Коммерциялық емес акционерлік қоғам

ҒҰМАРБЕК ДӘУКЕЕВ АТЫНДАҒЫ АЛМАТЫ ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС УНИВЕРСИТЕТІ

Математика және математикалық үлгілеу кафедрасы

ДИСКРЕТТІ МАТЕМАТИКА

6В06104 - «Ақпараттық қауіпсіздендіру жүйелері»,
6В06103 - Есептеу техникасы және бағдарламалық қамтамасыз ету,
6В06102 – «Ақпараттық жүйелер» білім беру бағдарламасы бойынша оқитын студенттер үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар

Алматы 2022

ҚҰРАСТЫРУШЫЛАР: Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Дискретті математика. 6В06104 - «Ақпараттық қауіпсіздендіру жүйелері», 6В06103 - Есептеу техникасы және бағдарламалық қамтамасыз ету, 6В06102 – «Ақпараттық жүйелер» білім беру бағдарламасы бойынша оқитын студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар. - Алматы: АЭжБУ, 2022. - 64 б.

Ұсынылып отырған есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар «Дискретті математика», «Дискретті математика» пәндерінің «Жиындар, қатынастар», «Математикалық логика элементтері» және «Графтар теориясының элементтері» тараулары бойынша №1, №2, №3 есептеу-сызба жұмыстарынан тұрады. Бұл әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар 2018 жылы жарық көрген нұсқасының өңделген түрі. Бағдарламаның теориялық сұрақтары енгізілген. Типтік нұсқаның шешімі келтірілген.

Әдеб. атау – 10, кесте – 19.

Пікір беруші: ИМжК каф. доценті, PhD С.Қ.Абильдинова

«Ғұмарбек Дәукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2022 ж. жоспары бойынша басылды

Кіріспе

«Дискретті математика» пәні қазіргі заманғы математиканың бөлімі және компьютерлік математиканың негізі болып табылады. Оның дамыған логикалық аппаратынсыз адам қызметінің әртүрлі салалары болуы мүмкін емес. Ол ақырлы жиындар мен олардың әртүрлі құрылымдарын оқып-үйренетін математика саласына арналған. Ол кең салалы қолданысқа ие, әсіресе ақпараттық жүйелер мен компьютерлермен байланысты салаларда. Пәнді оқып-үйрену нәтижесінде студенттер пайымдауды қалыптаспыру негізгі әдістерін меңгеру керек, модельдеу дағдыларын алу керек, оларды бағдарламалауда қолдану керек, жасанды интелект есептерін шығаруда, бағдарламалардың дұрыстығын дәлелдеу үшін, математикалық модельдер құру үшін қолдану керек.

1 Есептеу-сызба жұмыс №1. Жиындар, қатынастар

Мақсаты: жиындар және қатынастар ұғымдарын оқып үйрену. Олардың қасиеттері мен классификацияларымен таныстыру.

1.1 Теориялық сұрақтар

1 Жиындар, олардың берілу жолдары. Булеан және универсум.
2 Жиындарға қолданылатын қисаптар. Эйлера-Венн диаграммасы.
3 Жиынның бөліктеуі мен бүркеуі. Жиындардың тура көбейтіндісі.
4 Қатынастар. Қатынастардың түрлері, бинарлы берілу жолдары.
5 Бинарлы қатынастың қасиеттері.
6 Эквивалентті қатынас.
7 Реттік қатынас.
8 Функционалдық қатынастар.
9 Жиын қуаты туралы ұғым.

1.2 Есептік тапсырмалар

1. Берілген жиынды:

а) элементтерін тізу арқылы;
ә) жалпы қасиеті бойынша жазу керек.

