Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра математики и математического моделирования

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов специальностей
5В100200 – Системы информационной безопасности и
5В070400 – Вычислительная техника и программное обеспечение

Алматы 2018

СОСТАВИТЕЛИ: Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Дискретная математика. Методические указания и задания к расчетно – графическим работам для студентов специальностей 5В100200 – Системы информационной безопастности и 5В070400 - Вычислительная техника и программное обеспечение. Алматы: АУЭС, 2018.- 54 стр.

Настоящие методические указания содержат расчетно-графические работы № 1, 2, 3 дисциплины «Дискретная математика» для студентов специальностей 5В100200 – Системы информационной безопастности и 5В070400 - Вычислительная техника и программное обеспечение. Они составлены в соответствии с программой дисциплины «Дискретная математика» по разделам «Множества, отношения», «Элементы математической логики» и «Элементы теории графов». Приведены варианты заданий, необходимые теоретические сведения и подробные решения типовых задач.

Ил.15, табл.16, библиогр. – 13 назв.

Рецензент: доцент каф. ТКСиС Ю.М.Гармашова

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2018 г.

© НАО «Алматинский университет энергетики и связи», 2018 г.

Введение

Дисциплина «Дискретная математика» является разделом современной математики и служит основой компьютерной математики. Без её развитого логического аппарата невозможен прогресс в различных областях человеческой деятельности. Она изучает конечные множества и различные структуры на них и имеет широкий спектр приложений, прежде всего в областях, связанных с информационными технологиями и компьютерами. В результате изучения дисциплины студенты должны овладеть основными методами формализации рассуждений, получить навыки моделирования для использования их в программировании, при доказательстве правильности программ, при построении математических моделей.

1 Расчетно-графическая работа №1. Множества, отношения

Цели: изучить понятия множеств и отношений. Познакомиться с их свойствами и классификацией.

1.1 Теоретические вопросы

1. Множества, их способы задания. Подмножества, булеан. Операции над множествами.

2. Свойства операции над множествами. Разбиения и покрытия множеств.

3. Прямое произведение множеств. Отношения. Способы задания бинарных отношений. Обратное отношение, дополнение отношения, тождественное отношение. Композиция бинарных отношений.

4. Основные свойства матриц бинарных отношений. Свойства бинарных отношений.

5. Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности, фактор-множество.

6. Отношение порядка. Лексикографический порядок.

1.2 Расчётные задания

1 Данное множество задать:
а) перечислением элементов;
б) общим свойством.

№	а)	б)
1.1	$\{x : x^3 - 3x^2 + 2x = 0, x \in N\}$	$\{2,4,6,\ldots,100\}$
1.2	$\{x : x = 5y, y \in N, y \le 4\}$	$\left\{-\frac{3}{2},+\frac{5}{4},-\frac{7}{6},\ldots\right\}$
1.3	$\{x : x = y - z,\ y,z \in \{1,2\}\}$	$\{4,8,12,16,\ldots\}$

1.4	$\{x : x = 3n + 2,\ n \in N, x < 20\}$	$\{2^2, 3^2, 4^2, \ldots\}$
1.5	$\{x : x = 2n + 1,\ n \in N, x < 10\}$	$\left\{+\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, +\frac{1}{9}, \ldots\right\}$
1.6	$\{x : 3x = x + 8\}$	$\{-4, +5, -6, +7, -8, +9\}$
1.7	$\{x : 3x + 5 = 2(x + 6)\}$	$\left\{\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{9}, \ldots\right\}$
1.8	$\{x : x = 5y + 2,\ 3 < y < 6, y \in Z\}$	$\{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots, 9^2\}$
1.9	$\{x : x^2 - 3x + 2 = 0, x \in R\}$	$\{-2, +4, -6, +8 \ldots\}$
1.10	$\{x : x = 4y, y \in N, y \le 5\}$	$\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{19}{20}\right\}$
1.11	$\{x : x = y - z,\ y, z \in \{5,2\}\}$	$\{4,8,12,16, \ldots, 60\}$
1.12	$\{x : x = n + 2,\ n \in N, x < 10\}$	$\{2^2, 3^2, 4^2, \ldots, 12^2\}$
1.13	$\{x : x = 2n - 1,\ n \in N, x < 15\}$	$\left\{\frac{2^2}{3}, \frac{3^2}{6}, \frac{4^2}{9}, \ldots\right\}$
1.14	$\{x : 2x = x + 6\}$	$\{4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3\}$
1.15	$\{x : x + 5 = 2(x + 5)\}$	$\left\{\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{9}, \ldots, \pm\frac{1}{30}\right\}$
1.16	$\{x : x^3 \le 100, x \in Z\}$	$\{3,6,9,12, \ldots\}$
1.17	$\{x : x = 4n + 2,\ n \in N\}$	$\{0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots, \pm7\}$
1.18	$\{x : x = y + z,\ y, z \in \{1,2,3\}\}$	$\left\{\frac{3}{2^2}, \frac{5}{3^2}, \frac{7}{4^2}, \ldots\right\}$
1.19	$\{x : x^2 - 9x + 20 = 0, x \in C\}$	$\{1^2, 3^2, 5^2, 7^2 \ldots\}$
1.20	$\{x : x(x + 3) = 0\}$	$\left\{\frac{2}{1^3}, \frac{4}{2^3}, \frac{6}{3^3}, \ldots\right\}$
1.21	$\{x : 5x + 10 = 30x + 15\}$	$\{3,6,9,12, \ldots, 30\}$
1.22	$\{x : -1 \le x \le 10, x \in N\}$	$\left\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{6}, \ldots\right\}$
1.23	$\{x : -1 \le x \le 10, x \in Z\}$	$\{2^3, 4^3, 6^3, \ldots\}$
1.24	$\{x : x \in Z, x^2 \le 50\}$	$\{3,6,9,12, \ldots, 99\}$
1.25	$\{x : x = 8n - 2,\ n \in N\}$	$\{2,4,8, \ldots, 32\}$
1.26	$\{x : x = y + z,\ y, z \in \{2,3,4\}\}$	$\left\{-\frac{2}{2^2}, +\frac{2}{3^2}, -\frac{2}{4^2}, \ldots\right\}$
1.27	$\{x : x^2 + 6x + 8 = 0, x \in N\}$	$\{2^2, 4^2, 6^2 \ldots\}$
1.28	$\{x : (x + 4)(x - 3) = 0\}$	$\left\{\frac{2}{1^3}, \frac{4}{2^3}, \frac{6}{3^3}, \frac{8}{4^3}, \frac{10}{5^3}\right\}$
1.29	$\{x : x + 9 = 3x + 15\}$	$\{0, \pm3, \pm6, \pm9, \ldots, \pm30\}$

1.30	$\{x: -1 \le x \le 8, x \in N\}$	$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{22}\right\}$

2. Пусть U={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} - универсальное множество. Для данных множеств *A, B, C* найти:

а) $A \cup C$;
б) $A \cap B$;
в) $A \setminus B$;
г) $A \oplus B$;
д) $\overline{A \cap B}$;
е) $\overline{A} \cap \overline{B}$;
ж) $(A \cup C) \setminus B$;
и) $(A \cap B) \cup C$.

№	*A*	*B*	*C*
2.1	{1,2,3,4,5,6,7}	{4,5,6,7,8,9,10}	{2,4,6,8,10}
2.2	{2,3,4,5,6,7,8}	{5,6,7,8,9,10}	{1,3,5,7,9}
2.3	{3,4,5,6,7,8,9}	{6,7,8,9,10}	{1,2,4,6,8,9}
2.4	{6,7,8,9,10}	{1,2,4,6,8,9}	{3,4,5,6,7,8,9}
2.5	{4,5,6,7,8,9,10}	{2,4,6,8,10}	{1,2,3,4,5,6,7}
2.6	{1,3,5,7,9}	{2,3,4,5,6,7,8}	{5,6,7,8,9,10}
2.7	{1,2,3,5,7,9,10}	{3,4,5,6,7,8}	{2,4,6,7,8,9}
2.8	{6,7,8,9,10}	{1,2,3,4,5,6,7}	{3,4,5,6,7,8}
2.9	{1,3,5,7,8,9}	{2,4,6,8,10}	{7,8,9,1,2,3}
2.10	{2,4,6,7,8,9}	{1,3,5,6,7,8}	{8,9,10,1,2,3}
2.11	{2,4,6,8,10}	{1,2,3,4,5,6,7}	{4,5,6,7,8,9,10}
2.12	{1,3,5,7,9}	{2,3,4,5,6,7,8}	{5,6,7,8,9,10}
2.13	{1,2,4,6,8,9}	{3,4,5,6,7,8,9}	{6,7,8,9,10}
2.14	{3,4,5,6,7,8,9}	{6,7,8,9,10}	{1,2,4,6,8,9}
2.15	{1,2,3,4,5,6,7}	{4,5,6,7,8,9,10}	{2,4,6,8,10}
2.16	{5,6,7,8,9,10}	{1,3,5,7,9}	{2,3,4,5,6,7,8}
2.17	{2,4,6,7,8,9}	{1,2,3,5,7,9,10}	{3,4,5,6,7,8}
2.18	{3,4,5,6,7,8}	{6,7,8,9,10}	{1,2,3,4,5,6,7}
2.19	{7,8,9,1,2,3}	{1,3,5,7,8,9}	{2,4,6,8,10}
2.20	{8,9,10,1,2,3}	{2,4,6,7,8,9}	{1,3,5,6,7,8}
2.21	{4,5,6,7,8,9,10}	{2,4,6,8,10}	{1,2,3,4,5,6,7}
2.22	{5,6,7,8,9,10}	{1,3,5,7,9}	{2,3,4,5,6,7,8}
2.23	{6,7,8,9,10}	{1,2,4,6,8,9}	{3,4,5,6,7,8,9}
2.24	{1,2,4,6,8,9}	{3,4,5,6,7,8,9}	{6,7,8,9,10}
2,25	{2,4,6,8,10}	{1,2,3,4,5,6,7}	{4,5,6,7,8,9,10}
2.26	{2,3,4,5,6,7,8}	{5,6,7,8,9,10}	{1,3,5,7,9}
2.27	{3,4,5,6,7,8}	{2,4,6,7,8,9}	{1,2,3,5,7,9,10}
2.28	{1,2,3,4,5,6,7}	{3,4,5,6,7,8}	{6,7,8,9,10}

2.29	{2,4,6,8,10}	{7,8,9,1,2,3}	{1,3,5,7,8,9}
2.30	{1,3,5,6,7,8}	{8,9,10,1,2,3}	{2,4,6,7,8,9}

3. Для данных множеств A и B найти:

а) $A \times B$;

б) $B \times A$;

в) A^2;

г) булеан множества A (т.е. множество всех подмножеств);

д) какое-нибудь покрытие множества A;

е) какое-нибудь разбиение множества A;

ж) произвольное множество подмножеств A (ни булеан, ни покрытие, ни разбиение).

№	A	B	№	A	B
3.1	{1,2,3}	{4,5}	3.2	{3,4,5}	{7,8}
3.3	{7,8,9}	{1,2,3}	3.4	{7,8,9}	{3,4,5}
3.5	{4,5,8}	{2,3,5}	3.6	{4,7,8}	{9,0}
3.7	{3,4,9}	{6,7,8}	3.8	{2,6,8}	{1,2,3}
3.9	{3,5,7}	{1,4,6}	3.10	{8,9,0}	{1,2,4}
3.11	{1,3,5}	{6,7,8}	3.12	{0,1,2}	{8,9}
3.13	{6,7,8}	{4,5}	3.14	{4,5,6}	{1,2}
3.15	{3,4,8}	{1,9}	3.16	{2,9,5}	{3,4}
3.17	{4,6,8}	{1,2,3}	3.18	{1,2,3}	{4,7,9}
3.19	{1,5,6}	{2,3}	3.20	{1,3,5}	{2,7,8}
3.21	{6,7,9}	{5,8}	3.22	{6,7,8}	{5,9}
3.23	{2,4,6}	{3,5}	3.24	{3,4,7}	{8,9}
3.25	{5,6,0}	{1,2}	3.26	{5,6,8}	{2,3,7}
3.27	{1,3,4}	{7,8}	3.28	{1,3,5}	{6,7}
3.29	{2,7,8}	{4,6,9}	3.30	{3,4,6}	{1,9}

4. Доказать тождество с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

4.1	$A \setminus (B \cup C)=(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$	4.2	$(A \cup B) \setminus (C \cap A)=(A \setminus C) \cup (B \setminus A)$
4.3	$A \setminus (B \cap C)=(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$	4.4	$(A \cup B) \setminus (C \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$
4.5	$(A \setminus B) \cap C=(A \cap C) \setminus (B \cap C)$	4.6	$(B \setminus C) \setminus (A \cup C) = (B \setminus A) \cap (B \setminus C)$
4.7	$(A \setminus B) \cup C=(A \cup C) \setminus (B \setminus C)$	4.8	$A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$
4.9	$A \cap (B \setminus C)=(A \cap B) \setminus (A \cap C)$	4.10	$(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
4.11	$(A \setminus B) \setminus C=(A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$	4.12	$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
4.13	$(A \setminus C) \cup (A \cap B)=A \setminus (C \setminus B)$	4.14	$B \setminus (A \cap C)=(B \setminus A) \cup (B \setminus C)$
4.15	$(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$	4.16	$(B \cap C) \setminus (A \cap C) = (C \setminus A) \cap (B \setminus A)$
4.17	$(A \cup C) \setminus (B \setminus A)=A \cup (C \setminus B)$	4.18	$(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
4.19	$(A \cap B) \setminus (A \cap C)= (A \cap B) \setminus C$	4.20	$(A \cap B) \setminus C=(A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
4.21	$(A \cup B) \setminus C=(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$	4.22	$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

4.23	$A \setminus (B \setminus C)=(A \setminus B)\cup(A\cap C)$	4.24	$(C \setminus A)\cup(C \setminus B) = C \setminus (A \cap B)$
4.25	$A \setminus (B\cup C)=(A \setminus B) \setminus C$	4.26	$(B \setminus A) \cup (B \setminus C) = B \setminus (A\cap C)$
4.27	$(A \setminus B)\cap C=(A\cap C) \setminus B$	4.28	$(B \setminus C)\cup(A\cap B)=B \setminus (C \setminus A)$
4.29	$(A \setminus B)\cup(C \setminus B)=(A\cup C) \setminus B$	4.30	$(B \setminus A) \setminus C = (B \setminus C) \setminus (A \setminus C)$

5. Пусть $[P]$ и $[Q]$ матрицы некоторых бинарных отношений. Найти $[P\cup Q]$, $[P\cap Q]$, $[P\circ Q]$, $[P^{-1}]$, $[\overline{P}]$. Проверить выполнение включений $P\subseteq Q$ и $Q\subseteq P$.

№	$[P]$	$[Q]$	№	$[P]$	$[Q]$
5.1	$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	5.2	$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$
5.3	$\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	5.4	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$
5.5	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$	5.6	$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$
5.7	$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	5.8	$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$
5.9	$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$	5.10	$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$
5.11	$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	5.12	$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$
5.13	$\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	5.14	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$
5.15	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$	5.16	$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$
5.17	$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	5.18	$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$
5.19	$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$	5.20	$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$
5.21	$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$	5.22	$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$
5.23	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$	5.24	$\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$
5.25	$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	5.26	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

5.27	$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$	5.28	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
5.29	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	5.30	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

6. Для данных множеств $A=\{a,b,c\}$ и $B=\{1,2,3,4\}$ и отношений $P_1 \subseteq A\times B,\ P_2 \subseteq B^2$:

а) построить матрицы отношений $[P_1]$ и $[P_2]$;

б) изобразить отношения графически;

в) найти $P_1^{-1};\ \overline{P_1};\ P_1 \circ P_2$;

г) проверить для отношения P_2 выполнение свойств рефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности.

№	P_1	P_2
6.1	$\{(a,1),(a,2),(b,3),(c,2),(c,3),(c,4)\}$	$\{(1,1),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(4,4)\}$
6.2	$\{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(b,3),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
6.3	$\{(a,1),(a,2),(a,4),(c,2),(c,3),(c,4)\}$	$\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,3)\}$
6.4	$\{(a,1),(a,2),(b,2),(b,4),(c,3),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,2),(2,2),(4,3),(3,3),(4,4)\}$
6.5	$\{(a,1),(a,4),(b,2),(b,3),(c,1),(c,4)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,1),(4,3),(3,4),(4,1)\}$
6.6	$\{(a,1),(a,2),(a,4),(b,1),(b,4),(c,3)\}$	$\{(1,1),(2,4),(2,1),(3,3),(4,1),(4,2)\}$
6.7	$\{(a,1),(b,1),(b,3),(b,4),(c,3),(c,2)\}$	$\{(1,3),(1,4),(2,2),(4,3),(3,3),(4,4)\}$
6.8	$\{(a,1),(b,3),(c,1),(c,3),(c,2),(c,4)\}$	$\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),$ $(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3),(4,4)\}$
6.9	$\{(a,1),(a,2),(a,4),(b,3),(c,1),(c,4)\}$	$\{(1,3),(1,2),(2,3),(3,2),(3,4),(4,1)\}$
6.10	$\{(a,2),(a,3),(b,2),(b,3),(c,1),(c,4)\}$	$\{(1,1),(1,2),(2,2),(4,1),(3,3),(4,4)\}$
6.11	$\{(a,2),(a,4),(b,3),(c,1),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,3),(2,4),(3,1),(3,4),(4,2),(4,3)\}$
6.12	$\{(b,1),(b,3),(c,1),(c,3),(c,2),(c,4)\}$	$\{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),$ $(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$
6.13	$\{(a,1),(a,2),(a,4),(b,2),(b,4),(c,3)\}$	$\{(1,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4),(4,2)\}$
6.14	$\{(a,2),(a,3),(a,4),(c,1),(c,4),(c,3)\}$	$\{(1,4),(2,3),(2,1),(3,4),(4,2)\}$
6.15	$\{(a,1),(a,2),(b,3),(b,4),(c,3),(c,4)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3)\}$
6.16	$\{(a,2),(a,3),(a,4),(b,1),(b,2),(b,4)\}$	$\{(1,1),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(3,2),(4,3),(4,4)\}$
6.17	$\{(a,3),(b,4),(b,3),(b,1),(b,2),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,3),(2,4),(3,3),(3,1),(4,2)\}$
6.18	$\{(a,3),(b,4),(b,3),(c,1),(c,2),(c,4)\}$	$\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(4,3),(4,2)\}$
6.19	$\{(a,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,3),(c,4)\}$	$\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,1),(4,4)\}$
6.20	$\{(a,2),(a,3),(a,4),(c,1),(c,2),(b,3)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,3),(4,1),(4,3),(4,4),(3,3)\}$

6.21	$\{(a,2),(a,4),(b,1),(b,2),(b,4),$ $(c,2),(c,4)\}$	$\{(1,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4),(4,1),(3,2),(1,3)\}$
6.22	$\{(a,3),(a,4),(b,1),(b,4),(c,2),(c,4)\}$	$\{(1,1),(2,2),(2,4),(2,3),(4,4),(4,2),(3,3),(3,4)\}$
6.23	$\{(a,2),(a,3),(a,4),(b,1),(c,4),$ $(c,2),(c,3)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,2),(3,3),$ $(3,4),(4,3),(4,4)\}$
6.24	$\{(a,3),(b,2),(b,1),(b,4),(c,1),$ $(c,2),(c,4)\}$	$\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(3,2),(3,4),(4,4)\}$
6.25	$\{(a,2),(a,3),(a,4),(b,3),(c,4),(c,1)\}$	$\{(1,1),(2,2),(2,3),(1,4),(3,4),(4,2),(2,4)\}$
6.26	$\{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(b,3),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
6.27	$\{(a,1),(a,2),(a,4),(c,3),(c,2),(c,4)\}$	$\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$
6.28	$\{(a,1),(a,2),(b,2),(b,4),(c,3),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,2),(2,2),(4,3),(3,3),(4,4)\}$
6.29	$\{(a,1),(a,4),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,1),(4,3),(3,4),(4,1)\}$
6.30	$\{(a,1),(a,2),(a,4),(b,1),(b,4),(c,2)\}$	$\{(1,1),(2,4),(2,1),(3,3),(4,1),(4,3)\}$

7. Доказать, что отношение P является отношением порядка ($P = \prec$) на множестве A={a,b,c,d,e} или A={a,b,c,d}. Какой это порядок (частичный нестрогий, строгий, линейный)? Построить диаграмму Хассе для упорядоченного множества $(A, \prec)$.

