = 0{,}2\left[y_1 + K_3^{(1)} - \frac{2(x_1+h)}{x_1+K_3^{(1)}}\right] = 0{,}1488.$$

Занесем вычисленные приближения в таблицу 10.2 для значений $i = 1$.

Продолжение таблицы 10.2 – Схема метода Рунге – Кутта

i	x	y	K=$hf(x,y)$	Δy
1	2	3	4	5
1	0,2	1,1832	0,1589	0,1589
	0,3	1,2626	0,1589	0,3178
	0,3	1,2626	0,1575	0,3150
	0,4	1,3407	0,1488	0,1488
				$\Delta y_1 = 0{,}1584$
1	$x_1 = 0{,}4$	$y_2 = 1{,}3416$		

Тогда:

$$\Delta y_1 = \frac{1}{6}(0{,}1690 + 2 \cdot 0{,}1589 + 2 \cdot 0{,}1575 + 0{,}1488) = 0{,}1584.$$

По формуле приближенного вычисления численного значения y_2 в точке x_2 получим:

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1{,}1832 + 0{,}1584 = 1{,}3416;$$

$$\mathrm{x}_2 = \mathrm{x}_1 + h = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4.$$

Следовательно, результат второго шага итерационного процесса равен $y_2 = 1{,}3416$; $\mathrm{x}_2 = 0{,}4$. Аналогично находим значения x_3, x_4, x_5 и соответствующие им значения функции y_3, y_4, y_5.

Вопросы для самоконтроля

1. По какой формуле в методе Эйлера для задачи Коши производятся вычисления приближенных значений $y(x_i) \approx y_i$?
2. В методе Эйлера формула вычисления равноудаленных точек x_i?
3. Какой отрезок называется ломаной Эйлера?
4. Суть метода двойного пересчета в методе Эйлера.
5. Какие формулы приближенного вычисления численных значений y_{i+1} в точках $x_{i+1} = x_i + k$, используемые для метода Рунге – Кутта, справедливы?
6. Какой порядок точности имеет метод Рунге – Кутта?

Лекция 11. Метод конечных разностей для линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Метод прогонки для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Цель лекции – дать постановку краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка. Рассмотреть метод конечных разностей для линейных дифференциальных уравнений второго порядка, оценку погрешности, метод прогонки для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений

11.1 Постановка краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$F(x, y, y', y'') = 0. \tag{11.1}$$

Постановка краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка (11.1): требуется вычислить значения функции $y=y(x)$, удовлетворяющей во внутренних точках сегмента $[a,b]$ уравнению (11.1) и на концах отрезка – граничным условиям:

$$\begin{aligned} &\varphi_1[y(a), y'(a)] = 0, \\ &\varphi_2[y(b), y'(b)] = 0. \end{aligned} \tag{11.2}$$

Определение. Краевая задача называется линейной краевой задачей, если дифференциальное уравнение и соответствующие граничные условия линейны.

Рассмотрим случай, когда уравнение (11.1) и граничные условия (11.2) линейны. В этом случае дифференциальное уравнение и краевые условия записываются в виде:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{11.3}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ &\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \end{aligned} \tag{11.4}$$

где $p(x), q(x), f(x)$ – известные непрерывные на заданном отрезке $[a,b]$ функции, $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, A, B$ – некоторые заданные постоянные, удовлетворяющие условиям:

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0 \quad \text{и} \quad |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0.$$

Если одновременно значения A и B равны нулю, то есть $A = B = 0$, то краевые условия (11.4) называются однородными.

Существует два типа методов приближенного решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка: разностные методы и аналитические методы.

11.2 Метод конечных разностей для линейных дифференциальных уравнений второго порядка

Пусть $x_0 = a,\quad x_n = b,\quad x_i = x_0 + ih,$ где $i = 1,2,\dots,n-1$ система равноотстоящих узлов с некоторым шагом $h = \frac{b-a}{n}$ и $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$.

Введем обозначения: y_i – приближенные значения искомой функции $y(x)$, а также y_i', y_i'' – приближенные значения первой и второй производных $y'(x)$, $y''(x)$ в узлах x_i. В каждом внутреннем узле x_i производные $y_i'(x)$, $y_i''(x)$ заменим на конечно-разностные отношения:

$$y_i' = \frac{y_{i+1}-y_i}{h}, y_i'' = \frac{y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i}{h^2}, \tag{11.5}$$

причем:

$$y_0' = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad y_n'' = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}. \tag{11.6}$$

Следовательно, после произведенных замен можно вместо заданной краевой задачи (11.3) – (11.4) получить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} + p_i \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} + q_i y_i = f_i \quad (i = 0,1,2,\dots,n-2), \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = A, \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{cases} \tag{11.43}$$

Система (11.4) – это линейная алгебраическая система n+1 уравнений с n+1 неизвестными. Решив систему (11.4) известными из алгебры методами, получим таблицу приближенных значений заданной задачи.

