Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ ИМЕНИ ГУМАРБЕКА ДАУКЕЕВА

Кафедра математики и математического моделирования

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и задания к выполнению расчетно-графических работ для студентов по образовательным программам
6В06104 – «Системы информационной безопасности»,
6В06103 – «Вычислительная техника и программное обеспечение»,
6В06102 – «Информационные системы»

Алматы 2022

СОСТАВИТЕЛИ: Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Дискретная математика. Методические указания и задания к расчетно-графическим работам для студентов по образовательным программам 6В06104 – «Системы информационной безопасности»,6В06103 – «Вычислительная техника и программное обеспечение», 6В06102 – «Информационные системы». – Алматы: АУЭС, 2022. – 68 с.

Настоящие методические указания – второе, исправленное и дополненное издание методических указаний к расчетно-графическим работам № 1, 2, 3 по «Дискретной математике» (разделы «Множества, отношения», «Элементы математической логики» и «Элементы теории графов»), изданых 2018 году. Приведены варианты заданий, необходимые теоретические сведения и подробные решения типовых задач.

Ил. 20, табл. 19, библиогр. – 15 назв.

Рецензент: доцент кафедры ТКиТ, PhD Семенякин Н.В.

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи имени Гумарбека Даукеева» на 2022 г.

©НАО «Алматинский университет энергетики и связи имени Гумарбека Даукеева »,2022 г.

Введение

Дисциплина «Дискретная математика» изучает конечные множества и различные структуры на них и имеет широкий спектр приложений, чаще в областях, связанных с информационными технологиями и компьютерами, но также и в дисциплинах, имеющих практическое применение, например, в кодировании, потоках в сетях и т. д. В результате изучения дисциплины студенты должны овладеть основными методами формализации рассуждений, получить навыки моделирования для использования их в программировании, при доказательстве правильности программ, при построении математических моделей.

1 Расчетно-графическая работа № 1. Множества, отношения

Цели: изучить понятия множеств и отношений. Познакомиться с их свойствами и классификацией.

1.1 Теоретические вопросы

1. Множества, их способы задания. Булеан и универсум.
2. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна.
3. Разбиения и покрытия множеств. Прямое произведение множеств.
4. Отношения. Виды и способы задания бинарных отношений.
5. Основные свойства бинарных отношений.
6. Отношение эквивалентности.
7. Отношение порядка.
8. Функциональные отношения.
9. Понятие о мощности множеств.

1.2 Расчётные задания

1 Данное множество задать:
а) перечислением элементов;
б) общим свойством.

№	а)	б)
1.1	$\{x: x^3 - 3x^2 + 2x = 0, x \in N\}$	$\{2,4,6, \dots ,100\}$
1.2	$\{x: x = 5y, y \in N, y \leq 4\}$	$\left\{-\frac{3}{2}, +\frac{5}{4}, -\frac{7}{6}, \dots\right\}$
1.3	$\{x: x = y - z, y, z \in \{1,2\}\}$	$\{4,8,12,16, \dots\}$
1.4	$\{x: x = 3n + 2, n \in N, x < 20\}$	$\{2^2, 3^2, 4^2, \dots\}$
1.5	$\{x: x = 2n + 1, n \in N, x < 10\}$	$\left\{+\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, +\frac{1}{9}, \dots\right\}$
1.6	$\{x: 3x = x + 8\}$	$\{-4, +5, -6, +7, -8, +9\}$
1.7	$\{x: 3x + 5 = 2(x + 6)\}$	$\left\{\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{9}, \dots\right\}$
1.8	$\{x: x = 5y + 2, 3 < y < 6, y \in Z\}$	$\{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots, 9^2\}$
1.9	$\{x: x^2 - 3x + 2 = 0, x \in R\}$	$\{-2, +4, -6, +8 \dots\}$

1.10	$\{x: x = 4y, y \in N, y \leq 5\}$	$\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{19}{20}\right\}$
1.11	$\{x : x = y - z,\ y, z \in \{5,2\}\}$	$\{4,8,12,16, \dots ,60\}$
1.12	$\{x: x = n + 2, n \in N, x < 10\}$	$\{2^2, 3^2, 4^2, \dots ,12^2\}$
1.13	$\{x: x = 2n - 1, n \in N, x < 15\}$	$\left\{\frac{2^2}{3}, \frac{3^2}{6}, \frac{4^2}{9}, \dots\right\}$
1.14	$\{x: 2x = x + 6\}$	$\{4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3\}$
1.15	$\{x: x + 5 = 2(x + 5)\}$	$\left\{\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{9}, \dots, \pm\frac{1}{30}\right\}$
1.16	$\{x: x^3 \leq 100, x \in Z\}$	$\{3,6,9,12, \dots\}$
1.17	$\{x: x = 4n + 2, n \in N\}$	$\{0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots, \pm7\}$
1.18	$\{x: x = y + z, y, z \in \{1,2,3\}\}$	$\left\{\frac{3}{2^2}, \frac{5}{3^2}, \frac{7}{4^2}, \dots\right\}$
1.19	$\{x: x^2 - 9x + 20 = 0, x \in C\}$	$\{1^2, 3^2, 5^2, 7^2 \dots\}$
1.20	$\{x: x(x + 3) = 0\}$	$\left\{\frac{2}{1^3}, \frac{4}{2^3}, \frac{6}{3^3}, \dots\right\}$
1.21	$\{x: 5x + 10 = 30x + 15\}$	$\{3,6,9,12, \dots ,30\}$
1.22	$\{x: -1 \leq x \leq 10, x \in N\}$	$\left\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{6}, \dots\right\}$
1.23	$\{x: -1 \leq x \leq 10, x \in Z\}$	$\{2^3, 4^3, 6^3, \dots\}$
1.24	$\{x: x \in Z, x^2 \leq 50\}$	$\{3,6,9,12, \dots ,99\}$
1.25	$\{x: x = 8n - 2, n \in N\}$	$\{2,4,8, \dots ,32\}$
1.26	$\{x: x = y + z, y, z \in \{2,3,4\}\}$	$\left\{-\frac{2}{2^2}, +\frac{2}{3^2}, -\frac{2}{4^2}, \dots\right\}$
1.27	$\{x: x^2 + 6x + 8 = 0, x \in N\}$	$\{2^2, 4^2, 6^2 \dots\}$
1.28	$\{x: (x + 4)(x - 3) = 0\}$	$\left\{\frac{2}{1^3}, \frac{4}{2^3}, \frac{6}{3^3}, \frac{8}{4^3}, \frac{10}{5^3}\right\}$
1.29	$\{x: x + 9 = 3x + 15\}$	$\{0, \pm3, \pm6, \pm9, \dots, \pm30\}$
1.30	$\{x: -1 \leq x \leq 8, x \in N\}$	$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{22}\right\}$

2. Пусть U={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} – универсальное множество. Для данных множеств *A, B, C* найти:

а)$A \cup C$; б)$A \cap B$; в)$A \backslash B$; г)$A \oplus B$;

д)$\overline{A \cap B}$; е) $\bar{A} \cap \bar{B}$; ж) $(A \cup C) \backslash B$; и) $(A \cap B) \cup C$.

№	*A*	*B*	*C*
2.1	{1,2,3,4,5,6,7}	{4,5,6,7,8,9,10}	{2,4,6,8,10}
2.2	{2,3,4,5,6,7,8}	{5,6,7,8,9,10}	{1,3,5,7,9}
2.3	{3,4,5,6,7,8,9}	{6,7,8,9,10}	{1,2,4,6,8,9}
2.4	{6,7,8,9,10}	{1,2,4,6,8,9}	{3,4,5,6,7,8,9}
2.5	{4,5,6,7,8,9,10}	{2,4,6,8,10}	{1,2,3,4,5,6,7}
2.6	{1,3,5,7,9}	{2,3,4,5,6,7,8}	{5,6,7,8,9,10}
2.7	{1,2,3,5,7,9,10}	{3,4,5,6,7,8}	{2,4,6,7,8,9}
2.8	{6,7,8,9,10}	{1,2,3,4,5,6,7}	{3,4,5,6,7,8}
2.9	{1,3,5,7,8,9}	{2,4,6,8,10}	{7,8,9,1,2,3}
2.10	{2,4,6,7,8,9}	{1,3,5,6,7,8}	{8,9,10,1,2,3}
2.11	{2,4,6,8,10}	{1,2,3,4,5,6,7}	{4,5,6,7,8,9,10}
2.12	{1,3,5,7,9}	{2,3,4,5,6,7,8}	{5,6,7,8,9,10}
2.13	{1,2,4,6,8,9}	{3,4,5,6,7,8,9}	{6,7,8,9,10}
2.14	{3,4,5,6,7,8,9}	{6,7,8,9,10}	{1,2,4,6,8,9}
2.15	{1,2,3,4,5,6,7}	{4,5,6,7,8,9,10}	{2,4,6,8,10}
2.16	{5,6,7,8,9,10}	{1,3,5,7,9}	{2,3,4,5,6,7,8}
2.17	{2,4,6,7,8,9}	{1,2,3,5,7,9,10}	{3,4,5,6,7,8}
2.18	{3,4,5,6,7,8}	{6,7,8,9,10}	{1,2,3,4,5,6,7}
2.19	{7,8,9,1,2,3}	{1,3,5,7,8,9}	{2,4,6,8,10}
2.20	{8,9,10,1,2,3}	{2,4,6,7,8,9}	{1,3,5,6,7,8}
2.21	{4,5,6,7,8,9,10}	{2,4,6,8,10}	{1,2,3,4,5,6,7}
2.22	{5,6,7,8,9,10}	{1,3,5,7,9}	{2,3,4,5,6,7,8}
2.23	{6,7,8,9,10}	{1,2,4,6,8,9}	{3,4,5,6,7,8,9}
2.24	{1,2,4,6,8,9}	{3,4,5,6,7,8,9}	{6,7,8,9,10}
2,25	{2,4,6,8,10}	{1,2,3,4,5,6,7}	{4,5,6,7,8,9,10}
2.26	{2,3,4,5,6,7,8}	{5,6,7,8,9,10}	{1,3,5,7,9}
2.27	{3,4,5,6,7,8}	{2,4,6,7,8,9}	{1,2,3,5,7,9,10}
2.28	{1,2,3,4,5,6,7}	{3,4,5,6,7,8}	{6,7,8,9,10}
2.29	{2,4,6,8,10}	{7,8,9,1,2,3}	{1,3,5,7,8,9}
2.30	{1,3,5,6,7,8}	{8,9,10,1,2,3}	{2,4,6,7,8,9}

3. Для данных множеств A и B найти:

а) $A \times B$; б) $B \times A$; в) A^2;

г) булеан множества A (т. е. множество всех подмножеств);

д) какое-нибудь покрытие множества A;

е) какое-нибудь разбиение множества A;

ж) множество всех подмножеств A (ни булеан, ни покрытие, ни разбиение).

№	A	B	№	A	B
3.1	{1,2,3}	{4,5}	3.2	{3,4,5}	{7,8}
3.3	{7,8,9}	{1,2,3}	3.4	{7,8,9}	{3,4,5}
3.5	{4,5,8}	{2,3,5}	3.6	{4,7,8}	{9,0}
3.7	{3,4,9}	{6,7,8}	3.8	{2,6,8}	{1,2,3}
3.9	{3,5,7}	{1,4,6}	3.10	{8,9,0}	{1,2,4}
3.11	{1,3,5}	{6,7,8}	3.12	{0,1,2}	{8,9}
3.13	{6,7,8}	{4,5}	3.14	{4,5,6}	{1,2}
3.15	{3,4,8}	{1,9}	3.16	{2,9,5}	{3,4}
3.17	{4,6,8}	{1,2,3}	3.18	{1,2,3}	{4,7,9}
3.19	{1,5,6}	{2,3}	3.20	{1,3,5}	{2,7,8}
3.21	{6,7,9}	{5,8}	3.22	{6,7,8}	{5,9}
3.23	{2,4,6}	{3,5}	3.24	{3,4,7}	{8,9}
3.25	{5,6,0}	{1,2}	3.26	{5,6,8}	{2,3,7}
3.27	{1,3,4}	{7,8}	3.28	{1,3,5}	{6,7}
3.29	{2,7,8}	{4,6,9}	3.30	{3,4,6}	{1,9}

4. Доказать тождество с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

4.1	$A \setminus (B \cup C)=(A \setminus B)\cap(A \setminus C)$	4.2	$(A\cup B) \setminus (C\cap A)=(A \setminus C) \cup (B \setminus A)$
4.3	$A \setminus (B\cap C)=(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$	4.4	$(A \cup B)\setminus(C \cap B) = (A\setminus B) \cup (B\setminus C)$
4.5	$(A \setminus B)\cap C=(A\cap C) \setminus (B\cap C)$	4.6	$(B\setminus C)\setminus(A \cup C) = (B\setminus A) \cap (B\setminus C)$
4.7	$(A \setminus B)\cup C=(A\cup C) \setminus (B\setminus C)$	4.8	$A \cup (B\setminus C) = (A \cup B)\setminus(C\setminus A)$
4.9	$A\cap(B \setminus C)=(A\cap B) \setminus (A\cap C)$	4.10	$(A \cap B)\setminus C = (A \cap B)\setminus(A \cap C)$
4.11	$(A \setminus B) \setminus C=(A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$	4.12	$(A \cup B)\setminus C = (A\setminus C) \cup (B\setminus C)$
4.13	$(A \setminus C)\cup (A\cap B)=A \setminus (C \setminus B)$	4.14	$B \setminus (A\cap C)=(B \setminus A) \cup (B \setminus C)$
4.15	$(A\cap B) \setminus C =A\cap(B\setminus C)$	4.16	$(B \cap C)\setminus(A \cap C) = (C\setminus A) \cap (B\setminus A)$
4.17	$(A\cup C) \setminus (B\setminus A)=A\cup (C \setminus B)$	4.18	$(A \cap B)\setminus(A \cap C) = (A\setminus C) \cap (B\setminus C)$
4.19	$(A\cap B) \setminus (A\cap C)= (A\cap B) \setminus C$	4.20	$(A \cap B)\setminus C = (A\setminus C) \cap (B\setminus C)$
4.21	$(A\cup B)\setminus C=(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$	4.22	$(A\setminus B)\setminus C = (A\setminus B) \cap (A\setminus C)$
4.23	$A \setminus (B \setminus C)=(A \setminus B)\cup (A\cap C)$	4.24	$(C\setminus A) \cup (C\setminus B) = C\setminus(A \cap B)$
4.25	$A \setminus (B\cup C)=(A \setminus B) \setminus C$	4.26	$(B \setminus A) \cup (B \setminus C) = B \setminus (A\cap C)$
4.27	$(A \setminus B)\cap C=(A\cap C) \setminus B$	4.28	$(B \setminus C)\cup (A\cap B)=B \setminus (C \setminus A)$
4.29	$(A \setminus B)\cup (C \setminus B)=(A\cup C) \setminus B$	4.30	$(B \setminus A) \setminus C = (B \setminus C) \setminus (A \setminus C)$

5. Пусть $[P]$ и $[Q]$ – матрицы некоторых бинарных отношений. Найти $[P \cup Q]$, $[P \cap Q]$, $[P \circ Q]$, $[P^{-1}]$, $[\overline{P}]$.

Проверить выполнение включений $P \subseteq Q$ и $Q \subseteq P$.

№	$[P]$	$[Q]$	№	$[P]$	$[Q]$
5.1	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	5.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
5.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	5.4	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5.5	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	5.6	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5.7	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	5.8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
5.9	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	5.10	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5.11	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	5.12	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
5.13	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	5.14	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5.15	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	5.16	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5.17	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	5.18	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
5.19	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	5.20	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5.21	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	5.22	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5.23	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	5.24	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
5.25	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	5.26	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
5.27	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	5.28	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5.29	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	5.30	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. Для множеств $A=\{a,b,c\}$ и $B=\{1,2,3,4\}$ и отношений $P_1 \subseteq A \times B$, $P_2 \subseteq B^2$:

а) построить матрицы отношений $[P_1]$ и $[P_2]$;

б) изобразить отношения графически;

в) найти P_1^{-1}; $\overline{P_1}$; $P_1 \circ P_2$;

г) проверить для отношения P_2 выполнение свойств рефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности.

№	P_1	P_2
6.1	$\{(a,1),(a,2),(b,3),(c,2),(c,3),(c,4)\}$	$\{(1,1),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(4,4)\}$
6.2	$\{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(b,3),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
6.3	$\{(a,1),(a,2),(a,4),(c,2),(c,3),(c,4)\}$	$\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,3)\}$
6.4	$\{(a,1),(a,2),(b,2),(b,4),(c,3),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,2),(2,2),(4,3),(3,3),(4,4)\}$
6.5	$\{(a,1),(a,4),(b,2),(b,3),(c,1),(c,4)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,1),(4,3),(3,4),(4,1)\}$
6.6	$\{(a,1),(a,2),(a,4),(b,1),(b,4),(c,3)\}$	$\{(1,1),(2,4),(2,1),(3,3),(4,1),(4,2)\}$
6.7	$\{(a,1),(b,1),(b,3),(b,4),(c,3),(c,2)\}$	$\{(1,3),(1,4),(2,2),(4,3),(3,3),(4,4)\}$
6.8	$\{(a,1),(b,3),(c,1),(c,3),(c,2),(c,4)\}$	$\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),$ $(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3),(4,4)\}$
6.9	$\{(a,1),(a,2),(a,4),(b,3),(c,1),(c,4)\}$	$\{(1,3),(1,2),(2,3),(3,2),(3,4),(4,1)\}$
6.10	$\{(a,2),(a,3),(b,2),(b,3),(c,1),(c,4)\}$	$\{(1,1),(1,2),(2,2),(4,1),(3,3),(4,4)\}$
6.11	$\{(a,2),(a,4),(b,3),(c,1),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,3),(2,4),(3,1),(3,4),(4,2),(4,3)\}$
6.12	$\{(b,1),(b,3),(c,1),(c,3),(c,2),(c,4)\}$	$\{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),$ $(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$
6.13	$\{(a,1),(a,2),(a,4),(b,2),(b,4),(c,3)\}$	$\{(1,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4),(4,2)\}$
6.14	$\{(a,2),(a,3),(a,4),(c,1),(c,4),(c,3)\}$	$\{(1,4),(2,3),(2,1),(3,4),(4,2)\}$
6.15	$\{(a,1),(a,2),(b,3),(b,4),(c,3),(c,4)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3)\}$
6.16	$\{(a,2),(a,3),(a,4),(b,1),(b,2),(b,4)\}$	$\{(1,1),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(3,2),(4,3),(4,4)\}$
6.17	$\{(a,3),(b,4),(b,3),(b,1),(b,2),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,3),(2,4),(3,3),(3,1),(4,2)\}$
6.18	$\{(a,3),(b,4),(b,3),(c,1),(c,2),(c,4)\}$	$\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(4,3),(4,2)\}$
6.19	$\{(a,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,3),(c,4)\}$	$\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,1),(4,4)\}$
6.20	$\{(a,2),(a,3),(a,4),(c,1),(c,2),(b,3)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,3),(4,1),(4,3),(4,4),(3,3)\}$
6.21	$\{(a,2),(a,4),(b,1),(b,2),(b,4),$ $(c,2),(c,4)\}$	$\{(1,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4),(4,1),(3,2),(1,3)\}$
6.22	$\{(a,3),(a,4),(b,1),(b,4),(c,2),(c,4)\}$	$\{(1,1),(2,2),(2,4),(2,3),(4,4),(4,2),(3,3),(3,4)\}$
6.23	$\{(a,2),(a,3),(a,4),(b,1),(c,4),$ $(c,2),(c,3)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,2),(3,3),$ $(3,4),(4,3),(4,4)\}$
6.24	$\{(a,3),(b,2),(b,1),(b,4),(c,1),$ $(c,2),(c,4)\}$	$\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(3,2),(3,4),(4,4)\}$

6.25	$\{(a,2),(a,3),(a,4),(b,3),(c,4),(c,1)\}$	$\{(1,1),(2,2),(2,3),(1,4),(3,4),(4,2),(2,4)\}$
6.26	$\{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(b,3),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
6.27	$\{(a,1),(a,2),(a,4),(c,3),(c,2),(c,4)\}$	$\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$
6.28	$\{(a,1),(a,2),(b,2),(b,4),(c,3),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,2),(2,2),(4,3),(3,3),(4,4)\}$
6.29	$\{(a,1),(a,4),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,1),(4,3),(3,4),(4,1)\}$
6.30	$\{(a,1),(a,2),(a,4),(b,1),(b,4),(c,2)\}$	$\{(1,1),(2,4),(2,1),(3,3),(4,1),(4,3)\}$

7. Доказать, что отношение P является отношением эквивалентности на множестве $A=\{1,2,3,4\}$. Построить классы эквивалентности и фактор-множество.