№	P	№	P
7.1	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(b,c)}	7.2	{(a,c),(b,c),(b,d),(c,d),(a,d)}
7.3	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(b,c),(c,d), (a,d),(b,d)}	7.4	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(a,c), (a,e), (d,b),(e,b)}
7.5	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(a,c),(b,c), (b,d),(c,d),(a,d)}	7.6	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(c,a),(c,b), (c,e),(d,a),(d,b),(d,e),(e,a),(e,b)}
7.7	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(d,a),(d,b), (d,c),(e,a),(e,b),(e,c),(e,d)}	7.8	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(a,c), (e,d), (e,c)}
7.9	{(a,b),(c,a),(c,b,),(d,a),(d,b),(e,a),(e,b)}	7.10	{(a,b),(a,c),(b,c),(b,d),(c,d),(a,d)}
7.11	{(a,b),(c,b),(d,a),(d,b),(d,c),(d,e)}	7.12	{(c,a),(c,b),(c,e),(d,a),(d,b),(d,e),(e,a), (e,b)}
7.13	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(c,b), (d,a),(d,b),(d,c),(d,e)}	7.14	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(c,a), (c,b), (d,a),(d,b),(e,a),(e,b)}
7.15	{(a,b),(a,c),(a,e),(d,b),(e,b)}	7.16	{(a,b),(c,b),(a,c),(e,d,),(e,c),(e,b)}
7.17	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(b,c)}	7.18	{(a,c),(b,c),(b,d),(c,d),(a,d)}
7.19	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(b,c),(c,d), (a,d),(b,d)}	7.20	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(a,c), (a,e), (d,b),(e,b)}
7.21	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(a,c),(b,c), (b,d),(c,d),(a,d)}	7.22	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(c,a),(c,b), (c,e),(d,a),(d,b),(d,e),(e,a),(e,b)}
7.23	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(d,a),(d,b), (d,c),(e,a),(e,b),(e,c),(e,d)}	7.24	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(a,c), (e,d), (e,c)}
7.25	{(a,b),(c,a),(c,b,),(d,a),(d,b),(e,a),(e,b)}	7.26	{(a,b),(a,c),(b,c),(b,d),(c,d),(a,d)}
7.27	{(a,b),(c,b),(d,a),(d,b),(d,c),(d,e)}	7.28	{(c,a),(c,b),(c,e),(d,a),(d,b),(d,e),(e,a), (e,b)}
7.29	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(c,b), (d,a),(d,b),(d,c),(d,e)}	7.30	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(c,a), (c,b),(d,a),(d,b),(e,a),(e,b)}

8. Доказать, что отношение P является отношением эквивалентности на множестве $A=\{1,2,3,4\}$. Построить классы эквивалентности и фактор-множество.

№	P	№	P
8.1	$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	8.2	$\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$
8.3	$\{(1,1),(4,2),(2,4),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	8.4	$\{(1,1),(2,3),(3,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
8.5	$\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	8.6	$\{(1,1),(4,3),(3,4),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
8.7	$\{(1,1),(1,4),(4,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	8.8	$\{(1,1),(3,2),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
8.9	$\{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,4),(3,3),(4,2),(4,3),(4,4)\}$	8.10	$\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$
8.11	$\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,2),(4,4)\}$	8.12	$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
8.13	$\{(1,1),(2,3),(3,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	8.14	$\{(1,1),(4,2),(2,4),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
8.15	$\{(1,1),(4,3),(3,4),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	8.16	$\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
8.17	$\{(1,1),(3,2),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(4,1),(4,4)\}$	8.18	$\{(1,1),(1,4),(4,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
8.19	$\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,2),(4,4)\}$	8.20	$\{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,4),(3,3),(4,2),(4,3),(4,4)\}$
8.21	$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	8.22	$\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$
8.23	$\{(1,1),(4,2),(2,4),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	8.24	$\{(1,1),(2,3),(3,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
8.25	$\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	8.26	$\{(1,1),(4,3),(3,4),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
8.27	$\{(1,1),(1,4),(4,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	8.28	$\{(1,1),(3,2),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
8.29	$\{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,4),(3,3),(4,2),(4,3),(4,4)\}$	8.30	$\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,2),(4,4)\}$

9. Для данного разбиения $\mathcal{A}$ множества $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ построить соответствующее отношение эквивалентности. Почему оно является отношением эквивалентности? Записать классы эквивалентности и фактор – множество.

№	$\mathcal{A}$	№	$\mathcal{A}$
9.1	{{1,2},{3,4},{5,6}}	9.2	{{1},{2},{3},{4,5},{6}}
9.3	{{1},{2,3},{4,5,6}}	9.4	{{1},{2,3,4},{5,6}}
9.5	{{1,2,3},{4},{5,6}}	9.6	{{1},{2,3},{4},{5,6}}
9.7	{{1},{2},{3,4},{5,6}}	9.8	{{1,2},{3},{4,5},{6}}
9.9	{{1,2,3,4},{5},{6}}	9.10	{{1,2,3,4},{5,6}}
9.11	{{1,2},{3},{4},{5,6}}	9.12	{{1},{2,3,4,5},{6}}
9.13	{{1},{2,3,4},{5},{6}}	9.14	{{1},{2},{3},{4},{5,6}}
9.15	{{1,2},{3,4}{5},{6}}	9.16	{{1},{2},{3,4},{5},{6}}

9.17	{{1},{2},{3},{4,5,6}}	9.18	{{1},{2},{3},{4},{5},{6}}
9.19	{{1},{2},{3,4,5},{6}}	9.20	{{1},{2},{3,4,5,6}}
9.21	{{1,2,3,4,5},{6}}	9.22	{{1,2,3},{4},{5},{6}}
9.23	{{1,2,3},{4,5,6}}	9.24	{{1},{2,3},{4,5},{6}}
9.25	{{1,2},{3,4,5,6}}	9.26	{{1},{2,3,4,5,6}}
9.27	{{1,2},{3},{4},{5},{6}}	9.28	{{2},{1,3,4,5},{6}}
9.29	{{1,2,3},{4,5},{6}}	9.30	{{3},{1,2,4,5},{6}}

1.3 Решение типового варианта

1.а) Множество $A=\{x:-3<x<4, x\in N\}$ задать перечислением элементов.

Решение: так как N={1,2,3,4,…}, то A={1,2,3}.

1.б) Множество $A=\left\{+\frac{2}{1},-\frac{4}{3},+\frac{6}{5},-\frac{8}{7}\right\}$ задать общим свойством.

Решение: $A=\left\{x: x=(-1)^{n+1}\frac{2n}{2n-1},\ n\in N,\ n\le 4\right\}$.

2. Пусть U={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} - универсальное множество. Для данных множеств A={1,2,3,8,9,10}, B={1,3,5,6,7,8}, C={2,4,6,7,8,9} найти:

а) $A\cup C$;

б) $A\cap B$;

в) $A\setminus B$;

г) $A\oplus B$;

д) $\overline{A\cap B}$;

е) $\overline{A}\cap\overline{B}$;

ж) $(A\cup C)\setminus B$;

и) $(A\cap B)\cup C$.

Решение:

а) $A\cup C=\{1,2,3,4,6,7,8,9,10\}$;

б) $A\cap B=\{1,3,8\}$;

в) $A\setminus B=\{2,9,10\}$;

г) $A\oplus B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=\{2,9,10\}\cup\{5,6,7\}=\{2,5,6,7,9,10\}$;

д) $\overline{A\cap B}=U\setminus(A\cap B)=\{2,4,5,6,7,9,10\}$;

е) $\overline{A}\cap\overline{B}=\{4,5,6,7\}\cap\{2,4,9,10\}=\{4\}$;

ж) $(A\cup C)\setminus B=\{2,4,9,10\}$;

и) $(A\cap B)\cup C=\{1,2,3,4,6,7,8,9\}$.

3. Для данных множеств A={3,4,5} и B={6,7,9} найти:

а) $A\times B$;

б) $B\times A$;

в) A^2;

г) булеан множества A (т.е. множество всех подмножеств);

д) какое-нибудь покрытие множества A;

е) какое-нибудь разбиение множества A;

ж) произвольное множество подмножеств A (ни булеан, ни покрытие, ни разбиение).

Решение:

а) $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\} =$

$= \{(3,6),(3,7),(3,9),(4,6),(4,7),(4,9),(5,6),(5,7),(5,9)\}$;

б) $B \times A = \{(6,3),(6,4),(6,5),(7,3),(7,4),(7,5),(9,3),(9,4),(9,5)\}$;

в) $A^2 = A \times A = \{(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(4,4),(4,5),(5,3),(5,4),(5,5)\}$;

г) так как A состоит из трёх элементов, то булеан $\mathscr{P}(A)$ имеет $2^3 = 8$ элементов: $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, A, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}\}$;

д) например, $A_1 = \{\{3,4\}, \{4,5\}, \{5\}\}$ - покрытие A;

е) например, $A_2 = \{\{3\}, \{4,5\}\}$- разбиение A;

ж) например, $A_3 = \{\{4\}, \{5\}\}$ - ни булеан, ни разбиение, ни покрытие.

4. Доказать тождество $B \setminus (A \cup C) = (B \setminus A) \cap (B \setminus C)$ с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Решение: изобразим диаграммами Эйлера-Венна левую и правую части равенства отдельно.

Левая часть.

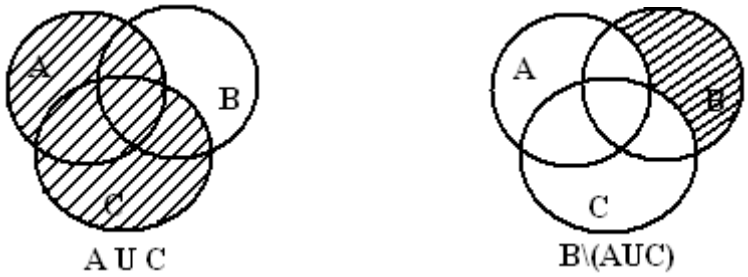


Рисунок 1- Диаграммы Эйлера-Венна для левой части

Правая часть.

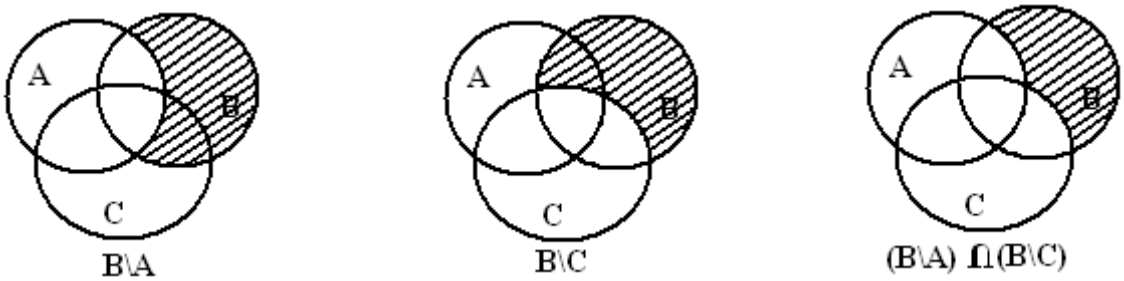


Рисунок 2- Диаграммы Эйлера-Венна для правой части

На последних рисунках левой и правой частей отмечена одна и та же область, что доказывает тождество.

5. Пусть $[P]=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ и $[Q]=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$– матрицы некоторых бинарных отношений. Найти $[P\cup Q]$, $[P\cap Q]$, $[P\circ Q]$, $[P^{-1}]$, $[\overline{P}]$. Проверить выполнение включений $P\subseteq Q$ и $Q\subseteq P$.

Решение: если $[P]=(p_{ij})$, $[Q]=(q_{ij})$, то $[P\cup Q]=(p_{ij}+q_{ij})=[P]+[Q]$, где элементы матриц складываются по правилам: 0+0=0, 1+0 = 0+1 = 1+1 =1; $[P\cap Q]=(p_{ij}\cdot q_{ij})=[P]*[Q]$, т.е. соответствующие элементы перемножаются по обычным правилам: $0\cdot 0=0\cdot 1=1\cdot 0=0$, $1\cdot 1=1$; $[P\circ Q]=[P]\cdot[Q]$ - обычное умножение матриц, но элементы матриц $[P]$ и $[Q]$ складываются и умножаются по выше приведённым правилам; $[P^{-1}]=[P]^{T}$, где P^{-1} отношение, обратное к P; $\overline{P}$ - дополнение P и её матрица $[\overline{P}]$ равна матрице отношения P, в которой нули заменены единицами и единицы нулями; если $P\subseteq Q$, то $p_{ij}\le q_{ij}\ \forall i,j$.

В нашем случае:

$$[P\cup Q]=\begin{pmatrix}1+0 & 0+1\\ 1+1 & 0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix};$$

$$[P\cap Q]=\begin{pmatrix}1\cdot 0 & 0\cdot 1\\ 1\cdot 1 & 0\cdot 0\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix};$$

$$[P\circ Q]=\begin{pmatrix}1\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot 0\\ 1\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$[P^{-1}]=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix};$$

$[\overline{P}]=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $\left.\begin{array}{ll} p_{11}=1; & q_{11}=0\\ p_{12}=0; & q_{12}=1\\ p_{21}=1; & q_{21}=1\\ p_{22}=0; & q_{22}=0\end{array}\right\}\rightarrow$т.к., например, p_{11} не $\le q_{11}$, то P не $\subseteq Q$; т.к., например, q_{12} не $\le p_{12}$, то Q не $\subseteq P$.

6. Для данных множеств $A=\{a,b,c,d\}$ и $B=\{1,2,3,4\}$ и отношений $P_1=\{(a,1),(a,2),(c,1),(c,2),(c,4),(d,4)\}$ и $P_2=\{(1,1),(2,1),(2,4),(3,3),(4,1),(4,3)\}$, $P_1\subseteq A\times B$, $P_2\subseteq B^2$:

а) построить матрицы отношений $[P_1]$ и $[P_2]$;

б) изобразить отношения графически;

в) найти P_1^{-1}; $\overline{P}_1$; $P_1\circ P_2$;

г) проверить для отношения P_2 выполнение свойств рефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности.

Решение:

а) по определению $[P]=(p_{ij})$- матрица отношения P, если $p_{ij}=\begin{cases}1, если (a_i,b_j)\in P\\ 0, если (a_i,b_j)\notin P\end{cases}, i=1,2,...,m,\ j=1,2,...n.$

Таким образом, $[P_1]=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $[P_2]=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}$;

б) Графическое изображение P_1 и P_2 приведено на рисунках 3 и 4;

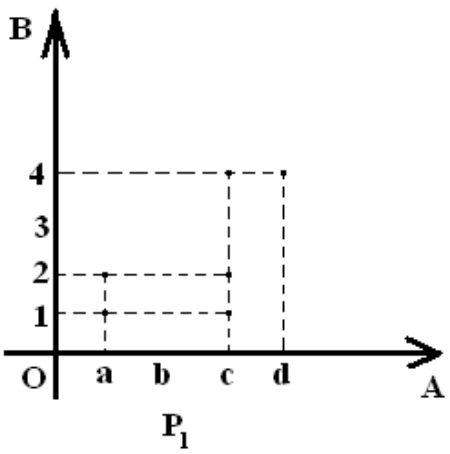


Рисунок 3- График P_1

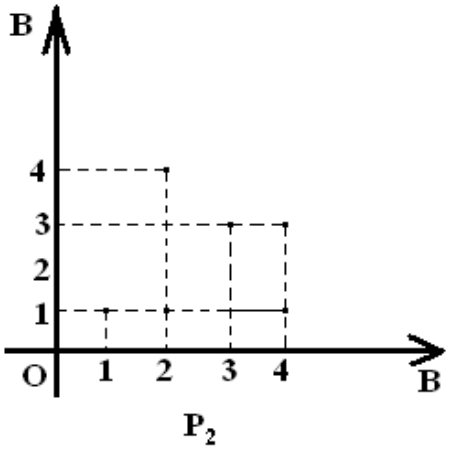


Рисунок 4- График P_2

в) так как $P^{-1}=\{(b,a):(a,b)\in P\}$, то $P_1^{-1}=\{(1,a),(2,a),(1,c),(2,c),(4,c),(4,d)\}$, $P_1^{-1}\subseteq B\times A$. Поскольку $\overline{P}=\{(a,b):(a,b)\notin P\}$, $\overline{P}\subseteq A\times B$ и $A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(b,1),(b,1),(b,2),(b,3),(b,4)(c,1),(c,2),(c,3),(c,4),(d,1),(d,2),(d,3),(d,4)\}$, то дополнением к P_1 будет отношение $\overline{P_1}=\{(a,3),(a,4),(b,1),(b,1),(b,2),(b,3),(b,4),(c,3),(d,1),(d,2),(d,3)\}$;

Поскольку по определению $P_1\circ P_2$ = $\{(a,c)|\ a\in A,\ c\in C$ и $\exists\, b\in B$, что $(a,b)\in P_1$ и $(b,c)\in P_2\}$, где $P_1\subseteq A\times B$, $P_2\subseteq B\times C$, то $P_1\circ P_2=\{(a,1),(a,4),(c,1),(c,4),(c,3),(d,1),(d,3)\}$;

г) свойства отношения P_2 проще определить по его матрице $[P_2]=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}$. Так как на главной диагонали этой матрицы не все единицы, то отношение P_2 не рефлексивное; так как $[P]^T=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\neq[P]$, то оно не симметричное. Поскольку все элементы вне главной диагонали

матрицы $[P_2]*[P_2]^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ являются нулями, то P_2 антисимметричное; так как, например, $(2,4) \in P_2, (4,3) \in P_2$, но $(2,3) \notin P_2$, то P_2 не транзитивное. Заметим, что транзитивность или не транзитивность можно определить через матрицы отношений: надо, чтобы $P \circ P \subseteq P$, или, если $[P \circ P] = [P] \cdot [P] = (a_{ij})$, $[P] = (p_{ij})$, то $a_{ij} \le p_{ij}$.