В случае применения вместо конечно-разностных отношений (11.5) следующих центрально-разностных отношений, можно увеличить точность решения:

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}. \tag{11.5}$$

Тогда получим систему:

$$
\begin{cases}
\dfrac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+p_i\,\dfrac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+q_iy_i=f_i, \quad (i=1,2,\ldots,n-1),\\
\alpha_0y_0+\alpha_1\dfrac{y_1-y_0}{h}=A,\\
\beta_0y_n+\beta_1\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h}=B.
\end{cases} \tag{11.6}
$$

11.3 Оценка погрешности

В целях избежания сложностей при решении систем (11.4), (11.6) необходимо брать небольшие значения n. Оценка погрешности метода конечных разностей для линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$
|y_i-y(x_i)|\le\frac{h^2M_4}{96}(b-a)^2,
$$

где $y(x_i)$ – значение точного решения при $x=x_i$, $M_4=\max\limits_{[a,b]}\left|y^{(4)}(x)\right|$.

Мы рассмотрели двуточечную краевую задачу, но применяя многоточечные разностные схемы, можно увеличить точность разностного метода.

11.4 Метод прогонки для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему, полученную при замене уравнения (11.3) и граничных условий (11.4) конечно-разностными отношениями:

$$
\begin{cases}
\dfrac{y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i}{h^2}+p_i\,\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h}+q_iy_i=f_i \quad (i=0,1,2,\ldots,n-2),\\
\alpha_0y_0+\alpha_1\dfrac{y_1-y_0}{h}=A,\\
\beta_0y_n+\beta_1\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h}=B.
\end{cases} \tag{11.7}
$$

Метод прогонки решения таких систем заключается в следующем. Запишем сначала первые n-1 уравнений системы (11.7) в виде:

$$
y_{i+2}+m_iy_{i+1}+k_iy_i=h^2f_i,
$$

где

$$
m_i=-2+hp_i,\quad k_i=1-hp_i+h^2q_i \quad (i=0,1,\ldots,n-2). \tag{11.8}
$$

Приведем эту систему уравнений к виду:

$$y_{i+1} = c_i(d_i - y_{i+2}) \quad (i = 0,1,2,\dots,n-2). \tag{11.9}$$

Последовательно вычислим значения c_i, d_i.

При $i = 0$:

$$c_0 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0 h}{m_0(\alpha_1 - \alpha_0 h) + k_0\alpha_1},$$

$$d_0 = \frac{k_0 A h}{\alpha_1 - \alpha_0 h} + f_0 h^2. \tag{11.10}$$

При $i = 1, 2, \dots, n-2$:

$$c_i = \frac{1}{m_i - k_i c_{i-1}}, \qquad d_i = f_i h^2 - k_i c_{i-1} d_{i-1} \tag{11.11}$$

Правила вычисления чисел c_i, d_i.

Прямой ход. Последовательно при i=1, 2, ..., n-2 вычисляем числа c_i, d_i. Для этого вначале по формулам (11.8) найдем значения m_i, k_i, затем вычисляем значения c_0, d_0 и, наконец, используем рекуррентные формулы (11.11) для определения значений c_i, d_i.

Обратный ход. Из уравнения (11.3) при i=n-2 и последнего уравнения системы (11.7) получаем:

$$y_{n-1} = c_{n-2}(d_{n-2} - y_n),$$

$$\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B.$$

Решив эту систему, получим значение y_n:

$$y_n = \frac{\beta_1 c_{n-2} d_{n-2} + Bh}{\beta_1(1 + c_{n-2}) + \beta_0 h}.$$

Для нахождения значения y_n в последнюю формулу подставляем уже вычисленные значения чисел c_{n-2}, d_{n-2}. Последний шаг – вычисляем значения y_i $(i = n-1,\dots,1)$, последовательно применяя рекуррентные формулы (11.9):

$$y_{n-1} = c_{n-2}(d_{n-2} - y_n),$$

$$y_{n-2} = c_{n-3}(d_{n-3} - y_{n-1}),$$

. . . .

$$y_1 = c_0(d_0 - y_2).$$

Название «Метод прогонки» происходит от того, что все вычисления как бы «прогоняются» два раза. Вычисления прямого хода заготавливают вспомогательные числа c_i, d_i в порядке возрастания индекса i. При этом для вычисления значений c_0, d_0 используется краевое условие на левом конце отрезка интегрирования. Затем на первом шаге обратного хода происходит согласование полученных чисел c_{n-2}, d_{n-2} с краевым условием на правом конце отрезка интегрирования, после чего последовательно получаются значения искомой функции y_i в порядке убывания индекса i.

Рассмотрим еще один метод прогонки для задачи (11.3) – (11.4). Заменив центральными конечно-разностными отношениями уравнение (11.3) и второе краевое условие (11.4), получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = A, \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = B. \end{cases} \tag{11.12}$$

Запишем первые n-1 уравнений системы (11.12) в виде:

$$y_{i+1} + m_i y_i + k_i y_{i-1} = \frac{2h^2 f_i}{2 + hp_i} = \varphi_i,$$

где

$$m_i = \frac{2q_i h^2 - 4}{2 + hp_i}, \qquad k_i = \frac{2 - hp_i}{2 + hp_i}. \tag{11.12*}$$

Отсюда получим:

$$y_i = c_i(d_i - y_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{11.13}$$

где коэффициенты c_i, d_i. вычисляются по следующим формулам.

