Коммерциялық емес акционерлік қоғам

ҒҰМАРБЕК ДӘУКЕЕВ АТЫНДАҒЫ АЛМАТЫ ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС УНИВЕРСИТЕТІ

Математика және математикалық үлгілеу кафедрасы

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

6В07111 – «Ғарыштық техника және технологиялар»,
6В07112 – «Ғарыштық инженерия» білім беру бағдарламалары студенттеріне арналған есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар

Алматы 2022

ҚҰРАСТЫРУШЫЛАР: Б.Ж.Төлеуова, Г.Қ.Василина. Дифференциалдық теңдеулер: 6В07111 – «Ғарыштық техника және технологиялар», 6В07112 – «Ғарыштық инженерия» білім беру бағдарламалары студенттеріне арналған есептеу-сызба жұмыстарды орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар. – Алматы: АЭжБУ, 2022. – 34 б.

Әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар 6В07111 – «Ғарыштық техника және технологиялар», 6В07112 – «Ғарыштық инженерия» мамандықтарының студенттері үшін «Дифференциалдық теңдеулер» пәнінің «Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер» және «Жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер. Дифференциалдық теңдеулер жүйесі» тараулары бойынша №1 және №2 есептеу-сызба жұмыстарын орындауға арналған.

Бұл материал оқу бағдарламасына негізделіп жасалған. Типтік нұсқаның шешуі толық көрсетілген. Тапсырмалар берілген және қажетті теориялық мәліметтер келтірілген.

Әдеб. атау – 8, кесте – 15.

Пікір беруші: (PhD) ф.д., қауым.проф. Ермекбаев М.М.

«Ғұмарбек Дәукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2022 ж. жоспары бойынша басылды

© «Ғұмарбек Дәукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университеті» КЕАҚ, 2022 ж.

Кіріспе

Есептерді шешудің математикалық әдістері инженерлік-техникалық зерттеулерде маңызды рөл атқарады және кез келген техникалық пәннің маңызды бөлігі болып саналады. Олар тек сандық есептеулер, яғни жуықтап есептеулерде ғана емес, сонымен қатар мәселені дәл зерттеу үшін қажет пән. Көптеген технологиялық процестер, механикалық есептер қарапайым дифференциалдық теңдеулермен байланысты, өйткені мұндай проблемалардың сипаттамаларында негізгі параметр – жылдамдық. Осылардың бәрі осы курстың қолданбалы бағытын және студенттердің фундаментальді математикалық дайындығын күшейтуді талап етеді.

Бұл әдістемелік нұсқау математикалық талдаудың негізгі бөлімдерінің бірі – «Қарапайым дифференциалдық теңдеулер» теориясын зерттеуге арналады. Курстың бағдарламасына сәйкес бірінші және жоғарғы ретті қарапайым дифференциалдық теңдеулердің түрлері, дифференциалдық теңдеулер жүйесі қарастырылған. Қажетті теориялық материалдар берілген және типтік нұсқаның шешуі келтірілген.

Әрбір есептеу-сызба жұмысы жеке дәптерде орындалуы тиіс. Тапсырмалардың орындалуы анық, түсіндірулер қысқа болуы тиіс.

1 №1 есептеу-сызба жұмысы. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер

Мақсаты: студенттерді қарапайым дифференциалдық теңдеулердің түрлерімен, Коши есебімен таныстыру және оларды шешу тәсілдерін үйрету.

1.1 Теориялық сұрақтар

1. Дифференциалдық теңдеулерге келтірілетін есептер.
2. Жалпы шешім. Жалпы интеграл. Коши есебі. Дербес шешім. Ерекше шешім.
3. Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер.
4. Сызықтық теңдеу. Тұрақтыны вариациялау тәсілі (Лагранж әдісі), Бернулли әдісі.
5. Бернулли теңдеуі.
6. Толық дифференциалды теңдеу.

1.2 Тапсырмалар

1. $y = f(x)$ функциясын берілген теңдеуге қою арқылы осы дифференциалдық теңдеудің шешімі болатынын, болмайтынын тексеріңіз, мұндағы C – кез келген тұрақты.

1 кесте

1.1 $y = C\cos x + \sin x,\ \ y'' + y = 0$	1.2 $y = \frac{1}{3}x^3 + Cx^2,\quad y'' = \frac{y'}{x} + x$
1.3 $y = \frac{1}{12}(x + C)^3,\quad (y'')^2 = y'$	1.4 $y = \cos x + C\sin x,\ \ y'' + y = 0$
1.5 $y = (C + x)e^x,\ \ y'' - 2y' + y = 0$	1.6 $y = \frac{2x}{1-Cx^2},\quad y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$
1.7 $e^{\frac{y}{x}} = Cy,\quad xyy' - y^2 = x^2y$	1.8 $y = \sqrt{x^2 - 1},\ \ (x^2 - 1)y' = xy$
1.9 $y = \frac{2+Cx}{1+2x},\ 2(1 + x^2y') = x - xy'$	1.10 $y = \sqrt{x^2 + C},\quad yy' = x$
1.11 $y = Cx + \frac{1}{C},\quad xy' - y + \frac{1}{y} = 0$	1.12 $y = C\sin x - 2,$ $y'\sin x = y\cos x + 2\cos x$
1.13 $y = x^2\left(1 + ce^{1/x}\right),$ $x^2y' + (1 - 2x)y = x^2$	1.14 $y = C\sqrt{x^2 - 1},\ \ (x^2 - 1)y' - xy = 0$
1.15 $y = (x + C)e^x,\quad y' - y = e^x$	1.16 $y = ce^{-2x},\quad y' + 2y = 0$

1.17 $y = Cx^2 + \frac{1}{x}$, $x^2dy + (3 - 2xy)dx = 0$	1.18 $y = (x + C)(1 + x^2)$, $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$
1.19 $y = e^{-x^2}\left(C + \frac{x^2}{2}\right)$, $y' + 2xy = xe^{-x^2}$	1.20 $y = Cx^2e^{\frac{1}{x}} + x^2$, $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$
1.21 $y = Ce^{-2x} + 2x - 1$, $y' + 2y = 4x$	1.22 $y = Cx^2e^{-\frac{3}{x}}$, $x^2y' - 2xy = 3y$
1.23 $y = x^2\left(1 + Ce^{\frac{1}{x}}\right)$, $x^2y' + (1 - 2x)y = x^2$	1.24 $y = xe^{Cx}$, $y'x = (1 + ln\,y - ln\,x)y$
1.25 $y = \frac{Cx}{x+1} + 1$, $y - xy' = 1 + x^2y'$	1.26 $y = \left(1 + ce^{-e^x}\right)^2$, $y' + 2e^xy = 2e^x\sqrt{y}$
1.27 $y = cx + e^x$, $xy' - y + e^x = 0$	1.28 $y = \frac{2+cx}{1+2x}$, $1 + (x^2 + x)y' = y$
1.29 $y = Ce^{tg\frac{x}{2}}$, $y'\,sin\,x = y\,ln\,y$	1.30 $y = C\sqrt{x^2 - 1}$, $(x^2 - 1)y' = xy = 0$

2. Айнымалылары ажыратылатын теңдеуді шешіңіз.

2 кесте

2.1	$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$	2.2	$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$	2.3	$\frac{dy}{dx} = yx^4$
2.4	$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x}$	2.5	$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{3x}$	2.6	$\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{y}$
2.7	$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{5x}$	2.8	$\frac{dy}{dx} = -yx^2$	2.9	$\frac{dy}{dx} = 2y^2x^3$
2.10	$\frac{dy}{dx} = -2y^3x$	2.11	$\frac{dy}{dx} = yx^2$	2.12	$\frac{dy}{dx} = y\sqrt{x}$
2.13	$\frac{dy}{dx} = -yx^2$	2.14	$\frac{dy}{dx} = y^2x$	2.15	$\frac{dy}{dx} = y^2$
2.16	$\frac{dy}{dx} = y\frac{1}{\sqrt{x}}$	2.17	$\frac{dy}{dx} = y^2x^2$	2.18	$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

2.19	$\frac{dy}{dx} = -y^2x$	2.20	$\frac{dy}{dx} = 2y^2$	2.21	$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{2x}$
2.22	$\frac{dy}{dx} = y^3x$	2.23	$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$	2.24	$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$
2.25	$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y}$	2.26	$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y}\sqrt{x}$	2.27	$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{3x}$
2.28	$\frac{dy}{dx} = 4yx$	2.29	$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{\sqrt{x}}$	2.30	$\frac{dy}{dx} = -\frac{3y}{x}$

3. Бастапқы шартымен берілген теңдеуді шешіп, интегралдық қисықты сызыңыз.