7. Доказать, что отношение $P = \{(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,e),(c,e)\}$ является отношением порядка ($P = \prec$) на множестве $A=\{a,b,c,d,e\}$. Какой это порядок (частичный нестрогий, строгий, линейный)? Построить диаграмму Хассе для упорядоченного множества $(A, \prec)$.

Решение: заметим, что терминология и классификация отношений порядка различны почти в каждом учебнике. Мы придерживаемся тех, которые указаны в ниже приведенной схеме (рисунок 5). На рисунке 5 отношение $P \subseteq A^2$. Сокращения ч.у.м., л.у.м., в.у.м. приняты для обозначений частично, линейно и вполне упорядоченных множеств. Кроме того, если A конечно, то л.у.м. будет и в.у.м.

Проверим для нашего отношения выполнение свойств рефлексивности, симметричности, антисимметричности и транзитивности. Это, как выяснилось выше, легче всего определить по матрице отношения P:

$$[P] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как на главной диагонали этой матрицы не единицы, то P не рефлексивно;

$[P]^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq [P]$, значит, P не симметрично.

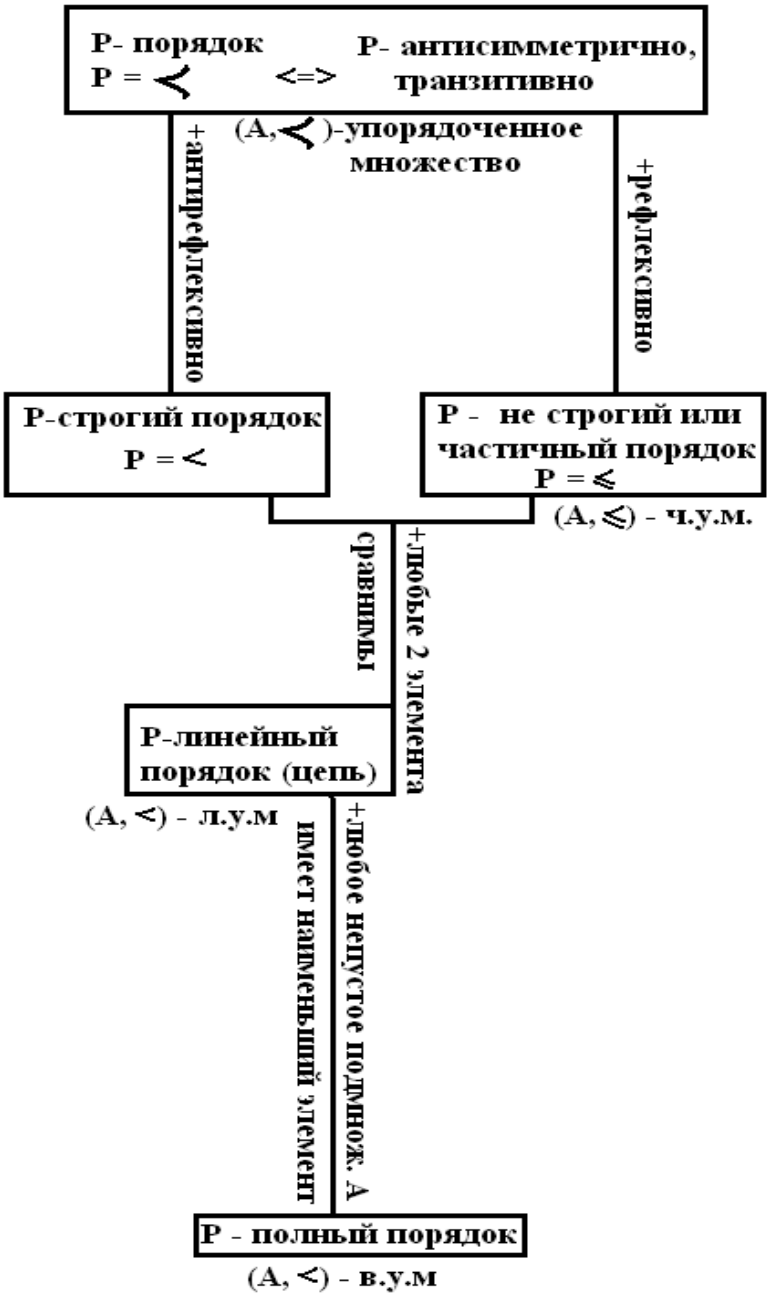


Рисунок 5- Классификация отношений порядка

$[P]*[P]^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, вне главной диагонали этой матрицы все нули, поэтому P антисимметрично; для транзитивности отношения P надо, чтобы $P \circ P \subseteq P$, или, если $[P \circ P] = (a_{ij})$, $[P] = (p_{ij})$, то $a_{ij} \le p_{ij}$. Найдём

$$[P \circ P] = [P] \cdot [P] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видим, что $a_{ij} \le p_{ij} \ \ \forall i, j$, что доказывает транзитивность P.

Итак, P не рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, поэтому оно является отношением строгого порядка. Так как элементы b и c, c и d, b и d не сравнимы (т.е. не входят в одну пару в определении P) , то P- не линейный порядок. Если порядок, определённый на конечном множестве, не линейный, то он и не полный.

Пусть $(A, \prec)$- упорядоченное множество. Если A конечно, то $(A, \prec)$ можно изобразить в виде схемы (диаграммы Хассе), на которой, если $x \prec y$, то x и y изображаются точками, соединёнными линией, x ниже y.

Построим диаграмму Хассе, причём, в силу транзитивности отношения порядка не нужно, например, соединять линией элементы a и e, так как если $a \prec b$ и $b \prec e$, то $a \prec e$.

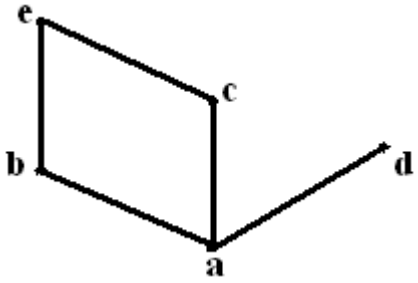


Рисунок 6- Диаграмма Хассе

Заметим, что в случае рефлексивности P, т.е. когда P является частичным или нестрогим порядком, на диаграмме Хассе в каждой вершине появятся петли.

8. Доказать, что отношение $P = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$ является отношением эквивалентности на множестве $A = \{1,2,3,4\}$. Построить классы эквивалентности и фактор-множество.

Решение: отношение E является отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично, транзитивно. Построим матрицу отношения P и по ней определим его свойства: $[P] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Так как эта матрица содержит единицы на главной диагонали, то P- рефлексивно; так как $[P] = [P]^T$, то оно симметрично.

Найдём $[P \circ P] = [P] \cdot [P] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Итак, $[P \circ P] = [P]$, что доказывает транзитивность P.

P - рефлексивно, симметрично, транзитивно, поэтому оно является отношением эквивалентности.

Классом эквивалентности элемента $a \in A$ называется множество $[a]_E = [a] = \{x : (x, a) \in E\}$. Множество всех классов эквивалентности $A/E = \{[a]_E : a \in A\}$ называется фактор-множеством множества A по отношению E. Множество A/E является разбиением множества A.

Построим классы эквивалентности для каждого элемента множества $A = \{1,2,3,4\}$:

$[1] = \{x : (x,1) \in P\} = \{1;2\}$;

$[2] = \{x : (x,2) \in P\} = \{1;2\}$;

$[3] = \{x : (x,3) \in P\} = \{3;4\}$;

$[4] = \{x : (x,4) \in P\} = \{3;4\}$.

Таким образом, $[1] = [2], [3] = [4]$. Фактор-множеством множества A по отношению P будет: $A/P = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$.

9. Для данного разбиения $\mathcal{A}$ = {{1,3},{2,4,5},{6}} множества A={1,2,3,4,5,6} построить соответствующее отношение эквивалентности. Почему оно является отношением эквивалентности? Записать классы эквивалентности и фактор – множество.

Решение: пусть $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ - разбиение множества A, где $A_i (i = 1,2,...,n)$ - подмножества A. Тогда $E = \{(x, y) : x, y \in A_i, i = 1,2,...,n\}$ - отношение эквивалентности, соответствующее этому разбиению.

Таким образом, в нашем случае

E ={(1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(2,2)(2,4),(2,5),(4,2),(4,4)(4,5),(5,2),(5,4),(5,5),(6,6)} - отношение эквивалентности, соответствующее данному разбиению. Чтобы убедиться в том, что это отношение эквивалентности, найдём его матрицу:

$$[E] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По матрице определяем, что E рефлексивно (на главной диагонали все нули), симметрично ($[E] = [E]^T$), транзитивно ($[E \circ E] = [E]$). Поэтому E -

отношение эквивалентности. Классы эквивалентности: [1]=[3]={1,3}, [2]=[4]=[5]={2,4,5}, [6]={6}. Фактор-множеством A по отношению E будет данное разбиение $\mathcal{A} = A/E$ = ={{1,3},{2,4,5},{6}}.

2 Расчетно-графическая работа №2. Элементы математической логики

Цели: познакомиться с основными понятиями математической логики, рассмотреть их свойства и некоторые приложения.

2.1 Теоретические вопросы

1. Основные понятия логики высказываний. Высказывание, основные логические операции.
2. Логические переменные и формулы. Таблицы истинности логических операций и формул.
3. Функции алгебры логики. Способы задания логических функций.
4. Эквивалентность формул. Основные эквивалентные соотношения алгебры логики.
5. Нормальные дизъюнктивные и конъюнктивные формы (ДНФ, КНФ).
6. Совершенные ДНФ и КНФ (СДНФ и СКНФ).
7. Минимизация в классе ДНФ. Карты Карно.
8. Коммутационные схемы.
9. Двойственность. Булева алгебра и теория множеств.

2.2 Расчётные задания

1. Данную функцию f(x,y) заданную формулой, задать:
а) таблицей истинности;
б) единичными и нулевыми наборами;
в) вектором значений.

№	f(x,y)	№	f(x,y)
1.1	$(x \to y) \leftrightarrow (x \downarrow \bar{y})$	1.2	$(x \leftrightarrow \bar{y}) \vee (x \downarrow y)$
1.3	$(x \vee \bar{y}) \leftrightarrow (x \downarrow y)$	1.4	$(x \wedge \bar{y}) \leftrightarrow (x \oplus y)$
1.5	$(x \vee \bar{y}) \to (x \oplus y)$	1.6	$(x \oplus \bar{y}) \leftrightarrow (x \vee y)$
1.7	$(x \mid y) \leftrightarrow (x \wedge \bar{y})$	1.8	$(x \wedge \bar{y}) \downarrow (y \to x)$
1.9	$(x \oplus \bar{y}) \to (x \downarrow y)$	1.10	$(x \to y) \leftrightarrow (x \downarrow \bar{y})$
1.11	$x \leftrightarrow (y \to (x \downarrow \bar{y}))$	1.12	$\bar{x} \downarrow (y \to (x \mid y))$
1.13	$x \leftrightarrow (\bar{y} \to (x \oplus y))$	1.14	$x \to (\bar{y} \mid (x \oplus y))$
1.15	$x \downarrow (\bar{y} \to (x \vee y))$	1.16	$x \oplus (\bar{y} \to (x \leftrightarrow y))$
1.17	$x \oplus (y \to (x \leftrightarrow \bar{y}))$	1.18	$x \leftrightarrow (y \wedge (\bar{y} \to x))$

1.19	$(x \downarrow y) \mid (\bar{x} \vee y)$	1.20	$(x \mid y) \to (\bar{x} \oplus y)$
1.21	$(x \vee y) \to (\bar{x} \downarrow y)$	1.22	$(x \vee y) \downarrow (y \to \bar{x})$
1.23	$(x \oplus y) \mid (\bar{x} \downarrow y)$	1.24	$(x \wedge y) \leftrightarrow (\bar{x} \downarrow y)$
1.25	$x \downarrow (\bar{y} \oplus (y \to x))$	1.26	$x \mid (\bar{y} \oplus (x \vee y))$
1.27	$x \oplus (y \mid (\bar{x} \leftrightarrow y))$	1.28	$(x \vee \bar{y}) \mid (x \oplus y)$
1.29	$x \leftrightarrow (\bar{y} \vee (x \to y))$	1.30	$y \to (\bar{x} \mid (x \oplus y))$

2. Используя соглашение о приоритетах логических операций, расставить скобки в формуле *f*(*x*,*y*). Записать полученную формулу в виде, содержащем только операции отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию; упростить эту формулу.

№	*f*(*x*,*y*)	№	*f*(*x*,*y*)
2.1	$x \vee \bar{y} \leftrightarrow x \oplus y$	2.2	$x \oplus \bar{y} \to x \downarrow y$
2.3	$x \to \bar{y} \mid x \oplus y$	2.4	$x \leftrightarrow \bar{y} \to x \oplus y$
2.5	$x \to y \wedge x \downarrow \bar{y}$	2.6	$x \leftrightarrow y \to x \downarrow \bar{y}$
2.7	$x \oplus y \vee \bar{x} \to y$	2.8	$y \to \bar{x} \mid y \oplus x$
2.9	$x \leftrightarrow y \wedge x \to \bar{y}$	2.10	$x \mid y \to \bar{x} \oplus y$
2.11	$x \downarrow \bar{y} \oplus x \vee y$	2.12	$x \wedge y \leftrightarrow \bar{x} \downarrow y$
2.13	$x \downarrow y \mid \bar{x} \vee y$	2.14	$x \vee y \to \bar{x} \downarrow y$
2.15	$x \oplus \bar{y} \leftrightarrow x \vee y$	2.16	$x \mid y \leftrightarrow x \wedge \bar{y}$
2.17	$\bar{x} \downarrow y \vee x \mid y$	2.18	$x \vee \bar{y} \mid x \oplus y$
2.19	$x \leftrightarrow \bar{y} \wedge x \to y$	2.20	$x \to \bar{y} \downarrow x \vee y$
2.21	$x \oplus \bar{y} \to x \leftrightarrow y$	2.22	$x \oplus y \to x \leftrightarrow \bar{y}$
2.23	$x \wedge \bar{y} \downarrow y \to x$	2.24	$x \oplus y \mid \bar{x} \wedge y$
2.25	$x \vee \bar{y} \leftrightarrow x \downarrow y$	2.26	$x \wedge y \leftrightarrow x \downarrow \bar{y}$
2.27	$x \vee \bar{y} \downarrow x \to y$	2.28	$x \leftrightarrow \bar{y} \wedge x \downarrow y$
2.29	$x \mid \bar{y} \oplus x \vee y$	2.30	$x \wedge \bar{y} \leftrightarrow x \downarrow y$

3. Проверить эквивалентность формул $f_1(x,y,z)$ и $f_2(x,y,z)$:

а) с помощью таблиц истинности;

б) приведением формул к СДНФ или СКНФ с помощью эквивалентных преобразований.

№	$f_1(x,y,z)$	$f_2(x,y,z)$
3.1	$x \to (y \oplus z)$	$(x \to y) \oplus (x \to z)$
3.2	$x \mid (y \to z)$	$(x \mid y) \to (x \mid z)$
3.3	$x \wedge (y \oplus z)$	$(x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$

3.4	$x \wedge (y \to z)$	$(x \wedge y) \to (x \wedge z)$
3.5	$x \wedge (y \leftrightarrow z)$	$(x \wedge y) \leftrightarrow (x \wedge z)$
3.6	$x \wedge (y \mid z)$	$(x \wedge y) \mid (x \wedge z)$
3.7	$x \vee (y \to z)$	$(x \vee y) \to (x \vee z)$
3.8	$x \vee (y \mid z)$	$(x \vee y) \mid (x \vee z)$
3.9	$x \vee (y \leftrightarrow z)$	$(x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z)$
3.10	$x \oplus (y \leftrightarrow z)$	$(x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z)$
3.11	$x \oplus (y \to z)$	$(x \oplus y) \to (x \oplus z)$
3.12	$x \oplus (y \mid z)$	$(x \oplus y) \mid (x \oplus z)$
3.13	$x \downarrow (y \leftrightarrow z)$	$(x \downarrow y) \leftrightarrow (x \downarrow z)$
3.14	$x \mid (y \oplus z)$	$(x \mid y) \oplus (x \mid z)$
3.15	$x \to (y \mid z)$	$(x \to y) \mid (x \to z)$
3.16	$x \to (y \leftrightarrow z)$	$(x \to y) \leftrightarrow (x \to z)$
3.17	$x \vee (y \oplus z)$	$(x \vee y) \oplus (x \vee z)$
3.18	$x \mid (y \leftrightarrow z)$	$(x \mid y) \leftrightarrow (x \mid z)$
3.19	$x \downarrow (y \oplus z)$	$(x \downarrow y) \oplus (x \downarrow z)$
3.20	$x \leftrightarrow (y \oplus z)$	$(x \leftrightarrow y) \oplus (x \leftrightarrow z)$
3.21	$x \to (y \downarrow z)$	$(x \to y) \downarrow (x \to z)$
3.22	$x \downarrow (y \mid z)$	$(x \downarrow y) \mid (x \downarrow z)$
3.23	$x \leftrightarrow (y \mid z)$	$(x \leftrightarrow y) \mid (x \leftrightarrow z)$
3.24	$x \to (y \leftrightarrow z)$	$(x \to y) \leftrightarrow (x \to z)$
3.25	$x \wedge (y \leftrightarrow z)$	$(x \wedge y) \leftrightarrow (x \wedge z)$
3.26	$x \wedge (y \mid z)$	$(x \wedge y) \mid (x \wedge z)$
3.27	$x \vee (y \to z)$	$(x \vee y) \to (x \vee z)$
3.28	$x \vee (y \mid z)$	$(x \vee y) \mid (x \vee z)$
3.29	$x \vee (y \leftrightarrow z)$	$(x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z)$
3.30	$x \oplus (y \leftrightarrow z)$	$(x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z)$

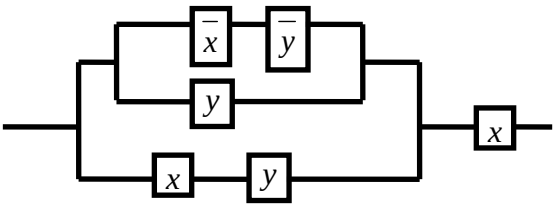
Дана функция $f(A,B,C)$.