При $i = 1$:

$$c_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0 h}{m_1(\alpha_1 - \alpha_0 h) + k_1 \alpha_1},$$

$$d_1 = \frac{2 f_1 h^2}{2 + p_1 h} + \frac{k_1 A h}{\alpha_1 - \alpha_0 h} = \varphi_1 - \frac{k_1 A h}{\alpha_1 - \alpha_0 h}. \tag{11.14}$$

При $i = 2, \ldots, n$:

$$c_i = \frac{1}{m_i - k_i c_{i-1}}, \qquad d_i = \frac{2 f_i h^2}{2 + h p_i} - k_i c_{i-1} d_{i-1} = \varphi_i - k_i c_{i-1} d_{i-1}. \qquad (11.15)$$

Прямой ход. По формулам (11.12) находим m_i, k_i. Вычисляем c_1, d_1, а затем по рекуррентным формулам (11.15) находим последовательно c_i, d_i $(i = 2, \ldots, n)$.

Обратный ход. Запишем уравнение (11.13) при $i=n$, $i=n$-1 и последнее уравнение системы (11.12):

$$y_n = c_n (d_n - y_{n+1}),$$

$$y_{n-1} = c_{n-1}(d_{n-1} - y_n)$$

$$\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = B.$$

Решив эту систему относительно y_n, получим:

$$y_n = \frac{2Bh - \beta_1 (d_n - c_{n-1} d_{n-1})}{2\beta_0 h + \beta_1 \left(c_{n-1} - \dfrac{1}{c_n} \right)}.$$

Используя уже известные числа c_n, d_n, c_{n-1}, d_{n-1} находим y_n. Значения y_i $(i = n-1, \ldots, 1)$ получаем из рекуррентных формул (11.13). Для вычисления y_0 используем предпоследнее уравнение (11.12):

$$y_0 = \frac{\alpha_1 y_1 - Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как ставится краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка?
2. Какая краевая задача называется линейной краевой задачей?
3. Если дифференциальное уравнение и заданные краевые условия линейны, то в каком случае эти краевые условия называются однородными?
4. Как можно увеличить точность разностного метода в методе конечных разностей для линейных дифференциальных уравнений второго порядка?
5. В чем суть метода прогонки?
6. В чем разница между прямым ходом и обратным ходом в разностных методах?

Лекция 12. Метод конечных разностей для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Метод Галеркина

Цель лекции – ознакомить с методом конечных разностей для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, метод Галеркина, привести примеры.

12.1 Метод конечных разностей для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение:

$$y'' = f(x, y, y') \tag{12.1}$$

с линейными краевыми условиями:

$$\begin{aligned} &\alpha_0 y(a) - \alpha_1 y'(a) = A, \\ &\beta_0 y(b) - \beta_1 y'(b) = B. \end{aligned} \tag{12.2}$$

Точками $x_0 = a, x_k = x_0 + kh$, где $k = 1,2,\ldots,n-1$ и $h = \dfrac{b-a}{n}$, разобьём отрезок $[a,b]$ на систему равноотстоящих узлов. Заменим уравнение (12.1) и краевые условия (12.2) конечными разностями, получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = f\left(x_k, y_k, \dfrac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \alpha_0 y_0 - \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = A, \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{2h} = B. \end{cases} \tag{12.3}$$

Полученная система (12.3) – нелинейная система $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными y_k, где $k = 0,1,\ldots,n$. Введем обозначения:

$$\begin{cases} \Gamma_0(y) = \alpha_0 y_0 - \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h}, \\ \mathit{\Gamma}(y) = \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h}. \end{cases} \tag{12.4}$$

Решение нелинейной системы (12.3) находим методом итераций:

$$
\begin{cases}
\dfrac{y_{k+1}^{(r+1)} - 2y_k^{(r+1)} + y_{k-1}^{(r+1)}}{h^2} = f\left(x_k, y_k^{(r)}, \dfrac{y_{k+1}^{(r)} - y_{k-1}^{(r)}}{2h}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \\
\Gamma_0\left[y^{(r+1)}\right] = A, \\
\Gamma_n\left[y^{(r+1)}\right] = B.
\end{cases} \tag{12.5}
$$

В системе (12.5) индекс r означает номер шага итерации, для всех значений r необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений. Используя специальный вид этой системы, можно найти ее решение в явном виде:

$$
y_k^{(r+1)} = \frac{h}{\Delta}[A\beta_0(b-a) + A\beta_1 + \alpha_1 B] + \frac{k}{\Delta}(\alpha_0 B - A\beta_0) + h^2 \sum_{i=1}^{n-1} g_{ik} f_i^{(r)},
$$

где числа a, b, A, B, α_0, α_1, β_0, β_1 известны, а значения Δ и g_{ik} вычисляются по формулам:

$$
\Delta = \frac{1}{h}\left[\alpha_0\beta_0(b-a) + \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0\right],
$$

$$
g_{ik} = \begin{cases}
\dfrac{1}{\Delta}\left(i\alpha_0 + \dfrac{\alpha_1}{h}\right)\left(k\beta_0 - \beta_0 n - \dfrac{\beta_1}{h}\right), & i \le k, \\
\dfrac{1}{\Delta}\left(k\alpha_0 + \dfrac{\alpha_1}{h}\right)\left(i\beta_0 - \beta_0 n - \dfrac{\beta_1}{h}\right), & i > k.
\end{cases}
$$

Следовательно, отыскание решения системы (12.3) можно рассматривать как итерационную схему.

12.2 Метод Галеркина, пример

Метод Галеркина – аналитический метод, используя который, находим приближенное решение линейной краевой задачи в виде аналитического выражения.