3 кесте

3.1 $y' = 2y,\ \ y(0) = 3$	3.2 $y' = -y,\ \ y(0) = 2$
3.3 $y' = y,\ \ y(0) = -2$	3.4 $y' = -y,\ \ y(0) = -3$
3.5 $y' = 2y,\ \ y(0) = -7$	3.6 $y' = -3y,\ \ y(0) = -1$
3.7 $y' = 2y,\ \ y(0) = 5$	3.8 $y' = -3y,\ \ y(0) = 1$
3.9 $y' = \frac{1}{2}y,\ \ y(0) = -1$	3.10 $y' = \frac{1}{2}y,\ \ y(0) = 4$
3.11 $y' = \frac{1}{3}y,\ \ y(0) = 4$	3.12 $y' = 3y,\ \ y(-1) = -2$
3.13 $y' = y,\ \ y(1) = 2$	3.14 $y' = -y,\ \ y(-1) = 2$
3.15 $y' = -y,\ \ y(1) = -2$	3.16 $y' = 3y,\ \ y(-1) = 2$
3.17 $y' = -y,\ \ y(1) = 2$	3.18 $y' = -y,\ \ y(-1) = -2$
3.19 $y' = -y,\ \ y(3) = -2$	3.20 $y' = y,\ \ y(ln\,3) = 4$
3.21 $y' = y,\ \ y(1) = -2$	3.22 $y' = 5y,\ \ y(0) = -2$
3.23 $y' = 9y,\ \ y(1) = -3$	3.24 $y' = y,\ \ y(-3) = 2$
3.25 $y' = -y,\ \ y(ln\,2) = -1$	3.26 $y' = \frac{1}{4}y,\ \ y(0) = 4$
3.27 $y' = -4y,\ \ y(1) = 2 \cdot e^{-4}$	3.28 $y' = -2y,\ \ y(1) = 2e^{-2}$
3.29 $y' = 2y,\ \ y(-\,ln\,2) = 1$	3.30 $y' = 5y,\ \ y(-1) = 2e^{-5}$

4. Коши есебін шешіңіз.

4 кесте

4.1	$y' = y^2, \quad y(0) = 1$	4.2	$y' = y^2, \quad y(0) = -1$
4.3	$y' = y^2, \quad y(0) = 0$	4.4	$y' = y^2, \quad y(1) = 2$
4.5	$y' = y^2, \quad y(-1) = 2$	4.6	$y' = y^2, \quad y(1) = -3$
4.7	$y' = y^2, \quad y(-1) = -4$	4.8	$y' = -y^2, \quad y(0) = 1$
4.9	$y' = -y^2, \quad y(0) = -2$	4.10	$y' = -y^2, \quad y(2) = 5$
4.11	$y' = -y^2, \quad y(2) = -3$	4.12	$y' = -y^2, \quad y(-1) = 4$
4.13	$y' = 2y^2, \quad y(0) = 3$	4.14	$y' = -3y^2, \quad y(0) = -1$
4.15	$y' = y^3, \quad y(0) = 2$	4.16	$y' = -y^3, \quad y(0) = 4$
4.17	$y' = \frac{1}{y^2}, \quad y(1) = 1$	4.18	$y' = \frac{1}{y^2}, \quad y(0) = -1$
4.19	$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$	4.20	$y' = 4 + y^2, \quad y(1) = 0$
4.21	$y' = y^2 - 1, \quad y(0) = 1$	4.22	$y' = y^2 - 1, \quad y(0) = 2$
4.23	$y' = y^2 - 1, \quad y(0) = -2$	4.24	$y' = 1 - y^2, \quad y(0) = -1$
4.25	$y' = 1 - y^2, \quad y(0) = 2$	4.26	$y' = \frac{y}{1-y^2}, \quad y(0) = 1$
4.27	$y' = 3y^2, \quad y(0) = 1$	4.28	$y' = \frac{1}{y}, \quad y(0) = -2$
4.29	$y' = \frac{3y}{4 - y^2}, \quad y(0) = 1$	4.30	$y' = \frac{3y}{4 - y}, \quad y(0) = 1$

5. Сызықтық теңдеуді

а) тұрақтыны вариациялау тәсілімен (Лагранж әдісімен);

ә) ауыстыру әдісімен (Бернулли әдісімен) шешіңіз.

5 кесте

5.1	$y' - \frac{y}{x} = x^3, \quad y(1) = 0$	5.2	$y' - \frac{y}{x} = \sqrt{x}, \quad y(4) = 2$
5.3	$y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad y(1) = 1$	5.4	$y' + \frac{y}{x} = x, \quad y(-1) = 1$
5.5	$y' + \frac{y}{x} = \sqrt{x}, \quad y(4) = -1$	5.6	$y' + \frac{y}{x} = e^x, \quad y(1) = 0$
5.7	$y' + \frac{y}{x} = \frac{2}{1 + x^2}, \quad y(1) = 0$	5.8	$y' - 2xy = e^{x^2}, \quad y(0) = -1$
5.9	$y' - 2xy = e^{x^2}, \quad y(-1) = 2$	5.10	$y' + 2xy = e^{-x^2}, \quad y(1) = 2$

5.11	$y' + 2xy = x, \quad y(0) = 1$	5.12	$y' + 2xy = 2x, \quad y(0) = -2$
5.13	$y' + \frac{y}{x} = cosx, \quad y(\pi) = 0$	5.14	$y' - \frac{y}{x} = ln\,x\,, \quad y(e) = 1$
5.1	$y' - \frac{2y}{x} = x, \quad y(1) = 1$	5.16	$y' - \frac{2y}{x} = 1, \quad y(2) = -2$
5.17	$y' - \frac{2y}{x} = \sqrt[3]{x}, \quad y(8) = -1$	5.18	$y' + \frac{2y}{x} = \sqrt{x}, \quad y(4) = 0$
5.19	$y' + \frac{2y}{x} = \frac{cos2x}{x^2}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$	5.20	$y' - 2xy = -x, \quad y(0) = -1$
5.21	$y' - \frac{y}{x} = \sqrt[3]{x}, \quad y(8) = 1$	5.22	$y' - \frac{y}{x} = x^2e^x, \quad y(1) = 1$
5.23	$y' - 2xy = x, \quad y(0) = 1$	5.24	$y' - 2xy = x^2e^{x^2}, \; y(1) = 2$
5.25	$y' + 2xy = xe^{-x^2}, \quad y(0) = 2$	5.26	$y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}, \quad y(1) = 1$
5.27	$y' - ycosx = sin2x, y(0) = -1$	5.28	$y' - 4xy = -4x^3, y(0) = -0{,}5$
5.29	$y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1$	5.30	$y' + \frac{y}{x} = sin\,x\,, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}$

6. Бернулли теңдеуін шешіңіз.

6 кесте

6.1 $y' + y = xy^2$	6.2 $y' + 2y = xy^3$	6.3 $y' - y = xy^2$
6.4 $y' + y = x\sqrt{y}$	6.5 $y' - y = -x\sqrt{y}$	6.6 $y' - 2y = xy^3$
6.7 $y' + y = x^2y^2$	6.8 $y' + 2y = x^2y^2$	6.9 $y' - y = x^2y^2$
6.10 $y' - y = 2xy^2$	6.11 $y' + y = 2xy^3$	6.12 $y' - 2y = x^2y^2$
6.13 $y' - \frac{1}{3}y = xy^2$	6.14 $y' + 2y = 2xy^2$	6.15 $y' - 2y = \frac{1}{2}xy^2$
6.16 $y' + \frac{1}{x}y = y^2$	6.17 $y' - \frac{2}{x}y = y^2$	6.18 $y' - \frac{1}{x}y = y^2$
6.19 $y' + \frac{2}{x}y = y^2$	6.20 $y' + 3y = xy^2$	6.21 $y' - 3y = xy^3$
6.22 $y' + 2y = y^2e^x$	6.23 $y' + 2y = y^2e^{-2x}$	6.24 $y' + 3y = \frac{x}{y}$
6.25 $y' + 2y = y^2e^{-5x}$	6.26 $y' + 4y = \frac{2x}{y}$	6.27 $y' - 2y = y^2e^{-x}$
6.28 $y' + \frac{2}{x}y = 2y^2$	6.29 $y' - \frac{1}{4}y = xy^2$	6.30 $y' + 2y = xy^2$

7. Толық дифференциалды теңдеу болатындығын тексеріңіз және оны шешіңіз.

7 кесте

7.1	$3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0$
7.2	$\left(3x^2 + \frac{2}{y}cos\frac{2x}{y}\right)dx - \frac{2x}{y^2}cos\frac{2x}{y}dy = 0$
7.3	$(3x^2 + 4y^2)dx + (8xy + e^y)dy = 0$
7.4	$\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$
7.5	$(y^2 + y\,sec^2\,x)dx + (2xy + tgx)dy = 0$
7.6	$(3x^2y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0$
7.7	$3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0$
7.8	$[sin\,2\,x - 2\,cos(x + y)]dx - 2\,cos(x + y)\,dy = 0$
7.9	$\left(xy^2 + \frac{x}{y^2}\right)dx + \left(x^2y - \frac{x^2}{y^3}\right)dy = 0$
7.10	$\frac{y}{x}dx + (y^3 + lnx)dy = 0$
7.11	$2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$
7.12	$\frac{y}{x^2}dx - \frac{xy + 1}{x}dy = 0$
7.13	$2x\,cos^2\,y\,dx + (2y - x^2\sin 2y)dy = 0$
7.14	$\frac{dx}{y} - \frac{x + y^2}{y^2}dy = 0$
7.15	$\left(4 - \frac{y^2}{x^2}\right)dx + \frac{2y}{x}dy = 0$
7.16	$\left(xe^x + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}dy = 0$
7.17	$e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy = 0$
7.18	$(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0$
7.19	$e^y dx + (cos\,y + xe^y)dy = 0$
7.20	$(y^3 + cos\,x)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0$
7.21	$xe^{y^2}dx + \left(x^2ye^{y^2} + tg^2y\right)dy = 0$
7.22	$(5xy^2 - x^3)dx + (5x^2y - y)dy = 0$

7.23	$[cos(x+y^2)+sin\,x]dx+2y\,cos(x+y^2)\,dy=0$
7.24	$(x^2-4xy-2y^2)dx+(y^2-4xy-2x^2)dy=0$
7.25	$\left(sin\,y+y\,sin\,x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(x\,cos\,y-cos\,x+\frac{1}{y}\right)dy=0$
7.26	$3x^2(1+lny)dx-\left(2y-\frac{x^3}{y}\right)dy=0$
7.27	$(2xy-5)dx+(3y^2+x^2)dy=0$
7.28	$2(3xy^2+2x^3)dx+3(2x^2y+y^2)dy=0$
7.29	$(3x^3+6x^2y+3xy^2)dx+(2x^3+3x^2y)dy=0$
7.30	$xy^2dx+y(x^2+y^2)dy=0$

1.3 Типтік нұсқаның шешімі.