4. Составить таблицу истинности для f.
5. Привести f к ДНФ.
6. Составить для f СДНФ (два способа).
7. Построить карту Карно для f и найти минимальную ДНФ (МДНФ).
8. От МДНФ функции f перейти к КНФ.
9. Найти для f СКНФ (два способа).
10. По карте Карно для f двумя способами найти МКНФ.
11. Найти функцию f^*, двойственную к f.

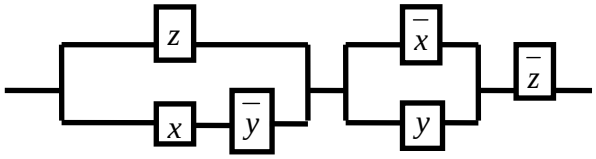
№	$f(A,B,C)$	№	$f(A,B,C)$
1	$(A \vee \overline{B}) \to (\overline{C} \oplus \overline{A})$	2	$\overline{(A \vee \overline{B}) \to (C \oplus \overline{A})}$
3	$((A \downarrow B) \to \overline{C}) \leftrightarrow B$	4	$(\overline{A} \vee \overline{B}) \to \overline{(C \oplus A)}$
5	$(A \vee \overline{B}) \to \overline{(C \leftrightarrow \overline{A})}$	6	$\overline{(A \vee \overline{B}) \to (C \leftrightarrow \overline{A})}$
7	$\overline{(A \mid \overline{B}) \oplus (C \to \overline{A})}$	8	$(A \mid \overline{B}) \to (C \oplus \overline{A})$
9	$(A \mid B) \oplus (\overline{C} \to B)$	10	$\overline{(C \to A) \leftrightarrow (B \mid A)}$
11	$(A \mid \overline{B}) \oplus (\overline{C} \to A)$	12	$(\overline{C} \to A) \leftrightarrow (\overline{A} \mid B)$
13	$(C \to A) \oplus (A \mid \overline{B})$	14	$((A \downarrow B) \to C) \oplus B$
15	$\overline{((A \mid B) \to C) \oplus B}$	16	$(A \vee B) \to (\overline{C} \leftrightarrow B)$
17	$\overline{((A \downarrow B) \to \overline{C}) \oplus B}$	18	$(\overline{(A \downarrow B)} \to \overline{C}) \leftrightarrow B$
19	$((A \leftrightarrow B) \mid \overline{C}) \oplus B$	20	$(A \downarrow B) \to (C \leftrightarrow \overline{A})$
21	$(\overline{(A \leftrightarrow B)} \to \overline{C}) \mid B$	22	$\overline{A \vee \overline{B}} \to (\overline{C} \leftrightarrow B)$
23	$\overline{((A \downarrow B) \to \overline{C}) \leftrightarrow B}$	24	$((A \downarrow B) \to \overline{C}) \oplus B$
25	$\overline{(A \vee B) \to (\overline{C} \leftrightarrow B)}$	26	$\overline{(A \mid B) \oplus (\overline{C} \to B)}$
27	$\overline{((A \downarrow B) \to C) \leftrightarrow A}$	28	$(\overline{A} \vee B) \to \overline{\overline{C} \leftrightarrow A)}$
29	$(\overline{(A \leftrightarrow B) \mid \overline{C}}) \oplus B$	30	$\overline{(A \downarrow B)} \to (C \leftrightarrow \overline{B})$

12. По данной схеме составить и упростить переключательную функцию, построить упрощённую схему.

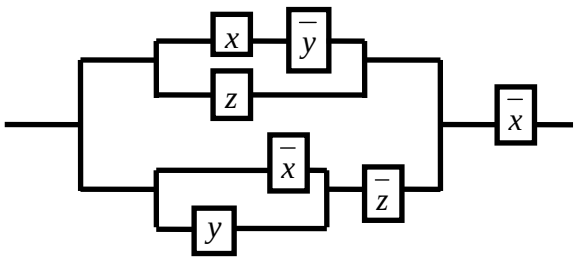
12.1

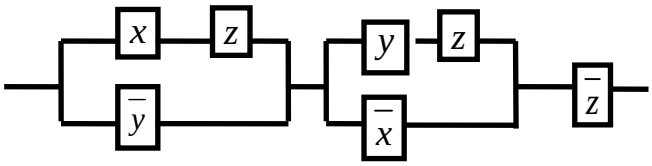


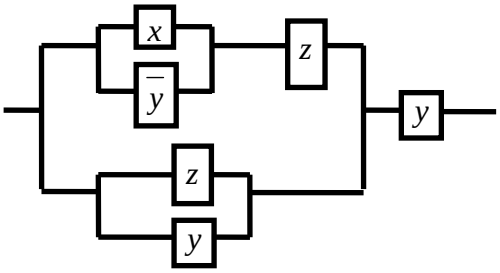
12.2

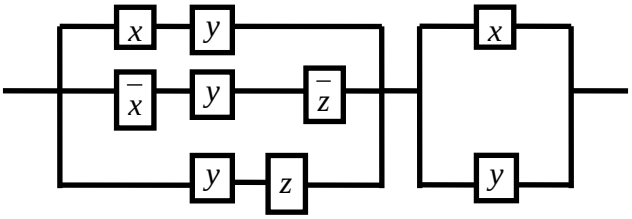


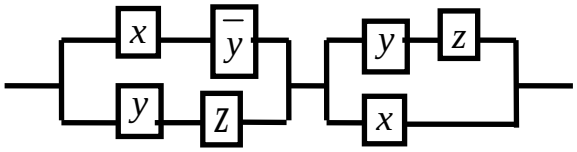
12.3

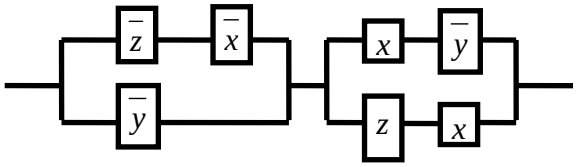


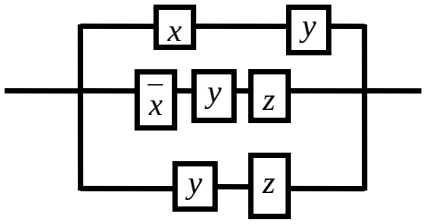
12.4 

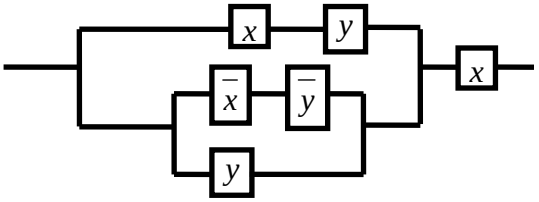
12.5 

12.6 

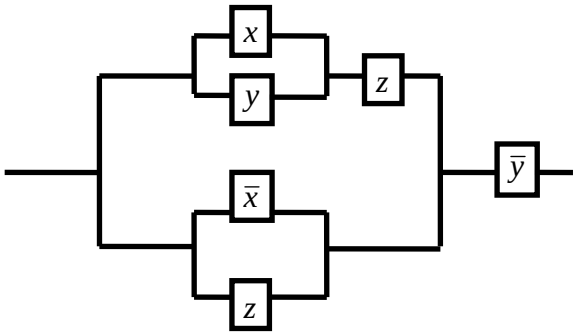
12.7 

12.8 

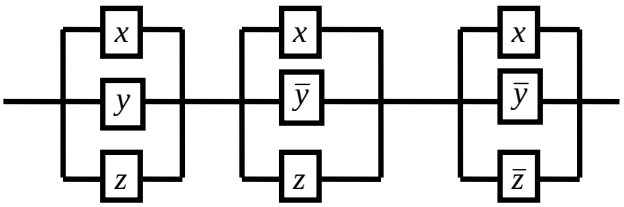
12.9 

12.10 

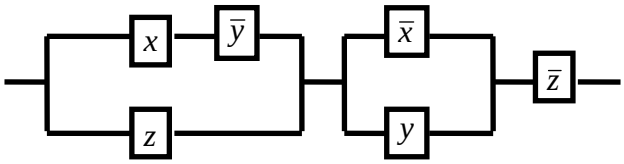
12.11



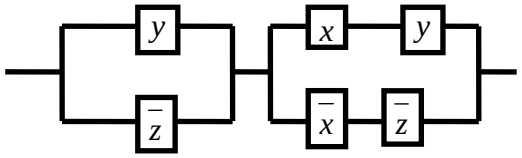
12.12



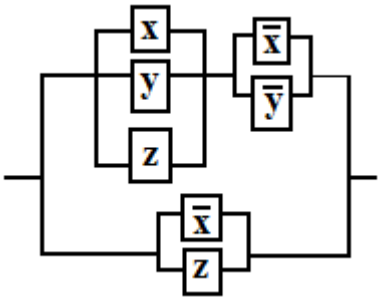
12.13



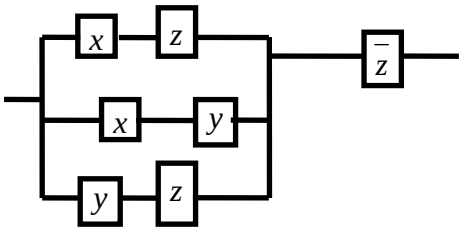
12.14



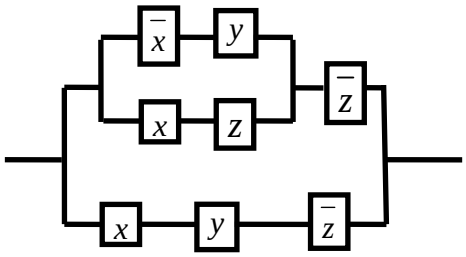
12.15



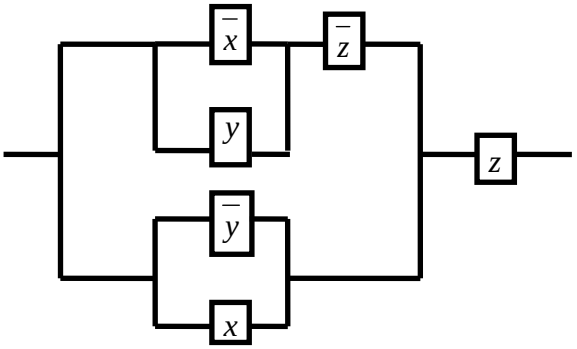
12.16



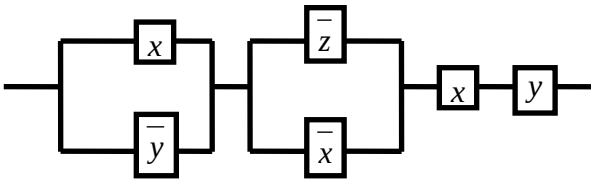
12.17



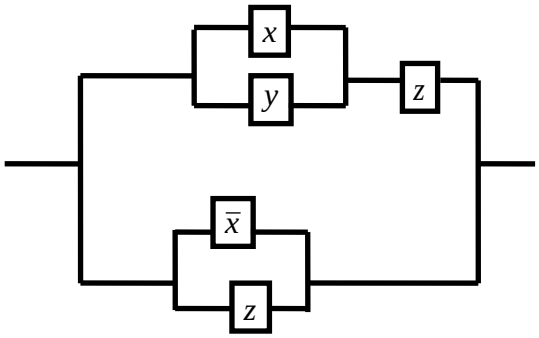
12.18



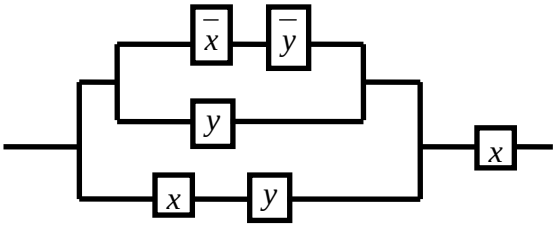
12.19



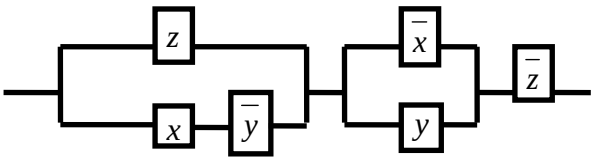
12.20



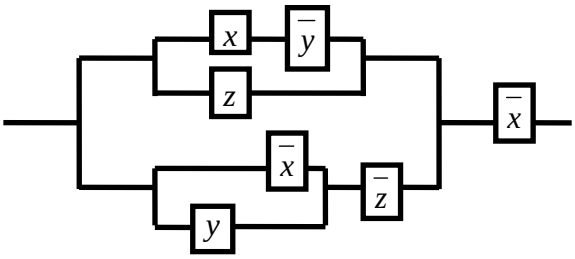
12.21



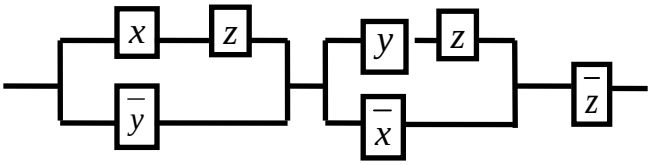
12.22



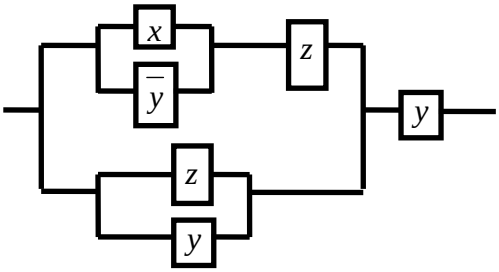
12.23



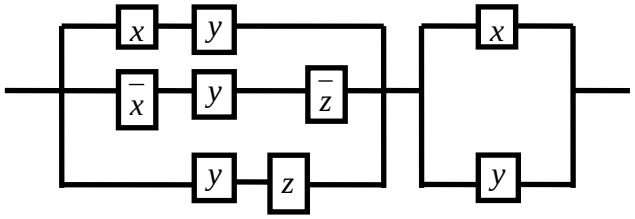
12.24



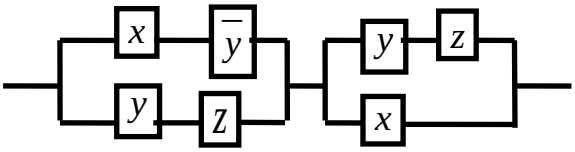
12.25



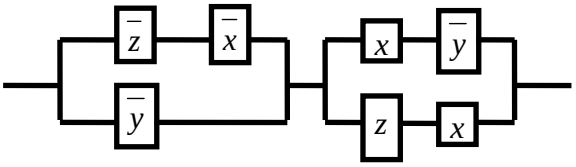
12.26



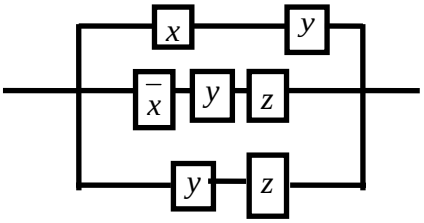
12.27



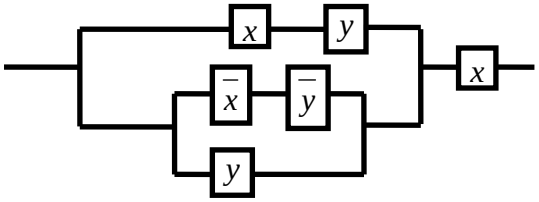
12.28



12.29



12.30



2.3 Решение типового варианта

1. Функцию $f(x,y) = \bar{x} \leftrightarrow \left(y \rightarrow (x \downarrow y)\right)$, заданную формулой, задать:

а) таблицей истинности;

б) единичными и нулевыми наборами;

в) вектором значений.

Решение:

а) таблица истинности:

x	y	$\bar{x}$	$x \downarrow y$	$y \rightarrow (x \downarrow y)$	$f(x,y)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1

б) единичные наборы: 1=f(0,0)=f(1,1); нулевые наборы: 0=f(0,1)=f(1,0);

в) вектор значений: (1001).

2. Используя соглашение о приоритетах логических операций, расставить скобки в формуле $f(x,y)= x \wedge \bar{y} \rightarrow x \downarrow y$. Записать полученную формулу в виде, содержащем только операции отрицания, конъюнкцию и дизъюнкцию; упростить эту формулу.

Решение: согласно схеме приоритетов логических операций $\{\neg,(\wedge,|,\downarrow),\vee,\rightarrow,(\leftrightarrow,\oplus)\}$, в нашей формуле скобки должны быть расставлены так: $x \wedge \bar{y} \rightarrow x \downarrow y = (x \wedge \bar{y}) \rightarrow (x \downarrow y)$.