№	а)	ә)
1.1	$\{x : x^3 - 3x^2 + 2x = 0, x \in N\}$	$\{2,4,6,\ldots,100\}$
1.2	$\{x : x = 5y, y \in N, y \le 4\}$	$\left\{-\frac{3}{2},+\frac{5}{4},-\frac{7}{6},\ldots\right\}$
1.3	$\{x : x = y - z,\ y, z \in \{1,2\}\}$	$\{4,8,12,16,\ldots\}$
1.4	$\{x : x = 3n + 2,\ n \in N, x < 20\}$	$\{2^2,3^2,4^2,\ldots\}$
1.5	$\{x : x = 2n + 1,\ n \in N, x < 10\}$	$\left\{+\frac{1}{3},-\frac{1}{6},+\frac{1}{9},\ldots\right\}$
1.6	$\{x : 3x = x + 8\}$	$\{-4,+5,-6,+7,-8,+9\}$
1.7	$\{x : 3x + 5 = 2(x + 6)\}$	$\left\{\pm\frac{1}{3},\pm\frac{1}{6},\pm\frac{1}{9},\ldots\right\}$
1.8	$\{x : x = 5y + 2,\ 3 < y < 6, y \in Z\}$	$\{1^2,2^2,3^2,4^2,\ldots,9^2\}$
1.9	$\{x : x^2 - 3x + 2 = 0, x \in R\}$	$\{-2,+4,-6,+8\ldots\}$

1.10	$\{x : x = 4y, y \in N, y \le 5\}$	$\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{19}{20}\right\}$
1.11	$\{x : x = y - z,\ y, z \in \{5,2\}\}$	$\{4,8,12,16,\ldots,60\}$
1.12	$\{x : x = n + 2,\ n \in N, x < 10\}$	$\{2^2, 3^2, 4^2, \ldots, 12^2\}$
1.13	$\{x : x = 2n - 1,\ n \in N, x < 15\}$	$\left\{\frac{2^2}{3}, \frac{3^2}{6}, \frac{4^2}{9}, \ldots\right\}$
1.14	$\{x : 2x = x + 6\}$	$\{4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3\}$
1.15	$\{x : x + 5 = 2(x + 5)\}$	$\left\{\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{9}, \ldots, \pm\frac{1}{30}\right\}$
1.16	$\{x : x^3 \le 100, x \in Z\}$	$\{3,6,9,12,\ldots\}$
1.17	$\{x : x = 4n + 2,\ n \in N\}$	$\{0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots, \pm7\}$
1.18	$\{x : x = y + z,\ y, z \in \{1,2,3\}\}$	$\left\{\frac{3}{2^2}, \frac{5}{3^2}, \frac{7}{4^2}, \ldots\right\}$
1.19	$\{x : x^2 - 9x + 20 = 0, x \in C\}$	$\{1^2, 3^2, 5^2, 7^2 \ldots\}$
1.20	$\{x : x(x + 3) = 0\}$	$\left\{\frac{2}{1^3}, \frac{4}{2^3}, \frac{6}{3^3}, \ldots\right\}$
1.21	$\{x : 5x + 10 = 30x + 15\}$	$\{3,6,9,12,\ldots,30\}$
1.22	$\{x : -1 \le x \le 10, x \in N\}$	$\left\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{6}, \ldots\right\}$
1.23	$\{x : -1 \le x \le 10, x \in Z\}$	$\{2^3, 4^3, 6^3, \ldots\}$
1.24	$\{x : x \in Z, x^2 \le 50\}$	$\{3,6,9,12,\ldots,99\}$
1.25	$\{x : x = 8n - 2,\ n \in N\}$	$\{2,4,8,\ldots,32\}$
1.26	$\{x : x = y + z,\ y, z \in \{2,3,4\}\}$	$\left\{-\frac{2}{2^2}, +\frac{2}{3^2}, -\frac{2}{4^2}, \ldots\right\}$
1.27	$\{x : x^2 + 6x + 8 = 0, x \in N\}$	$\{2^2, 4^2, 6^2 \ldots\}$
1.28	$\{x : (x + 4)(x - 3) = 0\}$	$\left\{\frac{2}{1^3}, \frac{4}{2^3}, \frac{6}{3^3}, \frac{8}{4^3}, \frac{10}{5^3}\right\}$
1.29	$\{x : x + 9 = 3x + 15\}$	$\{0, \pm3, \pm6, \pm9, \ldots, \pm30\}$
1.30	$\{x : -1 \le x \le 8, x \in N\}$	$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{22}\right\}$

2. U={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} – универсалды жиын болсын. Берілген *A, B, C* жиындары үшін табу керек:

а) $A \cup C$; ә) $A \cap B$; б) $A \setminus B$; в) $A \oplus B$;
г) $\overline{A \cap B}$; ғ) $\overline{A} \cap \overline{B}$; д) $(A \cup C) \setminus B$; е) $(A \cap B) \cup C$.