1. $y=\frac{C^2-x^2}{2x}$, мұндағы C – кез келген тұрақты, функциясын

$x+y+xy'=0$ дифференциалдық теңдеуіне қою арқылы осы теңдеудің шешімі болатынын, болмайтынын тексеріңіз.

Шешуі.

Берілген функцияның туындысын табамыз:

$$y'=\left(\frac{C^2-x^2}{2x}\right)'=\left(\frac{C^2}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{x}{2}\right)'=-\frac{C^2}{2x^2}-\frac{1}{2}.$$

y және y'-ті берілген теңдеуге қоямыз:

$$x+\frac{C^2-x^2}{2x}+x\cdot\left(-\frac{C^2}{2x^2}-\frac{1}{2}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad x+\frac{C^2}{2x}-\frac{x}{2}-\frac{C^2}{2x}-\frac{x}{2}=0 \quad\Rightarrow 0=0.$$

Жауабы: берілген функция берілген теңдеудің шешімі болады.

2. Айнымалылары ажыратылатын теңдеуді шешіңіз: $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt[3]{y^2}}{x^3}$.

Шешуі.

Мұндай теңдеуді шешу үшін оның екі бөлігін бір бөлігі тек x-ке, ал екінші бөлігі тек y-ке тәуелді болатындай етіп, бірдей өрнекке көбейту немесе бөлу керек. Одан кейін теңдеудің екі жағын бірдей интегралдаймыз.

Теңдеудің екі жағын құрамында x немесе y бар өрнекке бөлген кезде, осы өрнекті нөлге айналдыратын шешімі жоғалып кетуі мүмкін. Сондықтан, ол шешімді де ескеру қажет.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt[3]{y^2}}{x^3},\quad dy=\frac{\sqrt[3]{y^2}}{x^3}dx.$$

Теңдеудің екі жағын $\sqrt[3]{y^2}$ - қа бөлеміз:

$$\frac{dy}{\sqrt[3]{y^2}}=\frac{dx}{x^3}.$$

Түрлендірулерден кейін теңдеуді айнымалылары ажыратылған түрге келтірдік. Екі жағын бірдей интегралдау арқылы жалпы шешімін немесе жалпы интегралын аламыз:

$$\int\frac{dy}{\sqrt[3]{y^2}}=\int\frac{dx}{x^3},\quad 3y^{\frac{1}{3}}=-\frac{1}{2x^2}+c,\quad y=\frac{1}{27}\left(-\frac{1}{2x^2}+c\right)^3.$$

Сонымен, теңдеудің жалпы шешімін таптық.

$\sqrt[3]{y^2}$ - қа бөлгенде, $\sqrt[3]{y^2}=0$, яғни $y=0$ шешімін жоғалтып алуымыз мүмкін. $y=0$ берілген теңдеудің шешімі екені көрініп тұр.

Жауабы: $y=\frac{1}{27}\left(-\frac{1}{2x^2}+c\right)^3, y=0.$

3. $y(0)=5$ бастапқы шартымен берілген $y'=6y$ теңдеуін шешіп, интегралдық қисықты сызыңыз.

Шешуі.

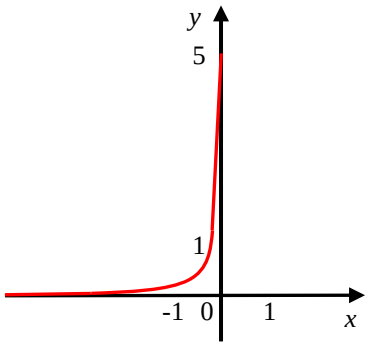
$$y'=6y,\quad \frac{dy}{dx}=6y,\quad \frac{dy}{y}=6dx,\quad \int\frac{dy}{y}=\int 6dx,\quad ln|y|=6x+lnC,$$

$ln|y|=lne^{6x}+lnC,\quad ln|y|=lnCe^{6x},\quad y=Ce^{6x}$ – жалпы шешімі.

Бастапқы шартты пайдаланамыз. Ол үшін жалпы шешімге $x_0=0,\ y_0=5$ мәндерін қоямыз:

$$5=Ce^{6\cdot 0}\quad\Rightarrow\quad C=5.$$

Сонымен, $y=5e^{6x}$ берілген теңдеудің дербес шешімі болады. Интегралдық қисықты сызамыз:



4. Коши есебін шешіңіз: $3xlnx \cdot y' = (5 - 4lnx\,)y,\ y(1) = 2.$

Шешуі.

Бұл – айнымалылары ажыратылатын теңдеу. Түрлендірулер жасаймыз:

$$3xlnx \cdot y' = (5 - 4lnx\,)y; \quad 3xlnx\frac{dy}{dx} = (5 - 4lnx)y;$$

$$3xlnxdy = (5 - 4lnx)ydx.$$

Теңдеудің екі жағын $3xlnx \cdot y$ - ке бөлеміз :

$$\frac{dy}{y} = \frac{5 - 4lnx}{3xlnx}dx\,.$$

Екі жағын бірдей интегралдаймыз:

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{5-4lnx}{3xlnx}dx; \qquad \int\frac{dy}{y} = \frac{5}{3}\int\frac{dx}{xlnx} - \frac{4}{3}\int\frac{dx}{x}\,;$$

$$ln|y| = \frac{5}{3}ln|lnx| - \frac{4}{3}ln|x| + ln|C|; \quad ln|y| = ln\left|\frac{C\cdot ln^{\frac{5}{3}}x}{x^{\frac{4}{3}}}\right|; \quad y = C\sqrt[3]{\frac{ln^5x}{x^4}}\,.$$

$3xlnx \cdot y$ - ке бөлгенде, $3xlnx = 0$ және $y = 0$ шешімдері, яғни $x = 0$, $lnx = 0$, осыдан $x = 1$ және $y = 0$ шешімдері жоғалуы мүмкін. $y = 0$ теңдеудің шешімі, ал $x = 0$ және $x = 1$ шешімдері емес екені көрініп тұр.

Жауабы: $y = C\sqrt[3]{\frac{ln^5x}{x^4}}, y = 0.$

5. Сызықтық теңдеуді

а) тұрақтыны вариациялау тәсілімен (Лагранж әдісімен);

ә) ауыстыру әдісімен (Бернулли әдісімен) шешіңіз:

$$x \cdot y' - 5y = -4\sqrt{x}\,.$$

Шешуі.

а) Лагранж тәсілі бойынша сызықтық біртекті емес теңдеуге сәйкес сызықтық біртекті теңдеуді шешеміз:

$$x \cdot y' - 5y = 0 \ \Rightarrow\ x\frac{dy}{dx} = 5y \ \Rightarrow\ \frac{dy}{y} = \frac{5dx}{x} \ \Rightarrow\ \int\frac{dy}{y} = 5\int\frac{dx}{x} \ \Rightarrow$$

$$ln|y| = 5ln|x| + ln|C| \ \Rightarrow\ ln|y| = ln|Cx^5| \ \Rightarrow\ y = Cx^5$$

Сызықтық біртекті теңдеудің жалпы шешімін таптық. Сызықтық біртекті емес теңдеудің жалпы шешімін мына түрде іздейміз:

$$y_{\text{с.б.е.}} = C(x)x^5,$$

мұндағы $C(x)$ – белгісіз функция.

Бастапқы теңдеуге

$$y_{\text{с.б.е.}} = C(x)x^5\,, \quad y'_{\text{с.б.е.}} = C'(x)x^5 + 5C(x)x^4$$

қойып, белгісіз $C(x)$ функцияны табамыз:

$$x(C'(x)x^5 + 5C(x)x^4) - 5C(x)x^5 = -4\sqrt{x}\,,$$

$$C'(x)x^6 + 5C(x)x^5 - 5C(x)x^5 = -4\sqrt{x}\,, \quad C'(x)x^6 = -4\sqrt{x}\,,$$

$$C'(x) = -\frac{4\sqrt{x}}{x^6}, \qquad C'(x) = -4x^{-5\frac{1}{2}}\,.$$

$$C(x) = -4\int x^{-5\frac{1}{2}}\,dx = \frac{8}{9x^4\sqrt{x}} + C.$$

Сонымен, $y_{\text{с.б.е.}} = \left(\frac{8}{9x^4\sqrt{x}} + C\right)x^5 = \frac{8}{9}\sqrt{x} + Cx^5.$

ә) Бернулли әдісі бойынша $y = uv$, мұндағы $u = u(x)$, $v = v(x)$ – белгісіз функциялар, $y' = u'v + uv'$ алмастыруларын жасаймыз:

$$x \cdot (u'v + uv') - 5uv = -4\sqrt{x}\,,$$
$$xu'v + xuv' - 5uv = -4\sqrt{x}\,,$$
$$xu'v + u(xv' - 5v) = -4\sqrt{x}\,.$$

$v(x)$ функциясын екінші қосылғыш нөлге тең болатындай етіп аламыз:

$$u(xv' - 5v) = 0.$$

Екі жағдай қарастырамыз:

1) $u \equiv 0 \;\Rightarrow\; y \equiv 0$. Бұл функция берілген теңдеудің шешімі болмайды.