Упростим полученную формулу: $(x \wedge \bar{y}) \rightarrow (x \downarrow y) =$ | 15, 16 | $= \overline{x \wedge \bar{y}} \vee \overline{x \vee y} =$ | 6 | $= (\bar{x} \vee y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) =$ | 1 | $= y \vee \bar{x} \vee \bar{x}\bar{y} =$ | 5 | $= y \vee \bar{x}$. В преобразовании указаны номера формул из справочного материала на

страницах 33-34. Под упрощением будем понимать получение формулы в виде, содержащем наименьшее число переменных.

3. Проверить эквивалентность формул $f_1(x,y,z) = x \to (y \wedge z)$ и $f_2(x,y,z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$:

а) с помощью таблиц истинности;

б) приведением формул к СДНФ или СКНФ с помощью эквивалентных преобразований.

Решение:

а) таблица истинности $f_1(x,y,z)$ и $f_2(x,y,z)$:

x	y	z	$y \wedge z$	f_1	$x \to y$	$x \to z$	f_2
0	0	0	0	**1**	1	1	**1**
0	0	1	0	**1**	1	1	**1**
0	1	0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	1	1	**1**	1	1	**1**
1	0	0	0	**0**	0	0	**0**
1	0	1	0	**0**	0	1	**0**
1	1	0	0	**0**	1	0	**0**
1	1	1	1	**1**	1	1	**1**

Так как столбцы значений формул $f_1(x,y,z)$ и $f_2(x,y,z)$ совпадают, то эти формулы эквивалентны;

б) используя известные свойства логических операций, номера которых будем указывать, преобразуем формулы сначала к ДНФ - дизъюнктивной нормальной форме, затем, пользуясь законом расщепления, к совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ):

$f_1(x,y,z) = x \to (y \wedge z) =$ | 15 | $= \bar{x} \vee yz =$ | ДНФ,10а | =

$= \bar{x}y \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee xyz \vee \bar{x}yz = \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee xyz \vee \bar{x}yz =$ | 4 | =

$= \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee xyz$ - СДНФ;

$f_2(x,y,z) = (x \to y) \wedge (x \to z) =$ | 15 | $= (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee z) =$ | 3 | =

$= \bar{x}\,\bar{x} \vee \bar{x}z \vee y\bar{x} \vee yz =$ | 4,10а | $= \bar{x}y \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}zy \vee \bar{x}z\bar{y} \vee y\bar{x}z \vee y\bar{x}\,\bar{z} \vee yzx \vee yz\bar{x} =$

= |1,10а | $= \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}\,\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}zy \vee \bar{x}z\bar{y} \vee y\bar{x}z \vee y\bar{x}\,\bar{z} \vee yzx \vee yz\bar{x} =$ | 1,4 | =

$= \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee xyz$ - СДНФ. Если закон дистрибутивности использовать по- другому – не «раскрыть скобки», а «вынести за скобки», то преобразования будут короче: $f_2(x,y,z) = (x \to y) \wedge (x \to z) =$ | 15 | =

$= (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee z) =$ | 3 | $= \bar{x} \vee yz =$ | 10а | =…$= \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee xyz$.

Так как СДНФ обеих формул совпадают, то эти формулы эквивалентны.

4. Для формулы $f(A,B,C) = (A \leftrightarrow \bar{B}) \downarrow (C \oplus B)$ построить таблицу истинности.

Решение: таблица истинности формулы:

A	B	C	$\overline{B}$	$A \leftrightarrow \overline{B}$	$C \oplus B$	f
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1

5. Привести формулу $f(A,B,C) = (A \leftrightarrow \overline{B}) \downarrow (C \oplus B)$ к ДНФ.

Решение:

$f(A,B,C) = (A \leftrightarrow \overline{B}) \downarrow (C \oplus B) =$ | 14,15,16 | $= \overline{(A\overline{B} \vee \overline{A}B) \vee (\overline{CB \vee \overline{C}\,\overline{B}})}$ = | 6,7 | $= \overline{A\overline{B} \vee \overline{A}B} \wedge (CB \vee \overline{C}\,\overline{B}) = \overline{A\overline{B}} \wedge \overline{\overline{A}B} \wedge (CB \vee \overline{C}\,\overline{B}) =$

$= (\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}) \wedge (CB \vee \overline{C}\,\overline{B}) =$ | 3 | $= (\overline{A}A \vee \overline{A}\overline{B} \vee AB \vee B\overline{B}) \wedge (CB \vee \overline{C}\overline{B}) =$

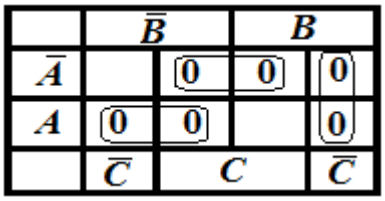
= | 9,3 | = $\overline{A}\overline{B}CB \vee \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{B} \vee ABCB \vee AB\overline{C}\overline{B}$ = | 4,9 | = $\overline{A}\overline{B}\overline{C} \vee ABC$ - ДНФ (а также СДНФ).

6. Для формулы $f(A,B,C) = (A \leftrightarrow \overline{B}) \downarrow (C \oplus B)$ составить СДНФ.

Решение: первый способ: по таблице истинности формулы выпишем её единичные наборы: $1 = f(0,0,0) = f(1,1,1)$. Теперь применяем правило, по которому СДНФ функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ содержит столько конъюнкт, сколько единиц в столбце значений $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; каждому единичному набору нулей и единиц $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ соответствует конъюнкта всех переменных, в которых x_i взято с отрицанием, если $\delta_i = 0$, и без отрицания, если $\delta_i = 1$. Итак, СДНФ нашей формулы содержит дизъюнкцию двух конъюнкт: $f = \overline{A}\overline{B}\overline{C} \vee ABC$ (знак $\wedge$ опущен). Заметим, что вторым способом, т.е. методом элементарных преобразований СДНФ было получено в предыдущем пункте.

7. Для формулы $f(A,B,C) = (A \leftrightarrow \overline{B}) \downarrow (C \oplus B)$ построить карту Карно и найти минимальную ДНФ (МДНФ).

Решение: карта Карно функции трёх переменных представляет собой таблицу, содержащую $2^3 = 8$ ячеек (столько, сколько всех возможных наборов 0 и 1 функции трёх переменных), строки и столбцы соответствуют значениям переменных или их отрицаниям так, чтобы соседние ячейки отличались только значением одной переменной. Для получения МДНФ каждая конъюнкта СДНФ функции отмечается единицей в соответствующей ячейке карты Карно.



После этого надо объединить рядом стоящие по вертикали и горизонтали единицы в так называемые блоки, состоящие из 2, 4 и т.д. ячеек (блоком из 2 ячеек считаются также единицы, стоящие в углах при одной стороне таблицы или из 4 – единицы, стоящие во всех углах, т.к., например, в последнем случае карту можно «свернуть» как тор столбцы к столбцам и строки к строкам. В нашей карте Карно только две единицы, и они не объединяются в блок, поэтому МДНФ = СДНФ: $f = \overline{A}\overline{B}\overline{C} \vee ABC$.

8. Для формулы $f(A,B,C) = (A \leftrightarrow \overline{B}) \downarrow (C \oplus B)$ от МДНФ перейти к КНФ.

Решение: с помощью элементарных преобразований, используя свойства логических операций, номера которых будем указывать, преобразуем формулу к КНФ:

$f = \overline{A}\overline{B}\overline{C} \vee ABC = |\,7\,| = \overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C} \vee ABC} = |\,6\,| = \overline{\overline{ABC}} \wedge \overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}} =$

$\overline{(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}) \wedge (A \vee B \vee C)} = |\,3\,| =$

$= \overline{\overline{A}A \vee \overline{A}B \vee \overline{A}C \vee \overline{B}A \vee \overline{B}B \vee \overline{B}C \vee \overline{C}A \vee \overline{C}B \vee \overline{C}C} = |\,9, 8, 6\,| =$

$= \overline{\overline{A}B} \wedge \overline{\overline{A}C} \wedge \overline{\overline{B}A} \wedge \overline{\overline{B}C} \wedge \overline{\overline{C}A} \wedge \overline{\overline{C}B} = |\,6\,| =$

$= (A \vee \overline{B}) \wedge (A \vee \overline{C}) \wedge (\overline{A} \vee B) \wedge (B \vee \overline{C}) \wedge (\overline{A} \vee C) \wedge (\overline{B} \vee C)$ - КНФ.

9. Для формулы $f(A,B,C) = (A \leftrightarrow \overline{B}) \downarrow (C \oplus B)$ построить СКНФ.

Решение: первый способ: пользуясь законом расщепления, КНФ, полученную в предыдущем пункте, приведём к СКНФ:

$f = (A \vee \overline{B}) \wedge (A \vee \overline{C}) \wedge (\overline{A} \vee B) \wedge (B \vee \overline{C}) \wedge (\overline{A} \vee C) \wedge (\overline{B} \vee C) = |\,10a\,| =$

$(A \vee \overline{B} \vee C) \wedge (A \vee \overline{B} \vee \overline{C}) \wedge (A \vee \overline{C} \vee B) \wedge (A \vee \overline{C} \vee \overline{B}) \wedge (\overline{A} \vee B \vee C) \wedge$

$\wedge (\overline{A} \vee B \vee \overline{C}) \wedge (B \vee \overline{C} \vee A) \wedge (B \vee \overline{C} \vee \overline{A}) \wedge (\overline{A} \vee C \vee B) \wedge (\overline{A} \vee C \vee \overline{B}) \wedge$

$\wedge (\overline{B} \vee C \vee A) \wedge (\overline{B} \vee C \vee \overline{A}) = |\,1,4\,| = (A \vee \overline{B} \vee C) \wedge (A \vee \overline{B} \vee \overline{C}) \wedge (A \vee B \vee \overline{C}) \wedge$

$\wedge (\overline{A} \vee B \vee C) \wedge (\overline{A} \vee B \vee \overline{C}) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C)$ - СКНФ.

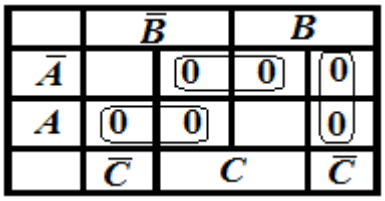
Второй способ: СКНФ можно получить, используя нулевые наборы значений переменных, которые выпишем из таблицы истинности формулы: $0 = f(0,0,1) = f(0,1,0) = f(0,1,1) = f(1,0,0) = f(1,0,1) = f(1,1,0)$. Теперь, следуя правилу, что СКНФ содержит столько дизъюнкт, сколько нулей в столбце значений f, и каждому нулевому набору нулей и единиц $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ соответствует дизъюнкта всех переменных, в которой *i*-ая переменная взята с отрицанием, если $\delta_i = 1$, и без отрицания, если $\delta_i = 0$, получим СКНФ:

$f = (A \vee \overline{B} \vee C) \wedge (A \vee \overline{B} \vee \overline{C}) \wedge (A \vee B \vee \overline{C}) \wedge (\overline{A} \vee B \vee C) \wedge \wedge (\overline{A} \vee B \vee \overline{C}) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C)$.

10. Для формулы $f(A,B,C) = (A \leftrightarrow \overline{B}) \downarrow (C \oplus B)$ по карте Карно двумя способами найти МКНФ.

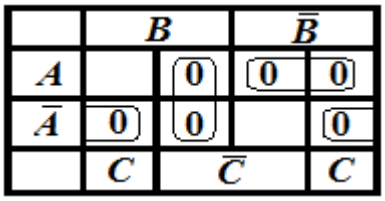
Решение: первый способ: для получения МКНФ можно использовать

карту Карно, по которой находили МДНФ. В этой карте следует заменить переменные на их отрицания и наоборот; на пустые места поставить 0 и убрать 1. Затем отметить на карте максимальные блоки, содержащие 2 или 4 нулевые соседние ячейки. В нашем случае имеется 3 блока по 2 ячейки, которым соответствуют упрощённые дизъюнкты двух переменных. Заметим, что блоки по две ячейки в этом случае можно отметить по-разному. Мы выбрали один из вариантов.



По этой карте МКНФ формулы имеет вид: $f = (\overline{A} \vee C) \wedge (A \vee \overline{B}) \wedge (B \vee \overline{C})$.

Второй способ: в обычной карте Карно заполнить нулями ячейки, соответствующие дизъюнктам СКНФ. Затем отметить на карте максимальные блоки, содержащие 2, 4 и т.д. нулевых соседних ячеек. В нашем случае имеется 3 блока по 2 ячейки, которым соответствуют упрощённые дизъюнкты двух переменных. Так как СКНФ функции $f = (A \vee \overline{B} \vee C) \wedge (A \vee \overline{B} \vee \overline{C}) \wedge (A \vee B \vee \overline{C}) \wedge (\overline{A} \vee B \vee C) \wedge$ $\wedge (\overline{A} \vee B \vee \overline{C}) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C)$, то карта Карно и отмеченные блоки имеют вид:



Итак, МКНФ формулы имеет вид: $f = (\overline{A} \vee C) \wedge (A \vee \overline{B}) \wedge (B \vee \overline{C})$. Мы выбрали один из возможных вариантов отметки блоков с тем, чтобы получить МКНФ в том же виде, что и в первом случае. Можно было бы отметить другие блоки, тогда была бы получена другая МКНФ.

11. Найти функцию f^*, двойственную к f.

Решение: первый способ: по определению $f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)}$. Рассмотрим нашу функцию в виде СДНФ $f = \overline{A}\overline{B}\overline{C} \vee ABC$, для неё по указанной выше формуле $f^* = \overline{\overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{B}}\,\overline{\overline{C}} \vee \overline{A}\overline{B}\overline{C}} = |7| = \overline{ABC \vee \overline{A}\overline{B}\overline{C}} = |6| = \overline{ABC} \wedge \overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}} = |6,7| = (\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}) \wedge (A \vee B \vee C)$; второй способ: т.к. формула $f = \overline{A}\overline{B}\overline{C} \vee ABC$ записана в булевой форме, т.е. только с операциями конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, то по принципу двойственности в булевой алгебре для получения двойственной функции надо в данной формуле все конъюнкции заменить на дизъюнкции, дизъюнкции на конъюнкции, 1 на 0, 0 на 1, получим формулу, представляющую двойственную функцию. Итак, по этому принципу $f = \overline{A}\overline{B}\overline{C} \vee ABC \;\rightarrow\; f^* = (\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}) \wedge (A \vee B \vee C)$; третий способ: в таблице

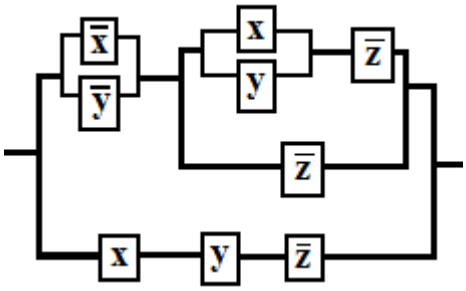
истинности для f заменить все значения на противоположные, получим таблицу истинности для f^* в перевёрнутом виде.

A	B	C	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

A	B	C	f^*
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Из последней таблицы выпишем нулевые наборы 0= $f^*(1,1,1) = f^*(0,0,0)$, а по ним по известным правилам найдём СКНФ, которая и будет формулой, представляющей двойственную функцию $f^* = (\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C}) \wedge (A \vee B \vee C)$.

12. Для данной схемы составить и упростить переключательную функцию, построить упрощённую схему.



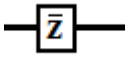
Решение: составим функцию проводимости для данной схемы $f(x,y,z) = (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (((x \vee y) \wedge \bar{z}) \vee \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z})$. Для упрощения этой функции используем два метода. По методу элементарных преобразований имеем: $f(x,y,z) =$ | 3 | = $(\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge ((x\bar{z} \vee y\bar{z}) \vee \bar{z}) \vee xy\bar{z} =$ | 5 | $= (\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z} \vee xy\bar{z} =$ $= |3| = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee xy)\bar{z} = |12| =$ $(\bar{x} \vee \bar{y} \vee x)\bar{z} = |8,9| = 1 \wedge \bar{z} = |8| = \bar{z}$. Для наглядности знак $\wedge$ в некоторых местах опущен.

Для минимизации с помощью карт Карно сначала получим СДНФ:
$f = (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (x\bar{z} \vee y\bar{z} \vee \bar{z}) \vee xy\bar{z}$ = | 5 | = $(\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z} \vee xy\bar{z}$ = | 3 | = $\bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{y}\,\bar{z} \vee xy\bar{z}$ =
= | 10a | = $\bar{x}\,\bar{z}y \vee \bar{x}\,\bar{z}\bar{y} \vee \bar{y}\,\bar{z}x \vee \bar{y}\bar{z}\bar{x} \vee xy\bar{z}$ = | 1, 4 | = $\bar{x}\,y\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\,\bar{z} \vee xy\bar{z}$ - СДНФ.

В карте Карно отметим единицами конъюнкты, рядом стоящие единицы объединим в блоки и составим МДНФ.

	y		ȳ	
x		1	1	
x̄		1	1	
	z	z̄		z

Таким образом, МДНФ: $f = \bar{z}$. Полученной формуле соответствует упрощённая схема:



2.4 Справочный материал. Логические операции и их таблицы истинности

1. Конъюнкция – $(x \wedge y)$, читается «x и y».

2. Дизъюнкция – $(x \vee y)$, читается «x или y».

3. Отрицание (инверсия) – $(\bar{x})$, читается «не x».

4. Импликация - $(x \to y)$, читается «если x, то y».

5. Эквиваленция – $(x \leftrightarrow y)$, читается «x если и только если y».

6. Штрих Шеффера – $(x|y)$, определяется как отрицание конъюнкции, т.е. читается «не x и y».

7. Стрелка Пирса – $(x \downarrow y)$, определяется как отрицание дизъюнкции, т.е. читается «не x или y».

8. Кольцевая сумма – $(x \oplus y)$, определяется как отрицание эквиваленции (исключающее «или»), т.е. читается «или x, или y».

x	y	$\bar{x}$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$	$x\|y$	$x \downarrow y$	$x \oplus y$
0	0	1	0	0	1	1	1	1	0
0	1		0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1		1	1	1	1	0	0	0

Основные эквивалентные соотношения (законы).