Пусть дана линейная краевая задача:

$$
y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{12.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) &= A, \\
\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) &= B.
\end{aligned} \tag{12.6}
$$

Введем обозначения:

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y, \qquad \Gamma_a[y] = \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a),$$

$$\Gamma_b[y] = \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b).$$

Зададим на $[a, b]$ систему базисных функций:

$$u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x), \dots \tag{12.7}$$

удовлетворяющую условиям:

1) система (12.7) является ортогональной, то есть выполняются условия:

$$\begin{aligned} &\int_a^b u_i(x) u_j(x)\, dx = 0, \qquad i \neq j, \\ &\int_a^b u_i^2(x)\, dx \neq 0. \end{aligned} \tag{12.8}$$

2) Система (12.7) является полной, то есть не существует никакой другой отличной от нуля функции, ортогональной ко всем функциям $u_i(x) \quad (i = 0, 1, 2, \ \dots)$.

3) Конечная система базисных функций $\{u_i(x)\} \quad (i = 0, 1, 2, \ \dots, n)$ выбирается так, чтобы функция $u_0(x)$ удовлетворяла неоднородным краевым условиям:

$$\Gamma_a[u_0] = A, \qquad \Gamma_b[u_0] = B, \tag{12.9}$$

а функции $u_i(x) \quad (i = 1, 2, \ \dots, n)$ удовлетворяли бы однородным краевым условиям:

$$\Gamma_a[u_i] = \Gamma_b[u_i] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ , n). \tag{12.10}$$

Приближенное решение линейной краевой задачи (12.5), (12.6) ищем в виде:

$$y(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x).$$

Из условий (12.9), (12.10) следует, что эта функция удовлетворяет краевым условиям (12.6). Рассмотрим выражение, называемое невязкой:

$$R(x, c_1, c_2, \dots, c_n) = L[u_0] + \sum_{i=1}^{n} c_i L[u_i] - f(x).$$

Выберем коэффициенты c_i таким образом, чтобы значение интеграла от квадрата невязки:

$$\int_a^b R^2(x, c_1, c_2, \dots, c_n)dx$$

было наименьшим. Известно, что это справедливо, если невязка $R(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ ортогональна ко всем базисным функциям u_i. Запишем условие ортогональности:

$$\int_a^b u_k(x)R(x, c_1, c_2, \dots, c_n)dx = 0, \ \ (k = 1,2, \dots, n)$$

или

$$\sum_{i=1} c_i \int_a^b u_k(x)L[u_i]dx = \int_a^b u_k(x)\{f(x) - L[u_0]\}dx.$$

Мы получили систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов c_i.

Пример. Методом Галеркина решить краевую задачу:

$$y'' + y = -x, \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = 0, y(1) = 0.$$

Решение. Пусть $m = 1$. Решение будем искать в виде:

$$\hat{y}_1(x) = a_1 x(1 - x).$$

Тогда получим: $a_1(L\varphi_1, \varphi_1) = (-x, \varphi_1)$ или $a_1(\varphi_1'' + \varphi_1) = (-x, \varphi_1)$. Так как

$$\varphi_1(x) = x(1 - x), L\varphi_1(x) = \varphi_1''(x) + \varphi_1(x) = -2 + x(1 - x),$$

то получим:

$$a_1 \int_0^1 (-2 + x(1 - x)) \cdot x(1 - x)dx = -\int_0^1 x^2(1 - x\,dx.$$

Вычислив интеграл, получим уравнение $-\frac{3}{10}a_{-1} = -\frac{1}{12}$, отсюда имеем $a_1 = \frac{5}{18}$. Следовательно, приближенное решение краевой задачи:

$$\hat{y}_1(x) = \frac{5}{18}x(1 - x).$$

Теперь возьмем $m = 2$. Приближенное решение краевой задачи будем искать в виде:

$$\hat{y}_2(x) = a_1 \cdot x(1-x) + a_2 \cdot x^2(1-x),$$

тогда получим систему:

$$a_1(L\varphi_1, \varphi_2) + a_2(L\varphi_2, \varphi_1) = (f, \varphi_1),$$

$$a_1(L\varphi_1, \varphi_2) + a_2(L\varphi_2, \varphi_1) = (f, \varphi_2).$$

Так как условия:

$$\varphi_1(x) = x(1-x), \quad \varphi_2(x) = x^2(1-x),$$

$$L\varphi_1(x) = \varphi_2''(x) + \varphi_1(x) = -2 + x(1-x),$$

$$L\varphi_2(x) = \varphi_2''(x) + \varphi_2(x) = -2 - 6x + x^2 - x^3,$$

выполняются, то получим:

$$a_1 \int_0^1 [-2 + x(1-x)] \cdot x(1-x)\, dx +$$

$$+a_2 \int_0^1 [2 - 6x + x^2(1-x)] \cdot x(1-x) dx = -\int_0^1 x^2(1-x) dx,$$

$$a_1 \int_0^1 [-2 + x(1-x)] \cdot x^2(1-x)\, dx +$$

$$+a_2 \int_0^1 [2 - 6x + x^2(1-x)] \cdot x^2(1-x) dx = -\int_0^1 x^3(1-x) dx.$$

Вычислив, полученный интеграл, получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{10} a_1 + \dfrac{3}{20} a_2 = \dfrac{1}{12} \\ \dfrac{3}{20} a_1 + \dfrac{13}{105} a_2 = \dfrac{1}{20} \end{cases}.$$

Откуда $a_1 = \frac{71}{369}, a_2 = \frac{7}{41}$. Следовательно приближенное решение краевой задачи имеет вид:

$$\hat{y}_2(x) = x(1-x)\cdot\left(\frac{71}{369}+\frac{7}{41}x\right).$$

Вопросы для самоконтроля

1. Формулы разбиения отрезка $[a,b]$ на систему равноотстоящих узлов.