2) $xv' - 5v = 0, \qquad x\frac{dv}{dx} = 5v, \qquad \frac{dv}{v} = \frac{5dx}{x}, \quad \int\frac{dv}{v} = 5\int\frac{dx}{x},$

$ln|v| = 5ln|x|, \qquad ln|v| = ln|x^5|, \qquad v = x^5.$

Енді $xu'v = -4\sqrt{x}$ теңдеуін шешеміз:

$x\frac{du}{dv}v = -4\sqrt{x}\,, \qquad x\frac{du}{dv}\cdot x^5 = -4\sqrt{x}\,, \qquad du = \frac{-4\sqrt{x}\,dx}{x^6}, \qquad du = -4x^{-5\frac{1}{2}},$
$u = -4\int x^{-5\frac{1}{2}}\,dx, \qquad u = \frac{8}{9x^4\sqrt{x}} + C\,.$

Сонымен, $y = uv = \left(\frac{8}{9x^4\sqrt{x}} + C\right)x^5 = \frac{8}{9}\sqrt{x} + Cx^5.$

Жауабы: $y = \frac{8}{9}\sqrt{x} + Cx^5.$

6. Бернулли теңдеуін шешіңіз:

$$y' + 2y = e^x \cdot y^2.$$

Шешуі.

Бернулли теңдеуін Бернулли тәсілімен шешеміз, яғни шешімді

$$y = uv,$$

мұндағы $u = u(x)$, $v = v(x)$ – белгісіз функциялар, түрінде іздейміз. Бастапқы теңдеуге $y = uv, y' = u'v + uv'$ қоямыз:

$$u'v + uv' + 2uv = e^x \cdot u^2 \cdot v^2.$$

Түрлендірулер жасаймыз:

$$u'v + u \cdot (v' + 2v) = e^x \cdot u^2 \cdot v^2.$$

$v(x)$ функциясын $v' + 2v = 0$ теңдеуінің дербес шешімі ретінде іздейміз. Бұл – айнымалылары ажыратылатын теңдеу:

$$\frac{dv}{dx} = -2v, \quad \frac{dv}{v} = -2dx, \ \int \frac{dv}{v} = -2\int dx, \ ln|v| = -2x + c_0, \ v = e^{-2x+c_0}.$$

$c_0 = 0$ деп аламыз, сонда $v = e^{-2x}$.

$u'v + u \cdot (v' + 2v) = e^x u^2 v^2$ теңдеуінен $v' + 2v = 0$ шартын ескеріп, келесі теңдеуді аламыз:

$$u'v = e^x u^2 v^2, \ u' = e^x u^2 v,$$

немесе түрлендірулерден кейін, яғни $v = e^{-2x}$ қойып, мына теңдеуді аламыз:

$$u' = e^{-x} u^2.$$

Айнымалыларды ажыратып, екі жағын интегралдаймыз:

$$\frac{du}{dx} = e^{-x} u^2, \quad \frac{du}{u^2} = e^{-x} dx, \quad \int \frac{du}{u^2} = \int e^{-x} dx, \quad -\frac{1}{u} = -e^{-x} + C,$$

мұндағы C – кез келген тұрақты,

немесе

$$\frac{1}{u} = e^{-x} - C,$$

яғни

$$u(x) = \frac{1}{e^{-x} - C}.$$

Мына шешімнен басқа теңдеуді $u = 0$ функциясы да қанағаттандырады.

Сонымен, берілген теңдеудің шешімдері:

1) $u = 0$, $v = e^{-2x}$ болғанда, $y = 0$;

2) $u(x) = \frac{1}{e^{-x}-C}$, $v = e^{-2x}$ болғанда, $y = \frac{e^{-2x}}{e^{-x}-C}$.

Жауабы: $y = \frac{e^{-2x}}{e^{-x}-C}$, мұндағы C – кез келген тұрақты, $y = 0$.

7. $(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$

теңдеуі толық дифференциалды теңдеу болатындығын тексеріңіз және оны шешіңіз.

Шешуі.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

теңдеуі толық дифференциалды теңдеу болуы үшін,

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

шартының орындалуы қажетті және жеткілікті.

Берілген теңдеуде $M(x, y) = 2xy + 3y^2$, $N(x, y) = x^2 + 6xy - 3y^2$, сондықтан

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x + 6y, \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2x + 6y.$$

Сонымен $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ шарты орындалады, демек берілген теңдеу – толық дифференциалды теңдеу, яғни оның сол жағы қандайда бір $F(x, y)$ функциясының толық дифференциалы болады, сондықтан $F(x, y)$ функциясы үшін

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + 3y^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 6xy - 3y^2. \qquad (1)$$

Бірінші теңдеуде y-ті тұрақты деп есептеп, x бойынша интегралдаймыз:

$$F(x, y) = \int(2xy + 3y^2)dx = x^2y + 3y^2x + \varphi(y),$$

мұндағы $\varphi(y)$ – белгісіз функция. $\varphi(y)$ функциясын анықтау үшін, соңғы теңдеуді x-ті тұрақты деп есептеп, y бойынша дифференциалдамыз:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 6xy + \varphi'(y) = x^2 + 6xy - 3y^2,$$

осыдан

$$\varphi'(y) = -3y^2$$

$$\varphi(y) = -3\int y^2 d\,y = -y^3 + C.$$

Демек,

$$F(x, y) = x^2y + 3xy^2 - y^3 + C.$$

Берілген теңдеудің шешімін мына түрде жазамыз:

$$x^2y + 3xy^2 - y^3 = C.$$

Жауабы: $x^2y + 3xy^2 - y^3 = C$ – теңдеудің жалпы интегралы, мұндағы C – кез келген тұрақты.

2 №2 есептеу-сызба жұмысы. Жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер. Дифференциалдық теңдеулер жүйесі.

Мақсаты: студенттерді жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулерді және теңдеулер жүйесін шешу әдістеріне үйрету.

2.1 Теориялық сұрақтар

1. Ретін төмендетуге болатын дифференциалдық теңдеулер.
2. Жоғарғы ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулер.
3. Коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті теңдеулер.
4. Коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті емес теңдеулер. Тұрақтыны вариациялау тәсілі (Лагранж тәсілі).
5. Коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті емес теңдеулер. Дербес шешімін таңдау тәсілімен табу (анықталмаған коэффициенттер тәсілі).
6. Коэффициенттері тұрақты дифференциалдық теңдеулер жүйесі.

2.2 Тапсырмалар

1. Екінші ретті дифференциалдық теңдеуді шешіңіз.

8 кесте

1.1	$y'' = sin\,2\,x$	1.2	$y'' = e^{2x}$	1.3	$y'' = xe^{x}$
1.4	$y'' = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$	1.5	$y'' = \frac{1}{1+x^2}$	1.6	$y'' = cos\,7\,x$
1.7	$y'' = xe^{-x}$	1.8	$y'' = \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x}$	1.9	$y'' = cos^2\,x$
1.10	$y'' = sin^2\,2\,x$	1.11	$y'' = \frac{1}{1+x}$	1.12	$y'' = \frac{x}{(x+1)^3}$
1.13	$y'' = (e^{x}+e^{-x})^2$	1.14	$y'' = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$	1.15	$y'' = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$
1.16	$y'' = sin^2\,2x$	1.17	$y'' = \frac{1}{cos^2\,x}$	1.18	$y'' = \sqrt{x}(1-x)^2$
1.19	$y'' = cos^2\,3x$	1.20	$y'' = \frac{1}{sin^2\,x}$	1.21	$y'' = -\frac{1}{1+x^2}$
1.22	$y'' = \frac{1}{cos^2\,2\,x}$	1.23	$y'' = cos^2\,x$	1.24	$y'' = \frac{1}{2x+1}$
1.25	$y'' = x - \frac{1}{x^3}$	1.26	$y'' = 2^{x}$	1.27	$y'' = -\,sin\,4\,x$
1.28	$y'' = (2+x)^3$	1.29	$y'' = sin\,x\,cos^2\,x$	1.30	$y'' = 3e^{2x}$

2. Ретін төмендетуге болатын екінші ретті дифференциалдық теңдеуді шешіңіз.

9 кесте

2.1	$y''x\,ln\,x = y'$	2.2	$xy'' + y' = 1$	2.3	$2xy'' = y'$
2.4	$xy'' + y' = x + 1$	2.5	$\frac{y''}{ctgx} - y' = -\frac{1}{sin\,x}$	2.6	$x \cdot y'' - y' = -\frac{1}{x}$
2.7	$y''ctg2x + 2y' = 0$	2.8	$x^3y'' + x^2y' = 1$	2.9	$tgx \cdot y'' = 2y'$

2.10	$y''cth2x = 2y'$	2.11	$x^4y'' + x^3y' = 1$	2.12	$xy'' + 2y' = 0$
2.13	$(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$	2.14	$x^5y'' + x^4y' = 1$	2,15	$x^2y'' + xy' = 1$
2.16	$xy'' + y' + x = 0$	2.17	$y''thx = y'$	2.18	$xy'' + y' = \sqrt{x}$
2.19	$y''tgx = y' + 1$	2.20	$y''tg5x = 5y'$	2.21	$y''th7x = 7y'$
2.22	$x^3y'' + x^2y' = \sqrt{x}$	2.23	$(1+x)y'' + y' = = x + 1$	2.24	$(1+sin\,x)y'' = = cos\,x \cdot y'$
2.25	$x \cdot y'' + y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$	2.26	$-x \cdot y'' + 2y' = = \frac{2}{x^2}$	2.27	$y'' + \frac{2x}{x^2+1}y' = = 2x$
2.28	$x^4 \cdot y'' + x^3y' = 4$	2.29	$(1+x^2)y'' + +2xy' = 12x^3$	2.30	$cthx \cdot y'' + y' = = chx$

3. Құрамында тәуелсіз айнымалы айқын түрде қатыспайтын дифференциалдық теңдеуді шешіңіз.