№	P	№	P
7.1	$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	7.2	$\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$
7.3	$\{(1,1),(4,2),(2,4),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	7.4	$\{(1,1),(2,3),(3,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
7.5	$\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	7.6	$\{(1,1),(4,3),(3,4),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
7.7	$\{(1,1),(1,4),(4,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	7.8	$\{(1,1),(3,2),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
7.9	$\{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,4),(3,3),(4,2),(4,3),(4,4)\}$	7.10	$\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$
7.11	$\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,2),(4,4)\}$	7.12	$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
7.13	$\{(1,1),(2,3),(3,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	7.14	$\{(1,1),(4,2),(2,4),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
7.15	$\{(1,1),(4,3),(3,4),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	7.16	$\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
7.17	$\{(1,1),(3,2),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(4,1),(4,4)\}$	7.18	$\{(1,1),(1,4),(4,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
7.19	$\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,2),(4,4)\}$	7.20	$\{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,4),(3,3),(4,2),(4,3),(4,4)\}$
7.21	$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	7.22	$\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$
7.23	$\{(1,1),(4,2),(2,4),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	7.24	$\{(1,1),(2,3),(3,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
7.25	$\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	7.26	$\{(1,1),(4,3),(3,4),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
7.27	$\{(1,1),(1,4),(4,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	7.28	$\{(1,1),(3,2),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
7.29	$\{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,4),(3,3),(4,2),(4,3),(4,4)\}$	7.30	$\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,2),(4,4)\}$

8. Для данного разбиения $\mathcal{A}$ множества $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ построить соответствующее отношение эквивалентности. Почему оно является отношением эквивалентности? Записать классы эквивалентности и фактор-множество.

№	$\mathcal{A}$	№	$\mathcal{A}$
8.1	{{1,2},{3,4},{5,6}}	8.2	{{1},{2},{3},{4,5},{6}}
8.3	{{1},{2,3},{4,5,6}}	8.4	{{1},{2,3,4},{5,6}}
8.5	{{1,2,3},{4},{5,6}}	8.6	{{1},{2,3},{4},{5,6}}
8.7	{{1},{2},{3,4},{5,6}}	8.8	{{1,2},{3},{4,5},{6}}
8.9	{{1,2,3,4},{5},{6}}	8.10	{{1,2,3,4},{5,6}}
8.11	{{1,2},{3},{4},{5,6}}	8.12	{{1},{2,3,4,5},{6}}
8.13	{{1},{2,3,4},{5},{6}}	8.14	{{1},{2},{3},{4},{5,6}}
8.15	{{1,2},{3,4}{5},{6}}	8.16	{{1},{2},{3,4},{5},{6}}
8.17	{{1},{2},{3},{4,5,6}}	8.18	{{1},{2},{3},{4},{5},{6}}
8.19	{{1},{2},{3,4,5},{6}}	8.20	{{1},{2},{3,4,5,6}}
8.21	{{1,2,3,4,5},{6}}	8.22	{{1,2,3},{4},{5},{6}}
8.23	{{1,2,3},{4,5,6}}	8.24	{{1},{2,3},{4,5},{6}}
8.25	{{1,2},{3,4,5,6}}	8.26	{{1},{2,3,4,5,6}}
8.27	{{1,2},{3},{4},{5},{6}}	8.28	{{2},{1,3,4,5},{6}}
8.29	{{1,2,3},{4,5},{6}}	8.30	{{3},{1,2,4,5},{6}}

9. Доказать, что отношение P является отношением порядка $(P=\prec)$ на множестве A={a,b,c,d,e} или A={a,b,c,d}. Какой это порядок (частичный нестрогий, строгий, линейный)? Построить диаграмму Хассе для упорядоченного множества $(A,\prec)$.

№	P	№	P
9.1	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(b,c)}	9.2	{(a,c),(b,c),(b,d),(c,d),(a,d)}
9.3	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(b,c),(c,d),(a,d),(b,d)}	9.4	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(a,c),(a,e), (d,b),(e,b)}
9.5	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(a,c),(b,c),(b,d),(c,d),(a,d)}	9.6	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(c,a),(c,b),(c,e),(d,a),(d,b),(d,e),(e,a),(e,b)}
9.7	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(d,a),(d,b),(d,c),(e,a),(e,b),(e,c),(e,d)}	9.8	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(a,c),(e,d), (e,c)}
9.9	{(a,b),(c,a),(c,b,),(d,a),(d,b),(e,a),(e,b)}	9.10	{(a,b),(a,c),(b,c),(b,d),(c,d),(a,d)}
9.11	{(a,b),(c,b),(d,a),(d,b),(d,c),(d,e)}	9.12	{(c,a),(c,b),(c,e),(d,a),(d,b),(d,e),(e,a),(e,b)}
9.13	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(c,b),(d,a),(d,b),(d,c),(d,e)}	9.14	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(c,a),(c,b), (d,a),(d,b),(e,a),(e,b)}
9.15	{(a,b),(a,c),(a,e),(d,b),(e,b)}	9.16	{(a,b),(c,b),(a,c),(e,d,),(e,c),(e,b)}
9.17	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(b,c)}	9.18	{(a,c),(b,c),(b,d),(c,d),(a,d)}
9.19	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(b,c),(c,d),(a,d),(b,d)}	9.20	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(a,c),(a,e), (d,b),(e,b)}
9.21	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(a,c),(b,c),(b,d),(c,d),(a,d)}	9.22	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(c,a),(c,b),(c,e),(d,a),(d,b),(d,e),(e,a),(e,b)}
9.23	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(d,a),(d,b),(d,c),(e,a),(e,b),(e,c),(e,d)}	9.24	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(a,c),(e,d), (e,c)}
9.25	{(a,b),(c,a),(c,b,),(d,a),(d,b),(e,a),(e,b)}	9.26	{(a,b),(a,c),(b,c),(b,d),(c,d),(a,d)}
9.27	{(a,b),(c,b),(d,a),(d,b),(d,c),(d,e)}	9.28	{(c,a),(c,b),(c,e),(d,a),(d,b),(d,e),(e,a),(e,b)}
9.29	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(c,b),(d,a),(d,b),(d,c),(d,e)}	9.30	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(c,a),(c,b),(d,a),(d,b),(e,a),(e,b)}

10. Даны два отношения P и Q. Доказать, что эти отношения являются функциями. Найти композиции $P \circ Q, Q \circ P$. Какими свойствами обладают эти отношения (инъективность, сюръективность, биективность)?

10.1	$P=\{(x,x^2+1)/x\in R\}$ $Q=\{(x,x+3)/x\in R\}$	10.2	$P=\{(x,\sqrt{x^2+2})/x\in R\}$ $Q=\{(x,x^2+3)/x\in R\}$
10.3	$P=\{(x,e^x)/x\in R\}$ $Q=\{(x,3x-2)/x\in R\}$	10.4	$P=\{(x,3x^2+4)/x\in R\}$ $Q=\{(x,x-6)/x\in R\}$
10.5	$P=\{(x,e^x)/x\in R\}$ $Q=\{(x,2x+1)/x\in R\}$	10.6	$P=\{(x,\sin x)/x\in R\}$ $Q=\{(x,3x)/x\in R\}$
10.7	$P=\{(x,\sqrt[3]{x})/x\in R\}$ $Q=\{(x,x^2-6)/x\in R\}$	10.8	$P=\{(x,\cos x)/x\in R\}$ $Q=\{(x,1-x)/x\in R\}$
10.9	$P=\{(x,x^2+3)/x\in R\}$ $Q=\{(x,7x-2)/x\in R\}$	10.10	$P=\{(x,x^3)/x\in R\}$ $Q=\{(x,6x+2)/x\in R\}$
10.11	$P=\{(x,x^2+4)/x\in R\}$ $Q=\{(x,8x)/x\in R\}$	10.12	$P=\{(x,x^2+4)/x\in R\}$ $Q=\{(x,6x+2)/x\in R\}$
10.13	$P=\{(x,x^4)/x\in R\}$ $Q=\{(x,3x+5)/x\in R\}$	10.14	$P=\{(x,x^2+7)/x\in R\}$ $Q=\{(x,x-3)/x\in R\}$
10.15	$P=\{(x,x^2+6)/x\in R\}$ $Q=\{(x,4x+3)/x\in R\}$	10.16	$P=\{(x,x^2+4)/x\in R\}$ $Q=\{(x,2x-8)/x\in R\}$
10.17	$P=\{(x,\sin x)/x\in R\}$ $Q=\{(x,5x+3)/x\in R\}$	10.18	$P=\{(x,x^2-5)/x\in R\}$ $Q=\{(x,7x+1)/x\in R\}$
10.19	$P=\{(x,x^2+6)/x\in R\}$ $Q=\{(x,x+1)/x\in R\}$	10.20	$P=\{(x,e^x)/x\in R\}$ $Q=\{(x,5x+2)/x\in R\}$
10.21	$P=\{(x,x^2+8)/x\in R\}$ $Q=\{(x,2x-5)/x\in R\}$	10.22	$P=\{(x,e^x)/x\in R\}$ $Q=\{(x,2x+1)/x\in R\}$
10.23	$P=\{(x,x^2-4)/x\in R\}$ $Q=\{(x,5x+6)/x\in R\}$	10.24	$P=\{(x,x^3)/x\in R\}$ $Q=\{(x,7x+8)/x\in R\}$
10.25	$P=\{(x,x^2+4)/x\in R\}$ $Q=\{(x,2x-8)/x\in R\}$	10.26	$P=\{(x,\cos x)/x\in R\}$ $Q=\{(x,5x+1)/x\in R\}$
10.27	$P=\{(x,x^2+7)/x\in R\}$ $Q=\{(x,\frac{x+9}{4})/x\in R\}$	10.28	$P=\{(x,x^2+3)/x\in R\}$ $Q=\{(x,7x-2)/x\in R\}$
10.29	$P=\{(x,x^4)/x\in R\}$ $Q=\{(x,3x+5)/x\in R\}$	10.30	$P=\{(x,e^x)/x\in R\}$ $Q=\{(x,3x-2)/x\in R\}$

1.3 Решение типового варианта

1. а) Множество $A=\{x:-3<x<4, x\in N\}$ задать перечислением элементов.

Решение: так как N={1,2,3,4,…}, то A={1,2,3}.

1. б) Множество $A=\left\{+\frac{2}{1},-\frac{4}{3},+\frac{6}{5},-\frac{8}{7}\right\}$ задать общим свойством.

Решение: $A=\left\{x: x=(-1)^{n+1}\frac{2n}{2n-1}, n\in N, n\le 4\right\}$.

2. Пусть U={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} – универсальное множество. Для данных множеств A={1,2,3,8,9,10}, B={1,3,5,6,7,8}, C={2,4,6,7,8,9} найти:

а)$A\cup C$; б)$A\cap B$; в)$A\backslash B$; г)$A\oplus B$;

д)$\overline{A\cap B}$; е) $\bar{A}\cap\bar{B}$; ж) $(A\cup C)\backslash B$; и) $(A\cap B)\cup C$.

Решение:

а) $A\cup C=\{1,2,3,4,6,7,8,9,10\}$;

б) $A\cap B=\{1,3,8\}$;

в) $A\backslash B=\{2,9,10\}$;

г) $A\oplus B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)=\{2,9,10\}\cup\{5,6,7\}=\{2,5,6,7,9,10\}$;

д) $\overline{A\cap B}=U\backslash(A\cap B)=\{2,4,5,6,7,9,10\}$;

е) $\bar{A}\cap\bar{B}=\{4,5,6,7\}\cap\{2,4,9,10\}=\{4\}$;

ж) $(A\cup C)\backslash B=\{2,4,9,10\}$;

и) $(A\cap B)\cup C=\{1,2,3,4,6,7,8,9\}$.

3. Для данных множеств A={3,4,5} и B={6,7,9} найти:

а) $A\times B$; б) $B\times A$; в) A^2;

г) булеан множества A (т. е. множество всех подмножеств);

д) какое-нибудь покрытие множества A;

е) какое-нибудь разбиение множества А;

ж) произвольное множество подмножеств A (ни булеан, ни покрытие, ни разбиение).

Решение:

а) $A\times B=\{(a,b): a\in A, b\in B\}=$

$=\{(3,6),(3,7),(3,9),(4,6),(4,7),(4,9),(5,6),(5,7),(5,9)\}$;

б)$B\times A=\{(6,3),(6,4),(6,5),(7,3),(7,4),(7,5),(9,3),(9,4),(9,5)\}$;

в) $A^2=A\times A=\{(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(4,4),(4,5),(5,3),(5,4),(5,5)\}$;

г) так как A состоит из трёх элементов, то булеан $\mathscr{P}(A)$ имеет $2^3 = 8$ элементов: $\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, A, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}\}$;

д) например, $A_1 = \{\{3,4\}, \{4,5\}, \{5\}\}$ – покрытие A;

е) например, $A_2 = \{\{3\}, \{4,5\}\}$ – разбиение A;

ж) например, $A_3 = \{\{4\}, \{5\}\}$ – ни булеан, ни разбиение, ни покрытие.

4. Доказать тождество $B\backslash(A \cup C) = (B\backslash A) \cap (B\backslash C)$ с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Решение: изобразим диаграммами Эйлера-Венна левую и правую части равенства отдельно.

Левая часть.

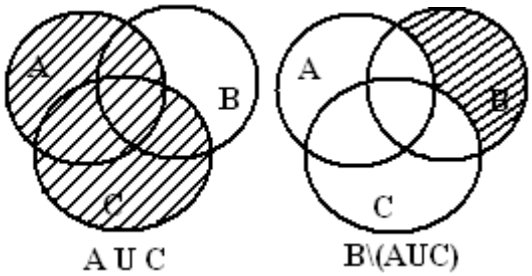


Рисунок 1 – Диаграммы Эйлера-Венна для левой части

Правая часть.

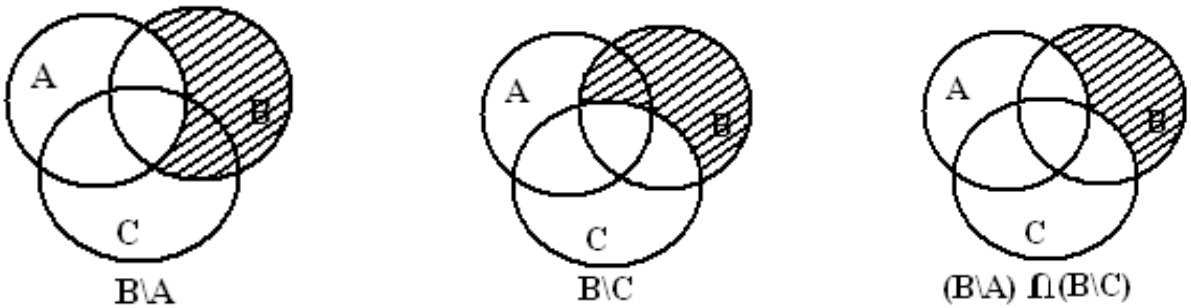


Рисунок 2 – Диаграммы Эйлера-Венна для правой части

На последних рисунках левой и правой частей отмечена одна и та же область, что доказывает тождество.

5. Пусть $[P] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $[Q] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ – матрицы некоторых бинарных отношений. Найти $[P \cup Q]$, $[P \cap Q]$, $[P \circ Q]$, $[P^{-1}]$, $[\overline{P}]$. Проверить выполнение включений $P \subseteq Q$ и $Q \subseteq P$.

Решение: если $[P] = (p_{ij})$, $[Q] = (q_{ij})$, то $[P \cup Q] = (p_{ij} + q_{ij}) = [P]+[Q]$, где элементы матриц складываются по правилам: 0+0=0, 1+0 = 0+1 = 1+1 =1;

$[P \cap Q] = (p_{ij} \cdot q_{ij}) = [P]*[Q]$, т. е. соответствующие элементы перемножаются по обычным правилам: $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$;

$[P \circ Q] = [P] \cdot [Q]$ – обычное умножение матриц, но элементы матриц $[P]$ и $[Q]$ складываются и умножаются по выше приведённым правилам;

$[P^{-1}] = [P]^{T}$, где P^{-1} отношение, обратное к P;

$\overline{P}$ – дополнение P и её матрица $[\overline{P}]$ равна матрице отношения P, в которой нули заменены единицами и единицы нулями;

если $P \subseteq Q$, то $p_{ij} \leq q_{ij} \, \forall i, j$.

В нашем случае:

$$[P \cup Q] = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+1 \\ 1+1 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$[P \cap Q] = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$[P \circ Q] = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$[P^{-1}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$[\overline{P}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \left.\begin{matrix} p_{11} = 1; \; q_{11} = 0 \\ p_{12} = 0; \; q_{12} = 1 \\ p_{21} = 1; \; q_{21} = 1 \\ p_{22} = 0; \; q_{22} = 0 \end{matrix}\right\} \longrightarrow$$ т. к., например, p_{11} не $\leq q_{11}$, то P не $\subseteq Q$;

т. к., например, q_{12} не $\leq p_{12}$, то Q не $\subseteq P$.

6. Для данных множеств $A=\{a,b,c,d\}$ и $B=\{1,2,3,4\}$ и отношений
$P_1 = \{(a,1),(a,2),(c,1),(c,2),(c,4),(d,4)\}$ и
$P_2 = \{(1,1),(2,1),(2,4),(3,3),(4,1),(4,3)\}$, $P_1 \subseteq A \times B$, $P_2 \subseteq B^2$:

а) построить матрицы отношений $[P_1]$ и $[P_2]$;

б) изобразить отношения графически;

в) найти P_1^{-1}; $\bar{P}_1$; $P_1 \circ P_2$;

г) проверить для отношения P_2 выполнение свойств рефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности.

Решение:

а) по определению $[P] = (p_{ij})$ – матрица отношения P, если

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, если\ (a_i, b_j) \in P \\ 0, если\ (a_i, b_j) \notin P \end{cases}, i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots n.$$

Таким образом, $[P_1] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $[P_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) Графическое изображение P_1 и P_2 приведено на рисунках 3 и 4;

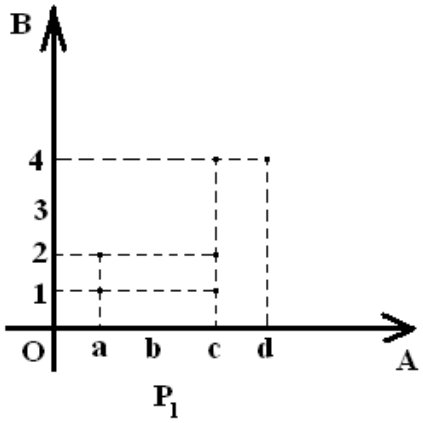


Рисунок 3 – График P_1

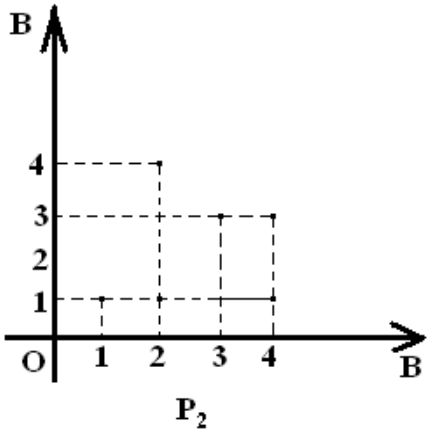


Рисунок 4 – График P_2

Заметим, что существуют другие способы графического изображения отношений. Например, отношение P_1 можно изобразить, как на рисунке 5, а отношение P_2 – как на рисунке 6 (т. е. ориентированным графом).