1	Коммутативность	$x \wedge y = y \wedge x$	$x \vee y = y \vee x$
2	Ассоциативность	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
3	Дистрибутивность	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
4	Идемпотентность	$x \wedge x = x$	$x \vee x = x$
5	Законы поглощения	$x \wedge (x \vee y) = x$	$x \vee (x \wedge y) = x$
6	Законы Де-Моргана	$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$	$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$
7	Двойное отрицание	$\bar{\bar{x}} = x$	
8	Свойства констант	$x \wedge 1 = x$ $x \wedge 0 = 0$	$x \vee 1 = 1$ $x \vee 0 = x$
9	$x \wedge \bar{x} = 0$ - закон противоречия	$x \vee \bar{x} = 1$ - закон исключённого третьего	

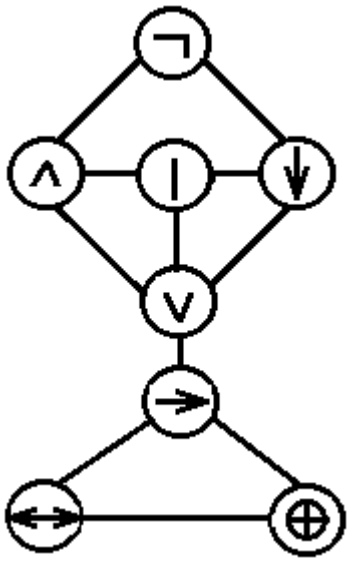
Некоторые другие полезные эквивалентные соотношения.

10	Закон склеивания	$(x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) = x$

10а	Закон расщепления	$x = (x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y})$
11	Обобщённое склеивание	$(x \wedge z) \vee (y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y) = (x \wedge z) \vee (y \wedge \bar{z})$
12	$x \vee (\bar{x} \wedge y) = x \vee y$	$\bar{x} \vee (x \wedge y) = \bar{x} \vee y$
13	$x \wedge (\bar{x} \vee y) = x \wedge y$	$\bar{x} \wedge (x \vee y) = \bar{x} \wedge y$
14	$(x \to y) = \bar{x} \vee y$	$x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x) = (\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) = xy \vee \bar{x}\,\bar{y}$
15	$x \mid y = \overline{x \wedge y}$	$x \downarrow y = \overline{x \vee y}$
16	$x \oplus y = \overline{x \leftrightarrow y}$	

Схема приоритетов логических операций:

$\{\neg, (\wedge, |, \downarrow), \vee, \to, (\leftrightarrow, \oplus)\}$. В этой схеме знаки операций расположены в порядке убывания старшинства, в круглых скобках указаны равносильные операции. Схему приоритетов можно построить и так:



В этой схеме, чем выше знак, тем он сильнее, а знаки, расположенные на одном уровне, равносильны.

3 Расчетно-графическая работа №3. Элементы теории графов

Цели: познакомится с основными понятиями теории графов, рассмотреть некоторые приложения графов.

3.1 Теоретические вопросы

1. Основные понятия и определения теории графов.
2. Способы задания графов.
3. Изоморфизм графов. Подграфы.
4. Маршруты, цепи, пути, циклы, контуры.
5. Связность. Компоненты связности. Расстояния в графах.
6. Взвешенные графы. Матрица весов. Взвешенное расстояние.
7. Нахождение кратчайших маршрутов.

8. Деревья, лес. Корневые деревья. Остов графа.
9. Цикломатическое число. Коранг. Число остовных деревьев графа.
10. Определение остовного дерева минимального веса.
11. Алфавитное кодирование.
12. Оптимальное кодирование.

3.2 Расчётные задания

Неориентированный граф (н-граф) *G* задан списком рёбер.

1. Задать *G*:

а) двумя множествами: вершин *V* и рёбер *E*;

б) графически;

в) матрицей смежности;

г) матрицей инцидентности.

2. Найти матрицу расстояний, эксцентриситеты вершин, диаметр и радиус графа *G*.

3. Проверить условие эйлеровости графа *G*, найти эйлеров цикл.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Рёбра	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.
a	1,2	1,2	1,2	1,4	1,2	1,4	1,4	1,2	1,2	1,4
b	1,5	1,4	1,4	1,5	1,4	1,5	1,6	1,4	1,3	1,5
c	2,4	2,3	2,4	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	1,4	2,4
d	3,5	2,4	3,4	2,5	2,4	2,5	2,5	2,4	1,5	2,5
e	3,6	2,5	3,5	3,5	2,5	3,6	3,5	2,5	2,3	3,4
f	4,5	3,6	4,5	4,5	3,5	4,5	4,5	3,4	2,4	3,5
g	5,6	5,6				5,6	5,6	4,5	2,5	4,5
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Рёбра	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.
a	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,4	1,2
b	1,3	1,5	1,4	1,4	1,4	1,5	1,4	1,4	1,5	1,4
c	1,4	2,3	2,3	2,3	2,3	2,4	2,3	2,4	2,3	2,3
d	1,5	2,4	2,5	2,4	2,4	3,5	2,4	3,4	2,5	2,4
e	2,4	2,5	2,6	2,5	2,5	3,6	2,5	3,5	3,5	2,5
f	3,4	3,4	3,6	4,5	3,4	4,5	3,6	4,5	4,5	3,5
g	4,5		4,5		4,5	5,6	5,6			
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Рёбра	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.	Верш.
a	1,4	1,4	1,2	1,2	1,4	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2
b	1,5	1,6	1,4	1,3	1,5	1,3	1,5	1,4	1,4	1,4
c	2,3	2,3	2,3	1,4	2,4	1,4	2,3	2,3	2,3	2,3
d	2,5	2,5	2,4	1,5	2,5	1,5	2,4	2,5	2,4	2,4
e	3,6	3,5	2,5	2,3	3,4	2,4	2,5	2,6	2,5	2,5
f	4,5	4,5	3,4	2,4	3,5	3,4	3,4	3,6	4,5	3,4

g	5,6	5,6	4,5	2,5	4,5	4,5		4,5		4,5

Ориентированный граф (орграф) $G = (V,E)$ задан множествами вершин $V = \{1,2,3,4\}$ и дуг $E=\{a,b,c,d,e,f,k,l\}$, причём дуги определены парами начальных и конечных вершин.

4. Задать G:

а) графически;

б) матрицей смежности;

в) матрицей инцидентности;

г) списком дуг.

5. Найти степени входа и выхода вершин графа G и степени вершин соответствующего н-графа. Записать равенства, определяющие связь степеней вершин и числа рёбер графа.

6. Определить соответствующее графу G бинарное отношение. Какими свойствами (рефлексивность, симметричность, и т.д.) обладает данное отношение?

№	E	№	E
1	{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,3)}	2	{(1,1),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)}
3	{(1,1),(1,2),(2,2),(3,2),(3,4),(3,3),(4,1),(4,2)}	4	{(1,4),),(2,1),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,4)}
5	{(1,2),(2,1),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,3),(4,4)}	6	{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(3,2),(4,3)}
7	{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(4,3),(4,4)}	8	{(1,1),(2,1),(2,2),(2,3),(1,4),(3,4),(3,3),(2,4)}
9	{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(3,1),(3,4),(4,1),(4,3)}	10	{(1,1),(1,4),(2,3),(2,2),(3,2),(3,3),(4,1),(4,4)}
11	{(1,1),(2,4),(2,1),(3,3),(4,1),(4,2),(1,3),(2,3)}	12	{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,2),(3,1),(4,4)}
13	{(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3),(4,3),(4,4)}	14	{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,3),(4,4)}
15	{(1,1),(1,4),(2,1),(2,3),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3)}	16	{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)}
17	{(1,3),(1,2),(2,2),(2,3),(3,2),(1,1),(4,1),(4,2)}	18	{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,2),(4,3),(4,2),(4,4)}
19	{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(3,2),(4,1),(4,4)}	20	{(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,1),(4,4)}
21	{(1,1),(1,3),(2,4),(4,4),(3,3),(3,1),(4,2),(4,3)}	22	{(1,1),(1,4),(2,3),(4,1),(2,2),(4,3),(3,4),(3,3)}
23	{(1,1),(2,4),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3)}	24	{(1,1),(2,2),(1,2),(3,3),(4,4),(4,1),)3,2),(1,3)}
25	{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4),(4,2)}	26	{(1,1),(2,2),(2,4),(2,3),(4,4),(4,2),(3,3),(3,4)}
27	{(1,4),(2,2),(2,3),(2,1),(3,3),(3,4),(4,3),(4,1)}	28	{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,3),(3,1),(4,2),(4,3)}
29	{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,1)}	30	{(1,1),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(3,2),(4,3),(4,4)}

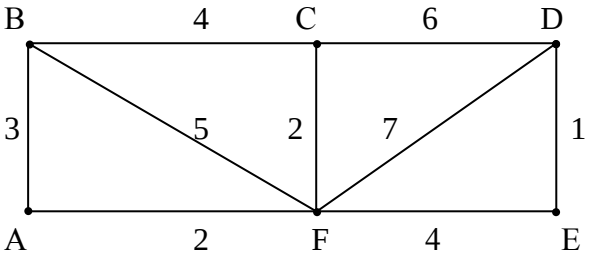
Взвешенный граф задан рисунком.

7. Найти матрицу весов графа, кратчайший маршрут из вершины A к остальным вершинам;

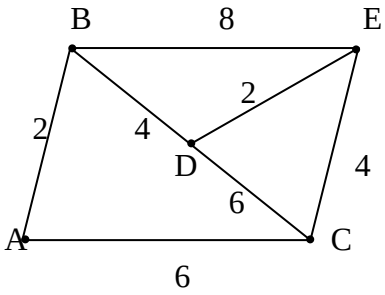
8. Найти цикломатическое число, коранг, число остовных деревьев в графе.

9. Найти дерево минимального веса графа и его вес.

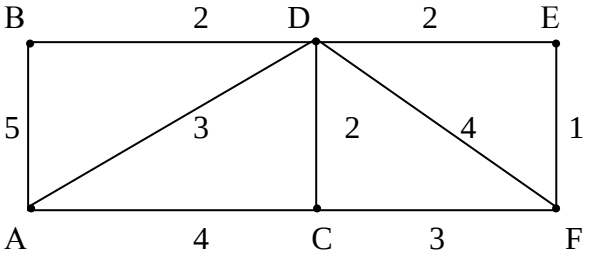
1.


B
4
C
6
D
3
5
2
7
1
A
2
F
4
E

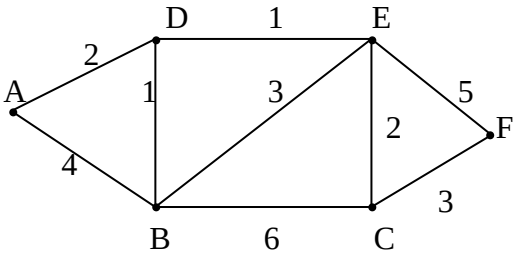
2.


B
8
E
2
2
4
D
4
6
A
C
6

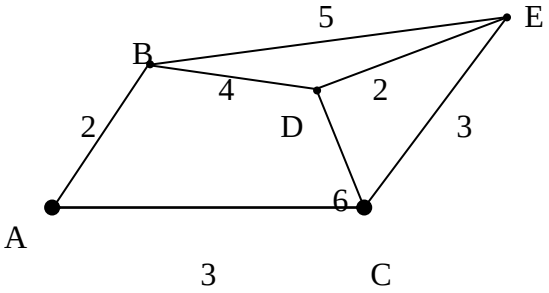
3.


B
2
D
2
E
5
3
2
4
1
A
4
C
3
F

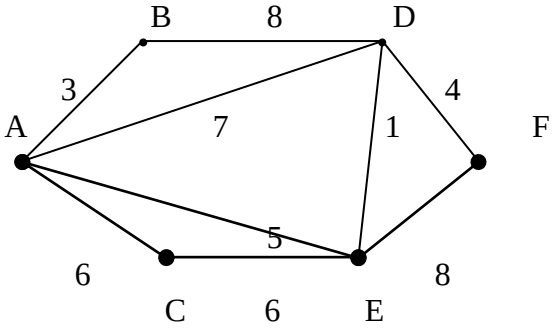
4.


D
1
E
2
A
1
3
5
2
F
4
3
B
6
C

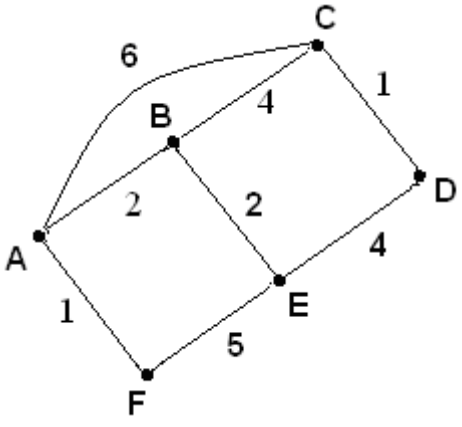
5.


5
E
B
4
2
2
D
3
6
A
3
C

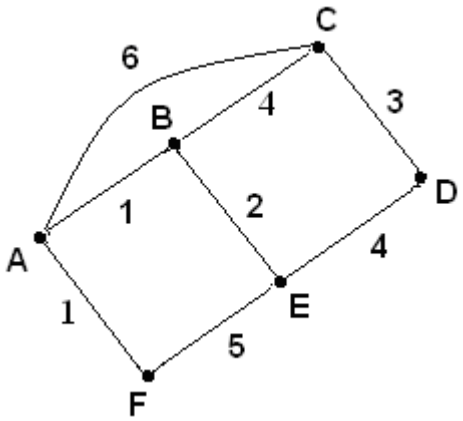
6.


B
8
D
3
4
A
7
1
F
5
6
8
C
6
E

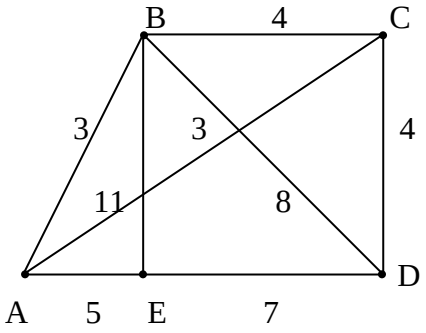
7.


C
6
1
B
4
2
2
D
A
4
1
E
5
F

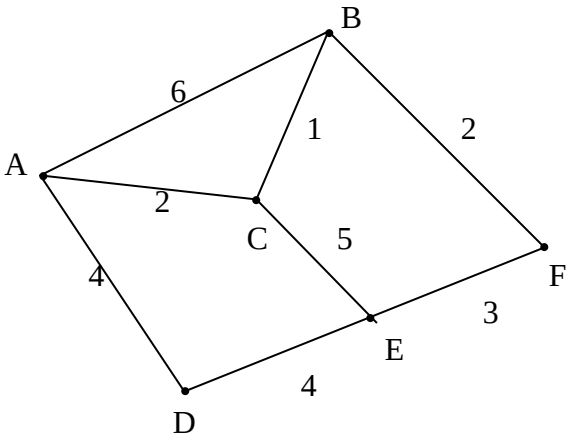
8.


C
6
3
B
4
1
2
D
A
4
1
E
5
F

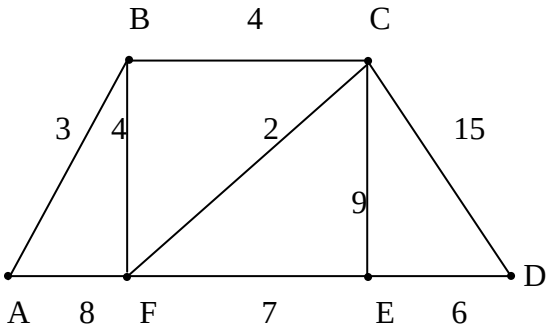
9.



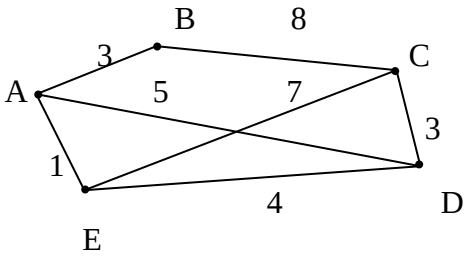
10.



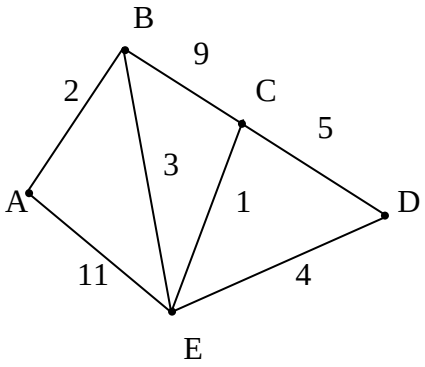
11.



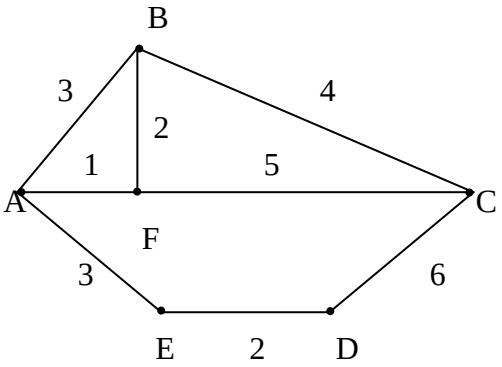
12.



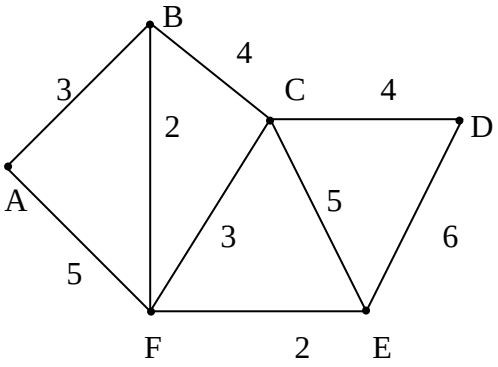
13.



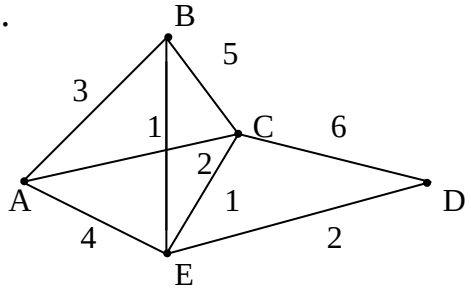
14.



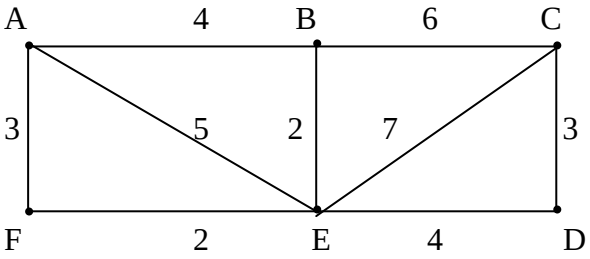
15.