10 кесте

3.1 $y'' = y'e^y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.	3.2 $2yy'' + y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.	3.3 $yy'' + y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
3.4 $y'' + 2y'^3 = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1/3$.	3.5 $y''tgy = 2y'^2$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$, $y'(1) = 2$.	3.6 $2yy'' = y'^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
3.7 $2yy'' - y'^2 = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$	3.8 $y'' = \frac{1}{2y^3}$, $y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = \sqrt{2}$.	3.9 $y'' = 1 - y'^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
3.10 $y''^2 = y'$, $y(0) = \frac{2}{3}$, $y'(0) = 1$	3.11 $2yy'' = y'^2 + 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$	3.12 $y'' = 2 - y$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$

3.13 $y'' = \frac{1}{y^3}$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$	3.14 $yy'' - 2y'^2 = 0$, $y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2.$	3.15 $y'' = y' + y'^2$, $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1.$
3.16 $y'' + \frac{2y'^2}{1-y} = 0$, $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1.$	3.17 $y''(1 + y) = 5y'^2$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$	3.18 $y''(3 + 2y) = 2y'^2$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
3.19 $4y''^2 = 1 + y'^2$, $y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0.$	3.20 $y''(y - 1) = 2y'^2$, $y(0) = 2,\ \ y'(0) = 2.$	3.21 $yy'' = y'^2 + 1$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$
3.22 $y'' + yy'^3 = 0$, $y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2.$	3.23 $yy'' - y'^2 = 0$, $y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2.$	3.24 $2yy'' - y'^2 = 4$, $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1.$
3.25 $y'' - y'e^y = 0$, $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1.$	3.26 $y''(1 + y) = y'^2$, $y(0) = 2,\ y'(0) = 2.$	2.27 $y'' = \frac{y'}{\sqrt{y}}$, $y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2.$
3.28 $y'' = \frac{1+y'^2}{2}$, $y(0) = 0,\ \ \ \ y'(0) = 0.$	3.29 $y''\sqrt{y} = y'$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$	3.30 $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$, $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0.$

4. Коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті теңдеуді шешіңіз.

11 кесте

4.1 $y'' - 2y' + y = 0$	4.2 $y'' + 6y' + 9y = 0$	4.3 $y'' + 2y' + 17y = 0$
4.4 $9y'' - 6y' + y = 0$	4.5 $y'' - 4y' + 4y = 0$	4.6 $y'' + 2y' + y = 0$
4.7 $y'' - 2y' + y = 0$	4.8 $y'' + 3y' + 2y = 0$	4.9 $y'' + 4y' + 4y = 0$
4.10 $y'' - 6y' + 9y = 0$	4.11 $y'' + 4y = 0$	4.12 $y'' - 2y' + 10y = 0$
4.13 $4y'' + 4y' + y = 0$	4.14 $y'' - 3y' = 0$	4.15 $y'' - 8y' + 25y = 0$
4.16 $y'' - 6y' + 25y = 0$	4.17 $y'' - 2y' + 5y = 0$	4.18 $y'' - 12y' + 36y = 0$
4.19 $y'' + 8y' + 16y = 0$	4.20 $4y'' - 4y' + y = 0$	4.21 $y'' + 2y' + 10y = 0$
4.22 $y'' - 8y' + 16y = 0$	4.23 $y'' - 2y' + y = 0$	4.24 $y'' - 2y' + y = 0$

4.25 $y'' + 4y' + 8y = 0$	4.26 $y'' + 12y' + 37y = 0$	4.27 $y'' + 12y' + 36y = 0$
4.28 $y'' - 10y' + 25y = 0$	4.29 $y'' + 10y' + 25y = 0$	4.30 $36y'' + 12y' + y = 0$

5. Коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті теңдеу үшін Коши есебін шешіңіз.

12 кесте

5.1 $y'' - 6y' + 13y = 0,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$	5.2 $y'' + 6y' + 13y = 0,$ $y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$	5.3 $y'' - 2y' - 3y = 0,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
5.4 $y'' + 6y' + 10y = 0,$ $y(0) = 0, y'(0) = -1.$	5.5 $y'' - 6y' + 10y = 0,$ $y(0) = -1,\ y'(0) = 1.$	5.6 $y'' + 9y = 0,$ $y(0) = -1, y'(0) = 2.$
5.7 $y'' + 4y' + 8y = 0,$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$	5.8 $y'' + 2y' - 3y = 0,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$	5.9 $y'' - 4y' + 5y = 0,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$
5.10 $y'' + 4y' + 5y = 0,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$	5.11 $y'' - 4y' + 8y = 0,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$	5.12 $y'' - 2y' + 10y = 0,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$
5.13 $y'' + 2y' + 10y = 0,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$	5.14 $y'' - 2y' + y = 0,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$	5.15 $y'' - 6y' + 8y = 0,$ $y(0) = 2, y'(0) = 1.$
5.16 $y'' - 4y' + 4y = 0,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$	5.17 $y'' + 10y' + 26y = 0,$ $y(0) = 0, y'(0) = 1.$	5.18 $y'' - 10y' + 26y = 0,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

5.19 $y'' - 4y' + 13y = 0,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$	5.20 $y'' + 4y' + 4y = 0,$ $y(0) = -2, y'(0) = 0.$	5.21 $y'' + 6y' + 8y = 0,$ $y(0) = -1, y'(0) = 2.$
5.22 $y'' - y' = 0,$ $y(0) = 0, y'(0) = 0$	5.23 $y'' + 2y' - 8y = 0,$ $y(0) = 1, y'(0) = 2$	5.24 $y'' + 18y + 32 = 0,$ $y(0) = -1, y'(0) = 2$
5.25 $y'' - 6y' + 9y = 0,$ $y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$	5.26 $y'' + 6y' + 9y = 0,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$	5.27 $y'' + 10y' + 26y = 0,$ $y(0) = 2, y'(0) = 1.$
5.28 $y'' - 6y' + 25y = 0,$ $y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$	5.29 $y'' - 6y' + 13y = 0,$ $y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$	5.30 $y'' + y' = 0,$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

6. Сызықтық біртекті емес теңдеуді дербес шешімін таңдау тәсілімен шешіңіз.

13 кесте

6.1 $y'' + 2y' - 8y = x^2 + 1$	6.2 $y'' - 3y' = x - 2$
6.3 $y'' - 2y' + y = 5e^x$	6.4 $y'' + 2y' - 8y = xe^{4x}$
6.5 $y'' - 2y' - 8y = 7e^{4x}$	6.6 $y'' - 2y' - 8y = -e^{-2x}$
6.7 $y'' + 2y' = x^2 + 2$	6.8 $y'' + 2y' + y = -e^{-x}$
6.9 $y'' - 6y' + 5y = 2x^2 - 5$	6.10 $y'' + 6y' + 5y = x^2 - 3$
6.11 $y'' - 6y' + 8y = 2xe^x$	6.12 $y'' + 6y' + 8y = 5e^{-4x}$
6.13 $y'' + 6y' + 8y = xe^{-2x}$	6.14 $y'' + y = 5\cos x$
6.15 $y'' + y = -\sin x$	6.16 $y'' + y = \cos x - \sin x$
6.17 $y'' - y' = x + x^2 - x^3$	6.18 $y'' + y' = -xe^x$

6.19 $y'' - y' = (1 - x)e^{2x}$	6.20 $y'' + y' = (5 - x)e^{x}$
6.21 $y'' - 4y' + 4y = -2e^{2x}$	6.22 $y'' - 4y' + 4y = xe^{-x}$
6.23 $y'' - 4y' + 8y = (1 + 2x)e^{x}$	6.24 $y'' + 4y' + 8y = 5 - x^2$
6.25 $y'' + y' + y = (x + 2)e^{x}$	6.26 $y'' - 5y' + 6y = -6x^2 + 5$
6.27 $y'' - 13y' + 12 = x - 1$	6.28 $y'' - y' = 5x^2 - 1$
6.29 $y'' + y' - 6y = (20x + 14)e^{2x}$	6.30 $y'' - 2y' + y = 2x(1 - x)$

7. Сызықтық біртекті емес теңдеуді тұрақтыны вариациялау тәсілімен шешіңіз.