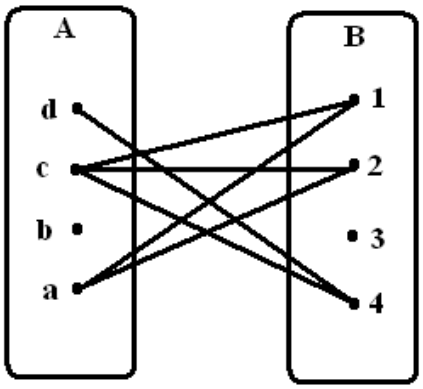


Рисунок 5 – График P_1

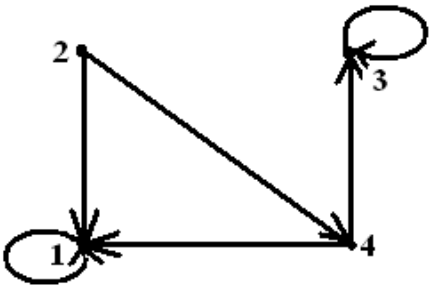


Рисунок 6 – График P_2

в) так как $P^{-1} = \{(b,a) : (a,b) \in P\}$, то

$P_1^{-1} = \{(1,a), (2,a), (1,c), (2,c), (4,c), (4,d)\}$, $P_1^{-1} \subseteq B \times A$.

Поскольку $\overline{P} = \{(a,b): (a,b) \notin P\}$, $\overline{P} \subseteq A \times B$ и $A \times B = \{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(b,1),(b,1),(b,2),(b,3),(b,4)(c,1),(c,2),(c,3),(c,4),(d,1),(d,2),(d,3),(d,4)\}$, то дополнением к P_1 будет отношение $\overline{P_1} = \{(a,3),(a,4),(b,1),(b,1),(b,2),(b,3),(b,4),(c,3),(d,1),(d,2),(d,3)\}$;

Поскольку по определению $P_1 \circ P_2 = \{(a,c) |\ a \in A,\ c \in C$ и $\exists\, b \in B$, что $(a,b) \in P_1$ и $(b,c) \in P_2\}$, где $P_1 \subseteq A \times B$, $P_2 \subseteq B \times C$, то $P_1 \circ P_2 = \{(a,1),(a,4),(c,1),(c,4),(c,3),(d,1),(d,3)\}$;

г) свойства отношения P_2 проще определить по его матрице

$$[P_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как на главной диагонали этой матрицы не все единицы, то отношение P_2 не рефлексивное.

Так как

$$[P_2]^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq [P_2],$$

то оно не симметричное.

Поскольку все элементы вне главной диагонали матрицы

$$[P_2] * [P_2]^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

являются нулями, то P_2 антисимметричное; так как, например, $(2,4) \in P_2$, $(4,3) \in P_2$, но $(2,3) \notin P_2$, то P_2 не транзитивное. Заметим, что транзитивность или не транзитивность можно определить через матрицы отношений: надо, чтобы $P \circ P \subseteq P$ или, если $[P \circ P] = [P] \cdot [P] = (a_{ij})$, $[P] = (p_{ij})$, то $a_{ij} \leq p_{ij}$.

7. Доказать, что отношение $P = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$ является отношением эквивалентности на множестве $A = \{1,2,3,4\}$. Построить классы эквивалентности и фактор-множество.

Решение: отношение E является отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично, транзитивно. Построим матрицу отношения P и по ней определим его свойства:

$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как эта матрица содержит единицы на главной диагонали, то P – рефлексивно; так как $[P]=[P]^T$, то оно симметрично.

Найдём

$$[P \circ P] = [P] \cdot [P] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, $[P \circ P] = [P]$, что доказывает транзитивность P.

P – рефлексивно, симметрично, транзитивно, поэтому оно является отношением эквивалентности.

Классом эквивалентности элемента $a \in A$ называется множество $[a]_E = [a] = \{x: (x, a) \in E\}$. Множество всех классов эквивалентности $A/E = \{[a]_E: a \in A\}$ называется фактор-множеством множества A по отношению E. Множество A/E является разбиением множества A.

Построим классы эквивалентности для каждого элемента множества $A = \{1,2,3,4\}$:

$[1] = \{x: (x, 1) \in P\} = \{1; 2\}$;

$[2] = \{x: (x, 2) \in P\} = \{1; 2\}$;

$[3] = \{x: (x, 3) \in P\} = \{3; 4\}$;

$[4] = \{x: (x, 4) \in P\} = \{3; 4\}$.

Таким образом, $[1] = [2], [3] = [4]$. Фактор-множеством множества A по отношению P будет: $A/P = \{\{1,2\}, \{3,4\}\}$.

8. Для данного разбиения $\mathcal{A} = \{\{1,3\}, \{2,4,5\}, \{6\}\}$ множества A=$\{1,2,3,4,5,6\}$ построить соответствующее отношение эквивалентности. Почему оно является отношением эквивалентности? Записать классы эквивалентности и фактор-множество.

Решение: пусть $\mathcal{A}=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ – разбиение множества A, где A_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ – подмножества A. Тогда $E = \{(x, y): x, y \in A_i, i = 1,2,\ldots,n\}$ – отношение эквивалентности, соответствующее этому разбиению.

Таким образом, в нашем случае E ={(1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(2,2)(2,4),(2,5),(4,2),(4,4)(4,5),(5,2),(5,4),(5,5),(6,6)} – отношение эквивалентности, соответствующее данному разбиению. Чтобы убедиться в том, что это отношение эквивалентности, найдём его матрицу:

$$[E] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По матрице определяем, что E рефлексивно (на главной диагонали все нули), симметрично ($[E] = [E]^T$), транзитивно ($[E \circ E] = [E]$). Поэтому E – отношение эквивалентности. Классы эквивалентности: [1]=[3]={1,3}, [2]=[4]=[5]={2,4,5}, [6]={6}. Фактор-множеством A по отношению E будет данное разбиение $\mathcal{A}=A/E$ = {{1,3},{2,4,5},{6}}.

9. Доказать, что отношение $P = \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, e), (c, e)\}$ является отношением порядка ($P = \prec$) на множестве A={a,b,c,d,e}. Какой это порядок (частичный нестрогий, строгий, линейный)? Построить диаграмму Хассе для упорядоченного множества $(A, \prec)$.

Решение: заметим, что терминология и классификация отношений порядка различны почти в каждом учебнике. Мы придерживаемся тех, которые указаны в ниже приведенной схеме (рисунок 7). На рисунке 7 отношение $P \subseteq A^2$. Сокращения ч.у.м., л.у.м., в.у.м. приняты для обозначений частично, линейно и вполне упорядоченных множеств. Кроме того, если A конечно, то л.у.м. будет и в.у.м.

Проверим для нашего отношения выполнение свойств рефлексивности, симметричности, антисимметричности и транзитивности. Матрица отношения P:

$$[P] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как на главной диагонали этой матрицы не единицы, то P не рефлексивно;

$$[P]^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq [P],$$

значит, P не симметрично;

$$[P]*[P]^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

вне главной диагонали этой матрицы все нули, поэтому P антисимметрично; для транзитивности отношения P надо, чтобы $P \circ P \subseteq P$ или, если $[P \circ P] = (a_{ij})$, $[P] = (p_{ij})$, то $a_{ij} \leq p_{ij}$.

Найдём

$$[P \circ P] = [P] \cdot [P] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видим, что $a_{ij} \leq p_{ij}\ \forall i, j$ что доказывает транзитивность P.

Итак, P не рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, поэтому оно является отношением строгого порядка. Так как элементы b и c, c и d, b и d не сравнимы (т. е. не входят в одну пару в определении P), то P – не линейный порядок. Если порядок, определённый на конечном множестве, не линейный, то он и не полный.

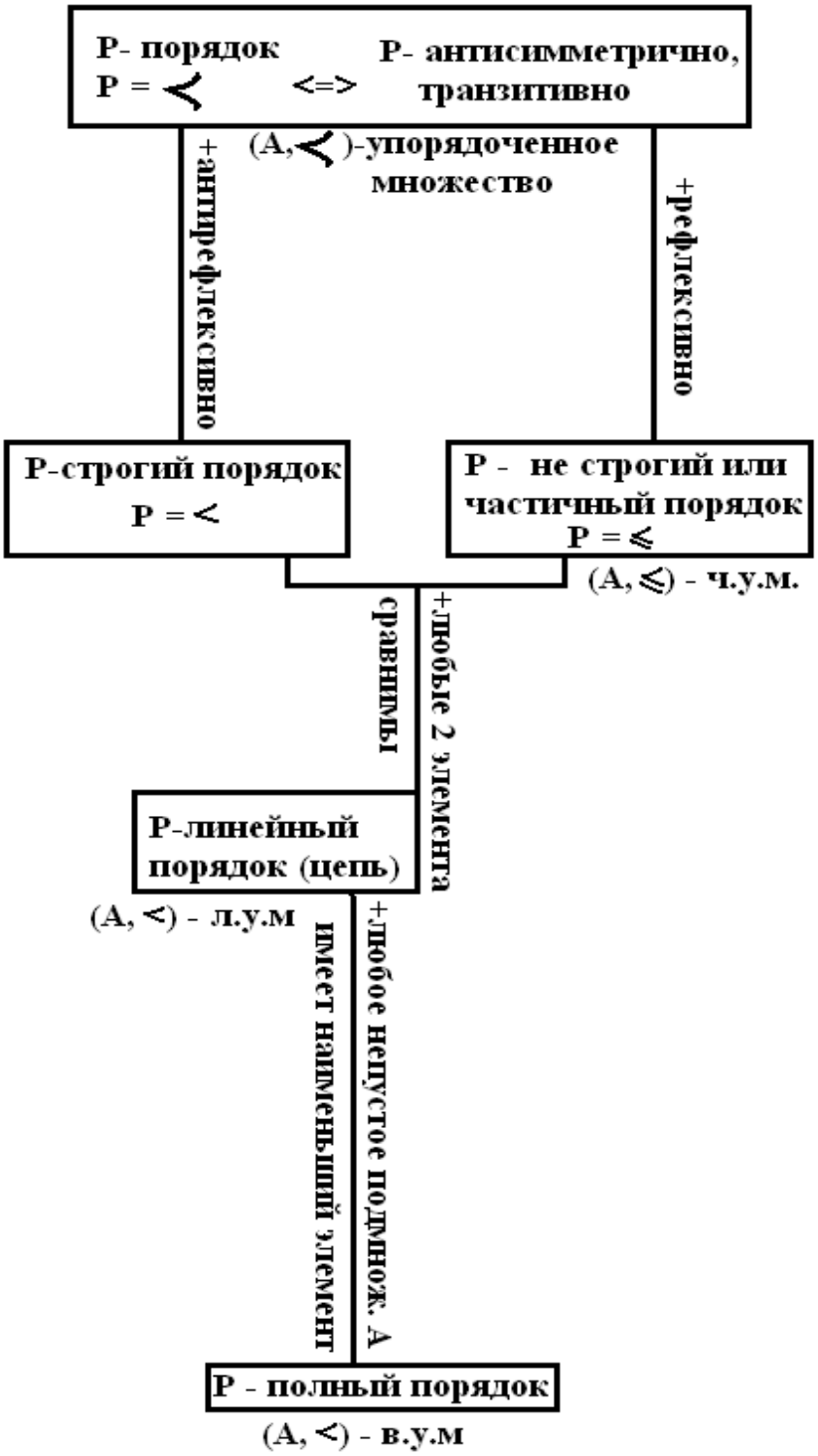


Рисунок 7 – Классификация отношений порядка

Пусть $(A, \prec)$ – упорядоченное множество. Если A конечно, то $(A, \prec)$ можно изобразить в виде схемы (диаграммы Хассе), на которой, если $x \prec y$, то x и y изображаются точками, соединёнными линией, x ниже y.

Построим диаграмму Хассе, причём, в силу транзитивности отношения порядка не нужно, например, соединять линией элементы a и e, так как если $a \prec b$ и $b \prec e$, то $a \prec e$.

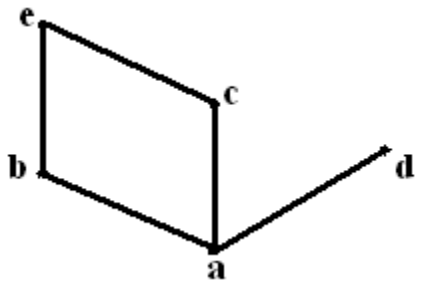


Рисунок 8 – Диаграмма Хассе

Заметим, что в случае рефлексивности P, т. е. когда P является частичным или нестрогим порядком, на диаграмме Хассе в каждой вершине появятся петли.

10. Даны два отношения $P = \{(x, x^2 + 4): x \in R\}$ и $Q = \{(x, x^3 + 6): x \in R\}$:

а) доказать, что эти отношения являются функциями;

б) найти композиции $P \circ Q, Q \circ P$;

в) какими свойствами обладают отношения (инъективность, сюръективность, биективность)?

Решение:

а) отношение $P \subseteq A \times B$ является функцией, если $[(x, y_1) \in P, (x, y_2) \in P] \Rightarrow y_1 = y_2$ или для любого $x \in A$ существует единственный y, что $(x, y) \in P$.

В нашем случае P и Q являются функциями, так как для любого действительного числа x числа $(x^2 + 4)$ и $(x^3 + 6)$ существуют и будут единственными;

б) $P \circ Q = \{(x, (x^2 + 4)^3 + 6): x \in R\}$, $Q \circ P = \{(x, (x^3 + 6)^2 + 4): x \in R\}$;

в) проверим данные функции на инъективность. Функция P называется инъективной, если $[(x_1, y) \in P, (x_2, y) \in P] \Rightarrow x_1 = x_2$ или $x_1 \neq x_2 \Rightarrow y(x_1) \neq y(x_2)$.

Для функции $P = \{(x, x^2 + 4): x \in R\}$ условие инъективности не выполняется, т. к. существуют пары значений x $(x_1 \neq x_2)$, которым соответствует одно y, например, $x_1 = 1, x_2 = -1 (x_1 \neq x_2)$, но $y(1) = (1)^2 + 4 = 5$ и $y(-1) = (-1)^2 + 4 = 5$, т.е. $y(1) = y(-1)$.

Функция $Q = \{(x, x^3 + 6): x \in R\}$ инъективна, так как для любых действительных x_1, x_2 $(x_1 \neq x_2)$ выполняется $(x_1^3 + 6) \neq (x_2^3 + 6)$.

Проверим функции на сюръективность. Функция $P \subseteq A \times B$ называется сюръективной, если для любого $y \in B$ существует $x \in A$, что $(x, y) \in P$ или область значений отношения P совпадает с $B(E_p = B)$.

Функция $P = \{(x, x^2 + 4): x \in R\}$, $P \subseteq R \times R$ не сюръективна, так как область значений $E_p = [4; +\infty) \neq R$.

Функция $Q = \{(x, x^3 + 6): x \in R\}$, $Q \subseteq R \times R$ сюръективна, так как $E_Q = R$.

Функция называется биективной, если она и инъективна и сюръективна, поэтому P не биективная функция, Q – биективная.

Заметим, что свойства инъективности, сюръективности и биективности легко определить по графикам функций. Запишем данные функциональные отношения как обычно записывают функции: $P: y = x^2 + 4$; $Q: y = x^3 + 6$. Графики этих функций изображены на рисунках 9 и 10.

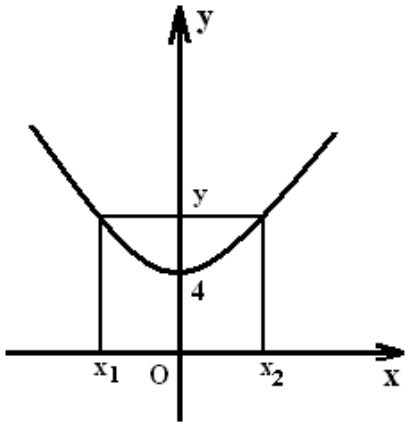


Рисунок 9 – График P

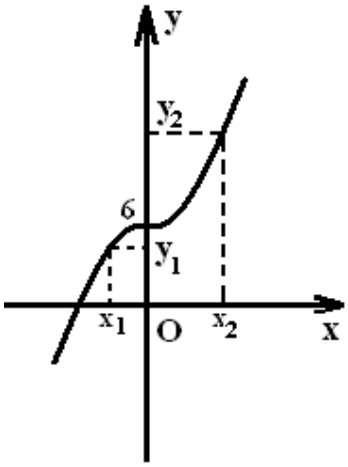


Рисунок 10 – График Q

2. Расчетно-графическая работа № 2. Элементы математической логики

Цели: познакомиться с основными понятиями математической логики, рассмотреть их свойства и некоторые приложения.

2.1 Теоретические вопросы

1. Высказывания, основные логические операции.
2. Логические переменные и формулы. Таблицы истинности.
3. Функции алгебры логики. Способы задания логических функций.
4. Основные эквивалентные соотношения алгебры логики.
5. Нормальные дизъюнктивные и конъюнктивные формы (ДНФ, КНФ).
6. Совершенные ДНФ и КНФ (СДНФ и СКНФ).
7. Минимизация в классе ДНФ. Карты Карно.
8. Коммутационные схемы.
9. Двойственность. Булева алгебра и теория множеств.

2.2 Расчётные задания

Дана функция *f(x,y)*, заданная формулой.

1. Используя соглашение о приоритетах логических операций, расставить скобки в формуле *f(x,y)*.

2. Задать эту функцию:

а) таблицей истинности; б) единичными и нулевыми наборами;

в) вектором значений.

3. Записать формулу в виде, содержащем только операции отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию; упростить эту формулу.

№	*f(x,y)*	№	*f(x,y)*
1	$x \vee \bar{y} \leftrightarrow x \oplus y$	2	$x \oplus \bar{y} \rightarrow x \downarrow y$
3	$x \rightarrow \bar{y} \mid x \oplus y$	4	$x \leftrightarrow \bar{y} \rightarrow x \oplus y$
5	$x \rightarrow y \wedge x \downarrow \bar{y}$	6	$x \leftrightarrow y \rightarrow x \downarrow \bar{y}$
7	$x \oplus y \vee \bar{x} \rightarrow y$	8	$y \rightarrow \bar{x} \mid y \oplus x$
9	$x \leftrightarrow y \wedge x \rightarrow \bar{y}$	10	$x \mid y \rightarrow \bar{x} \oplus y$
11	$x \downarrow \bar{y} \oplus x \vee y$	12	$x \wedge y \leftrightarrow \bar{x} \downarrow y$
13	$x \downarrow y \mid \bar{x} \vee y$	14	$x \vee y \rightarrow \bar{x} \downarrow y$
15	$x \oplus \bar{y} \leftrightarrow x \vee y$	16	$x \mid y \leftrightarrow x \wedge \bar{y}$
17	$\bar{x} \downarrow y \vee x \mid y$	18	$x \vee \bar{y} \mid x \oplus y$
19	$x \leftrightarrow \bar{y} \wedge x \rightarrow y$	20	$x \rightarrow \bar{y} \downarrow x \vee y$
21	$x \oplus \bar{y} \rightarrow x \leftrightarrow y$	22	$x \oplus y \rightarrow x \leftrightarrow \bar{y}$
23	$x \wedge \bar{y} \downarrow y \rightarrow x$	24	$x \oplus y \mid \bar{x} \wedge y$
25	$x \vee \bar{y} \leftrightarrow x \downarrow y$	26	$x \wedge y \leftrightarrow x \downarrow \bar{y}$
27	$x \vee \bar{y} \downarrow x \rightarrow y$	28	$x \leftrightarrow \bar{y} \wedge x \downarrow y$
29	$x \mid \bar{y} \oplus x \vee y$	30	$x \wedge \bar{y} \leftrightarrow x \downarrow y$

4. Проверить эквивалентность формул $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$:

а) с помощью таблиц истинности;

б) приведением формул к СДНФ или СКНФ с помощью эквивалентных преобразований.