2. Как называется схема отыскания решения нелинейного дифференциального уравнения с линейными краевыми условиями?

3. Как называется аналитический метод, используя который находим приближенное решение линейной краевой задачи в виде аналитического выражения?

4. Какая система называется полной?

5. Какая система называется ортогональной?

6. Какую систему уравнений мы получаем, решая методом Галеркина задачу Коши?

Лекция-13. Преобразование Лапласа и его свойства

Цель лекции – ввести основные понятия операционного исчисления, привести примеры, рассмотреть свойства оригиналов и изображений, привести таблицу основных оригиналов и их изображений.

13.1 Основные понятия операционного исчисления, примеры

Операционное исчисление – один из методов математического анализа, позволяющий сводить решение дифференциальных уравнений и их систем к решению более простых алгебраических уравнений и систем алгебраических уравнений.

Введем основные понятия операционного исчисления – понятия оригинала и изображения.

Пусть $f(x)$ – действительная функция действительного переменного t (под t будем понимать время или координату).

Определение. Функция $f(t)$ называется оригиналом, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. Справедливо $f(t) \ = 0,\ t < 0.$

2. $f(t)$ – кусочно-непрерывная при $t \geq 0$, то есть непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода на каждом конечном промежутке оси t.

3. Существуют числа $M > 0$ и $S_0 \geq 0$ такие, что для всех t выполняется неравенство:

$$|f(t)| \leq Me^{S_0 t}. \tag{13.1}$$

Число S_0 – показатель роста функции $f(t)$.

Определение. Изображением функции $f(t)$ или ее преобразованием Лапласа называется функция:

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt \qquad (13.2)$$

комплексного переменного p, где $p=\alpha+i\beta$, $Re\,p=s>S_0$.

Обозначения:

$F(p)\div f(t)$ – переход от изображения к оригиналу,

$f(t)\div F(p)$ – переход от оригинала к изображению.

Правило, по которому по заданному оригиналу $f(t)$ получают изображение $F(p)$, называют преобразованием Лапласа функции $f(t)$.

Теорема (существования изображения для любого оригинала). Пусть $x=f(t)$ – оригинал, удовлетворяющий неравенству (13.1), тогда его изображение $F(p)$ есть аналитическая функция в полуплоскости $Re\,p>S_0$.

Пример 1. Используя определение, найти изображение функции $x=1$.

Решение. Задан оригинал функции $x=f(t)=1$, тогда по формуле (13.2) получим:

$$1\div\int_0^\infty e^{-pt}dt=\left|\text{при Re}\rho>0\right|=\frac{-e^{-pt}}{p}\bigg|_0^{+\infty}=$$

$$=-\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-pt}}{p}+\frac{1}{p}=\frac{1}{p}.$$

Пример 2. Чему равно изображение функции $f(t)=cos\,t$ (при решении использовать определение изображения функции)?

Решение. Используем определение изображения заданной функции. Записываем изображение заданной функции по формуле (13.2) и вычисляем полученный интеграл:

$$F(p)=\int_{-0}^\infty e^{-pt}\,cos\,t\,dt=$$

$$=\int_{-0}^\infty e^{-pt}d\,sin\,t=\begin{vmatrix} e^{-pt}=u \\ du=-pe^{-pt}dt \\ sin\,t=v\end{vmatrix}=$$

$$=e^{-pt}sin\,t|_0^\infty+p\int_0^\infty e^{-pt}\,sin\,t\,dt=\left|\text{при Re}\rho>0\right|=$$

$$-\rho\int_0^\infty e^{-pt}d\,cos\,t==\begin{vmatrix} e^{-pt}=u \\ du=-pe^{-pt}dt \\ cos\,t=v\end{vmatrix}=$$

$$=-pe^{-pt}cos\,t|_0^\infty-p^2\int_0^\infty e^{-pt}\,cos\,t\,dt=+p-p^2F(p).$$

Решим уравнение относительно $F(p)$:

$$F(p) = p - p^2 F(p),$$

отсюда изображение заданной функции, где функция $F(p)$ аналитична при $Re\,\rho > 0$, имеет вид:

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Теорема единственности. Пусть два непрерывных оригинала $x = f(t)$ и $x = g(t)$ имеют одинаковые изображения $F(p)$, тогда $f(t) \equiv g(t)$.