14 кесте

7.1 $y'' - 3y' + 2y = 1/(3 + e^{-x})$	7.2 $y'' + \pi^2 y = \pi^2 / \cos \pi x$
7.3 $y'' - 6y' + 8y = 4e^{2x}/(1 + e^{-2x})$	7.4 $y'' - 9y' + 18y = 9e^{3x}/(1 + e^{-3x})$
7.5 $y'' + 16y = 16/\sin 4x$	7.6 $y'' + 4y = 8ctg2x$
7.7 $y'' + 16y = 16/\cos 4x$	7.8 $y'' - 6y' + 8y = 4/(1 + e^{-2x})$
7.9 $y'' - 2y' = 4e^{-2x}/(1 + e^{-2x})$	7.10 $y'' + 3y' = 9e^{3x}/(1 + e^{3x})$
7.11 $y'' + \frac{y}{4} = \frac{1}{4}ctg(x/2)$	7.12 $y'' + \frac{1}{\pi^2}y = \frac{1}{\pi^2 \cos(x/\pi)}$
7.13 $y'' - 3y' + 2y = 1/(2 + e^{-x})$	7.14 $y'' + \pi^2 y = \pi^2 / \sin \pi x$
7.15 $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}/(2 + e^{x})$	7.16 $y'' + 6y + 8y = 4e^{-2x}/(2 + e^{2x})$
7.17 $y'' + 4y = 4/\sin 2x$	7.18 $y'' + y = 4ctgx$
7.19 $y'' + 4y = 4/\cos 2x$	7.20 $y'' - 6y' + 8y = 4/(2 + e^{-2x})$
7.21 $y'' + y' = e^{x}/(2 + e^{x})$	7.22 $y'' - 3y' + 2y = e^{x}/(1 + e^{-x})$

7.23 $y'' + y = 2ctgx$	7.24 $y'' + 9y = 9/\sin 3x$
7.25 $y'' - 3y' + 2y = 1/(1 + e^{-x})$	7.26 $y'' + 9y = 9/\cos 3x$
7.27 $y'' - 3y' = 9e^{-3x}/(3 + e^{-3x})$	7.28 $y'' - y' = e^{-x}/(2 + e^{-x})$
7.29 $y'' + y = 1/\sin x$	7.30 $y'' + 4y = 4ctg2x$

8. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешіңіз.

15 кесте

8.1 $\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 3y_2, \\ y_2' = 2y_1 - 3y_2 \end{cases}$	8.2 $\begin{cases} y_1' = -y_1 + 2y_2, \\ y_2' = y_1 - 2y_2 \end{cases}$	8.3 $\begin{cases} y_1' = -3y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 3y_1 - 2y_2 \end{cases}$
8.4 $\begin{cases} y_1' = -3y_1 + 4y_2, \\ y_2' = 3y_1 - 4y_2 \end{cases}$	8.5 $\begin{cases} y_1' = -4y_1 + 3y_2, \\ y_2' = 4y_1 - 3y_2 \end{cases}$	8.6 $\begin{cases} y_1' = -2y_1 + y_2, \\ y_2' = 2y_1 - y_2 \end{cases}$
8.7 $\begin{cases} y_1' = -5y_1 + y_2, \\ y_2' = 5y_1 - y_2 \end{cases}$	8.8 $\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 4y_2, \\ y_2' = 2y_1 - 4y_2 \end{cases}$	8.9 $\begin{cases} y_1' = -y_1 + 4y_2, \\ y_2' = y_1 - 4y_2 \end{cases}$
8.10 $\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 5y_2, \\ y_2' = 2y_1 - 5y_2 \end{cases}$	8.11 $\begin{cases} y_1' = -3y_1 + 5y_2, \\ y_2' = 3y_1 - 5y_2 \end{cases}$	8.12 $\begin{cases} y_1' = -y_1 + 5y_2, \\ y_2' = y_1 - 5y_2 \end{cases}$
8.13 $\begin{cases} y_1' = -5y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 5y_1 - 2y_2 \end{cases}$	8.14 $\begin{cases} y_1' = -5y_1 + 4y_2, \\ y_2' = 5y_1 - 4y_2 \end{cases}$	8.15 $\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 7y_2, \\ y_2' = 2y_1 - 7y_2 \end{cases}$
8.16 $\begin{cases} y_1' = -\frac{1}{2}y_1 + 7y_2, \\ y_2' = \frac{1}{2}y_1 - 7y_2 \end{cases}$	8.17 $\begin{cases} y_1' = -4y_1 + 5y_2, \\ y_2' = 4y_1 - 5y_2 \end{cases}$	8.18 $\begin{cases} y_1' = 0{,}2y_1 - y_2, \\ y_2' = -0{,}2y_1 + y_2 \end{cases}$
8.19 $\begin{cases} y_1' = -4y_1 + y_2, \\ y_2' = 4y_1 - y_2 \end{cases}$	8.20 $\begin{cases} y_1' = -y_1 + 7y_2, \\ y_2' = y_1 - 7y_2 \end{cases}$	8.21 $\begin{cases} y_1' = -7y_1 + y_2, \\ y_2' = 7y_1 - y_2 \end{cases}$
8.22 $\begin{cases} y_1' = -y_1 + \frac{5}{2}y_2, \\ y_2' = y_1 - \frac{5}{2}y_2 \end{cases}$	8.23 $\begin{cases} y_1' = -5y_1 + \frac{1}{2}y_2, \\ y_2' = 5y_1 - \frac{1}{2}y_2 \end{cases}$	8.24 $\begin{cases} y_1' = -y_1 + \frac{3}{2}y_2, \\ y_2' = y_1 - \frac{3}{2}y_2 \end{cases}$
8.25 $\begin{cases} y_1' = -0{,}4y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 0{,}4y_1 - 2y_2 \end{cases}$	8.26	8.27

	$\begin{cases} y_1' = -5y_1 + 3y_2, \\ y_2' = 5y_1 - 3y_2 \end{cases}$	$\begin{cases} y_1' = 3{,}2y_1 + y_2, \\ y_2' = -3{,}2y_1 - y_2 \end{cases}$
8.28 $\begin{cases} y_1' = -4{,}5y_1 - 0{,}5y_2, \\ y_2' = 4{,}5y_1 + 0{,}5y_2 \end{cases}$	8.29 $\begin{cases} y_1' = 0{,}8y_1 - 0{,}2y_2, \\ y_2' = -0{,}8y_1 + 0{,}2y_2 \end{cases}$	8.30 $\begin{cases} y_1' = -2{,}1y_1 + y_2, \\ y_2' = 2{,}1y_1 - y_2 \end{cases}$

2.3 Типтік нұсқаның шешімі

1. Екінші ретті дифференциалдық теңдеуді шешіңіз: $y'' = \sin 2x \cos 2x$.

Шешуі.

Теңдеудің жалпы шешімін табу үшін теңдеудің екі бөлігін екі рет интегралдау керек:

$$y' = \int \sin 2x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\int \sin 4x \, dx = -\frac{1}{8}\cos 4x + C_1;$$

$$y = \int \left(-\frac{1}{8}\cos 4x + C_1\right) dx = -\frac{1}{8}\int \cos 4x \, dx + \int C_1 dx = -\frac{1}{32}\sin 4x +$$

$$+C_1 x + C_2.$$

Жауабы: $y = -\frac{1}{32}\sin 4x + C_1 x + C_2$ – теңдеудің жалпы шешімі.

2. Ретін төмендетуге болатын екінші ретті дифференциалдық теңдеуді шешіңіз:

$$(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0.$$

Шешуі.

Берілген теңдеудің құрамында белгісіз функция y айқын түрде болмағандықтан, мынадай алмастырулар жасаймыз:

$$y' = p(x) \text{ және } y'' = p'(x),$$

мұндағы $p(x)$ – жаңа белгісіз функция.

Сонда берілген теңдеу мына түрге келеді:

$(1 + x^2)p' - 2xp = 0$ немесе $(1 + x^2)dp - 2xpdx = 0$.

Айнымалыларын ажыратамыз:

$$\frac{dp}{p} = \frac{2xdx}{1 + x^2}, \quad \frac{dp}{p} = \frac{d(1 + x^2)}{1 + x^2}.$$

Теңдеудің екі бөлігін интегралдаймыз:

$$ln|p| = ln(1+x^2) + ln|C_1|\,,\ p(x) = C_1(1+x^2),$$

мұндағы C_1 – кез келген тұрақты.

$p = y'$ болғандықтан,

$$y' = C_1(1+x^2).$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1(1+x^2),\ dy = C_1(1+x^2)dx.$$

Интегралдау арқылы жалпы шешімді аламыз:

$$y = C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2.$$

Ескерту: айнымалыларын ажырату барысында $p(1+x^2)$-қа бөлгенде теңдеудің $p = 0$ және $1 + x^2 = 0$ шешімдерін жоғалтуымыз мүмкін. Біріншісінен $y' = 0 \Rightarrow y = C$ шешімін аламыз, бірақ бұл шешім $C_1 = 0$ болғанда жалпы шешімнің құрамында бар. Екінші теңдеу нақты шешімге ие емес.

Жауабы: $y = C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2$ – теңдеудің жалпы шешімі.

3. Құрамында тәуелсіз айнымалы айқын түрде қатыспайтын дифференциалдық теңдеуді шешіңіз:

$$y^3y'' = -1,\ \ y(1) = 1,\ y'(1) = 0.$$

Шешуі.

Берілген теңдеудің құрамында тәуелсіз айнымалы x айқын түрде болмағандықтан, мынадай алмастырулар жасаймыз:

$$y' = p(y)\ \ \text{және}\ \ y'' = p\frac{dp}{dy}\,,$$

мұндағы $p(y)$ – жаңа белгісіз функция.