№	*A*	*B*	*C*
2.1	{1,2,3,4,5,6,7}	{4,5,6,7,8,9,10}	{2,4,6,8,10}
2.2	{2,3,4,5,6,7,8}	{5,6,7,8,9,10}	{1,3,5,7,9}
2.3	{3,4,5,6,7,8,9}	{6,7,8,9,10}	{1,2,4,6,8,9}
2.4	{6,7,8,9,10}	{1,2,4,6,8,9}	{3,4,5,6,7,8,9}
2.5	{4,5,6,7,8,9,10}	{2,4,6,8,10}	{1,2,3,4,5,6,7}
2.6	{1,3,5,7,9}	{2,3,4,5,6,7,8}	{5,6,7,8,9,10}
2.7	{1,2,3,5,7,9,10}	{3,4,5,6,7,8}	{2,4,6,7,8,9}
2.8	{6,7,8,9,10}	{1,2,3,4,5,6,7}	{3,4,5,6,7,8}
2.9	{1,3,5,7,8,9}	{2,4,6,8,10}	{7,8,9,1,2,3}
2.10	{2,4,6,7,8,9}	{1,3,5,6,7,8}	{8,9,10,1,2,3}
2.11	{2,4,6,8,10}	{1,2,3,4,5,6,7}	{4,5,6,7,8,9,10}
2.12	{1,3,5,7,9}	{2,3,4,5,6,7,8}	{5,6,7,8,9,10}
2.13	{1,2,4,6,8,9}	{3,4,5,6,7,8,9}	{6,7,8,9,10}
2.14	{3,4,5,6,7,8,9}	{6,7,8,9,10}	{1,2,4,6,8,9}
2.15	{1,2,3,4,5,6,7}	{4,5,6,7,8,9,10}	{2,4,6,8,10}
2.16	{5,6,7,8,9,10}	{1,3,5,7,9}	{2,3,4,5,6,7,8}
2.17	{2,4,6,7,8,9}	{1,2,3,5,7,9,10}	{3,4,5,6,7,8}
2.18	{3,4,5,6,7,8}	{6,7,8,9,10}	{1,2,3,4,5,6,7}
2.19	{7,8,9,1,2,3}	{1,3,5,7,8,9}	{2,4,6,8,10}
2.20	{8,9,10,1,2,3}	{2,4,6,7,8,9}	{1,3,5,6,7,8}
2.21	{4,5,6,7,8,9,10}	{2,4,6,8,10}	{1,2,3,4,5,6,7}
2.22	{5,6,7,8,9,10}	{1,3,5,7,9}	{2,3,4,5,6,7,8}
2.23	{6,7,8,9,10}	{1,2,4,6,8,9}	{3,4,5,6,7,8,9}
2.24	{1,2,4,6,8,9}	{3,4,5,6,7,8,9}	{6,7,8,9,10}
2,25	{2,4,6,8,10}	{1,2,3,4,5,6,7}	{4,5,6,7,8,9,10}
2.26	{2,3,4,5,6,7,8}	{5,6,7,8,9,10}	{1,3,5,7,9}
2.27	{3,4,5,6,7,8}	{2,4,6,7,8,9}	{1,2,3,5,7,9,10}
2.28	{1,2,3,4,5,6,7}	{3,4,5,6,7,8}	{6,7,8,9,10}
2.29	{2,4,6,8,10}	{7,8,9,1,2,3}	{1,3,5,7,8,9}
2.30	{1,3,5,6,7,8}	{8,9,10,1,2,3}	{2,4,6,7,8,9}

3. U={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} – универсалды жиын болсын. Берілген A және B жиындары үшін табу керек:

а) $A \times B$; ә) $B \times A$; б) A^2;

в) A жиынының булеанын (яғни ішкі жиындар жиынын);

г) A жиынының қандай да бір бүркеуін;

ғ) A жиынының қандай да бір бөліктеуін;

д) ішкі жиындардың кез келген A жиынын (булеан да емес, бүркеу де емес, бөліктеу де емес).