13.2 Свойства оригиналов и изображений

1. Пусть $f(t)$ – оригинал, $f(t) \div F(p)$ и $\beta > 0$, тогда:

$$f(\beta t) \div \frac{1}{\beta} F\left(\frac{p}{\beta}\right).$$

2. Свойство линейности. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ – оригиналы, A и B – некоторые постоянные, $f(t) \div F(p), g(t) \div G(p)$, тогда:

$$Af(t) + Bg(t) \div AF(p) + BG(p).$$

3. Свойство смещения изображения. Пусть $f(t)$ – оригинал, α – число, $f(t) \div F(p)$, тогда:

$$f(t)e^{-\alpha t} \div F(p + \alpha).$$

4. Свойство дифференцирования изображения. Пусть $f(t)$ – оригинал и $F(p)$ – его изображение, тогда:

$$tf(t) \div -F'(p).$$

Следствие. При выполнении условий теоремы n-ой производной изображения $F^{(n)}(t)$ соответствует оригинал $(-1)^n t^n f(t)$:

$$F^{(n)}(t) \div (-1)^n t^n f(t).$$

Определение. Сверткой оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется функция:

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau.$$

Произведя замену $t - \tau = u$, получим формулу для свертки:

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau.$$

Теорема. Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – оригиналы, а $F_1(p)$ и $F_2(p)$ – их изображения, тогда свертка $(f_1 * f_2)(t)$ является оригиналом, и ее изображение равно:

$$(f_1 * f_2)(t) \div F_1(p) \cdot F_2(p).$$

5. Формула Дюамеля справедлива для дифференцируемых оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$:

$$pF_1(p)F_2(p) \div f_1(t)f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau)f'_2(t-\tau)d\tau =$$

$$= f_1(0)f_2(t) + \int_0^t f_2(\tau)f_1'(t-\tau)d\tau.$$

6. Свойство дифференцирования оригинала. Пусть $f(t)$ – дифференцируемый оригинал, $F(p)$ его изображение, $f'(t)$ – оригинал, тогда:

$$f'(t) \div pF(p) - f(0).$$

Следствие. Пусть функция $f(t) \div F(p)$ и ее производные $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, тогда:

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Теорема. Пусть изображение $F(p)$ есть правильная рациональная дробь с полюсами $p_1, p_2, \dots p_m$, тогда соответствующий ему оригинал имеет вид:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} Re\, s_{p_k} F(p)e^{pt}.$$

13.3 Таблица основных оригиналов и их изображений

1) $1 \div \frac{1}{p}$

2) $sin\,\beta\, t \div \frac{\beta}{p^2+\beta^2}$

3) $cos\,\beta\, t \div \frac{p}{p^2+\beta^2}$

4) $e^{\alpha t} \div \frac{1}{p-\alpha}$

7) $sh\alpha t \div \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$

8) $ch\alpha t \div \frac{p}{p^2-\alpha^2}$

9) $t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad n \in N$

10) $te^{-\alpha t} \div \frac{1}{(p+\alpha)^2}$

5) $e^{\alpha t} \cos t \div \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$

6) $e^{\alpha t} \sin \beta t \div \frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$

11) $t \sin \beta t \div \frac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$

12) $t \cos \beta t \div \frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$

Вопросы для самоконтроля

1. Каким условиям должен удовлетворять оригинал функции?
2. Как называется число S_0 в формуле $|f(t)| \leq Me^{S_0 t}$?
3. Дайте определение изображения функции.
4. Как обозначается переход от изображения к оригиналу и обратно?
5. Какое правило называют преобразованием Лапласа функции $f(t)$?
6. По теореме единственности какое тождество должно выполниться, если два непрерывных оригинала имеют одинаковые изображения?
7. Какая функция называется сверткой оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$?
8. Для каких функций справедлива теорема Дюамеля?

Лекция 14. Решение линейных дифференциальных уравнений методом операционного исчисления

Цель лекции – ознакомить с постановкой задачи решения линейных дифференциальных уравнений методом операционного исчисления, привести пример решения дифференциального уравнения методом операционного исчисления.

14.1 Постановка задачи решения линейных дифференциальных уравнений методом операционного исчисления

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} x' + a_n x = f(x), \qquad (14.1)$$

с начальными условиями:

$$x(0) = x_0, \ \ x'(0) = x_1, \ \ x''(0) = x_2, \ \ \ldots, \ \ x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}.$$

Начальные условия заданы в точке $t_0 = 0$. Если начальные условия задаются в другой точке $t_0 \neq 0$, то необходимо сделать сдвиг в точку $u_0 = 0$ заменой аргумента на $u = t - t_0$.

Пусть функция $x(t)$, её производные до n-го порядка и правая часть уравнения $f(t)$ являются функциями-оригиналами. На основании теоремы о дифференцировании оригинала имеем:

$$x(t) \div X(p), \qquad f(t) \div F(p),$$

тогда

$$x'(t) \div pX(p) - x(0) = pX(p) - x_0,$$

$$x''(t) \div p^2X(p) - px_0 - x_1,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$x^{(n)}(t) \div p^nX(p) - p^{n-1}x_0 - p^{n-2}x_1 - \dots - px_{n-2} - x_{n-1}.$$

Изображение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (14.1) запишется в виде:

$$p^nX(p) - p^{n-1}x_0 - p^{n-2}x_1 - \dots - px_{n-2} - x_{n-1} +$$

$$+a_1[p^{n-1}X(p) - p^{n-2}x_0 - p^{n-3}x_1 - \dots - x_{n-2}] + \dots +$$

$$+a_{n-1}[pX(p) - x_0] + a_nX(p) = F(p).$$

Мы получили линейное алгебраическое уравнение. Найдем изображение заданного уравнения, решив это уравнение относительно $X(p)$. Оригинал этого изображения и будет решением задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