№	$f_1(x, y, z)$	$f_2(x, y, z)$
4.1	$x \to (y \oplus z)$	$(x \to y) \oplus (x \to z)$
4.2	$x \mid (y \to z)$	$(x \mid y) \to (x \mid z)$
4.3	$x \wedge (y \oplus z)$	$(x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$
4.4	$x \wedge (y \to z)$	$(x \wedge y) \to (x \wedge z)$
4.5	$x \wedge (y \leftrightarrow z)$	$(x \wedge y) \leftrightarrow (x \wedge z)$
4.6	$x \wedge (y \mid z)$	$(x \wedge y) \mid (x \wedge z)$
4.7	$x \vee (y \to z)$	$(x \vee y) \to (x \vee z)$
4.8	$x \vee (y \mid z)$	$(x \vee y) \mid (x \vee z)$
4.9	$x \vee (y \leftrightarrow z)$	$(x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z)$
4.10	$x \oplus (y \leftrightarrow z)$	$(x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z)$
4.11	$x \oplus (y \to z)$	$(x \oplus y) \to (x \oplus z)$
4.12	$x \oplus (y \mid z)$	$(x \oplus y) \mid (x \oplus z)$
4.13	$x \downarrow (y \leftrightarrow z)$	$(x \downarrow y) \leftrightarrow (x \downarrow z)$
4.14	$x \mid (y \oplus z)$	$(x \mid y) \oplus (x \mid z)$
4.15	$x \to (y \mid z)$	$(x \to y) \mid (x \to z)$
4.16	$x \to (y \leftrightarrow z)$	$(x \to y) \leftrightarrow (x \to z)$
4.17	$x \vee (y \oplus z)$	$(x \vee y) \oplus (x \vee z)$
4.18	$x \mid (y \leftrightarrow z)$	$(x \mid y) \leftrightarrow (x \mid z)$
4.19	$x \downarrow (y \oplus z)$	$(x \downarrow y) \oplus (x \downarrow z)$
4.20	$x \leftrightarrow (y \oplus z)$	$(x \leftrightarrow y) \oplus (x \leftrightarrow z)$
4.21	$x \to (y \downarrow z)$	$(x \to y) \downarrow (x \to z)$
4.22	$x \downarrow (y \mid z)$	$(x \downarrow y) \mid (x \downarrow z)$
4.23	$x \leftrightarrow (y \mid z)$	$(x \leftrightarrow y) \mid (x \leftrightarrow z)$
4.24	$x \to (y \leftrightarrow z)$	$(x \to y) \leftrightarrow (x \to z)$
4.25	$x \wedge (y \leftrightarrow z)$	$(x \wedge y) \leftrightarrow (x \wedge z)$
4.26	$x \wedge (y \mid z)$	$(x \wedge y) \mid (x \wedge z)$
4.27	$x \vee (y \to z)$	$(x \vee y) \to (x \vee z)$
4.28	$x \vee (y \mid z)$	$(x \vee y) \mid (x \vee z)$
4.29	$x \vee (y \leftrightarrow z)$	$(x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z)$
4.30	$x \oplus (y \leftrightarrow z)$	$(x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z)$

Дана функция $f(A,B,C)$.

5. Составить таблицу истинности для f.

6. Привести f к ДНФ.

7. Составить для f СДНФ (два способа).

8. Построить карту Карно для f и найти минимальную ДНФ (МДНФ).

9. От МДНФ функции f перейти к КНФ.

10. Найти для f СКНФ (два способа).

11. По карте Карно для f двумя способами найти МКНФ.

12. Найти функцию f^*, двойственную к f.

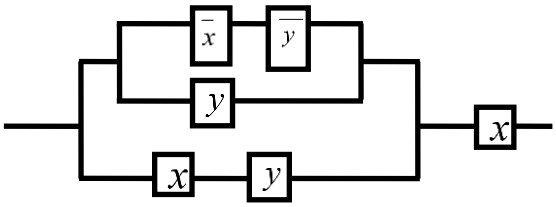
№	$f(A,B,C)$	№	$f(A,B,C)$
1	$\left(A \vee \overline{B}\right) \to \left(\overline{C} \oplus \overline{A}\right)$	2	$\overline{(A \vee \bar{B}) \to (C \oplus \bar{A})}$
3	$((A \downarrow B) \to \bar{C}) \leftrightarrow B$	4	$(\bar{A} \vee \bar{B}) \to \overline{(C \oplus A)}$
5	$(A \vee \bar{B}) \to \overline{(C \leftrightarrow \bar{A})}$	6	$\overline{(A \vee \bar{B}) \to (C \leftrightarrow \bar{A})}$
7	$\overline{(A \mid \bar{B}) \oplus (C \to \bar{A})}$	8	$(A \mid \bar{B}) \to (C \oplus \bar{A})$
9	$(A \mid B) \oplus (\bar{C} \to B)$	10	$\overline{(C \to A) \leftrightarrow (B \mid A)}$
11	$(A \mid \bar{B}) \oplus (\bar{C} \to A)$	12	$(\bar{C} \to A) \leftrightarrow (\bar{A} \mid B)$
13	$(C \to A) \oplus (A \mid \bar{B})$	14	$\left((A \downarrow B) \to C\right) \oplus B$
15	$\overline{\left((A \mid B) \to C\right)} \oplus B$	16	$(A \vee B) \to (\bar{C} \leftrightarrow B)$
17	$\overline{\left((A \downarrow B) \to \bar{C}\right) \oplus B}$	18	$\left(\overline{(A \downarrow B)} \to \bar{C}\right) \leftrightarrow B$
19	$((A \leftrightarrow B) \mid \bar{C}) \oplus B$	20	$(A \downarrow B) \to (C \leftrightarrow \bar{A})$
21	$\left(\overline{(A \leftrightarrow B)} \to \bar{C}\right) \mid B$	22	$\overline{A \vee \bar{B}} \to (\bar{C} \leftrightarrow B)$
23	$\overline{\left((A \downarrow B) \to \bar{C}\right) \leftrightarrow B}$	24	$\left(\overline{(A \downarrow B)} \to \bar{C}\right) \oplus B$
25	$\overline{(A \vee B) \to (\bar{C} \leftrightarrow B)}$	26	$\overline{(A \mid B) \oplus (\bar{C} \to B)}$
27	$\overline{((A \downarrow B) \to C) \leftrightarrow A}$	28	$(\bar{A} \vee B) \to \overline{\bar{C} \leftrightarrow A)}$
29	$\overline{\left((A \leftrightarrow B) \mid \bar{C}\right) \oplus B}$	30	$\overline{(A \downarrow B)} \to (C \leftrightarrow \bar{B})$

13. Для функции $f(x,y,z,t)$, заданной вектором значений, найти СДНФ, СКНФ, МДНФ, МКНФ.

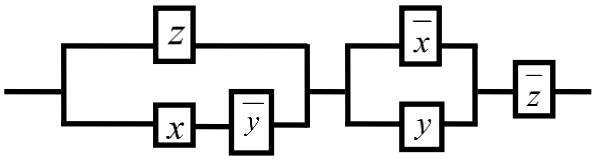
№	$f(x,y,z,t)$	№	$f(x,y,z,t)$
5.1	(1101 1101 0011 0011)	5.2	(1111 1100 1011 1011)
5.3	(1110 0101 0011 0101)	5.4	(1101 0011 1101 0011)
5.5	(1100 1011 1111 1011)	5.6	(0101 0101 1110 0011)
5.7	(0011 0011 1101 1101	5.8	(1011 1011 1100 1111)
5.9	(0101 0011 0101 1110)	5.10	(0011 1101 0011 1100)
5.11	(1011 1111 1011 1100)	5.12	(0011 1110 0101 0101)
5.13	(0011 0011 1100 1111)	5.14	(1100 0101 0011 0011)
5.15	(0010 0111 1010 1101)	5.16	(0011 1111 0011 1100)
5.17	(0101 0011 1100 0011)	5.18	(0111 1101 0010 1010)
5.19	(1111 1100 0011 0011)	5.20	(0011 0011 0101 1100)
5.21	(1110 1001 0111 0001)	5.22	(0001 0011 1100 1110)
5.23	(0011 1100 0011 0101)	5.24	(1010 0010 1101 0111)
5.25	(0101 0101 1110 0011)	5.26	(1101 1101 0011 0011)
5.27	(1111 1100 1011 1011)	5.28	(1110 0101 0011 0101)
5.29	(1101 0011 1101 0011)	5.30	(1100 1011 1111 1011)

14. По данной схеме составить и упростить переключательную функцию, построить упрощённую схему.

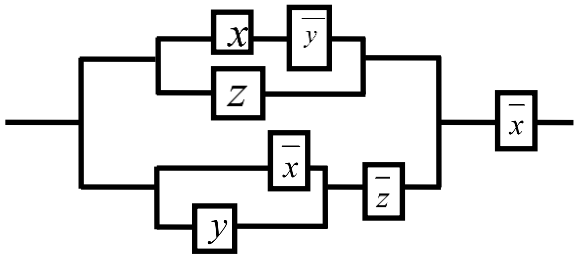
14.1



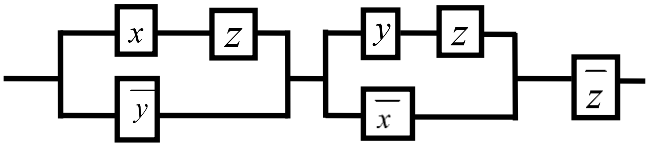
14.2



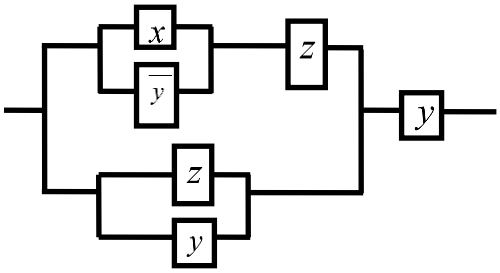
14.3



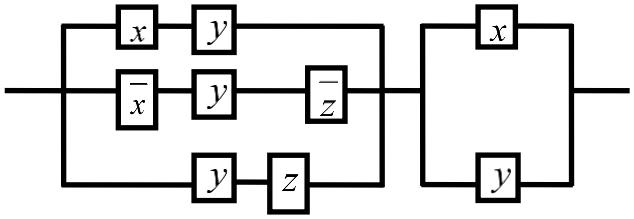
14.4



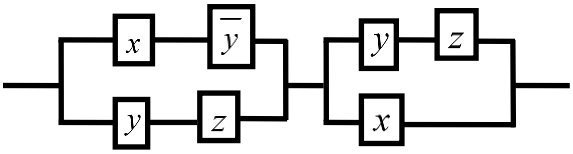
14.5



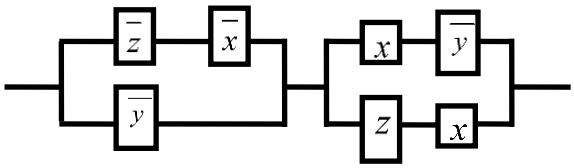
14.6



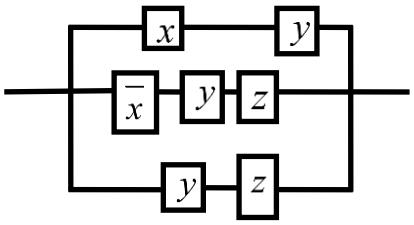
14.7



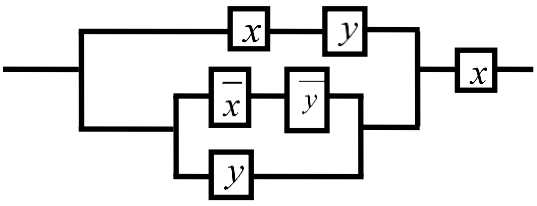
14.8



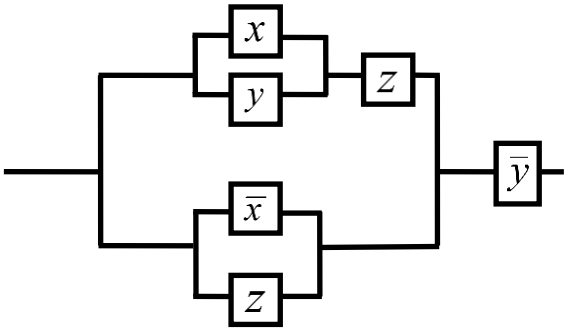
14.9



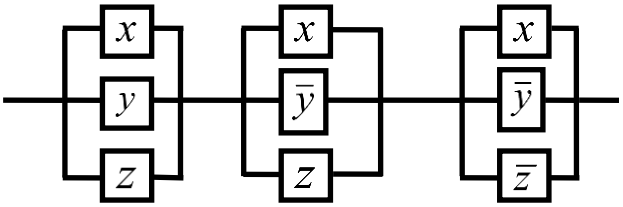
14.10



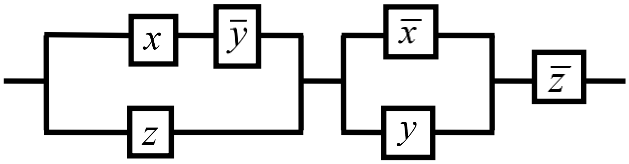
14.11



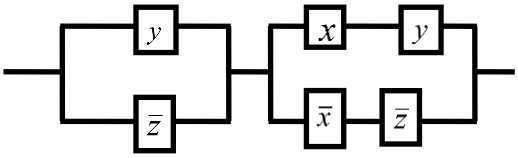
14.12



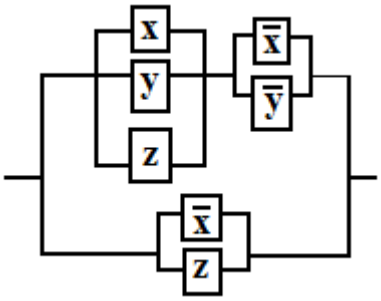
14.13



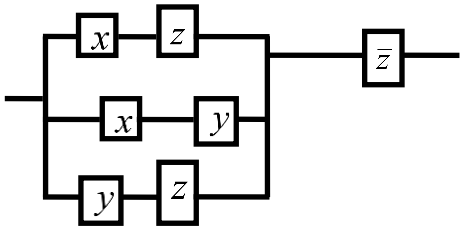
14.14



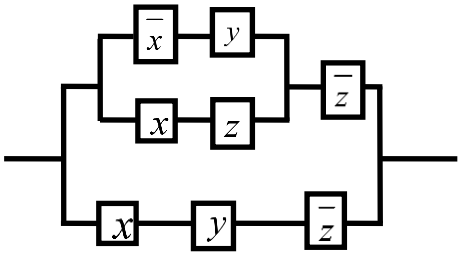
14.15



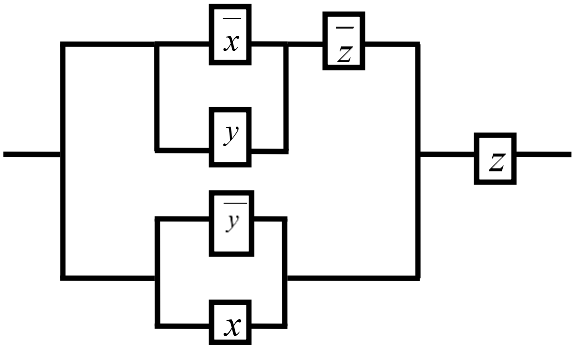
14.16



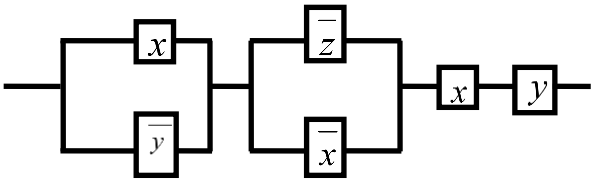
14.17



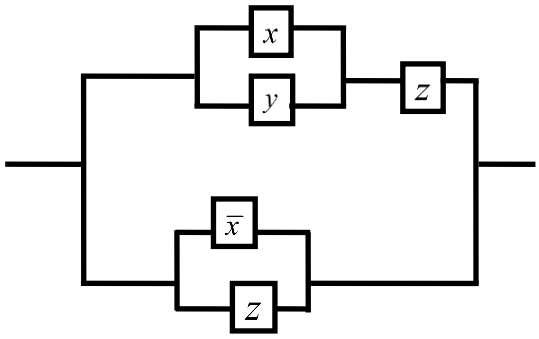
14.18



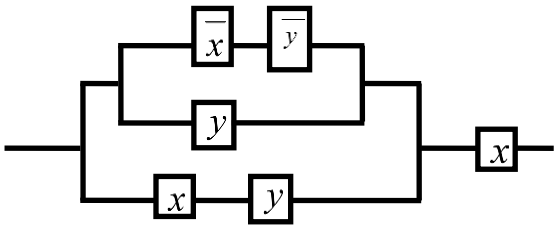
14.19



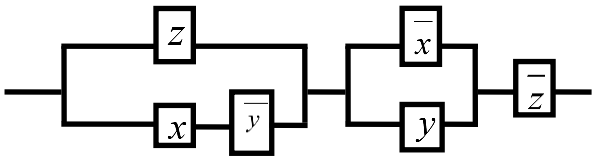
14.20



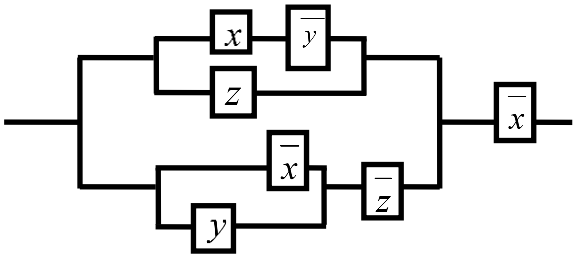
14.21



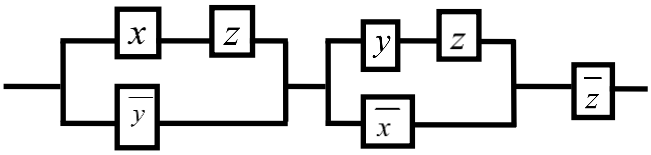
14.22



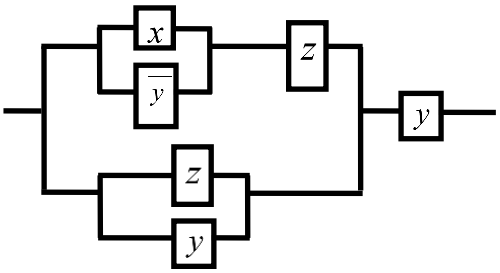
14.23



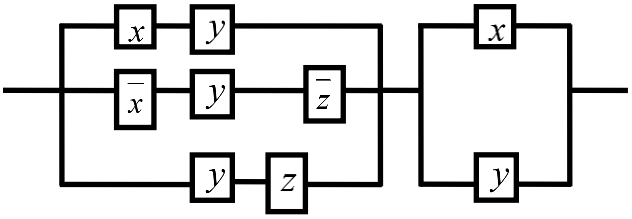
14.24



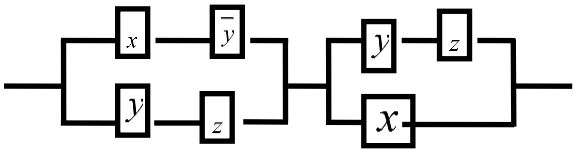
14.25



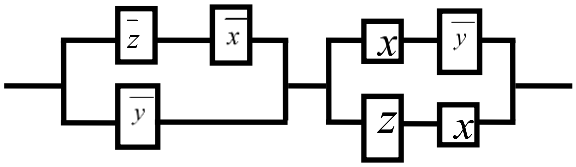
14.26



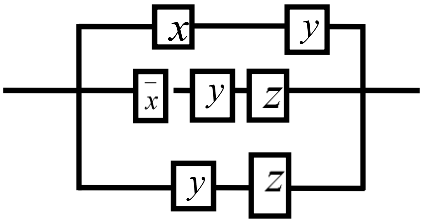
14.27



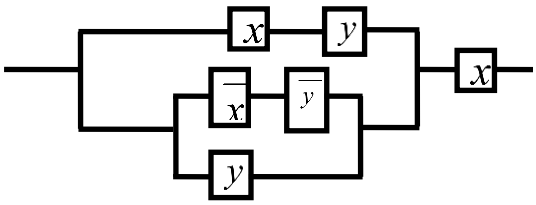
14.28



14.29



14.30



2.3 Решение типового варианта

Дана функция $f(x,y)$, заданная формулой $f(x,y)= x \wedge \bar{y} \to x \downarrow y$.

1. Используя соглашение о приоритетах логических операций, расставить скобки в формуле $f(x,y)$.

2. Задать эту функцию:
   а) таблицей истинности;
   б) единичными и нулевыми наборами;
   в) вектором значений.

3. Записать формулу в виде, содержащем только операции отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию; упростить формулу.

Решение:

1. Согласно схеме приоритетов логических операций $\{\neg, (\wedge, |, \downarrow), \vee, \to, (\leftrightarrow, \oplus)\}$ в нашей формуле скобки должны быть расставлены так:

$$x \wedge \bar{y} \to x \downarrow y = = (x \wedge \bar{y}) \to (x \downarrow y).$$

2. а) таблица истинности:

x	y	$\bar{y}$	$x \downarrow y$	$x \wedge \bar{y}$	$f(x,y)$
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1

б) единичные наборы: $1=f(0,0)=f(0,1)=f(1,1)$;
   нулевой набор: $f(1,0)$;

в) вектор значений: (1101).