№	A	B	№	A	B
3.1	{1,2,3}	{4,5}	3.2	{3,4,5}	{7,8}
3.3	{7,8,9}	{1,2,3}	3.4	{7,8,9}	{3,4,5}
3.5	{4,5,8}	{2,3,5}	3.6	{4,7,8}	{9,0}
3.7	{3,4,9}	{6,7,8}	3.8	{2,6,8}	{1,2,3}
3.9	{3,5,7}	{1,4,6}	3.10	{8,9,0}	{1,2,4}
3.11	{1,3,5}	{6,7,8}	3.12	{0,1,2}	{8,9}
3.13	{6,7,8}	{4,5}	3.14	{4,5,6}	{1,2}
3.15	{3,4,8}	{1,9}	3.16	{2,9,5}	{3,4}
3.17	{4,6,8}	{1,2,3}	3.18	{1,2,3}	{4,7,9}
3.19	{1,5,6}	{2,3}	3.20	{1,3,5}	{2,7,8}
3.21	{6,7,9}	{5,8}	3.22	{6,7,8}	{5,9}
3.23	{2,4,6}	{3,5}	3.24	{3,4,7}	{8,9}
3.25	{5,6,0}	{1,2}	3.26	{5,6,8}	{2,3,7}
3.27	{1,3,4}	{7,8}	3.28	{1,3,5}	{6,7}
3.29	{2,7,8}	{4,6,9}	3.30	{3,4,6}	{1,9}

4. Теңдікті Эйлер-Венн диаграммасы көмегімен дәлелдеу керек.

4.1	$A \setminus (B \cup C)=(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$	4.2	$(A \cup B) \setminus (C \cap A)=(A \setminus C) \cup (B \setminus A)$
4.3	$A \setminus (B \cap C)=(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$	4.4	$(A \cup B) \setminus (C \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$
4.5	$(A \setminus B) \cap C=(A \cap C) \setminus (B \cap C)$	4.6	$(B \setminus C) \setminus (A \cup C) = (B \setminus A) \cap (B \setminus C)$
4.7	$(A \setminus B) \cup C=(A \cup C) \setminus (B \setminus C)$	4.8	$A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$
4.9	$A \cap (B \setminus C)=(A \cap B) \setminus (A \cap C)$	4.10	$(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
4.11	$(A \setminus B) \setminus C=(A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$	4.12	$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
4.13	$(A \setminus C) \cup (A \cap B)=A \setminus (C \setminus B)$	4.14	$B \setminus (A \cap C)=(B \setminus A) \cup (B \setminus C)$
4.15	$(A \cap B) \setminus C =A \cap (B \setminus C)$	4.16	$(B \cap C) \setminus (A \cap C) = (C \setminus A) \cap (B \setminus A)$
4.17	$(A \cup C) \setminus (B \setminus A)=A \cup (C \setminus B)$	4.18	$(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
4.19	$(A \cap B) \setminus (A \cap C)= (A \cap B) \setminus C$	4.20	$(A \cap B) \setminus C=(A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
4.21	$(A \cup B) \setminus C=(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$	4.22	$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
4.23	$A \setminus (B \setminus C)=(A \setminus B) \cup (A \cap C)$	4.24	$(C \setminus A) \cup (C \setminus B) = C \setminus (A \cap B)$
4.25	$A \setminus (B \cup C)=(A \setminus B) \setminus C$	4.26	$(B \setminus A) \cup (B \setminus C) = B \setminus (A \cap C)$
4.27	$(A \setminus B) \cap C=(A \cap C) \setminus B$	4.28	$(B \setminus C) \cup (A \cap B)=B \setminus (C \setminus A)$
4.29	$(A \setminus B) \cup (C \setminus B)=(A \cup C) \setminus B$	4.30	$(B \setminus A) \setminus C = (B \setminus C) \setminus (A \setminus C)$