14.2 Пример решения дифференциального уравнения методом операционного исчисления

С помощью операционного исчисления найти частное решение дифференциального уравнения при заданных начальных условиях:

$$x'' - 3x' - 4x = 4t - 5, \;\; x(0) = -1, x'(0) = 2.$$

Решение. По условию задачи функция $x(t)$, её производные до второго порядка и правая часть уравнения $f(t) = 4t - 5$ являются функциями-оригиналами. На основании теоремы о дифференцировании оригинала имеем:

$$x(t) \div X(p), \qquad f(t) \div F(p),$$

$$x'(t) \div pX(p) - x(0) = pX(p) - x_0,$$

$$x''(t) \div p^2X(p) - px_0 - x_1.$$

Тогда, учитывая заданное начальное условие $x(0) = -1$, первая производная будет иметь вид:

$$x'(t) \div pX(p) + 1.$$

Аналогично, учитывая начальные условия $x(0) = -1$ и $x'(0) = 2$, запишем вторую производную:

$$x''(t) \div p^2X(p) - p\cdot(-1) - 2 = p^2X(p) + p - 2.$$

Найдем изображение для правой части заданного уравнения:

$$f(t) = 4t - 5 \div \frac{4}{p^2} - \frac{5}{p}.$$

Таким образом, для всех оригиналов заданного дифференциального уравнения найдены соответствующие изображения. Подставим найденные изображения в исходное уравнение $x'' - 3x' - 4x = 4t - 5$ и получим операторное уравнение вида:

$$p^2X(p) + p - 2 - 3\cdot[pX(p) + 1] - 4X(p) = \frac{4}{p^2} - \frac{5}{p}.$$

Приведем подобные и окончательно получим операторное уравнение вида:

$$p^2X(p) - 3pX(p) - 4X(p) + p - 5 = \frac{4}{p^2} - \frac{5}{p}.$$

Слева оставляем слагаемые, содержащие $X(p)$, остальные слагаемые переносим вправо со сменой знака:

$$p^2X(p) - 3pX(p) - 4X(p) = -p + 5 + \frac{4}{p^2} - \frac{5}{p}.$$

В левой части выносим за скобки операторное решение $X(p)$, в правой части приводим выражение к общему знаменателю:

$$(p^2 - 3p - 4)X(p) = \frac{-p^3 + 5p^2 - 5p + 4}{p^2}.$$

Решим квадратное уравнение $p^2 - 3p - 4 = 0$, найдем его корни и разложим многочлен слева на множители $(p+1)(p-4)$. Таким образом:

$$(p+1)(p-4)X(p) = \frac{-p^3 + 5p^2 - 5p + 4}{p^2}.$$

Отсюда:

$$X(p) = \frac{-p^3 + 5p^2 - 5p + 4}{p^2(p+1)(p-4)}.$$

Теперь, используя метод неопределенных коэффициентов, операторное решение уравнения надо разложить в сумму элементарных дробей:

$$\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p+1}+\frac{D}{p-4}=\frac{-p^3+5p^2-5p+4}{p^2(p+1)(p-4)}$$

Затем приведем к общему знаменателю и приравняем числители:

$$Ap(p+1)(p-4)+B(p+1)(p-4)+Cp^2(p-4)+Dp^2(p+1)=$$

$$=-p^3+5p^2-5p+4.$$

Отсюда:

$$A(p^3-3p^2-4p)+B(p^2-3p-4)+C(p^3-4p^2)+D(p^3+p^2)=$$

$$=-p^3+5p^2-5p+4.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях и решим систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов A, B, C, D:

$$\begin{cases} A+C+D=-1 \\ -3A+B-4C+D=5 \\ -4A-3B=-5 \\ -4B=4 \end{cases}$$

Таким образом, $A=2, B=-1, C=-3, D=0$ и операторное решение имеет вид:

$$X(p)=2\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}-3\cdot\frac{1}{p+1}.$$

Теперь перейдем от изображений к соответствующим оригиналам и получим искомое частное решение дифференциального уравнения:

$$x(t)=2\cdot 1-t-3\cdot e^{-t}.$$

Ответ. Частное решение $x(t)=2-t-3e^{-t}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое свойство оригинала функции применяется при решении линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами?

2. Какого типа система уравнений получается в результате сделанных преобразований Лапласа?

3. Как называется решение дифференциального уравнения с соответствующими начальными условиями, полученное с помощью операционного исчисления?

4. Что дает переход от изображений к соответствующим оригиналам на заключительном этапе решения задачи?

Лекция 15. Решение систем линейных дифференциальных уравнений операторным методом

Цель лекции – рассмотреть решение систем линейных дифференциальных уравнений операторным методом, привести пример решения системы дифференциального уравнения методом операционного исчисления.

15.1 Решение систем линейных дифференциальных уравнений операторным методом

Систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно решить операционным методом по той же схеме, что и решение одного дифференциального уравнения. Здесь мы вместо одного операторного уравнения получим линейную систему алгебраических уравнений.

Постановка задачи. Найти частное решение однородной системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} x'(t) = k \cdot x(t) + \ell \cdot y(t) \\ y'(t) = m \cdot x(t) + n \cdot y(t) \end{cases},$$

соответствующее начальным условиям $x(0) = \alpha,\ y(0) = \beta$, где k, ℓ, m, n – некоторые постоянные.

По условию задачи, ясно, что искать надо только частное решение, а также в начальных условиях заданы значения $x(0)$ и $y(0)$.