3. Упростим полученную формулу:

$(x \wedge \bar{y}) \to (x \downarrow y) = |\, 15, 16 \,| = \overline{x \wedge \bar{y}} \vee \overline{x \vee y} = |\, 6 \,| = (\bar{x} \vee y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) = |\, 1 \,| =$

$= y \vee \bar{x} \vee \bar{x}\bar{y} = |\, 5 \,| = y \vee \bar{x}.$

В преобразовании указаны номера формул из справочного материала. Под упрощением будем понимать получение формулы в виде, содержащем наименьшее число переменных.

4. Проверить эквивалентность формул $f_1(x,y,z) = x \to (y \wedge z)$ и $f_2(x,y,z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$:

а) с помощью таблиц истинности;

б) приведением формул к СДНФ или СКНФ с помощью эквивалентных преобразований.

Решение:

а) таблица истинности $f_1(x,y,z)$ и $f_2(x,y,z)$:

x	y	z	$y \wedge z$	f_1	$x \to y$	$x \to z$	f_2
0	0	0	0	**1**	1	1	**1**
0	0	1	0	**1**	1	1	**1**
0	1	0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	1	1	**1**	1	1	**1**
1	0	0	0	**0**	0	0	**0**
1	0	1	0	**0**	0	1	**0**
1	1	0	0	**0**	1	0	**0**
1	1	1	1	**1**	1	1	**1**

Так как столбцы значений формул $f_1(x,y,z)$ и $f_2(x,y,z)$ совпадают, то эти формулы эквивалентны;

б) используя известные свойства логических операций, номера которых будем указывать, преобразуем формулы сначала к ДНФ – дизъюнктивной нормальной форме, затем, пользуясь законом расщепления, к совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ):

$f_1(x,y,z) = x \to (y \wedge z) =$ | 15 | $= \bar{x} \vee yz =$ | ДНФ,10а | =

$= \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y} \vee xyz \vee \bar{x}yz = \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xyz \vee \bar{x}yz =$ | 4 | =

$= \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xyz$ - СДНФ;

$f_2(x,y,z) = (x \to y) \wedge (x \to z) =$ | 15 | $= (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee z) =$ | 3 | =

$= \bar{x}\bar{x} \vee \bar{x}z \vee y\bar{x} \vee yz =$ | 4,10а | =

$= \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}zy \vee \bar{x}z\bar{y} \vee y\bar{x}z \vee y\bar{x}\bar{z} \vee yzx \vee yz\bar{x} =$

= |1,10а | $= \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}zy \vee \bar{x}z\bar{y} \vee y\bar{x}z \vee y\bar{x}\bar{z} \vee yzx \vee yz\bar{x} =$

=| 1,4 | $= \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xyz$ - СДНФ.

Если закон дистрибутивности использовать по-другому – не «раскрыть скобки», а «вынести за скобки», то преобразования будут короче:

$f_2(x,y,z) = (x \to y) \wedge (x \to z) =$ | 15 | $= (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee z) =$ | 3 | $= \bar{x} \vee yz =$ | 10а | =…

$= \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xyz$

Так как СДНФ обеих формул совпадают, то эти формулы эквивалентны.

5. Для формулы $f(A,B,C) = (A \leftrightarrow \bar{B}) \downarrow (C \oplus B)$ построить таблицу истинности.

Решение: таблица истинности формулы:

A	B	C	$\bar{B}$	$A \leftrightarrow \bar{B}$	$C \oplus B$	f
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1

6. Привести формулу $f(A,B,C) = (A \leftrightarrow \bar{B}) \downarrow (C \oplus B)$ к ДНФ.

Решение:

$f(A,B,C) = (A \leftrightarrow \bar{B}) \downarrow (C \oplus B)$ = | 14,15,16 | = $\overline{(A\bar{B} \vee \bar{A}B) \vee (\overline{CB \vee \bar{C}\bar{B}})}$ =

=|6,7 | = $\overline{A\bar{B} \vee \bar{A}B} \wedge (CB \vee \bar{C}\bar{B})$ = $\overline{A\bar{B}} \wedge \overline{\bar{A}B} \wedge (CB \vee \bar{C}\bar{B})$ =

=$(\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}) \wedge (CB \vee \bar{C}\bar{B})$ = | 3 | =$(\bar{A}A \vee \bar{A}\bar{B} \vee AB \vee B\bar{B}) \wedge (CB \vee \bar{C}\bar{B})$ =

= | 9,3 | = $\bar{A}\bar{B}CB \vee \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{B} \vee ABCB \vee AB\bar{C}\bar{B}$ = | 4,9 | = $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \vee ABC$

- ДНФ (а также СДНФ).

7. Для формулы $f(A,B,C) = (A \leftrightarrow \bar{B}) \downarrow (C \oplus B)$ составить СДНФ.

Решение: первый способ: по таблице истинности формулы выпишем её единичные наборы: $1 = f(0,0,0) = f(1,1,1)$.

Теперь применяем правило, по которому СДНФ функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ содержит столько конъюнкт, сколько единиц в столбце значений $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$; каждому единичному набору нулей и единиц $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ соответствует конъюнкта всех переменных, в которых x_i взято с отрицанием, если $\delta_i = 0$, и без отрицания, если $\delta_i = 1$.

Итак, СДНФ нашей формулы содержит дизъюнкцию двух конъюнкт:

$f = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \vee ABC$ (знак $\wedge$ опущен). Заметим, что вторым способом, т. е. методом эквивалентных преобразований СДНФ было получено в предыдущем пункте.

8. Для формулы $f(A,B,C) = (A \leftrightarrow \bar{B}) \downarrow (C \oplus B)$ построить карту Карно и найти минимальную ДНФ (МДНФ).

Решение: карта Карно функции трёх переменных представляет собой таблицу, содержащую $2^3 = 8$ ячеек (столько, сколько всех возможных наборов 0 и 1 функции трёх переменных), строки и столбцы соответствуют значениям переменных или их отрицаниям так, чтобы соседние ячейки отличались только значением одной переменной. Для получения МДНФ каждая конъюнкта СДНФ функции отмечается единицей в соответствующей ячейке карты Карно.

	B		$\bar{B}$	
A	1			
$\bar{A}$			1	
	C	$\bar{C}$		C

После этого надо объединить рядом стоящие по вертикали и горизонтали единицы в так называемые блоки, состоящие из 2, 4 и т. д. ячеек. В нашей карте Карно только две единицы, и они не объединяются в блок, поэтому МДНФ = СДНФ: $f = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \vee ABC$.

9. Для формулы $f(A,B,C) = (A \leftrightarrow \bar{B}) \downarrow (C \oplus B)$ от МДНФ перейти к КНФ.

Решение: с помощью эквивалентных преобразований, используя свойства логических операций, номера которых будем указывать, сведем формулу к КНФ:

$f = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \vee ABC = |\,7\,| = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C} \vee ABC} = |\,6\,| = \overline{\overline{ABC} \wedge \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}} =$

$= \overline{(\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C}) \wedge (A \vee B \vee C)} = |\,3\,| =$

$= \overline{\bar{A}A \vee \bar{A}B \vee \bar{A}C \vee \bar{B}A \vee \bar{B}B \vee \bar{B}C \vee \bar{C}A \vee \bar{C}B \vee \bar{C}C} = |\,9, 8, 6\,| =$

$= \overline{\bar{A}B} \wedge \overline{\bar{A}C} \wedge \overline{\bar{B}A} \wedge \overline{\bar{B}C} \wedge \overline{\bar{C}A} \wedge \overline{\bar{C}B} = |\,6\,| =$

$= (A \vee \bar{B}) \wedge (A \vee \bar{C}) \wedge (\bar{A} \vee B) \wedge (B \vee \bar{C}) \wedge (\bar{A} \vee C) \wedge (\bar{B} \vee C)$ – КНФ.

10. Для формулы $f(A,B,C) = (A \leftrightarrow \bar{B}) \downarrow (C \oplus B)$ построить СКНФ.

Решение: первый способ: пользуясь законом расщепления, КНФ, полученную в предыдущем пункте, приведём к СКНФ:

$f = (A \vee \bar{B}) \wedge (A \vee \bar{C}) \wedge (\bar{A} \vee B) \wedge (B \vee \bar{C}) \wedge (\bar{A} \vee C) \wedge (\bar{B} \vee C) =$ | 10a | =

$(A \vee \bar{B} \vee C) \wedge (A \vee \bar{B} \vee \bar{C}) \wedge (A \vee \bar{C} \vee B) \wedge (A \vee \bar{C} \vee \bar{B}) \wedge (\bar{A} \vee B \vee C) \wedge$

$\wedge (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \wedge (B \vee \bar{C} \vee A) \wedge (B \vee \bar{C} \vee \bar{A}) \wedge (\bar{A} \vee C \vee B) \wedge (\bar{A} \vee C \vee \bar{B}) \wedge$

$\wedge (\bar{B} \vee C \vee A) \wedge (\bar{B} \vee C \vee \bar{A}) =$ | 1,4 | =

$=(A \vee \bar{B} \vee C) \wedge (A \vee \bar{B} \vee \bar{C}) \wedge (A \vee B \vee \bar{C}) \wedge$

$\wedge (\bar{A} \vee B \vee C) \wedge (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B} \vee C)$ - СКНФ.

Второй способ: СКНФ можно получить, используя нулевые наборы значений переменных, которые выпишем из таблицы истинности формулы:

$0 = f(0,0,1) = f(0,1,0) = f(0,1,1) = f(1,0,0) = f(1,0,1) = f(1,1,0)$.

Теперь, следуя правилу, что СКНФ содержит столько дизъюнкт, сколько нулей в столбце значений f, и каждому нулевому набору нулей и единиц $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ соответствует дизъюнкта всех переменных, в которой i-ая переменная взята с отрицанием, если $\delta_i = 1$, и без отрицания, если $\delta_i = 0$, получим СКНФ:

$f = (A \vee \bar{B} \vee C) \wedge (A \vee \bar{B} \vee \bar{C}) \wedge (A \vee B \vee \bar{C}) \wedge (\bar{A} \vee B \vee C) \wedge$

$\wedge (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B} \vee C)$.

11. Для формулы $f(A, B, C) = (A \leftrightarrow \bar{B}) \downarrow (C \oplus B)$ по карте Карно двумя способами найти МКНФ.

Решение:

Первый способ: для получения МКНФ можно использовать карту Карно, по которой находили МДНФ. В этой карте следует заменить переменные на их отрицания и наоборот; на пустые места поставить 0 и убрать 1. Затем отметить на карте блоки, содержащие 2 или 4 нулевые соседние ячейки. В нашем случае имеется 3 блока по 2 ячейки, которым соответствуют упрощённые дизъюнкты двух переменных. Заметим, что блоки по две ячейки в этом случае можно отметить по-разному. Мы выбрали один из вариантов.

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$		0	0	0
A	0	0		0
	$\bar{C}$	C		$\bar{C}$

По этой карте МКНФ формулы имеет вид: $f = (\bar{A} \vee C) \wedge (A \vee \bar{B}) \wedge (B \vee \bar{C})$.

Второй способ: в обычной карте Карно заполнить нулями ячейки, соответствующие дизъюнктам СКНФ. Затем отметить на карте блоки, содержащие 2, 4 и т. д. нулевых соседних ячеек. Так как СКНФ функции

$$f = (A \vee \bar{B} \vee C) \wedge (A \vee \bar{B} \vee \bar{C}) \wedge (A \vee B \vee \bar{C}) \wedge (\bar{A} \vee B \vee C) \wedge$$
$$\wedge (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B} \vee C),$$

то карта Карно и отмеченные блоки имеют вид:

	B		$\bar{B}$	
A		0	0	0
$\bar{A}$	0	0		0
	C	$\bar{C}$		C

Итак, МКНФ формулы имеет вид: $f = (\bar{A} \vee C) \wedge (A \vee \bar{B}) \wedge (B \vee \bar{C})$.

Мы выбрали один из возможных вариантов отметки блоков с тем, чтобы получить МКНФ в том же виде, что и в первом случае. Можно было бы отметить другие блоки, тогда была бы получена другая МКНФ.

12. Найти функцию f^*, двойственную к f.

Решение:

Первый способ: по определению $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)}$.

Рассмотрим нашу функцию в виде СДНФ $f = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \vee ABC$, для неё по указанной выше формуле:

$$f^* = \overline{\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}\bar{\bar{C}} \vee \bar{A}\bar{B}\bar{C}} = |7| = \overline{ABC \vee \bar{A}\bar{B}\bar{C}} = |6| = \overline{ABC} \wedge \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} = |6,7| =$$
$$= (\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C}) \wedge (A \vee B \vee C).$$

Второй способ: т. к. формула $f = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \vee ABC$ записана в булевой форме, т. е. только с операциями конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, то по принципу двойственности в булевой алгебре для получения двойственной функции надо в данной формуле все конъюнкции заменить на дизъюнкции, дизъюнкции – на конъюнкции, 1 – на 0, 0 – на 1, получим формулу, представляющую двойственную функцию.

Итак, по этому принципу:

$$f = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \vee ABC \longrightarrow f^* = (\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C}) \wedge (A \vee B \vee C).$$

Третий способ: в таблице истинности для f заменить все значения на противоположные, получим таблицу истинности для f^* в перевёрнутом виде.

A	B	C	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

A	B	C	f^*
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

A	B	C	f^*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

После поворота получили обычную таблицу истинности для f^*

Из этой таблицы выпишем нулевые наборы 0= $f^*(1,1,1) = f^*(0,0,0)$, а по ним по известным правилам найдём СКНФ, которая и будет формулой, представляющей двойственную функцию $f^* = (\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}) \wedge (A \vee B \vee C)$.

13. Для функции $f(x,y,z,t)$, заданной вектором значений (0011 1101 0010 1100), найти СДНФ, СКНФ, МДНФ, МКНФ.

Решение: по вектору значений построим таблицу истинности:

x	y	z	t	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Единичные наборы: $f(0,0,1,0)=f(0,0,1,1)=f(0,1,0,0)=f(0,1,0,1)=f(0,1,1,1)=$ $=f(1,0,1,0)=f(1,1,0,0)=f(1,1,0,1)=1$;

нулевые наборы: $f(0,0,0,0)=f(0,0,0,1)=f(0,1,1,0)=f(1,0,0,0)= f(1,0,0,1)=$

$=f(1,0,1,1)=f(1,1,1,0)=f(1,1,1,1)=0$.

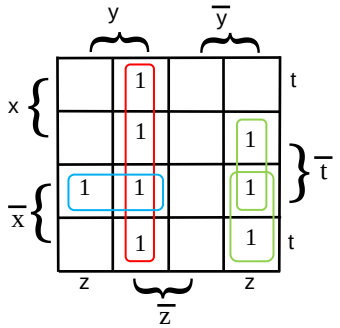
По единичным и нулевым наборам по правилу, основанному на теореме Шеннона, найдём СДНФ и СКНФ:

СДНФ: $f(x,y,z,t) = \overline{x}\,\overline{y}z\overline{t} \vee \overline{x}\,\overline{y}zt \vee \overline{x}y\overline{z}\,\overline{t} \vee \overline{x}y\overline{z}t \vee \overline{x}yzt \vee x\overline{y}z\overline{t} \vee xy\overline{z}\,\overline{t} \vee xy\overline{z}t$;

СКНФ: $f(x,y,z,t) = (x \vee y \vee z \vee t) \wedge \left(x \vee y \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee t) \wedge (\overline{x} \vee y \vee z \vee t) \wedge \left(\overline{x} \vee y \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge$

$\wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z} \vee \overline{t}) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee t) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{t})$.

Для получения минимальных ДНФ и КНФ применяем карты Карно. Каждую элементарную конъюнкцию СДНФ отметим единицей в карте Карно; две или четыре 1 в соседних ячейках объединим в блоки и отметим их:

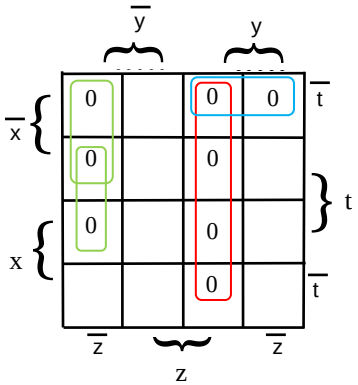


Соответствующие блокам дизъюнкции элементарных конъюнкций упрощаются. После упрощения имеем МДНФ:

$$f(x,y,z,t) = y\overline{z} \vee \overline{x}yt \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{y}z\overline{t}.$$

Для получения МКНФ можно применить два метода:

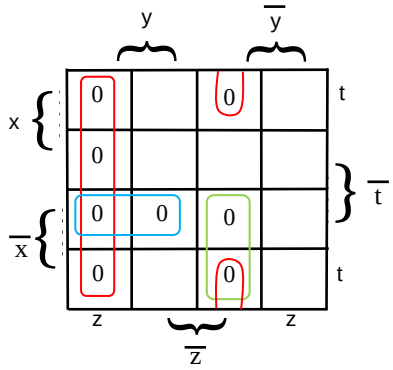
I метод: используем карту Карно для нахождения МКНФ, в которой заменим переменные на их отрицания и наоборот, на пустые места поставим 0, а 1 уберём; затем два или четыре 0 объединим в блоки, отметим их; блокам соответствуют упрощённые конъюнкции элементарных дизъюнкций.



Итак, МКНФ имеет вид:

$$f(x,y,z,t) = (y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{t}) \wedge (\overline{y} \vee \overline{z} \vee t) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}).$$

II метод: используем СКНФ и обычную карту Карно, в которую ставим 0, отвечающие соответствующим элементарным дизъюнкциям СКНФ и т. д.

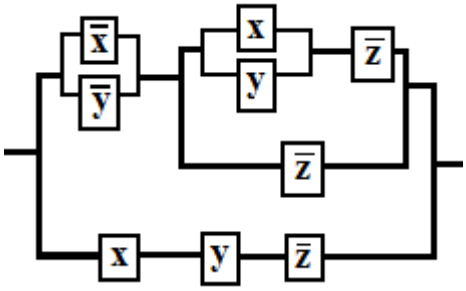


Получим то же МКНФ:

$$f(x,y,z,t) = (y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{t}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z} \vee t) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

Заметим, что мы могли бы объединить в блоки другие 0, тогда была бы получена другая МКНФ.

14. Для данной схемы составить и упростить переключательную функцию, построить упрощённую схему.



Решение: составим функцию проводимости для данной схемы

$$f(x,y,z) = (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (((x \vee y) \wedge \bar{z}) \vee \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}).$$

Для упрощения этой функции используем два метода. По методу эквивалентных преобразований имеем:

$f(x,y,z)$ = | 3 | = $(\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge ((x\bar{z} \vee y\bar{z}) \vee \bar{z}) \vee xy\bar{z}$= | 5 | =$(\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z} \vee xy\bar{z}$=

=$|3| = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee xy)\bar{z} = |12| = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee x)\bar{z} = |8{,}9| = 1 \wedge \bar{z} = |8| = \bar{z}$.

Для наглядности знак $\wedge$ в некоторых местах опущен.

Для минимизации с помощью карт Карно сначала получим СДНФ:

$f = (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (x\bar{z} \vee y\bar{z} \vee \bar{z}) \vee xy\bar{z}$ = | 5 | = $(\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z} \vee xy\bar{z}$= | 3 | = $\bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z}$ =

= | 10a | = $\bar{x}\bar{z}y \vee \bar{x}\bar{z}\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z}x \vee \bar{y}\bar{z}\bar{x} \vee xy\bar{z}$= | 1, 4 | = $\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z}$-

СДНФ.

В карте Карно отметим единицами конъюнкты, рядом стоящие единицы объединим в блоки и составим МДНФ.

	y		$\bar{y}$	
x		1	1	
$\bar{x}$		1	1	
	z	$\bar{z}$		z

Таким образом, МДНФ: $f = \bar{z}$. Полученной формуле соответствует упрощённая схема:

2.4 Справочный материал. Логические операции и их таблицы истинности

1. Конъюнкция – $(x \wedge y)$, читается «x и y».

2. Дизъюнкция – $(x \vee y)$, читается «x или y».

3. Отрицание (инверсия) – $(\bar{x})$, читается «не x».

4. Импликация – $(x \rightarrow y)$, читается «если x, то y».

5. Эквиваленция – $(x \leftrightarrow y)$, читается «x если и только если y».