5. $[P]$ және $[Q]$ қандай да бір бинарлық қатынастардың матрицалары болсын. Табу керек $[P \cup Q]$, $[P \cap Q]$, $[P \circ Q]$, $[P^{-1}]$, $[\overline{P}]$. $P \subseteq Q$ және $Q \subseteq P$ енулерін тексеру керек.

№	$[P]$	$[Q]$	№	$[P]$	$[Q]$
5.1	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	5.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
5.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	5.4	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5.5	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	5.6	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5.7	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	5.8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
5.9	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	5.10	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5.11	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	5.12	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
5.13	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	5.14	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5.15	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	5.16	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5.17	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	5.18	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
5.19	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	5.20	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5.21	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	5.22	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5.23	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	5.24	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
5.25	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	5.26	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
5.27	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	5.28	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5.29	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	5.30	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. $A=\{a,b,c\}$ және $B=\{1,2,3,4\}$ жиындары мен $P_1 \subseteq A \times B$, $P_2 \subseteq B^2$ қатынастары үшін:

а) $[P_1]$ және $[P_2]$ қатынастарының матрицасын құру керек;

ә) қатынастарды графиктік түрде кескіндеу керек;

б) табу керек $P_1^{-1}, \overline{P_1}, P_1 \circ P_2$;

в) P_2 қатынасы үшін рефлексивтік, симметриялық, антисимметриялық, транзитивтілік қасиеттері орындалатынын тексеру керек.

№	P_1	P_2
6.1	$\{(a,1),(a,2),(b,3),(c,2),(c,3),(c,4)\}$	$\{(1,1),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(4,4)\}$
6.2	$\{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(b,3),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
6.3	$\{(a,1),(a,2),(a,4),(c,2),(c,3),(c,4)\}$	$\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,3)\}$
6.4	$\{(a,1),(a,2),(b,2),(b,4),(c,3),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,2),(2,2),(4,3),(3,3),(4,4)\}$
6.5	$\{(a,1),(a,4),(b,2),(b,3),(c,1),(c,4)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,1),(4,3),(3,4),(4,1)\}$
6.6	$\{(a,1),(a,2),(a,4),(b,1),(b,4),(c,3)\}$	$\{(1,1),(2,4),(2,1),(3,3),(4,1),(4,2)\}$
6.7	$\{(a,1),(b,1),(b,3),(b,4),(c,3),(c,2)\}$	$\{(1,3),(1,4),(2,2),(4,3),(3,3),(4,4)\}$
6.8	$\{(a,1),(b,3),(c,1),(c,3),(c,2),(c,4)\}$	$\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),$ $(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3),(4,4)\}$
6.9	$\{(a,1),(a,2),(a,4),(b,3),(c,1),(c,4)\}$	$\{(1,3),(1,2),(2,3),(3,2),(3,4),(4,1)\}$
6.10	$\{(a,2),(a,3),(b,2),(b,3),(c,1),(c,4)\}$	$\{(1,1),(1,2),(2,2),(4,1),(3,3),(4,4)\}$
6.11	$\{(a,2),(a,4),(b,3),(c,1),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,3),(2,4),(3,1),(3,4),(4,2),(4,3)\}$
6.12	$\{(b,1),(b,3),(c,1),(c,3),(c,2),(c,4)\}$	$\{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),$ $(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$
6.13	$\{(a,1),(a,2),(a,4),(b,2),(b,4),(c,3)\}$	$\{(1,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4),(4,2)\}$
6.14	$\{(a,2),(a,3),(a,4),(c,1),(c,4),(c,3)\}$	$\{(1,4),(2,3),(2,1),(3,4),(4,2)\}$
6.15	$\{(a,1),(a,2),(b,3),(b,4),(c,3),(c,4)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3)\}$
6.16	$\{(a,2),(a,3),(a,4),(b,1),(b,2),(b,4)\}$	$\{(1,1),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(3,2),(4,3),(4,4)\}$
6.17	$\{(a,3),(b,4),(b,3),(b,1),(b,2),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,3),(2,4),(3,3),(3,1),(4,2)\}$
6.18	$\{(a,3),(b,4),(b,3),(c,1),(c,2),(c,4)\}$	$\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(4,3),(4,2)\}$
6.19	$\{(a,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,3),(c,4)\}$	$\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,1),(4,4)\}$
6.20	$\{(a,2),(a,3),(a,4),(c,1),(c,2),(b,3)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,3),(4,1),(4,3),(4,4),(3,3)\}$
6.21	$\{(a,2),(a,4),(b,1),(b,2),(b,4),$ $(c,2),(c,4)\}$	$\{(1,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4),(4,1),(3,2),(1,3)\}$
6.22	$\{(a,3),(a,4),(b,1),(b,4),(c,2),(c,4)\}$	$\{(1,1),(2,2),(2,4),(2,3),(4,4),(4,2),(3,3),(3,4)\}$
6.23	$\{(a,2),(a,3),(a,4),(b,1),(c,4),$ $(c,2),(c,3)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,2),(3,3),$ $(3,4),(4,3),(4,4)\}$