Сонда берілген теңдеу мына түрге келеді:

$$y^3p\frac{dp}{dy} = -1.$$

Айнымалыларды ажыратамыз:

$$pdp = -\frac{dy}{y^3}\,,$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{1}{2y^2} + C_1.$$

Жалпы шешімін емес, дербес шешімін табу керек есептерде белгісіз тұрақтыны сол тұрақты пайда болған сәтте табу ыңғайлы болады. Сондықтан, соңғы теңдікке $p = y' = 0,\ y = 1$ бастапқы шарттарды қоямыз:

$$0 = \frac{1}{2} + C_1, \text{ т.е. } C_1 = -\frac{1}{2}.$$

Тұрақтының мәнін қоямыз:

$$\frac{p^2}{2} = \frac{1}{2y^2} - \frac{1}{2} \quad \text{немесе} \quad p^2 = \frac{1}{y^2} - 1,$$

осыдан

$$p = \pm\sqrt{\frac{1-y^2}{y^2}}, \text{ яғни } y' = \frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.$$

Айнымалыларды ажыратып, интегралдаймыз:

$$dx = \pm\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}, \quad x = \mp\frac{1}{2}\int(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-y^2), \quad x = \mp\sqrt{1-y^2} + C_2.$$

$x_0 = 1,\ y_0 = 1$ бастапқы шартын қолданып, C_2-ні табамыз:

$$1 = \mp\sqrt{1-1} + C_2, \text{ яғни } C_2 = 1.$$

Сонымен, теңдеудің ізделінді жалпы шешімі $x = \mp\sqrt{1-y^2} + 1.$

Жауабы: $x = \mp\sqrt{1-y^2} + 1.$

Келесі тапсырмада екінші ретті коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті теңдеу берілген.

$y'' + py' + qy = 0$ екінші ретті коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті теңдеуді жалпы шешімі осы теңдеуге сәйкес $k^2 + pk + q = 0$ сипаттаушы теңдеудің түбірлерімен тығыз байланысты. Сипаттаушы теңдеудің түбірлерін мына формула бойынша есептеген ыңғайлы:

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Үш жағдайды қарастырамыз:

1) $D > 0$ жағдайда сипаттаушы теңдеу $k_1 \neq k_2$ нақты түбірлерге ие. Сонда шешімдердің фундаменталдық жүйесін (яғни екі сызықтық тәуелсіз дербес шешімі)

$$y_1 = e^{k_1 x},\ \ y_2 = e^{k_2 x}$$
функциялары құрайды, ал жалпы шешімі шешімдердің фундаменталдық жүйесінің сызықтық комбинациясынан тұрады:
$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};$$
2) $D = 0$ жағдайда сипаттаушы теңдеу $k_1 = k_2 = k$ нақты түбірлерге ие. Сонда шешімдердің фундаменталдық жүйесін
$$y_1 = e^{kx},\ y_2 = xe^{kx}$$
функциялары құрайды, ал жалпы шешімі
$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$$
немесе
$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x);$$
3) $D < 0$ жағдайда сипаттаушы теңдеу $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ комплекс түбірлерге ие. Шешімдердің фундаменталдық жүйесін

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta\, x, \qquad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta\, x$$
функциялары құрайды, ал жалпы шешімі
$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta\, x + C_2 e^{\varepsilon x} \sin \beta\, x$$
немесе
$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta\, x + C_2 \sin \beta\, x).$$

4. Коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті теңдеуді шешіңіз:
$$y'' - 11y' + 10y = 0.$$
Шешуі.

Сәйкес сипаттаушы теңдеуін құрып, оны шешеміз:
$$k^2 - 11k + 10 = 0.$$
Түбірлері $k_1 = 1,\ \ k_2 = 10$ нақты сандар болғандықтан, шешімдердің фундаменталдық жүйесін $y_1 = e^x,\ \ y_2 = e^{10x}$ функциялары құрайды, ал жалпы шешімі
$$y = C_1 e^x + C_2 e^{10x}.$$
Жауабы: $y = C_1 e^x + C_2 e^{10x}$.

5. Коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті теңдеу үшін Коши есебін шешіңіз:
$$y'' + 9y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 6.$$
Шешуі.

Сәйкес сипаттаушы теңдеуін құрып, түбірлерін табамыз:

$k^2 + 9 = 0,\qquad k^2 = -9,\qquad k_{1,2} = 0 \pm 3i$ комплекс сандар. $\alpha = 0,\ \beta = 3$ болғандықтан, жалпы шешімі мына түрде болады:

$$y = e^0(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Берілген бастапқы шарттарды жалпы шешімге және оның туындысына қойып, теңдеулер жүйесін алып, дербес шешімін табамыз:

$$y' = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x,$$

$$\begin{cases} C_1 \cos 3 \cdot 0 + C_2 \sin 3 \cdot 0 = 1, \\ -3C_1 \sin 3 \cdot 0 + 3C_2 \cos 3 \cdot 0 = 6 \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Сонымен, $y = \cos 3x + 2 \sin 3x$.

Жауабы: $y = \cos 3x + 2 \sin 3x$.

6. Сызықтық біртекті емес теңдеуді дербес шешімін таңдау тәсілімен шешіңіз:

$$y'' - 2y' + 2y = 6e^{2x}.$$

Шешуі.

$y'' + py' + qy = f(x)$ сызықтық біртекті емес теңдеудің жалпы шешімінің құрылымы мына түрде болады:

$$y_{\text{с.б.е.}} = y_{\text{с.б}} + y_{\text{д.ш.}},$$

мұндағы $y_{\text{с.б}}$ – берілген теңдеуге сәйкес сызықтық біртекті теңдеудің жалпы шешімі, $y_{\text{д.ш.}}$ – сызықтық біртекті емес теңдеудің дербес шешімі.

Дербес шешімін таңдау тәсілі теңдеудің оң жағы, яғни $f(x)$ функциясы арнайы түрде берілген жағдайда қолданылады:

$$f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x],$$

мұндағы α, β – нақты сандар, $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – нақты коэффициентті m және n дәрежелі көпмүшелер.

$f(x)$ функциясының дербес жағдайларын қарастырамыз:

1) $f(x) = Ae^{\alpha x}$, $(m = n = 0,\ \beta = 0)$;

2) $f(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x$, $(m = n = 0,\ \alpha = 0)$;

3) $f(x) = P_m(x)$, $(\alpha = 0,\ \beta = 0)$;

4) $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, $(\beta = 0)$;

5) $f(x) = P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x$, $(\alpha = 0)$;

6) $f(x) = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$, $(m = n = 0)$.

Егер $f(x)$ функциясы осы жағдайлардың бірі болса, біртекті емес теңдеудің дербес шешімін мына түрде іздейміз:

$$y_{\partial.\text{ш.}} = x^k e^{\alpha x}[p_l(x)\cos\beta x + q_l(x)\sin\beta x],$$

мұндағы $k \geq 0$ – $\alpha \pm \beta i$ санының біртекті теңдеудің сипаттаушы теңдеуі түбірлерімен сәйкестік саны (егер $\alpha \pm \beta i$ сипаттаушы теңдеуінің түбірі болмаса, онда $k = 0$); $l = \max(m, n)$; $p_l(x)$, $q_l(x)$ – l-ші дәрежелі коэффициенттері белгісіз көпмүшелер (мысалы, егер l=0 болса, онда $p_0(x) = A$, $q_0(x) = B$; егер l=1 болса, онда $p_1(x) = Ax + B$, $q_1(x) = Cx + D$; егер l=2 болса, онда $p_2(x) = Ax^2 + Bx + C$, $q_2(x) = A_1x^2 + B_1x + C_1$).

$p_l(x)$ және $q_l(x)$ көпмүшелерінің коэффициенттерін анықтау үшін $y_{\partial.ш.}$, $y'_{\partial.ш.}$, $y''_{\partial.ш.}$ берілген теңдеуге қойып, тепе-теңдіктің екі жағындағы x-тің бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін теңестіріп, теңдеулер жүйесін аламыз. Осы жүйені шешіп, белгісіз коэффициенттерді анықтаймыз.

Берілген $y'' - 2y' + 2y = 6e^{2x}$ сызықтық біртекті емес теңдеуін шешу үшін, осы теңдеуге сәйкес сызықтық біртекті теңдеуді жазып, оның сипаттаушы теңдеуін шешеміз:

$$y'' - 2y' + 2y = 0, \qquad k^2 - 2k + 2 = 0,$$

$k_{1,2} = 1 \pm i$, $\alpha = \beta = 1$, демек, $y_{\text{с.б}} = \mathrm{e}^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$ – сәйкес сызықтық біртекті теңдеудің жалпы шешімі.

Есептің шарты бойынша $f(x) = 6e^{2x} = e^{2x}(6\cos 0x + 0\sin 0x)$, яғни $\alpha = 2$, $\beta = 0$. $\alpha \pm \beta i = 2$ саны сипаттаушы теңдеудің шешімдерімен сәйкес келмейді, сондықтан $k = 0$.

m=n=0, l=max(0,0), сондықтан $p_0(x) = A$, $q_0(x) = B$.

Осы мәндерді

$$y_{\partial.\text{ш.}} = x^k e^{\alpha x}[p_l(x)\cos\beta x + q_l(x)\sin\beta x]$$

формуласына қоямыз:

$$y_{\partial.\text{ш.}} = x^0 e^{2x}[A\cos 0x + B\sin 0x] = Ae^{2x}.$$

Белгісіз A коэффициентін анықтау үшін

$$y_{\partial.\text{ш.}} = Ae^{2x},\ y'_{\partial.\text{ш.}} = 2Ae^{2x},\ y''_{\partial.\text{ш.}} = 4Ae^{2x}$$

мәндерін берілген теңдеуге қоямыз:

$$4Ae^{2x} - 2 \cdot 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} = 6e^{2x},\ 2Ae^{2x} = 6e^{2x},\ \ 2A = 6,\ \ A = 3.$$

Демек, $y_{\partial.\text{ш.}} = 3e^{2x}$.