Процесс нахождения решения заданной однородной системы дифференциальных уравнений похож на ход решения дифференциального уравнения. Функции $x(t)$, y(t) и их производные первого порядка являются функциями-оригиналами. Как и при решении дифференциального уравнения, используется теорема о дифференцировании оригинала. Записывается система операторных уравнений, которая решается одним из методов алгебры, например, методом Крамера.

Замечание. Задача Коши для систем уравнений, порядок которых выше первого, решается аналогично. Отметим, что такую систему всегда можно заменить эквивалентной ей системой уравнений первого порядка, сделав замену на новую систему искомых функций.

15.2 Пример решения системы дифференциального уравнения методом операционного исчисления

Решить операторным методом систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' + 2y' - y = 3, \\ -x' + 4x + y = 5 \end{cases}$$

при заданных начальных условиях $x(0) = 1, y(0) = 0$.

Решение. Для первого и второго уравнений системы запишем изображения по Лапласу:

$$x(t) \div X(p), \qquad x'(t) \div pX(p) - x(0) = pX(p) - 1, \qquad 3 \div \frac{3}{p},$$

$$y(t) \div Y(p), \qquad y'(t) \div pY(p) - y(0) = pY(p), \qquad 5 \div \frac{5}{p}.$$

Заменим заданную систему системой линейных операторных уравнений:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 + 2pY(p) - Y(p) = \dfrac{3}{p}, \\ -(pX(p) - 1) + 4X(p) + Y(p) = \dfrac{5}{p}. \end{cases}$$

Найдем изображения $X(p)$ и $Y(p)$:

$$\begin{cases} X(p) = \dfrac{p^2 - 5p + 4}{p(p^2 - 4p + 2)}, \\ Y(p) = \dfrac{2(p - 3)}{p(p^2 - 4p + 2)}. \end{cases}$$

В правой части последней системы дробно рациональные функции, разложив их на простейшие дроби, получим:

$$\begin{cases} X(p) = \dfrac{2}{p} + \dfrac{-p + 3}{p^2 - 4p + 2}, \\ Y(p) = \dfrac{-3}{p} + \dfrac{3p - 10}{p^2 - 4p + 2}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} X(p) = 2 \cdot \dfrac{1}{p} - \dfrac{p-2}{(p-2)^2-2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{(p-2)^2-2}, \\ Y(p) = -\dfrac{3}{p} + 3 \cdot \dfrac{p-2}{(p-2)^2-2} - \dfrac{2\sqrt{2}}{1} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{(p-2)^2-2}. \end{cases}$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, получим решение заданной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x(t) = 2 + e^{2t} ch\sqrt{2}t - \dfrac{1}{\sqrt{2}} sin\sqrt{2}\,t, \\ y(t) = -3 + 3e^{2t} ch\sqrt{2}t + -2\sqrt{2}\,sin\sqrt{2}\,t. \end{cases}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какую схему решения операционным методом системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно использовать?

2. В чем отличие в ходе решения операционным методом системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и решения одного дифференциального уравнения?

3. Как ставится задача нахождения частного решения однородной системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами?

4. Какое свойство оригинала функции используется при решении системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами?

5. Можно ли решить операторным методом систему уравнений, порядок которых выше первого?

Список литературы

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Учебник для вузов. Т.1. – М.: Дрофа, 2003. – 351 с.

2. Хасеинов К.А. Каноны математики. – Алматы: Атамура, 2004. – 686 с.

3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч.1. – М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и Образование, 2003.

4. Индивидуальные задания по высшей математике: Ч. 2. Комплексные числа. Неопределенный и определенный интегралы. Функции нескольких переменных Обыкновенные дифференциальные уравнения /под ред. А.П. Рябушко – Мн.: Высш. шк., 2007. – 304 с.

5. Нефедов Н., Попов В., Волков В. Дифференциальные уравнения http://math.phys.msu.ru/data/57/N.N._Nefedov_V.YU._Popov_V.T._Volkov_Differentsialnie_uravneniya._Kurs_lektsiy.pdf

6. Л.Э.Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. http://www.phys.nsu.ru/balakina/El%27sgol%27dz_Dif_ur_i_var_isch.pdf

7. Асташов И.В. Дифференциальные уравнения. http://new.math.msu.su/diffur/main_du_ast.pdf

8. Искакова А.К. Численные методы и их компьютерная реализация. Конспект лекций для студентов специальности 5В071800 – Электроэнергетика. – Алматы: АУЭС, 2019. – 42 с.

9. Аксенов А.П. Дифференциальные уравнения в 2 ч. Часть 2: учебник для вузов / А.П. Аксенов. – Москва: Издательство Юрайт, 2022. – 359 с. – (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-7422-5. - Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/490793.

Содержание

Сводный план 2022 года, поз. 161

Искакова Акжолтай Курмантаевна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Конспект лекций
для студентов образовательных программ
6В07111 – «Космическая техника и технологии»,
6В07112 – «Космическая инженерия»

Редактор: Жанабаева Е.Б.
Специалист по стандартизации: Ануарбек Ж.А.

Подписано в печать _______
Тираж 100 экз.
Объем 5,7 уч.-изд. л.
Формат 60×84 1/16
Бумага типографская № 1
Заказ. Цена 2850 тенге

Копировально-множительное бюро
некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи »
050013, г. Алматы, ул. Байтурсынова, 126/1