6. Штрих Шеффера – $(x|y)$, определяется как отрицание конъюнкции, т. е. читается «не x и y».

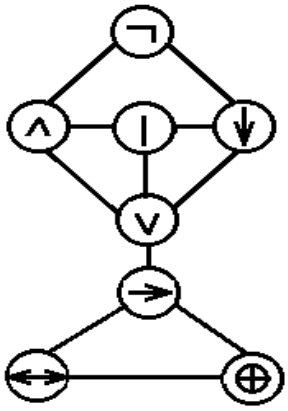
7. Стрелка Пирса – $(x \downarrow y)$, определяется как отрицание дизъюнкции, т. е. читается «не x или y».

8. Кольцевая сумма – $(x \oplus y)$, определяется как отрицание эквиваленции (исключающее «или»), т. е. читается «или x, или y».

x	y	$\bar{x}$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$	$x\|y$	$x \downarrow y$	$x \oplus y$
0	0	1	0	0	1	1	1	1	0
0	1		0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1		1	1	1	1	0	0	0

Схема приоритетов логических операций:

$\{\neg, (\wedge, |, \downarrow), \vee, \rightarrow, (\leftrightarrow, \oplus)\}$**.** В этой схеме знаки операций расположены в порядке убывания старшинства, в круглых скобках указаны равносильные операции. Схему приоритетов можно построить и так:



В этой схеме, чем выше знак, тем он сильнее, а знаки, расположенные на одном уровне, равносильны.

Основные эквивалентные соотношения (законы).

1	Коммутативность	$x \wedge y = y \wedge x$	$x \vee y = y \vee x$
2	Ассоциативность	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
3	Дистрибутив-ность	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
4	Идемпотентность	$x \wedge x = x$	$x \vee x = x$
5	Законы поглощения	$x \wedge (x \vee y) = x$	$x \vee (x \wedge y) = x$
6	Законы Де-Моргана	$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$	$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$
7	Двойное отрицание	$\overline{\overline{x}} = x$	
8	Свойства констант	$x \wedge 1 = x$ $x \wedge 0 = 0$	$x \vee 1 = 1$ $x \vee 0 = x$
9	$x \wedge \overline{x} = 0$ – закон противоречия	$x \vee \bar{x} = 1$ – закон исключённого третьего	

Некоторые другие полезные эквивалентные соотношения.

10	Закон склеивания	$(x \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) = x$
10a	Закон расщепления	$x = (x \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y})$
11	Обобщённое склеивание	$(x \wedge z) \vee (y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge y) = (x \wedge z) \vee (y \wedge \overline{z})$
12	$x \vee (\overline{x} \wedge y) = x \vee y$	$\overline{x} \vee (x \wedge y) = \overline{x} \vee y$
13	$x \wedge (\overline{x} \vee y) = x \wedge y$	$\overline{x} \wedge (x \vee y) = \overline{x} \wedge y$
14	$(x \to y) = \overline{x} \vee y$	$x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x) = (\overline{x} \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) =$ $= xy \vee \overline{x\,y}$
15	$x \mid y = \overline{x \wedge y}$	$x \downarrow y = \overline{x \vee y}$
16	$x \oplus y = \overline{x \leftrightarrow y}$	

3. Расчетно-графическая работа № 3. Элементы теории графов

Цели: познакомиться с основными понятиями теории графов, рассмотреть некоторые приложения графов.

3.1 Теоретические вопросы

1. Основные понятия и определения теории графов.
2. Способы задания графов.
3. Операции над графами, части графов.
4. Маршруты, цепи, пути, циклы, контуры.
5. Связность. Компоненты связности.
6. Расстояния в графах.
7. Взвешенные графы. Матрица весов.
8. Нахождение кратчайших маршрутов.
9. Деревья, лес, остов графа.
10. Цикломатическое число, коранг. Число остовных деревьев графа.
11. Определение остовного дерева минимального веса.
11. Кодирование.

3.2 Расчётные задания

Неориентированный граф (н-граф) G задан списком рёбер.

1. Задать G:

а) двумя множествами: вершин V и рёбер E;

б) графически;

в) матрицей смежности;

г) матрицей инцидентности.

2. Найти матрицу расстояний, эксцентриситеты вершин, диаметр и радиус графа G.

3. Проверить условие эйлеровости графа G, найти эйлеров цикл.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Рёбра	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.
a	1,2	1,2	1,2	1,4	1,2	1,4	1,4	1,2	1,2	1,4
b	1,5	1,4	1,4	1,5	1,4	1,5	1,6	1,4	1,3	1,5
c	2,4	2,3	2,4	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	1,4	2,4
d	3,5	2,4	3,4	2,5	2,4	2,5	2,5	2,4	1,5	2,5
e	3,6	2,5	3,5	3,5	2,5	3,6	3,5	2,5	2,3	3,4
f	4,5	3,6	4,5	4,5	3,5	4,5	4,5	3,4	2,4	3,5
g	5,6	5,6				5,6	5,6	4,5	2,5	4,5

№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Рёбра	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.
a	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,4	1,2
b	1,3	1,5	1,4	1,4	1,4	1,5	1,4	1,4	1,5	1,4
c	1,4	2,3	2,3	2,3	2,3	2,4	2,3	2,4	2,3	2,3
d	1,5	2,4	2,5	2,4	2,4	3,5	2,4	3,4	2,5	2,4
e	2,4	2,5	2,6	2,5	2,5	3,6	2,5	3,5	3,5	2,5
f	3,4	3,4	3,6	4,5	3,4	4,5	3,6	4,5	4,5	3,5
g	4,5		4,5		4,5	5,6	5,6			
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Рёбра	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.
a	1,4	1,4	1,2	1,2	1,4	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2
b	1,5	1,6	1,4	1,3	1,5	1,3	1,5	1,4	1,4	1,4
c	2,3	2,3	2,3	1,4	2,4	1,4	2,3	2,3	2,3	2,3
d	2,5	2,5	2,4	1,5	2,5	1,5	2,4	2,5	2,4	2,4
e	3,6	3,5	2,5	2,3	3,4	2,4	2,5	2,6	2,5	2,5
f	4,5	4,5	3,4	2,4	3,5	3,4	3,4	3,6	4,5	3,4
g	5,6	5,6	4,5	2,5	4,5	4,5		4,5		4,5

Ориентированный граф (орграф) $G = (V,E)$ задан множествами вершин $V = \{1,2,3,4\}$ и дуг $E=\{a,b,c,d,e,f,k,l\}$, причём дуги определены парами начальных и конечных вершин.

4. Задать G:

а) графически;

б) матрицей смежности;

в) матрицей инцидентности;

г) списком дуг.

5. Найти степени входа и выхода вершин графа G и степени вершин соответствующего н-графа. Записать равенства, определяющие связь степеней вершин и числа рёбер графа.

6. Определить соответствующее графу G бинарное отношение. Какими свойствами (рефлексивность, симметричность, и т. д.) обладает данное отношение?

7. Привести пример двух достижимых и двух не достижимых вершин, если они существуют. Будет ли граф связным, сильно связным? Найти его компоненты сильной связности.

№	E	№	E
1	$\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,3)\}$	2	$\{(1,1),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$
3	$\{(1,1),(1,2),(2,2),(3,2),(3,4),(3,3),(4,1),(4,2)\}$	4	$\{(1,4),),(2,1),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,4)\}$
5	$\{(1,2),(2,1),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,3),(4,4)\}$	6	$\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(3,2),(4,3)\}$
7	$\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(4,3),(4,4)\}$	8	$\{(1,1),(2,1),(2,2),(2,3),(1,4),(3,4),(3,3),(2,4)\}$
9	$\{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(3,1),(3,4),(4,1),(4,3)\}$	10	$\{(1,1),(1,4),(2,3),(2,2),(3,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
11	$\{(1,1),(2,4),(2,1),(3,3),(4,1),(4,2),(1,3),(2,3)\}$	12	$\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,2),(3,1),(4,4)\}$
13	$\{(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3),(4,3),(4,4)\}$	14	$\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,3),(4,4)\}$
15	$\{(1,1),(1,4),(2,1),(2,3),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3)\}$	16	$\{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$
17	$\{(1,3),(1,2),(2,2),(2,3),(3,2),(1,1),(4,1),(4,2)\}$	18	$\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,2),(4,3),(4,2),(4,4)\}$
19	$\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(3,2),(4,1),(4,4)\}$	20	$\{(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,1),(4,4)\}$
21	$\{(1,1),(1,3),(2,4),(4,4),(3,3),(3,1),(4,2),(4,3)\}$	22	$\{(1,1),(1,4),(2,3),(4,1),(2,2),(4,3),(3,4),(3,3)\}$
23	$\{(1,1),(2,4),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3)\}$	24	$\{(1,1),(2,2),(1,2),(3,3),(4,4),(4,1),)3,2),(1,3)\}$
25	$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4),(4,2)\}$	26	$\{(1,1),(2,2),(2,4),(2,3),(4,4),(4,2),(3,3),(3,4)\}$
27	$\{(1,4),(2,2),(2,3),(2,1),(3,3),(3,4),(4,3),(4,1)\}$	28	$\{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,3),(3,1),(4,2),(4,3)\}$
29	$\{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,1)\}$	30	$\{(1,1),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(3,2),(4,3),(4,4)\}$

Взвешенный граф задан рисунком.

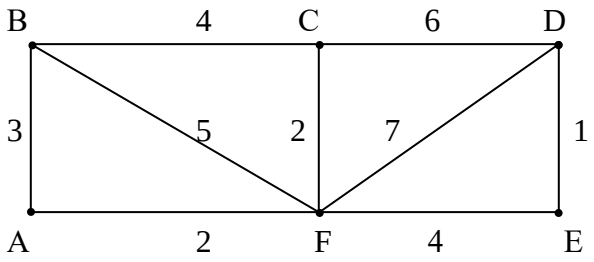
8. Найти матрицу весов графа, кратчайший маршрут из вершины A к остальным вершинам.

9. Найти цикломатическое число, коранг, число остовных деревьев в графе.

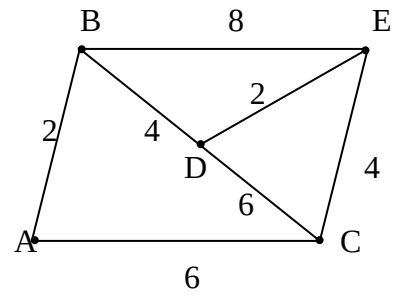
10. Найти дерево минимального веса графа и его вес.

11. Найти все маршруты длины два из вершины А.

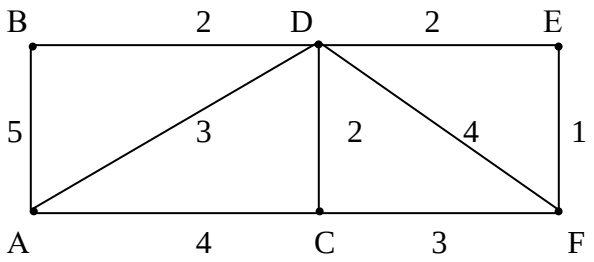
1.


B
4
C
6
D
3
5
2
7
1
A
2
F
4
E

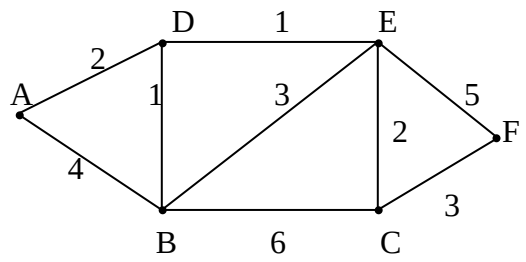
2.


B
8
E
2
2
4
D
4
6
A
C
6

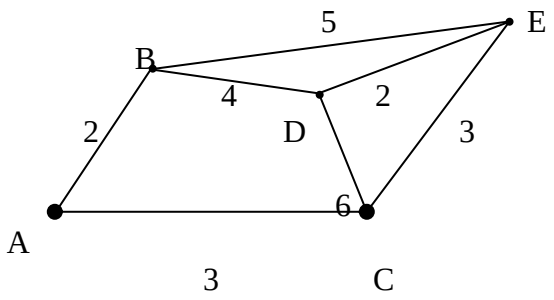
3.


B
2
D
2
E
5
3
2
4
1
A
4
C
3
F

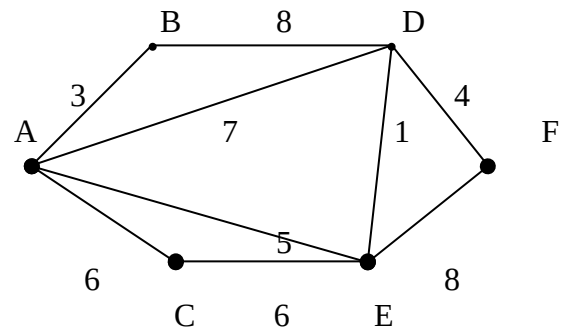
4.


D
1
E
2
A
1
3
5
2
F
4
3
B
6
C

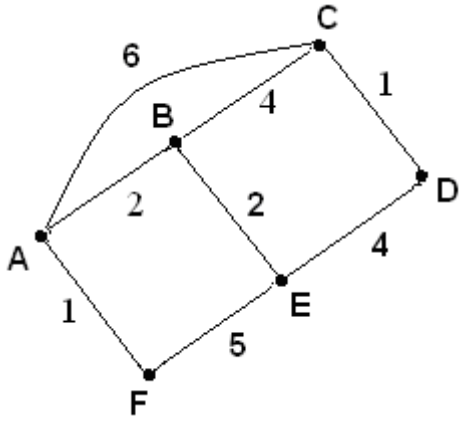
5.


5
E
B
4
2
2
D
3
6
A
3
C

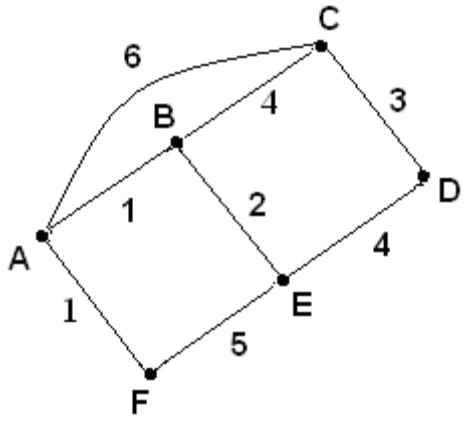
6.


B
8
D
3
4
A
7
1
F
5
6
8
C
6
E

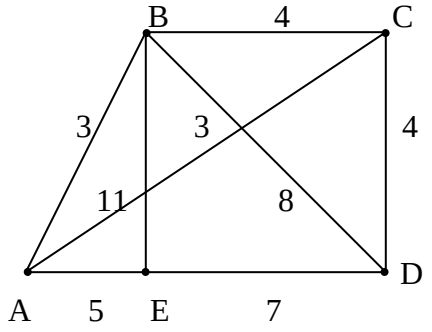
7.


C
6
1
B
4
D
2
2
A
4
E
1
5
F

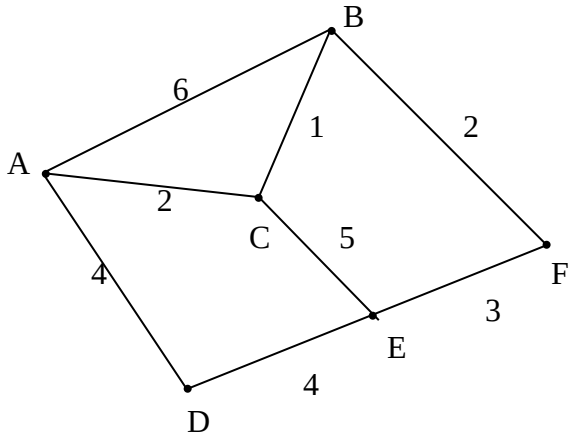
8.


C
6
3
B
4
D
1
2
A
4
E
1
5
F

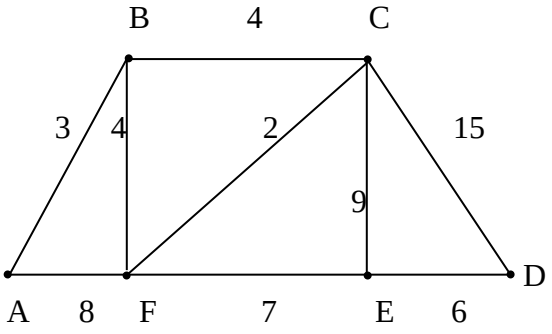
9.



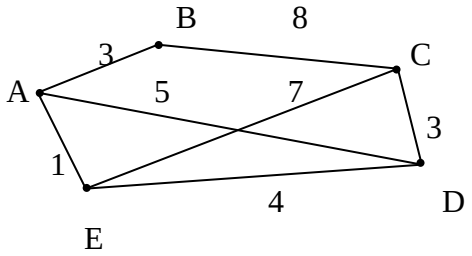
10.



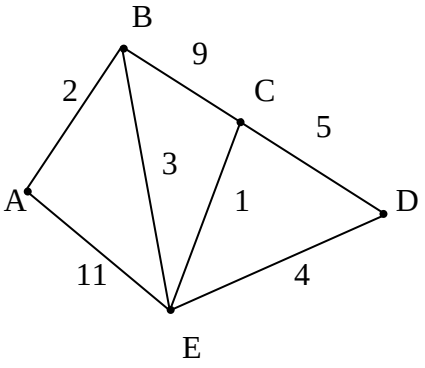
11.



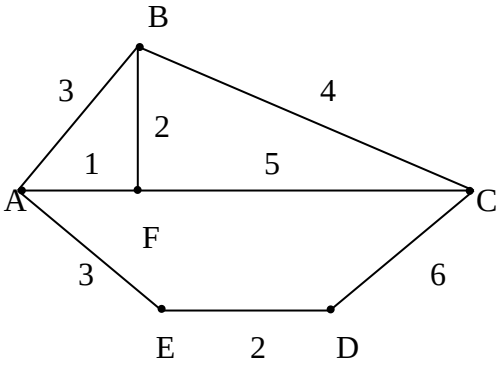
12



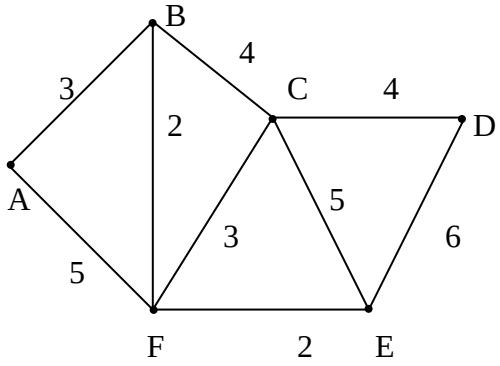
13.



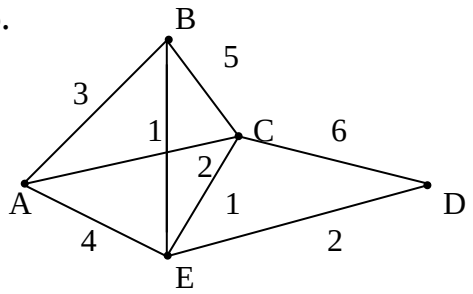
14.



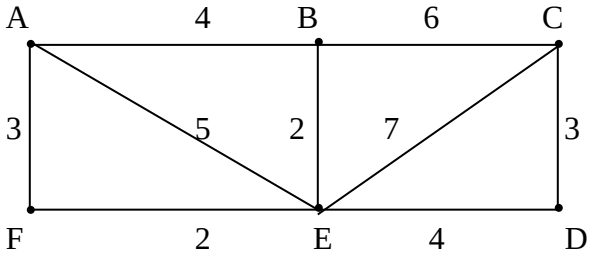
15.



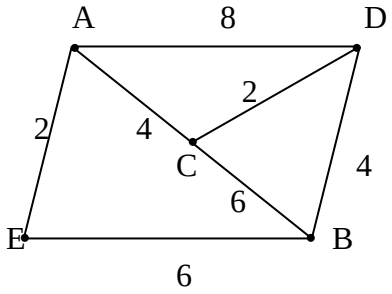
16.



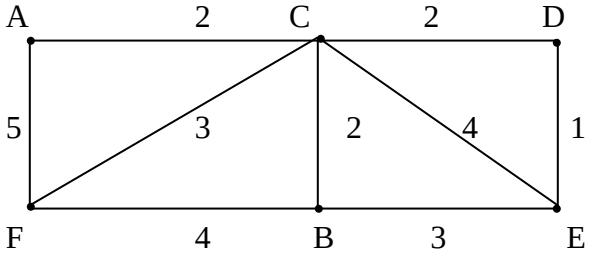
17.