Сондықтан, $y_{\text{с.б.е.}} = y_{\text{с.б}} + y_{\partial.\text{ш.}} = \mathrm{e}^{x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 3e^{2x}$ – теңдеудің жалпы шешімі.

Жауабы: $y = e^{x}(C_1 \cos x + C_1 \sin x) + 3e^{2x}$.

7. Сызықтық біртекті емес теңдеуді тұрақтыны вариациялау тәсілімен шешіңіз:

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^{x}}{x^2+1}.$$

Шешуі.

Тұрақтыны вариациялау тәсілін кез-келген 2-ретті коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті емес теңдеуді шешуге қолдануға болады, бірақ көп жағдайда күрделі есептеулерге әкеледі. Сондықтан мұндай теңдеулерді жоғарыда көрсетілген тәсілмен шешу керек. Ол тәсілмен шешуге болмайтын жағдайда, тұрақтыны вариациялау тәсілін қолданамыз.

Бұл тәсіл бойынша берілген сызықтық біртекті емес теңдеуге сәйкес сызықтық біртекті теңдеудің жалпы шешімін табамыз:

$$y_{\text{с.б.}} = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

мұндағы y_1 және y_2 – шешімдердің фундаментальді жүйесі, C_1 және C_2 – кез-келген тұрақтылар.

Сызықтық біртекті теңдеудің жалпы шешімі арқылы сызықтық біртекті емес теңдеудің жалпы шешімін мына түрде іздейміз:

$$y_{\text{с.б.е.}} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2\ , \qquad (*)$$

мұндағы $C_1(x)$ және $C_2(x)$ – тұрақтылар емес, x айнымалысына тәуелді белгісіз функциялар деп қарастырамыз, яғни тұрақтыларды вариациялаймыз.

Белгісіз $C_1(x)$ және $C_2(x)$ функцияларды анықтау үшін мынадай жүйені шешеміз:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) = f(x) \end{cases} \Rightarrow\ C_i'(x) = \phi_i(x) \Rightarrow\ C_i(x) = \int \phi_i\,(x) dx + K_i\ \Rightarrow$$

$C_i(x) = \Phi_i(x) + K_i,\ (i = 1{,}2)$, мұндағы K_i – кез-келген тұрақтылар.

$C_1(x)$ және $C_2(x)$ мәндерін (*)-ға қоямыз:

$$y_{\text{с.б.е.}} = (\Phi_1(x) + K_1)y_1 + (\Phi_2(x) + K_2)y_2.$$

Мысалды қарастырайық.

$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$ теңдеуге сәйкес сызықтық біртекті теңдеудің жалпы шешімін табамыз:

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

$k^2 - 2k + 1 = 0$ – сипаттаушы теңдеуі, оның түбірлері $k_1 = k_2 = 1$, сондықтан

$$y_{\text{с.б.}} = C_1e^x + C_2xe^x.$$

Тұрақтыларды вариациялаймыз:

$$y_{\text{с.б.е.}} = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x.$$

Теңдеулер жүйесін құрамыз:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0 \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{1+x^2} \end{cases}.$$

Бірінші теңдеуді (-1)-ге көбейтіп, екінші теңдеуге қосып, $C_2(x)$-ті табамыз:

$$C_2'(x)e^x = \frac{e^x}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad C_2'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad C_2(x) = arctgx + K_2.$$

$C_2(x)$-тің мәнін бірінші теңдеуге қойып, $C_1(x)$-ті табамыз:

$$C_1'(x) = -C_2'(x)x = -\frac{x}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad C_1(x) = -\frac{1}{2}ln(1 + x^2) + K_1.$$

$C_1(x)$ және $C_2(x)$-тің міндерін (*)-ға қойып, берілген теңдеудің жалпы шешімін аламыз:

$$y_{\text{с.б.е.}} = (K_1 - \frac{1}{2}ln(1 + x^2))e^x + (arctgx + K_2)xe^x$$

немесе

$$y_{\text{с.б.е.}} = [K_1e^x + K_2xe^x] + [xe^xarctgx - \frac{1}{2}e^x\, ln(1 + x^2)],$$

мұндағы бірінші квадрат жақшадағы өрнек – берілген теңдеуге сәйкес сызықтық біртекті теңдеудің жалпы шешімі, ал екіншіде – сызықтық біртекті емес теңдеудің дербес шешімі, K_1, K_2 – кез-келген тұрақтылар.

Жауабы: $y = [K_1e^x + K_2xe^x] + [xe^xarctgx - \frac{1}{2}e^x\, ln(1 + x^2)]$.

8. Дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешіңіз: $\begin{cases} y_1' = -9y_1 + 4y_2\,, \\ y_2' = 9y_1 - 4y_2\,. \end{cases}$

Шешуі.

Жүйені белгісіздерді жою тәсілімен шешеміз. Теңдеулерді қосамыз:

$$y_1' + y_2' = 0,$$

осыдан

$$y_2' = -y_1'\,. \quad (**)$$

Жүйенің бірінші теңдеуінің екі жағын дифференциалдап, (**)-ға қоямыз:

$$y_1'' = -9y_1' + 4y_2' \quad \Rightarrow \quad y_1'' = -9y_1' + 4(-y_1') \quad \Rightarrow \quad y_1'' + 13y_1' = 0,$$

яғни коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті теңдеу алдық.

Сипаттаушы теңдеуін құрып, түбірлерін табамыз:

$$k^2 + 13k = 0,\ \ k_1 = 0,\ \ k_2 = -13.$$

Сонда

$$y_1 = C_1 e^{0\cdot x} + \mathrm{C}_2 e^{-13x} = C_1 + \mathrm{C}_2 e^{-13x}, \qquad y_1' = -13C_2 e^{-13x}$$

болғандықтан, бірінші теңдеуден y_2-ні табамыз:

$$4y_2 = y_1' + 9y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = \tfrac{1}{4}\left(-13C_2 e^{-13x} + 9\cdot(C_1 + C_2 e^{-13x})\right) \quad \Rightarrow$$

$$y_2 = \frac{9}{4}C_1 - C_2 e^{-13x}.$$

Жауабы: $y_1 = C_1 + C_2 e^{-13x}$, $\ y_2 = \frac{9}{4}C_1 - C_2 e^{-13x}$.

Әдебиеттер тізімі

1. Сағынтаев С.С., Сағынтаева С.С. Жоғары математика: Оқулық. – Алматы: АЭжБУ, 2020. – 609 б.

2. Хасеинов К.А. Математика канондары. – Алматы: MMIV, 2004. – 691 б.

3. Мустахишев К.М., Атабай Б.Ж. Дифференциалдық теңдеулер. 5В060200 – Информатика мамандығы бойынша оқитын студенттер үшін дәрістер жинағы. – Алматы, 2013. – 46 б.

4. Көлекеев К. Д., Назарова К. Ж. Дифференциалдық теңдеулер: Оқулық. - Алматы: ЖШС РПБК “Дәуір”, 2012. – 216 б.

5. Понтрягин Л.С. Дифференциальные уравнения и их приложения. – М.: Едиториал УРСС, 2009. – 208 с.

6. Сборник задач по математике для втузов. Ч.2. Специальные разделы математического анализа /Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – В 3-х томах. – М.: Наука, Физматлит, 1981. – 368 с.

7. Жоғары математика бойынша жеке тапсырмалар. Комплекс сандар. Анықталмаған және анықталған интегралдар. Бірнеше айнымалдар функциялдары. Қарапайым дифференциалдық теңдеулер: Оқу құралы / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е.Юруть; А.П. Рябушконың жалпы редакциясымен. Орыс тілінен аударған Б.М. Семқұл. – Қарағанды: Қазақстан-Ресей ун-ті баспасы, 2011.– 491 бет.

7. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). – М.: Высшая школа, 2008. – 176 с.

8. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Учебное пособие для студентов втузов. 6-е изд. – М.: 2003. ч. 1. 304 с.; ч. 2. 416 с.

Мазмұны

Кіріспе..... 3
1 №1 есептеу-сызба жұмыстары. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер..... 3
1.1 Теориялық сұрақтар..... 3
1.2 Тапсырмалар..... 3
1.3 Типтік нұсқаның шешуі..... 10
2 №2 есептеу-сызба жұмыстары. Жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер. Дифференциалдық теңдеулер жүйесі..... 16
2.1 Теориялық сұрақтар..... 16
2.2 Тапсырмалар..... 17
2.3 Типтік нұсқаның шешуі..... 24
Әдебиеттер тізімі..... 33

2022 ж. жиынтық жоспары, реті 98

Төлеуова Бағила Жақсылыққызы
Василина Гүлмира Қажымұратқызы

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

6В07111 – «Ғарыштық техника және технологиялар»,
6В07112 – «Ғарыштық инженерия» білім беру бағдарламалары
студенттеріне арналған есептеу-сызба жұмыстарды
орындау бойынша әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар

Редактор: Изтелеуова Ж.Н.
Стандарттау бойынша маман: Ануарбек Ж.А.

Басылымға қол қойылды __.__.__. Пішімі 60х84 1/16
Таралымы 50 дана. Баспаханалық қағаз№ 1
Көлем – 2,0 оқу- бас.ә. Тапсырыс Бағасы 1000 тг.

«Ғұмарбек Дәукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс
университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірме – көбейту бюросы
050013 Алматы, Байтұрсынұлы көшесі, 126/1