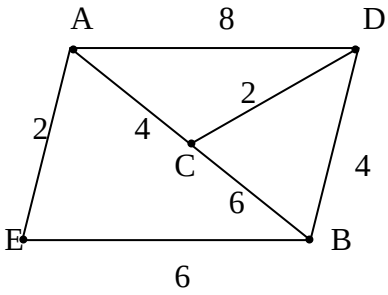
16.



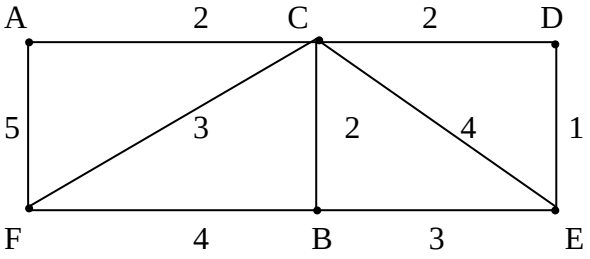
17.



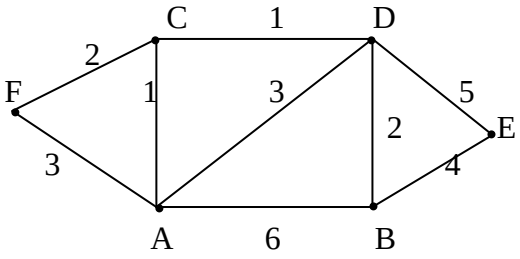
18.



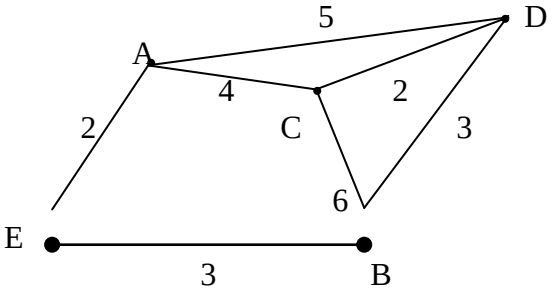
19.



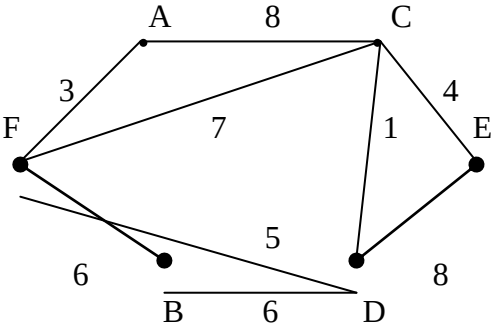
20.



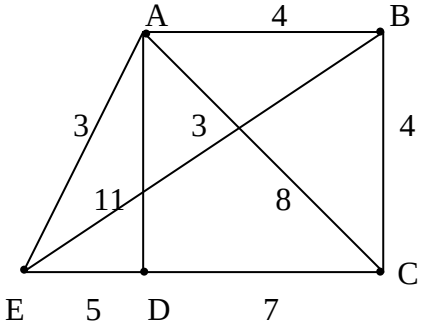
21.



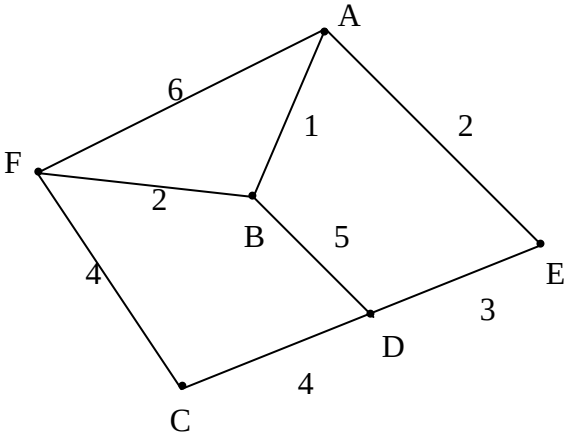
22.



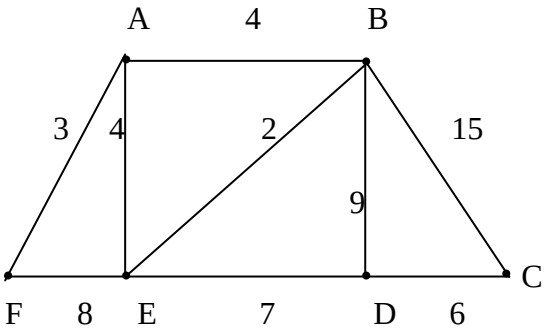
23.



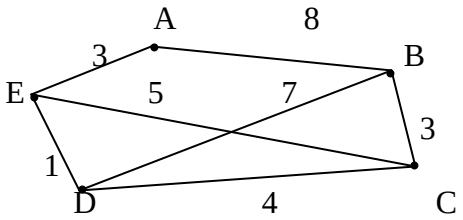
24.



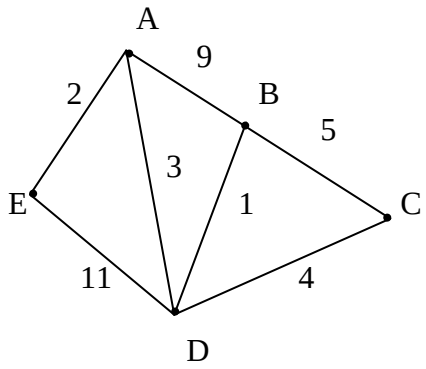
25.



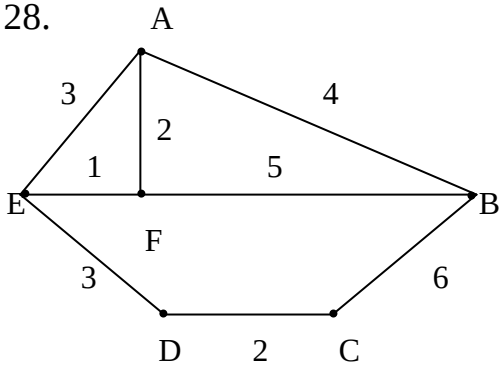
26.



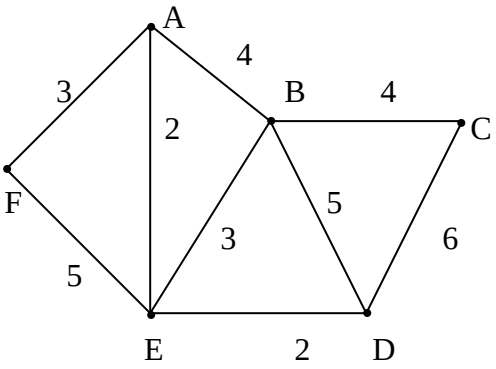
27.



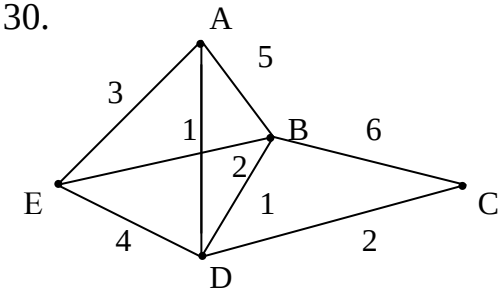
28.



29.



30.



10. Заданы буквы и их частоты:
а) построить дерево Хаффмана;
б) определить код Хаффмана;
в) найти вес кода;
г) закодировать слово α;
д) декодировать слово β.

№	Буквы и частоты						α	β
1	*а*	*к*	*о*	*ш*	*т*	*ф*	*кошка*	1011110100
	12	8	4	2	7	3		
2	*а*	*в*	*о*	*р*	*х*	*т*	*вахта*	0011101111
	7	8	10	2	4	9		
3	*л*	*о*	*а*	*к*	*ж*	*р*	*ложка*	0100100001011
	4	7	12	8	2	3		
4	*о*	*в*	*т*	*р*	*с*	*х*	*торос*	011100111010
	14	10	6	9	5	2		
5	*с*	*о*	*н*	*а*	*л*	*р*	*салон*	000001101111
	8	12	6	14	3	4		
6	*м*	*х*	*е*	*р*	*с*	*а*	*схема*	00111011100
	8	2	10	4	5	13		
7	*о*	*н*	*р*	*с*	*т*	*а*	*нарост*	10111100100
	12	5	3	10	7	16		
8	*к*	*т*	*с*	*а*	*о*	*р*	*карст*	000111101111
	10	6	8	14	12	3		
9	*з*	*о*	*б*	*р*	*а*	*к*	*забор*	110110001001
	2	14	12	10	8	5		
10	*м*	*о*	*а*	*з*	*к*	*р*	*зарок*	1111011010100
	5	11	12	7	9	2		
11	*т*	*ф*	*а*	*к*	*ш*	*о*	*факт*	0110010100111
	7	3	12	8	2	4		
12	*х*	*т*	*а*	*ф*	*о*	*р*	*вата*	00111110101111
	4	9	7	8	10	12		
13	*ж*	*р*	*л*	*о*	*а*	*к*	*колор*	1000010100111
	2	3	4	7	12	8		
14	*с*	*х*	*о*	*в*	*т*	*р*	*ворох*	1001100111011
	5	2	14	10	6	9		
15	*л*	*р*	*с*	*о*	*н*	*а*	*ссора*	0011101001100
	3	4	8	12	6	14		
16	*с*	*а*	*м*	*х*	*е*	*р*	*марс*	1001010010011
	5	13	8	2	10	4		
17	*т*	*а*	*о*	*н*	*р*	*с*	*наст*	10111110100100100
	7	16	12	5	3	10		
18	*о*	*р*	*к*	*т*	*с*	*а*	*корт*	001011101101111
	12	3	10	6	8	14		
19	*а*	*к*	*з*	*о*	*б*	*р*	*короб*	1100111011000
	8	5	2	14	12	10		
20	*к*	*р*	*м*	*о*	*а*	*з*	*замок*	1111011000100
	9	2	5	11	12	7		
21	*ш*	*о*	*т*	*ф*	*а*	*к*	*штоф*	101110000100
	2	4	7	3	12	8		

22	*о*	*р*	*х*	*т*	*а*	*в*	*рота*	001011001001
	10	2	4	9	7	8		
23	*а*	*к*	*ж*	*р*	*л*	*о*	*жало*	101100101011
	12	8	2	3	4	7		
24	*т*	*р*	*с*	*х*	*о*	*в*	*ворс*	00111011100
	6	9	5	2	14	16		
25	*н*	*а*	*л*	*р*	*с*	*о*	*рана*	10110110101010
	6	14	3	4	8	12		
26	*е*	*р*	*с*	*и*	*м*	*х*	*меха*	10000011010
	10	14	5	13	8	2		
27	*р*	*с*	*т*	*а*	*о*	*н*	*трасса*	101101101011
	3	10	7	16	12	5		
28	*с*	*а*	*о*	*р*	*к*	*т*	*рокот*	1111111001110
	8	14	12	3	10	6		
29	*б*	*р*	*а*	*к*	*з*	*о*	*барак*	001001111
	12	10	8	5	2	14		
30	*а*	*з*	*к*	*р*	*м*	*о*	*карма*	11011011000010
	12	7	9	2	5	11		

1.3 Решение типового варианта

Замечание. Везде далее в теоретических пояснениях используются следующие обозначения: $V = \{v_1, v_2, ..., v_i, ...\}$ - множество вершин графа, $E = \{e_1, e_2, ..., e_i, ...\}$- множество рёбер или дуг графа.

Н-граф *G*(*V*,*E*) задан списком рёбер:

Рёбра	a	b	c	d	e	f	g	h
Вершины	1,4	1,6	2,3	2,6	3,4	4,5	4,6	5,6

1. Задать *G*:

а) двумя множествами: вершин *V* и рёбер *E*;

б) графически;

в) матрицей смежности;

г) матрицей инцидентности.

2. Найти матрицу расстояний, эксцентриситеты вершин, диаметр и радиус графа *G*.

3. Проверить условие эйлеровости графа *G*, найти эйлеров цикл.

Решение:

1. а) задание *G*(*V*,*E*) двумя множествами: вершин *V*={1,2,3,4,5,6} и рёбер *E*= ={*a*,*b*,*c*,*d*,*e*,*f*,*g*} = $\{(1,4),(1,6),(2,3),(2,6),(3,6),(4,5),(5,6)\}$;

б) графическое задание *G*;

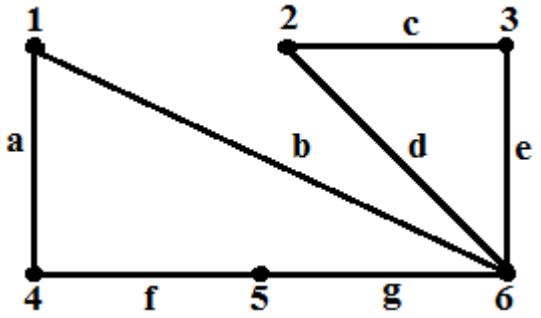


Рисунок 7 - Граф *G*

в) матрица смежности н-графа с m вершинами имеет вид $A=\underset{m\times m}{(a_{ij})}$,

где $a_{ij}=\begin{cases}1, \textit{ если верш.} v_i, v_j \textit{ смежны}\\ 0, \textit{ в противном случае}\end{cases}$;

таким образом, $A=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0&1\\0&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&0&1\\1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&1\\1&1&1&0&1&0\end{pmatrix}$;

г) матрица инцидентности н- графа с m вершинами и n рёбрами имеет вид $B=\underset{m\times n}{(b_{ij})}$,

где $b_{ij}=\begin{cases}1, \textit{если верш.} v_i \textit{ инциден. ребру } e_j\\ 0, \textit{ в противном случае}\end{cases}$, итак, $B=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1&1\\0&1&0&1&1&0&1\end{pmatrix}$.

2. $D=(d_{ij})$- матрица расстояний, где $d_{ij}=d(v_i,v_j)$- расстояние между вершинами v_i и v_j, т.е. минимальная длина простой цепи с концами v_i и v_j.

Таким образом, $D=\begin{pmatrix}0&2&2&1&2&1\\2&0&1&3&2&1\\2&1&0&3&2&1\\1&3&3&0&1&2\\2&2&2&1&0&1\\1&1&1&2&1&0\end{pmatrix}$- матрица расстояний нашего графа; так как эксцентриситет вершины v_i (обозначается $e(v_i)$) это расстояние до наиболее удалённой от неё вершины, то $e(v_i)$ равен наибольшему из чисел, стоящих в *i*- ой строке матрицы расстояний. Таким образом, *e*(1)=2, *e*(2)=3, *e*(3)=3, *e*(4)=3, *e*(5)=2, *e*(6)=2. Диаметр графа равен $d(G)=\max\{e(v)|v\in V\}$=3;

радиус - $r(G) = \min\{e(v) | v \in V\}$=2; вершина v_i называется периферийной, если $e(v_i) = d(G)$, центральной – если $e(v_i) = r(G)$. Таким образом, вершины 2, 3, 4 – периферийные, 1, 5, 6- центральные.

3. Критерий эйлеровости графа: связный граф является эйлеровым (т.е. имеет эйлеров цикл) тогда и только тогда, когда степени всех его вершин чётны (степень вершины равна числу рёбер, инцидентных ей).

Для эйлеровых графов существует алгоритм Флери, позволяющий быстро построить один из существующих эйлеровых циклов (эйлеров цикл графа содержит все его рёбра по одному разу):

а) выбираем произвольную вершину v_1 и ребро e_1, инцидентное v_1.

Переходим в вершину v_2 по ребру $e_1 = \{v_1, v_2\}$. Присваиваем ребру e_1 номер 1, назовём его пройденным и вычёркиваем;

б) находясь в вершине v_i, не следует выбирать ребро, соединяющее v_i с v_1, если есть возможность другого выбора;

в) находясь в вершине v_i, не следует выбирать ребро, которое является перешейком, т.е. ребром, при удалении которого, граф, образованный не вычеркнутыми рёбрами, распадается на две компоненты связности, каждая из которых имеет хотя бы по одному ребру;

г) после того как в графе будут занумерованы все рёбра, образуется эйлеров цикл, причём мы придём в ту вершину, с которой начали. Порядок нумерации соответствует последовательности обхода рёбер.

Наш граф эйлеров, т.к. степени всех вершин чётные: $\rho(1) = \rho(2) = \rho(3) = = \rho(4) = \rho(5) = 2$, $\rho(6) = 4$. Построим эйлеров цикл в этом графе: выберем вершину 1 и ребро $a = \{1,4\}$, присвоив ему номер 1, перейдём в вершину 4; из вершины 4 один путь по ребру $f = \{4,5\}$ (номер 2) в вершину 5; из вершины 5 один путь по ребру $g = \{5,6\}$ (номер 3) в вершину 6; находясь в вершине 6, не выбираем пройденное ребро g и ребро b, соединяющее вершину 6 с первой вершиной 1, из оставшихся инцидентных этой вершине рёбер ни одно не является перешейком, поэтому выбираем любое, например, $e = \{3,6\}$, присваиваем ему номер 4 и переходим в вершину 3; рассуждая аналогично, обходим оставшиеся рёбра в порядке: $c = \{2,3\}$, $d = \{2,6\}$, $b = \{1,6\}$ (номера 5, 6,7) , таким образом, пройдены все рёбра. Итак, получен эйлеров цикл: a, f, g, e, c, d, b.

Орграф G = (V,E) задан множествами вершин V = {1,2,3,4} и дуг E={a,b,c,d,e,f,g,h}=$\{(1,2),(1,4),(2,3),(3,2),(4,5),(4,6)\}$, причём дуги определены парами начальных и конечных вершин.

4. Задать G:

а) графически;

б) матрицей смежности;

в) матрицей инцидентности;

г) списком дуг.

5. Найти степени входа и выхода вершин графа G и степени вершин соответствующего н-графа. Записать равенства, определяющие связь степеней вершин и числа рёбер графа.

6. Определить соответствующее графу G бинарное отношение. Какими свойствами (рефлексивность, симметричность, и т.д.) обладает данное отношение?