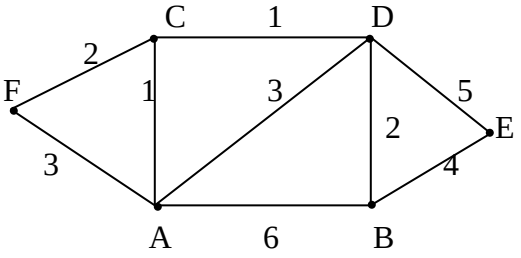
18.



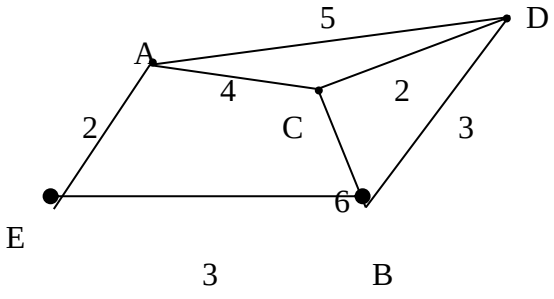
19.



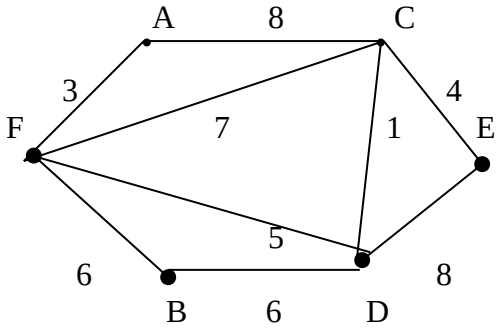
20.



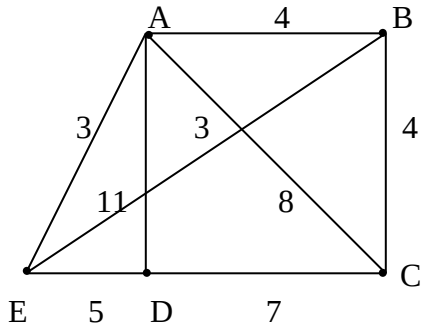
21.



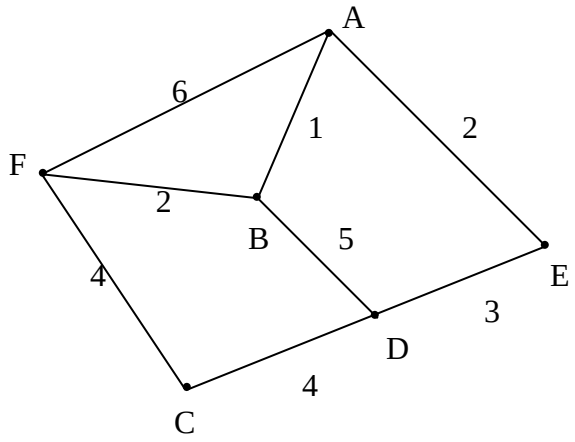
22.



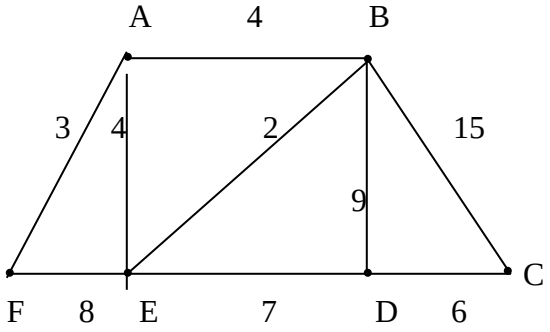
23.



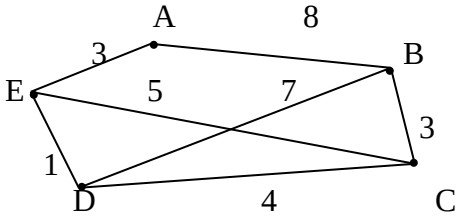
24.



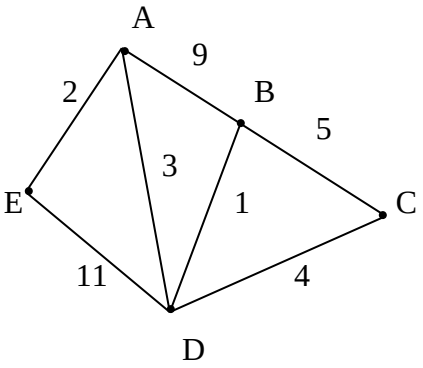
25.



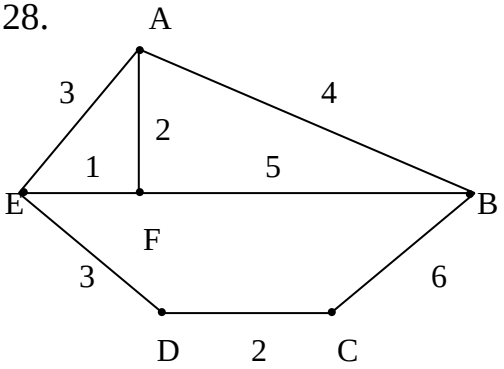
26.



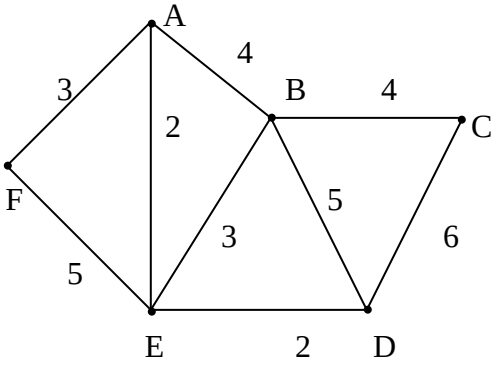
27.



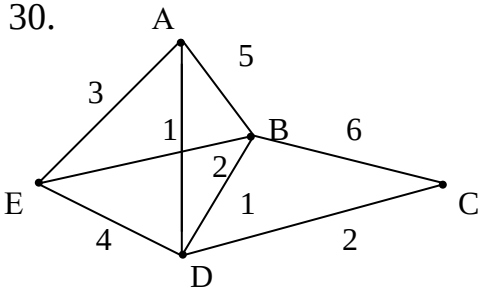
28.



29.



30.



10. Заданы буквы и их частоты:

а) построить дерево Хаффмана;

б) определить код Хаффмана;

в) найти вес кода;

г) закодировать слово α;

д) декодировать слово β.

№	Буквы и частоты						α	β
1	*а*	*к*	*о*	*ш*	*т*	*ф*	*кошка*	1011110100
	12	8	4	2	7	3		
2	*а*	*в*	*о*	*р*	*х*	*т*	*вахта*	0011101111
	7	8	10	2	4	9		
3	*л*	*о*	*а*	*к*	*ж*	*р*	*ложка*	0100100001011
	4	7	12	8	2	3		
4	*о*	*в*	*т*	*р*	*с*	*х*	*торос*	011100111010
	14	10	6	9	5	2		
5	*с*	*о*	*н*	*а*	*л*	*р*	*салон*	000001101111
	8	12	6	14	3	4		
6	*м*	*х*	*е*	*р*	*с*	*а*	*схема*	00111011100
	8	2	10	4	5	13		
7	*о*	*н*	*р*	*с*	*т*	*а*	*нарост*	10111100100
	12	5	3	10	7	16		
8	*к*	*т*	*с*	*а*	*о*	*р*	*карст*	000111101111
	10	6	8	14	12	3		
9	*з*	*о*	*б*	*р*	*а*	*к*	*забор*	110110001001
	2	14	12	10	8	5		
10	*м*	*о*	*а*	*з*	*к*	*р*	*зарок*	1111011010100
	5	11	12	7	9	2		
11	*т*	*ф*	*а*	*к*	*ш*	*о*	*факт*	0110010100111
	7	3	12	8	2	4		
12	*х*	*т*	*а*	*ф*	*о*	*р*	*вата*	00111110101111
	4	9	7	8	10	12		
13	*ж*	*р*	*л*	*о*	*а*	*к*	*колер*	1000010100111
	2	3	4	7	12	8		

14	*с*	*х*	*о*	*в*	*т*	*р*	*ворох*	1001100111011
	5	2	14	10	6	9		
15	*л*	*р*	*с*	*о*	*н*	*а*	*ссора*	0011101001100
	3	4	8	12	6	14		
16	*с*	*а*	*м*	*х*	*е*	*р*	*марс*	1001010010011
	5	13	8	2	10	4		
17	*т*	*а*	*о*	*н*	*р*	*с*	*наст*	10111110100100100
	7	16	12	5	3	10		
18	*о*	*р*	*к*	*т*	*с*	*а*	*корт*	001011101101111
	12	3	10	6	8	14		
19	*а*	*к*	*з*	*о*	*б*	*р*	*короб*	1100111011000
	8	5	2	14	12	10		
20	*к*	*р*	*м*	*о*	*а*	*з*	*замок*	1111011000100
	9	2	5	11	12	7		
21	*ш*	*о*	*т*	*ф*	*а*	*к*	*штоф*	101110000100
	2	4	7	3	12	8		
22	*о*	*р*	*х*	*т*	*а*	*в*	*рота*	001011001001
	10	2	4	9	7	8		
23	*а*	*к*	*ж*	*р*	*л*	*о*	*жало*	101100101011
	12	8	2	3	4	7		
24	*т*	*р*	*с*	*х*	*о*	*в*	*ворс*	00111011100
	6	9	5	2	14	16		
25	*н*	*а*	*л*	*р*	*с*	*о*	*рана*	10110110101010
	6	14	3	4	8	12		
26	*е*	*р*	*с*	*и*	*м*	*х*	*меха*	10000011010
	10	14	5	13	8	2		
27	*р*	*с*	*т*	*а*	*о*	*н*	*трасса*	101101101011
	3	10	7	16	12	5		
28	*с*	*а*	*о*	*р*	*к*	*т*	*рокот*	1111111001110
	8	14	12	3	10	6		
29	*б*	*р*	*а*	*к*	*з*	*о*	*барак*	001001111
	12	10	8	5	2	14		
30	*а*	*з*	*к*	*р*	*м*	*о*	*карма*	11011011000010
	12	7	9	2	5	11		

3.3 Решение типового варианта

Замечание. Везде далее в теоретических пояснениях используются следующие обозначения: $V = \{v_1, v_2, ..., v_i, ...\}$ – множество вершин графа, $E = \{e_1, e_2, ..., e_i, ...\}$ – множество рёбер или дуг графа.

Н-граф $G(V,E)$ задан списком рёбер:

Рёбра	a	b	c	d	e	f	g	h
Вершины	1,4	1,6	2,3	2,6	3,4	4,5	4,6	5,6

1. Задать G:

а) двумя множествами: вершин V и рёбер E;

б) графически;

в) матрицей смежности;

г) матрицей инцидентности.

2. Найти матрицу расстояний, эксцентриситеты вершин, диаметр и радиус графа G.

3. Проверить условие эйлеровости графа G, найти эйлеров цикл.

Решение:

1. а) задание $G(V,E)$ двумя множествами: вершин V={1,2,3,4,5,6} и рёбер E= $\{a,b,c,d,e,f,g\}$ = $\{(1,4), (1,6), (2,3), (2,6), (3,6), (4,5), (5,6)\}$;

б) графическое задание G;

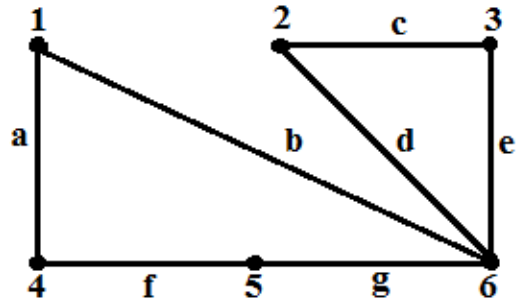


Рисунок 11 – Граф G

в) матрица смежности н-графа с m вершинами имеет вид $A = \underset{m \times m}{(a_{ij})}$,

где $a_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если верш.} v_i, v_j \textit{ смежны} \\ 0, \textit{в противном случае} \end{cases}$;

таким образом, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

г) матрица инцидентности н-графа с m вершинами и n рёбрами имеет вид $B = \underset{m\times n}{(b_{ij})}$,

где $b_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если верш.}\, v_i \textit{ инциден. ребру } e_j \\ 0, \textit{в противном случае} \end{cases}$, итак,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $D = (d_{ij})$ – матрица расстояний, где $d_{ij} = d(v_i, v_j)$ – расстояние между вершинами v_i и v_j, т. е. минимальная длина простой цепи с концами v_i и v_j.

Таким образом, $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица расстояний нашего графа; так как эксцентриситет вершины v_i (обозначается $e(v_i)$) – это расстояние до наиболее удалённой от неё вершины, то $e(v_i)$ равен наибольшему из чисел, стоящих в i-ой строке матрицы расстояний. Таким образом, $e(1)=2$, $e(2)=3$, $e(3)=3$, $e(4)=3$, $e(5)=2$, $e(6)=2$. Диаметр графа равен $d(G) = max\{e(v)|v \in V\}=3$; радиус – $r(G) = \min\{e(v)|v \in V\}=2$; вершина v_i называется периферийной, если $e(v_i) = d(G)$, центральной – если $e(v_i) = r(G)$. Таким образом, вершины 2, 3, 4 – периферийные, 1, 5, 6 – центральные.

3. Критерий эйлеровости графа: связный граф является эйлеровым (т. е. имеет эйлеров цикл) тогда и только тогда, когда степени всех его вершин чётны (степень вершины равна числу рёбер, инцидентных ей).

Для эйлеровых графов существует алгоритм Флери, позволяющий быстро построить один из существующих эйлеровых циклов (эйлеров цикл графа содержит все его рёбра по одному разу):

а) выбираем произвольную вершину v_1 и ребро e_1, инцидентное v_1.

Переходим в вершину v_2 по ребру $e_1 = \{v_1, v_2\}$. Присваиваем ребру e_1 номер 1, назовём его пройденным и вычёркиваем;

б) находясь в вершине v_i, не следует выбирать ребро, соединяющее v_i с v_1, если есть возможность другого выбора;

в) находясь в вершине v_i, не следует выбирать ребро, которое является перешейком, т. е. ребром, при удалении которого, граф, образованный не вычеркнутыми рёбрами, распадается на две компоненты связности, каждая из которых имеет хотя бы по одному ребру;

г) после того как в графе будут занумерованы все рёбра, образуется эйлеров цикл, причём мы придём в ту вершину, с которой начали. Порядок нумерации соответствует последовательности обхода рёбер.

Наш граф эйлеров, т. к. степени всех вершин чётные: $\rho(1) = \rho(2) = \rho(3) = \rho(4) = \rho(5) = 2$, $\rho(6) = 4$. Построим эйлеров цикл в этом графе: выберем вершину 1 и ребро $a = \{1,4\}$, присвоив ему номер 1, перейдём в вершину 4; из вершины 4 один путь по ребру $f = \{4,5\}$ (номер 2) в вершину 5; из вершины 5 один путь по ребру $g = \{5,6\}$ (номер 3) в вершину 6; находясь в вершине 6, не выбираем пройденное ребро g и ребро b, соединяющее вершину 6 с первой вершиной 1, из оставшихся инцидентных этой вершине рёбер ни одно не является перешейком, поэтому выбираем любое, например, $e = \{3,6\}$, присваиваем ему номер 4 и переходим в вершину 3; рассуждая аналогично, обходим оставшиеся рёбра в порядке: $c = \{2,3\}$, $d = \{2,6\}$, $b = \{1,6\}$ (номера 5, 6,7). Таким образом, пройдены все рёбра. Итак, получен эйлеров цикл: a, f, g, e, c, d, b.

Орграф $G = (V,E)$ задан множествами вершин $V = \{1,2,3,4\}$ и дуг $E=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}=\{(1,2), (1,4), (2,3), (3,2), (4,5), (4,6)\}$, причём дуги определены парами начальных и конечных вершин.

4. Задать G:

а) графически;

б) матрицей смежности;

в) матрицей инцидентности;

г) списком дуг.

5. Найти степени входа и выхода вершин графа G и степени вершин соответствующего н-графа. Записать равенства, определяющие связь степеней вершин и числа рёбер графа.

6. Определить соответствующее графу G бинарное отношение. Какими свойствами (рефлексивность, симметричность, и т. д.) обладает данное отношение?

7. Привести пример двух достижимых и двух не достижимых вершин, если они существуют; будет ли граф связным, сильно связным? Найти его компоненты сильной связности.

Решение:

4. а) графическое задание G;

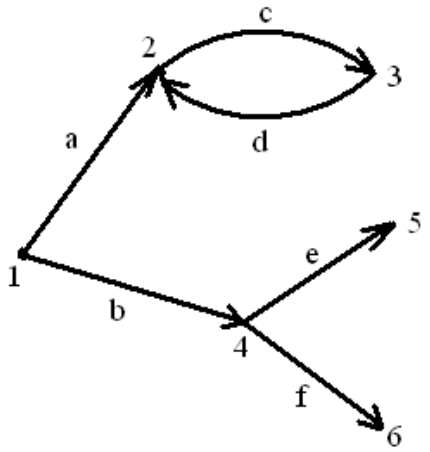


Рисунок 12 – Граф G

б) матрица смежности для орграфа с m вершинами имеет вид $A = \underset{m\times m}{(a_{ij})}$,

где $a_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если есть дуга с началом в } v_i \textit{ и концом в } v_j \\ 0, \textit{в противном случае} \end{cases}$.

Итак, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

в) матрица инцидентности орграфа с m вершинами и n дугами имеет вид $B = \underset{m\times n}{(b_{ij})}$,

где $b_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если дуга } e_j \textit{ выходит из вершины } v_i \\ -1, \textit{если дуга } e_j \textit{ входит в вершину } v_i \\ 2, \textit{если } e_j \textit{ петля, инциденнтная } v_i \\ 0, \textit{в противном случае} \end{cases}$.

Таким образом,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

г) список дуг G.

Дуги	a	b	c	d	e	f
Вершины	1,2	1,4	2,3	3,2	4,5	4,6

5. $\rho(v)$ – степень вершины v, равна количеству рёбер, инцидентных v . $\sum_{v \in G} \rho(v) = 2n$, n – число рёбер. Для орграфа $\rho_1(v)$ – степень выхода вершины v, равна числу дуг с началом в v; $\rho_2(v)$ – степень входа, равна числу дуг с концом в v . $\rho(v) = \rho_1(v) + \rho_2(v)$, $\sum_{v \in G} \rho_1(v) = \sum_{v \in G} \rho_2(v) = n$.

Для наглядности результаты вычислений сведены в таблицу.

Вершины	$\rho_1(v)$	$\rho_2(v)$	$\rho(v) = \rho_1(v) + \rho_2(v)$
1	2	0	2
2	1	2	3
3	1	1	2
4	2	1	3
5	0	1	1
6	0	1	1
$\sum$	6	6	12

Равенства, определяющие связь степеней вершин и числа рёбер графа, выполняются: $\sum_{v \in G} \rho_1(v) + \sum_{v \in G} \rho_2(v) = \sum_{v \in G} \rho(v) = 2 \cdot 6 = 12$.

6. Бинарное отношение, соответствующее нашему графу, будет иметь вид P={$(1,2), (1,4), (2,3), (3,2), (4,5), (4,6)$}, его матрица равна матрице смежности графа

$$[P] = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как на главной диагонали $[P]$ нет единиц и все нули, то отношение P антирефлексивно;

так как $[P] \neq [P]^T$, то P не симметрично;

так как, например, $(1,2) \in P, (2,3) \in P$, но $(1,3) \notin P$, то P не транзитивно.

7. Вершина v достижима из вершины u, если существует путь с началом в u и концом в v. Таким образом, в нашем графе вершины 2 и 3 взаимно достижимы; вершины 3, 5, 6 достижимы из вершины 1; вершина 1 не достижима ни из одной вершины.