Решение:

4. а) графическое задание G;

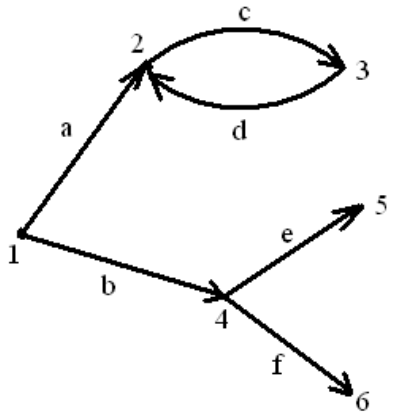


Рисунок 8 - Граф G

б) матрица смежности для орграфа с m вершинами, имеет вид $A=\underset{m\times m}{(a_{ij})}$,

где $a_{ij}=\begin{cases}1, \text{если есть дуга с началом в } v_i \text{ и концом в } v_j\\ 0, \text{в противном случае}\end{cases}$.

Итак, $A=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$;

в) матрица инцидентности орграфа с m вершинами и n дугами имеет вид $B=\underset{m\times n}{(b_{ij})}$,

где $b_{ij}=\begin{cases}1, \text{если дуга } e_j \text{ выходит из вершины } v_i\\ -1, \text{если дуга } e_j \text{ входит в вершину } v_i\\ 2, \text{если } e_j \text{ петля, инциденнтная } v_i\\ 0, \text{в противном случае}\end{cases}$.

Таким образом, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

г) список дуг *G*.

Дуги	a	b	c	d	e	f
Вершины	1,2	1,4	2,3	3,2	4,5	4,6

5. $\rho(v)$ - степень вершины *v*, равна количеству рёбер, инцидентных *v*. $\sum_{v \in G} \rho(v) = 2n$, *n*- число рёбер. Для орграфа $\rho_1(v)$- степень выхода вершины *v*, равна числу дуг с началом в *v*; $\rho_2(v)$- степень входа, равна числу дуг с концом в *v*. $\rho(v) = \rho_1(v) + \rho_2(v)$, $\sum_{v \in G} \rho_1(v) = \sum_{v \in G} \rho_2(v) = n$. Для наглядности результаты вычислений сведены в таблицу.

Вершины	$\rho_1(v)$	$\rho_2(v)$	$\rho(v) = \rho_1(v) + \rho_2(v)$
1	2	0	2
2	1	2	3
3	1	1	2
4	2	1	3
5	0	1	1
6	0	1	1
Σ	6	6	12

Равенства, определяющие связь степеней вершин и числа рёбер графа, выполняются: $\sum_{v \in G} \rho_1(v) + \sum_{v \in G} \rho_2(v) = \sum_{v \in G} \rho(v) = 2 \cdot 6 = 12$.

6. Бинарное отношение, соответствующее нашему графу, будет иметь вид $P = \{(1,2),(1,4),(2,3),(3,2),(4,5),(4,6)\}$, его матрица равна матрице смежности графа $[P] = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Так как на главной диагонали $[P]$ нет единиц и все нули , то отношение *P* не рефлексивно и *P* антирефлексивно; так

как $[P] \neq [P]^T$, то P не симметрично; так как, например, $(1,2) \in P$, $(2,3) \in P$, но $(1,3) \notin P$, то P не транзитивно.

Взвешенный граф задан рисунком:

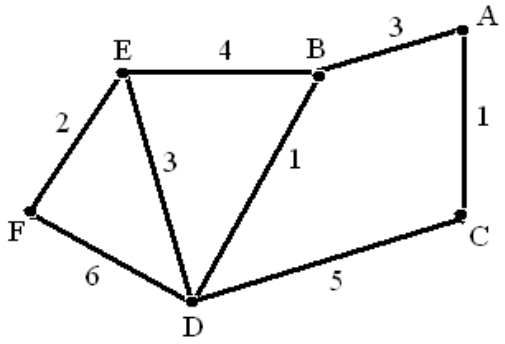


Рисунок 9 - Взвешенный граф

7. Найти матрицу весов графа, кратчайший маршрут из вершины A к остальным вершинам;

8. Найти цикломатическое число, коранг, число остовных деревьев в графе.

9. Найти дерево минимального веса графа и его вес.

Решение:

7. $W = (w_{ij})$- матрица весов, где w_{ij} - вес дуги (v_i, v_j), если она существует, если не существует, то соответствующий вес обозначается 0 или ∞, в зависимости от приложений (∞- если вершины не смежные). Для данного графа матрица весов имеет вид $W = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ 3 & 0 & \infty & 1 & 4 & \infty \\ 1 & \infty & 0 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 5 & 0 & 3 & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Кратчайший маршрут из вершины A к остальным вершинам будем находить по алгоритму Дейкстры, который поясняем сразу на этом примере:

1 шаг: A - источник, $T_1 = V - \{A\} = \{B, C, D, E, F\}$, из матрицы весов выписываем строку, соответствующую вершине A и обозначаем её так: $D^{(1)} = (0, \hat{3}, \hat{1}, \hat{\infty}, \hat{\infty}.\hat{\infty})$;

2 шаг: в $D^{(1)}$ выбираем среди элементов, отмеченных ^ (т.е. кроме элемента, отвечающего источнику), наименьший и подчёркиваем его. Из T_1 убираем вершину, соответствующую подчёркнутому элементу (это вершина C): $T_2 = T_1 - \{C\} = \{B, D, E, F\}$. Для определения $D^{(2)}$ делаем вспомогательную запись: из матрицы W выписываем строку, соответствующую C, и прибавляем ко всем её элементам (кроме первого и третьего) подчёркнутое число1:

$C \to$ $\begin{array}{c} 1\ \infty\ 0\ 5\ \infty\ \infty \\ \underline{\quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1} \\ \infty\ \ 6\ \infty\ \infty \end{array}$. Сложение производится по правилу $a+\infty=\infty$, $\infty+\infty=\infty$, $\min(a,\infty)=a$, $\min(\infty,\infty)=\infty$. Сравним полученные числа с $D^{(1)}$ и в $D^{(2)}$ ставим на соответствующие места наименьшие: $D^{(2)}=(0,\hat{\underline{3}},1,\hat{6},\hat{\infty}.\hat{\infty})$;

3 шаг: $T_3=T_2-\{B\}=\{D,E,F\}$, $B \to$ $\begin{array}{c} 3\ 0\ \infty\ 1\ 4\ \infty \\ \underline{\quad\quad 3 \quad 3 \quad 3} \\ 4 \quad 7 \quad \infty \end{array}$, $D^{(3)}=(0,3,1,\hat{\underline{4}},\hat{7}.\hat{\infty})$;

4 шаг: $T_4=T_3-\{D\}=\{E,F\}$, $D \to$ $\begin{array}{c} \infty\ 1\ 5\ 0\ 3\ 6 \\ \underline{\quad\quad\quad 4 \quad 4} \\ 7 \quad 10 \end{array}$, $D^{(4)}=\left(0,3,1,4,\underline{7},10\right)$;

5 шаг: $T_5=T_4-\{E\}=\{F\}$, $E \to$ $\begin{array}{c} \infty\ 4\ \infty\ 3\ 0\ 2 \\ \underline{\quad\quad\quad\quad 7} \\ 9 \end{array}$, $D^{(5)}=\left(0,3,1,4,7,9\right)$.

n=6, n-1=5, значит, это последний шаг. По виду $D^{(5)}$ делаем вывод, что взвешенные расстояния от вершины A до остальных вершин равны $d_w(A,A)=0$, $d_w(A,B)=3$, $d_w(A,C)=1$, $d_w(A,D)=4$, $d_w(A,E)=7$, $d_w(A,F)=9$.

8. Число $\nu(G)=m-n+k$ называется цикломатическим числом (или цикломатическим рангом), где m – число рёбер, n – число вершин, k – число связных компонент. Оно определяет сколько рёбер надо удалить, чтобы получить остов. Число $\nu^*(G)=n-k$ называется корангом и определяет число рёбер в остове. В нашем случае $\nu(G)=8-6+1=3$, $\nu^*(G)=6-1=5$. Число остовов в графе можно найти с помощью матрицы Кирхгофа, которая определяется так: $K=(k_{ij})$, где $k_{ij}=\begin{cases} -1, \textit{если } v_i \textit{ и } v_j \textit{ смежные} \\ 0, \textit{если } v_i \textit{ и } v_j \textit{ не смежные} \\ \rho(v_i), \textit{где } \rho(v_i) - \textit{степень } v_i, i=j \end{cases}$.

По теореме Кирхгофа число остовных деревьев в связном графе, имеющем n вершин ($n\geq 2$), равно алгебраическому дополнению любого элемента матрицы Кирхгофа.

Найдём степени вершин данного графа: $\rho(A)=\rho(C)=\rho(F)=2$, $\rho(D)=4$, $\rho(B)=\rho(E)=3$.

$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ - матрица Кирхгофа; возьмём, например, алгебраическое дополнение элемента k_{11}: $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \ldots = 29$.

Таким образом, существует 29 остовных деревьев этого графа.

9. Для построения дерева (остова) минимального веса используем алгоритм Краскала: дан граф $G(V,E)$. Строим граф T_1, состоящий из множества вершин V и ребра e_1, которое имеет наименьший вес (т.е. $T_1 = (V, E_1)$, где $E_1 = \{e_1\}$). Если граф T_i уже построен и $i < \nu^* = n - k$, то строим граф T_{i+1}, добавляя к множеству рёбер T_i ребро e_{i+1}, имеющее наименьший вес среди рёбер, не входящих в T_i и не составляющее циклов с рёбрами T_i (т.е. $T_{i+1} = (V, E_{i+1})$, где $E_{i+1} = E_i \cup \{e_{i+1}\}$. При $i = \nu^* = n - k$ алгоритм закончен и $T_{n-k} = (V, E_{n-k})$ - есть остов минимального веса, его вес равен сумме весов всех его рёбер.

Алгоритм Краскала для данного графа: $V = \{A, B, C, D, E, F\}$;

а) $T_1 = (V, E_1)$, $E_1 = \{\{A, C\}\}$;

б) $T_2 = (V, E_2)$, $E_2 = E_1 \cup \{\{B, D\}\}$;

в) $T_3 = (V, E_3)$, $E_3 = E_2 \cup \{\{E, F\}\}$;

г) $T_4 = (V, E_4)$, $E_4 = E_3 \cup \{\{D, E\}\}$;

д) $T_5 = (V, E_5)$, $E_5 = E_4 \cup \{\{A, B\}\}$, $n - k = 6 - 1 = 5$, алгоритм закончен.

T_5 - остов минимального веса, его вес равен 1+3+1+3+2=10. Заметим, что построение остова минимального веса надо делать параллельно с определением T_1, T_2 и т.д., добавляя на каждом шаге ребро.

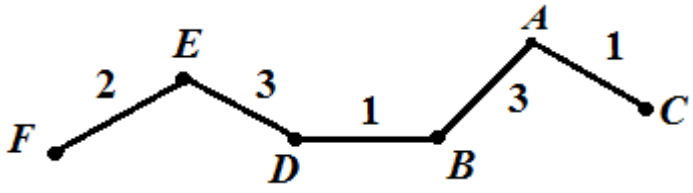


Рисунок 10 - Остов минимального веса

10. Заданы буквы и их частоты:

р	*а*	*с*	*л*	*ю*	*т*
5	14	10	12	9	8

а) построить дерево Хаффмана;

б) определить код Хаффмана;

в) найти вес кода;

г) закодировать слово α = *люстра*;

д) декодировать слово β =1111000110011.

Решение:

а) дерево Хаффмана строим по алгоритму Хаффмана, который будем иллюстрировать этим примером:

- располагаем частоты в возрастающем порядке, результат для удобства записываем в таблицу:

р	*т*	*ю*	*с*	*л*	*а*
5	8	9	10	12	14

- формируем бинарное дерево, где *р* и *т* листья, *р* – левый лист, *т* - правый, 5+8=13- частота родителя; приписываем левому сыну 0, правому -1; обозначаем это дерево G_1:

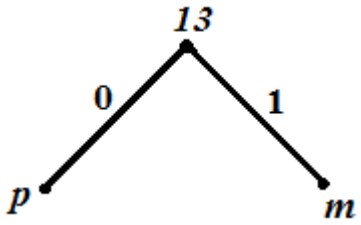


Рисунок 11 - G_1

В списке частот заменяем значения двух наименьших частот их суммой и упорядочиваем частоты по возрастанию, записываем новую таблицу:

ю	*с*	*л*	G_1	*а*
9	10	12	13	14

- формируем дерево, где в качестве сыновей буквы *ю* и *с*, как имеющие наименьшие частоты, сумма их частот 9+10=19; новое дерево G_2.

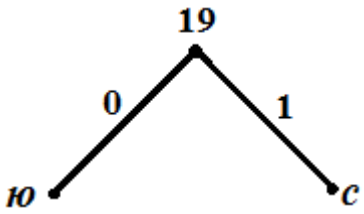


Рисунок 12 - G_2

Новая таблица:

л	G_1	*а*	G_2
12	13	14	19

- формируем дерево, где сыновьями будут буква *л* и построенное выше дерево G_1, как имеющие наименьшие частоты, сумма их частот 12+13=25; новое дерево G_3:

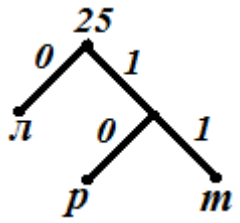


Рисунок 13 - G_3

Новая таблица:

a	G_2	G_3
14	19	25

- по последней таблице строим дерево G_4 (его вес 14+19=33):

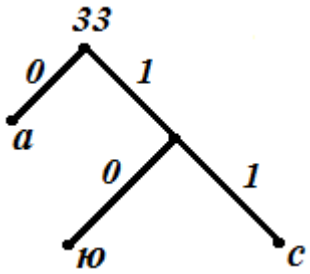


Рисунок 14 - G_4

Новая таблица:

G_3	G_4
25	33

- по последней таблице строим последнее дерево G (его вес 25+33=58) – дерево Хаффмана:

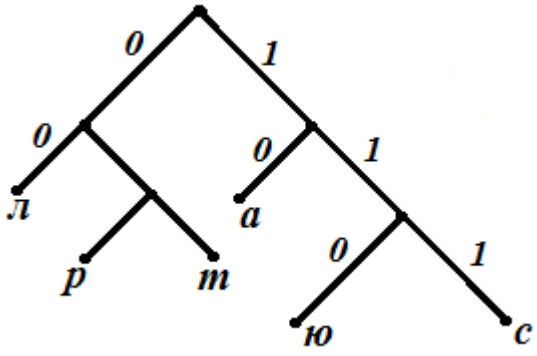


Рисунок 15 - Дерево Хаффмана

б) к каждому листу (букве) дерева Хаффмана ведёт единственный путь, состоящий из 0 и 1; строки из 0 и 1 каждой буквы - это её путевой или элементарный код; путевые коды, соответствующие всем буквам дерева Хаффмана, образуют префиксное, оптимальное множество кодов. Таким образом, искомая схема оптимального кодирования (код Хаффмана) имеет вид:

$\Sigma =$

р	*а*	*с*	*л*	*ю*	*т*
010	10	111	00	110	011

в) вес кода – это вес дерева Хаффмана: $w = 58$;

г) чтобы закодировать слово, надо просто заменить каждую букву слова её кодом: $\alpha = люстра \rightarrow \beta = 0011011101101010$;

д) поскольку код Хаффмана префиксный и разделимый, то любое слово единственным образом декодируется: $\beta = 1111000110011 \rightarrow \alpha = салют$.

Список литературы

1 Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Элементы дискретной математики. – М.: ИНФРА-М, Новосибирск: изд-во НГТУ, 2002.

2 Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. Учебник для вузов. 3-е изд. – СПб.: Питер, 2009. – 384 с.: ил. (Серия «Учебник для вузов»).

3 Андерсон Д. Дискретная математика и комбинаторика.: Пер. с англ. – М.: Издатель- ский дом «Вильямс», 2004. – 960 с.: ил.–Парал. тит. англ.

4 Шапорев С.Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006.

5 Палий И.А. Дискретная математика. Курс лекций. – М.: Эксмо, 2008. – 352 с. (Техническое образование).

6 Плотников А.Д. Дискретная математика. Учебное пособие. – 2-е изд. - М.: Новое знание, 2006. – 304 с.

7 Галушкина Ю.И., Марьямов А.Н. Конспект лекций по дискретной математике. – М.: Айрис – пресс, 2007. – 176 с. (Высшее образование).

8 Данилов В.Г. и др. Дискретная математика. Учебное пособие для вузов. – М.: Горячая линия - Телеком, 2008. – 136 с.

9 Спирина М.С., Спирин П.А. Дискретная математика. Учебник. 9-е изд. – М.: Издат. центр « Академия», 2013. – 368 с.

10 Просветов Г .И. Дискретная математика: задачи и решения\ учебное пособие. - М.:БИНОМ. Лаборат. знаний, 2011. – 222 с.

11 Чашкин А.В. Дискретная математика. – М., 2012.

12 Астраханцева Л.Н. Дискретная математика. Учебное пособие. – Алматы: АУЭС, 2011. – 78 с.

13 Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Дискретная математика. Методические указания к расчетно- графической работе для студентов специальности 5В070300 – Информационные системы - Алматы: АУЭС, 2017. - 43 с.

Содержание

1	Расчетно-графическая работа №1. Множества, отношения ……	3
1.1	Теоретические вопросы……	3
1.2	Расчётные задания……	3
1.3	Решение типового варианта……	11
2	Расчетно-графическая работа №2. Элементы математической логики	19
2.1	Теоретические вопросы……	19
2.2	Расчётные задания……	19
2.3	Решение типового варианта……	27
2.4	Справочный материал……	33
3	Расчетно-графическая работа №3. Элементы теории графов……	34
3.1	Теоретические вопросы……	34
3.2	Расчётные задания……	35
3.3	Решение типового варианта……	42
	Список литературы……	54

Сводный план 2018 г., поз. 167

Астраханцева Людмила Николаевна
Байсалова Маншук Жумамуратовна

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов специальностей
5В100200 – Системы информационной безопасности и
5В070400 – Вычислительная техника и программное обеспечение

Редактор Л.Т. Сластихина
Специалист по стандартизации Н.К.Молдабекова

Подписано в печать_____ Формат 6084 1/16
Тираж 25 экз. Бумага типографская №1
Объем 3,13 уч.-из.л. Заказ_____ цена 1700 тг.

Копировально-множительное бюро
некоммерческого акционерного общества
НАО «Алматинский университет энергетики и связи»