Так как соответствующий н-граф связный (т. е. любые его две вершины взаимно достижимы), то данный орграф также будет связным, но не сильно связным, поскольку в этом орграфе не любые две вершины взаимно достижимы. Для определения компонент сильной связности строят три матрицы:

а) матрицу достижимости $C = \underset{m\times m}{(c_{ij})}$, где

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если } j - \textit{ая верш. достиж. из } i - \textit{ой} \\ 0, \textit{в противном случае} \end{cases};$$

б) матрицу контрдостижимости $(q_{ij}) = Q = C^T$;

в) матрицу $(s_{ij}) = S = C * Q$, где $s_{ij} = c_{ij} \cdot q_{ij}$.

Единицы первой строки матрицы S соответствуют вершинам, входящим в первую компоненту сильной связности с множеством вершин V_1. Мысленно вычёркиваем строки и столбцы, на которых стоят элементы, соответствующие этим вершинам. В оставшейся матрице единицы первой строки соответствуют вершинам, входящим во вторую сильно связную компоненту, её множество вершин V_2 и т.д. $K(G)$ – число сильно связных компонент графа. Если $K(G)$ =1, то орграф сильно связный, если $K(G)$ >1, то не сильно связный. Множества вершин сильно связных компонент образуют разбиение множества вершин графа: $V = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$.

Построим вышеуказанные матрицы для данного графа.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – матрица достижимости.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – матрица контрдостижимости.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В первой строке матрицы S – одна единица, соответствующая вершине 1, значит множество вершин первой компоненты сильной связности $V_1 = \{1\}$. После вычёркивания первой строки и первого столбца в оставшейся матрице

$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ в первой строке две единицы, которые соответствуют вершинам 2 и 3; значит $V_2 = \{2,3\}$ – множество вершин второй сильно связная компоненты. Рассуждая аналогично, получим ещё три сильно связные компоненты с множествами вершин $V_3 = \{4\}$, $V_4 = \{5\}$, $V_5 = \{6\}$. Число сильно связных компонент $K(G)$ =5. Множество вершин графа имеет разбиение $V = \{\{1\}, \{2,3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$.

Взвешенный граф задан рисунком:

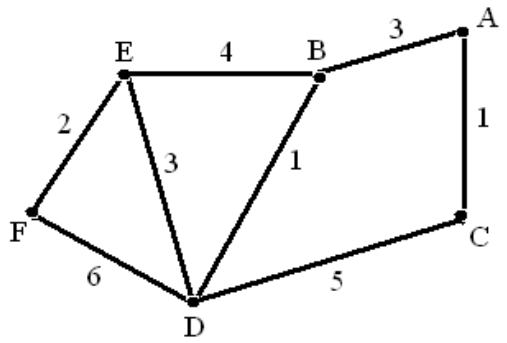


Рисунок 13 – Взвешенный граф

8. Найти матрицу весов графа, кратчайший маршрут из вершины A к остальным вершинам.

9. Найти цикломатическое число, коранг, число остовных деревьев в графе.

10. Найти дерево минимального веса графа и его вес.

11. Найти все маршруты длины 2 из вершины А.

Решение:

8. $W = (w_{ij})$ – матрица весов, где w_{ij} – вес дуги (v_i, v_j), если она существует, если не существует, то соответствующий вес обозначается 0 или ∞, в зависимости от приложений (∞ – если вершины не смежные). Для данного графа матрица весов имеет вид:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ 3 & 0 & \infty & 1 & 4 & \infty \\ 1 & \infty & 0 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 5 & 0 & 3 & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кратчайший маршрут из вершины A к остальным вершинам будем находить по алгоритму Дейкстры, который поясняем сразу на этом примере:

1 шаг: A – источник, $T_1 = V - \{A\} = \{B, C, D, E, F\}$, из матрицы весов выписываем строку, соответствующую вершине A и обозначаем её так:
$D^{(1)} = (0, \hat{3}, \underline{\hat{1}}, \hat{\infty}, \hat{\infty}. \hat{\infty})$;

2 шаг: в $D^{(1)}$ выбираем среди элементов, отмеченных ^ (т. е. кроме элемента, отвечающего источнику), наименьший и подчёркиваем его. Из T_1 убираем вершину, соответствующую подчёркнутому элементу (это вершина C): $T_2 = T_1 - \{C\} = \{B, D, E, F\}$.

Для определения $D^{(2)}$ делаем вспомогательную запись: из матрицы W выписываем строку, соответствующую C, и прибавляем ко всем её элементам (кроме первого и третьего) подчёркнутое число 1:

$$C \to \begin{array}{c} 1\ \infty\ 0\ 5\ \infty\ \infty \\ \underline{1\quad 1\ 1\ 1} \\ \infty\ \ 6\ \infty\ \infty \end{array}.$$ Сложение производится по правилу $a+\infty=\infty$, $\infty+\infty=\infty$, $min(a,\infty)=a, min(\infty,\infty)=\infty$. Сравним полученные числа с $D^{(1)}$ и в $D^{(2)}$ ставим на соответствующие места наименьшие: $D^{(2)}=(0,\hat{\underline{3}},1,\hat{6},\hat{\infty}.\hat{\infty})$;

3 шаг: $T_3=T_2-\{B\}=\{D,E,F\}$, $B\to \begin{array}{c} 3\ 0\ \infty\ 1\ 4\ \infty \\ \underline{3\ 3\ 3} \\ 4\ 7\ \infty \end{array}$, $D^{(3)}=(0,3,1,\hat{\underline{4}},\hat{7}.\hat{\infty})$;

4 шаг: $T_4=T_3-\{D\}=\{E,F\}$, $D\to \begin{array}{c} \infty\ 1\ 5\ 0\ 3\ 6 \\ \underline{4\ 4} \\ 7\ 10 \end{array}$, $D^{(4)}=\left(0,3,1,4,\underline{7},10\right)$;

5 шаг: $T_5=T_4-\{E\}=\{F\}$, $E\to \begin{array}{c} \infty\ 4\ \infty\ 3\ 0\ 2 \\ \underline{7} \\ 9 \end{array}$, $D^{(5)}=\left(0,3,1,4,7,9\right)$.

n=6, n-1=5, значит, это последний шаг. По виду $D^{(5)}$ делаем вывод, что взвешенные расстояния от вершины A до остальных вершин равны $d_w(A,A)=0$, $d_w(A,B)=3$, $d_w(A,C)=1$, $d_w(A,D)=4$, $d_w(A,E)=7$, $d_w(A,F)=9$.

9. Число $\nu(G)=m-n+k$ называется цикломатическим числом (или цикломатическим рангом), где m – число рёбер, n – число вершин, k – число связных компонент. Оно определяет, сколько рёбер надо удалить, чтобы получить остов. Число $\nu^*(G)=n-k$ называется корангом и определяет число рёбер в остове. В нашем случае $\nu(G)=8-6+1=3$, $\nu^*(G)=6-1=5$. Число остовов в графе можно найти с помощью матрицы Кирхгофа, которая определяется так:

$$K=\left(k_{ij}\right)\ \ k_{ij}=\begin{cases} -1, \textit{если } v_i \textit{ и } v_j \textit{ смежные} \\ 0, \textit{если } v_i \textit{ и } v_j \textit{ не смежные} \\ \rho(v_i), \textit{где } \rho(v_i) - \textit{степень } v_i, i=j \end{cases}.$$

По теореме Кирхгофа число остовных деревьев в связном графе, имеющем n вершин ($n\geq 2$), равно алгебраическому дополнению любого элемента матрицы Кирхгофа.

Найдём степени вершин данного графа:

$\rho(A)=\rho(C)=\rho(F)=2$, $\rho(D)=4$, $\rho(B)=\rho(E)=3$.

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$ – матрица Кирхгофа;

возьмём, например, алгебраическое дополнение элемента

$$k_{11}: A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \ldots = 29.$$

Таким образом, существует 29 остовных деревьев этого графа.

10. Для построения дерева (остова) минимального веса используем алгоритм Краскала: дан граф $G(V,E)$. Строим граф T_1, состоящий из множества вершин V и ребра e_1, которое имеет наименьший вес (т.е.$T_1 = (V, E_1)$,где $E_1 = \{e_1\}$).

Если граф T_i уже построен и $i < v^* = n - k$, то строим граф T_{i+1}, добавляя к множеству рёбер T_i ребро e_{i+1}, имеющее наименьший вес среди рёбер, не входящих в T_i и не составляющее циклов с рёбрами T_i (т. е. $T_{i+1} = (V, E_{i+1})$, где $E_{i+1} = E_i \cup \{e_{i+1}\}$.

При $i = v^* = n - k$ алгоритм закончен и $T_{n-k} = (V, E_{n-k})$ – есть остов минимального веса, его вес равен сумме весов всех его рёбер.

Алгоритм Краскала для данного графа: $V = \{A, B, C, D, E, F\}$;

а) $T_1 = (V, E_1)$, $E_1 = \{\{A, C\}\}$;

б) $T_2 = (V, E_2)$, $E_2 = E_1 \cup \{\{B, D\}\}$;

в) $T_3 = (V, E_3)$, $E_3 = E_2 \cup \{\{E, F\}\}$;

г) $T_4 = (V, E_4)$, $E_4 = E_3 \cup \{\{D, E\}\}$;

д) $T_5 = (V, E_5)$, $E_5 = E_4 \cup \{\{A, B\}\}$, $n - k = 6 - 1 = 5$, алгоритм закончен.

T_5 – остов минимального веса, его вес равен 1+3+1+3+2=10. Заметим, что построение остова минимального веса надо делать параллельно с определением T_1, T_2 и т. д., добавляя на каждом шаге ребро.

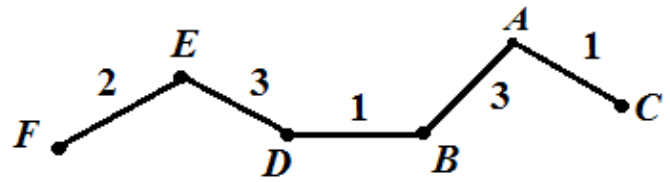


Рисунок 14 – Остов минимального веса

11. Чтобы найти число маршрутов длины 2 из каждой вершины, вычислим матрицу A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Так как требуется найти все маршруты длины 2 только из вершины A, то рассмотрим только первую строку матрицы A^2: ${a_{11}}^2 = 2$, значит из вершины A в A есть 2 маршрута длины 2; ${a_{14}}^2 = 2 \longrightarrow$ из A в D 2 маршрута; ${a_{15}}^2 = 1$, значит из A в E есть 1 маршрут длины 2.

Чтобы определить, через какие рёбра проходит каждый маршрут, построим вспомогательную матрицу:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & e_3 & e_4 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & e_5 & 0 & 0 \\ 0 & e_3 & e_5 & 0 & e_6 & e_7 \\ 0 & e_4 & 0 & e_6 & 0 & e_8 \\ 0 & 0 & 0 & e_7 & e_8 & 0 \end{pmatrix},$$

построенную из A заменой каждого элемента на соответствующие рёбра.

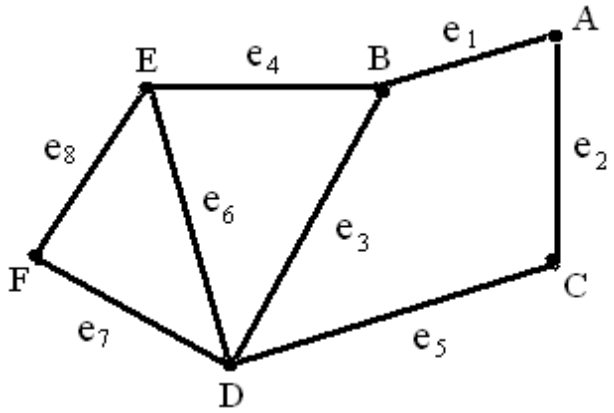


Рисунок 15

Найдём

$$A'^2 = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & e_3 & e_4 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & e_5 & 0 & 0 \\ 0 & e_3 & e_5 & 0 & e_6 & e_7 \\ 0 & e_4 & 0 & e_6 & 0 & e_8 \\ 0 & 0 & 0 & e_7 & e_8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & e_3 & e_4 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & e_5 & 0 & 0 \\ 0 & e_3 & e_5 & 0 & e_6 & e_7 \\ 0 & e_4 & 0 & e_6 & 0 & e_8 \\ 0 & 0 & 0 & e_7 & e_8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1e_1 + e_2e_2 & 0 & 0 & e_1e_3 + e_2e_5 & e_1e_4 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Так как $a'^{\,2}_{11} = e_1e_1 + e_2e_2$, то из A в A есть 2 маршрута длины 2:
Ae_1Ae_1A и Ae_2Ae_2A;

так как $a'^{\,2}_{14} = e_1e_3 + e_2e_5$, то из A в D есть 2 маршрута длины 2:
Ae_1Be_3D и Ae_2Ce_5D;

так как $a'^{\,2}_{15} = e_1e_4$, то из A в E есть 1 маршрут длины 2: Ae_1Be_4E.

12. Заданы буквы и их частоты:

р	*а*	*с*	*л*	*ю*	*т*
5	14	10	12	9	8

а) построить дерево Хаффмана;
б) определить код Хаффмана;
в) найти вес кода;
г) закодировать слово α = *люстра*;
д) декодировать слово β =1111000110011.

Решение:

а) дерево Хаффмана строим по алгоритму Хаффмана, который будем иллюстрировать этим примером:

- располагаем частоты в возрастающем порядке, результат для удобства записываем в таблицу:

р	*т*	*ю*	*с*	*л*	*а*
5	8	9	10	12	14

- формируем бинарное дерево, где *р* и *т* листья, *р* – левый лист, *т* – правый, 5+8=13 – частота родителя; приписываем левому сыну 0, правому – 1; обозначаем это дерево G_1 :

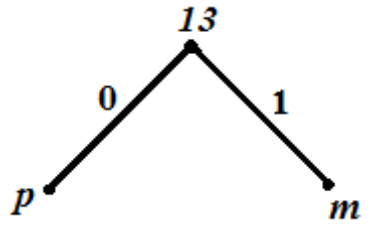


Рисунок 16 – G_1

В списке частот заменяем значения двух наименьших частот их суммой и упорядочиваем частоты по возрастанию, записываем новую таблицу:

ю	*с*	*л*	G_1	*а*
9	10	12	13	14

- формируем дерево, где в качестве сыновей буквы *ю* и *с*, как имеющие наименьшие частоты, сумма их частот 9+10=19; новое дерево – G_2.

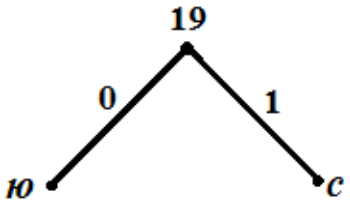


Рисунок 17 – G_2

Новая таблица:

л	G_1	*а*	G_2
12	13	14	19

- формируем дерево, где сыновьями будут буква *л* и построенное выше дерево G_1, как имеющие наименьшие частоты, сумма их частот 12+13=25; новое дерево – G_3:

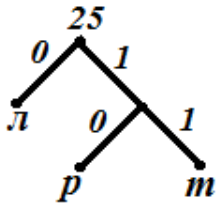


Рисунок 18 – G_3

Новая таблица:

а	G_2	G_3
14	19	25

- по последней таблице строим дерево G_4 (его вес 14+19=33):

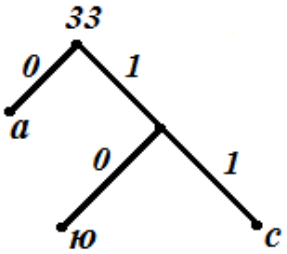


Рисунок 19 – G_4

Новая таблица:

G_3	G_4
25	33

- по последней таблице строим последнее дерево G (его вес 25+33=58) – дерево Хаффмана:

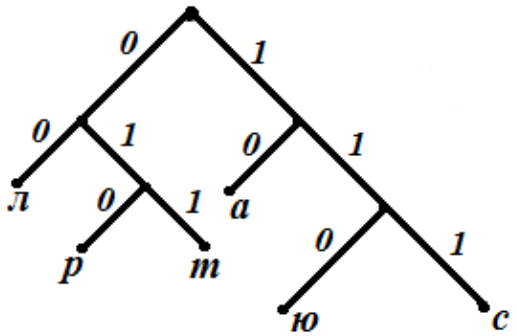


Рисунок 20 – Дерево Хаффмана

б) к каждому листу (букве) дерева Хаффмана ведёт единственный путь, состоящий из 0 и 1; строки из 0 и 1 каждой буквы – это её путевой или элементарный код; путевые коды, соответствующие всем буквам дерева Хаффмана, образуют префиксное, оптимальное множество кодов. Таким образом, искомая схема оптимального кодирования (код Хаффмана) имеет вид:

$\sum =$

р	*а*	*с*	*л*	*ю*	*т*
010	10	111	00	110	011

в) вес кода – это вес дерева Хаффмана: $w = 58$;

г) чтобы закодировать слово, надо просто заменить каждую букву слова её кодом: $\alpha = \textit{люстра} \rightarrow \beta = 00110111011010 10$;

д) поскольку код Хаффмана префиксный и разделимый, то любое слово единственным образом декодируется: $\beta = 111100011 0011 \rightarrow \alpha = \textit{салют}$.

Список литературы

1 Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Элементы дискретной математики. – М.: ИНФРА-М, Новосибирск: изд-во НГТУ, 2002.

2 Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. Учебник для вузов. 3-е изд. – СПб.: Питер, 2009. – 384 с.: ил. (Серия «Учебник для вузов»).

3 Андерсон Д. Дискретная математика и комбинаторика.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 960 с.: ил. – Парал. тит. англ.

4 Шапорев С.Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006.

5 Палий И.А. Дискретная математика. Курс лекций. – М.: Эксмо, 2008. – 352 с. (Техническое образование).

6 Плотников А.Д. Дискретная математика. Учебное пособие. – 2-е изд. – М.: Новое знание, 2006. – 304 с.

7 Галушкина Ю.И., Марьямов А.Н. Конспект лекций по дискретной математике. – М.: Айрис – пресс, 2007. – 176 с. (Высшее образование).

8 Данилов В.Г. и др. Дискретная математика. Учебное пособие для вузов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2008. – 136 с.

9 Спирина М.С., Спирин П.А. Дискретная математика. Учебник. 9-е изд. – М.: Издат. центр « Академия», 2013. – 368 с.

10 Просветов Г.И. Дискретная математика: задачи и решения. Учебное пособие. – М.: БИНОМ. Лаборат. знаний, 2011. – 222 с.

11 Чашкин А.В. Дискретная математика. – М., 2012.

12 Астраханцева Л.Н. Дискретная математика. Учебное пособие. – Алматы: АУЭС, 2011. – 78 с.

13 Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Дискретная математика. Методические указания и задания к расчетно-графическим работам для студентов специальностей 5В100200 – Системы информационной безопасности и 5В070400 – Вычислительная техника и программное обеспечение. – Алматы: АУЭС, 2018. – 54 с.

14 Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Дискретная математика: Учеб. пособ. – Алматы: АУЭС им. Г. Даукеева, 2021. – 100 с.

15 Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Компьютерная математика. Методические указания и задания к выполнению расчетно-графических работ № 1, 2 для студентов специальности 6В07111 – «Космическая техника и технологии». – Алматы: АУЭС, 2020. – 43 с.

Содержание

1	Расчетно-графическая работа № 1. Множества, отношения ……	3
1.1	Теоретические вопросы……	3
1.2	Расчётные задания……	3
1.3	Решение типового варианта……	12
2	Расчетно-графическая работа № 2. Элементы математической логики	23
2.1	Теоретические вопросы……	23
2.2	Расчётные задания……	23
2.3	Решение типового варианта……	32
2.4	Справочный материал……	42
3	Расчетно-графическая работа № 3. Элементы теории графов……	44
3.1	Теоретические вопросы……	44
3.2	Расчётные задания……	44
3.3	Решение типового варианта……	53
	Список литературы……	67

Сводный план 2022, поз. 100

Астраханцева Людмила Николаевна
Байсалова Маншук Жумамуратовна

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и задания к выполнению расчетно-графических работ для студентов по образовательным программам
6В06104 – «Системы информационной безопасности»,
6В06103 – «Вычислительная техника и программное обеспечение»,
6В06102 – «Информационные системы»

Редактор: Жанабаева Е.Б.
Специалист по стандартизации: Ануарбек Ж.А.

Подписано в печать _____ Формат 60×84 1/16
Тираж экз. Бумага типографская № 1
Объем 4,0 уч.-изд. Лист. Заказ_____ Цена 2000 тг.

Копировально-множительное бюро
некоммерческое акционерное общество
«Алматинский университет энергетики и связи имени Гумарбека Даукеева»
050013, Алматы, Байтурсынова, 126/1