6.24	$\{(a,3),(b,2),(b,1),(b,4),(c,1),$ $(c,2),(c,4)\}$	$\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(3,2),(3,4),(4,4)\}$
6.25	$\{(a,2),(a,3),(a,4),(b,3),(c,4),(c,1)\}$	$\{(1,1),(2,2),(2,3),(1,4),(3,4),(4,2),(2,4)\}$
6.26	$\{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(b,3),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
6.27	$\{(a,1),(a,2),(a,4),(c,3),(c,2),(c,4)\}$	$\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$
6.28	$\{(a,1),(a,2),(b,2),(b,4),(c,3),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,2),(2,2),(4,3),(3,3),(4,4)\}$
6.29	$\{(a,1),(a,4),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2)\}$	$\{(1,1),(1,4),(2,1),(4,3),(3,4),(4,1)\}$
6.30	$\{(a,1),(a,2),(a,4),(b,1),(b,4),(c,2)\}$	$\{(1,1),(2,4),(2,1),(3,3),(4,1),(4,3)\}$

7. $A=\{1,2,3,4\}$ жиынында P қатынасының эквиваленттік қатынас болатындығын дәлелдеу керек. Эквиваленттік кластарын және фактор-жиынды құру керек.

№	P	№	P
7.1	$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	7.2	$\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,1),$ $(4,2),(4,4)\}$
7.3	$\{(1,1),(4,2),(2,4),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	7.4	$\{(1,1),(2,3),(3,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
7.5	$\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	7.6	$\{(1,1),(4,3),(3,4),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
7.7	$\{(1,1),(1,4),(4,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	7.8	$\{(1,1),(3,2),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
7.9	$\{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,4),(3,3),$ $(4,2),(4,3),(4,4)\}$	7.10	$\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,1),$ $(4,2),(4,4)\}$
7.11	$\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,2),(4,4)\}$	7.12	$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
7.13	$\{(1,1),(2,3),(3,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	7.14	$\{(1,1),(4,2),(2,4),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
7.15	$\{(1,1),(4,3),(3,4),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	7.16	$\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
7.17	$\{(1,1),(3,2),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),$ $(4,1),(4,4)\}$	7.18	$\{(1,1),(1,4),(4,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
7.19	$\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(2,4),$ $(3,3),(4,2),(4,4)\}$	7.20	$\{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,4),(3,3),(4,2),$ $(4,3),(4,4)\}$
7.21	$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	7.22	$\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,1),$ $(4,2),(4,4)\}$
7.23	$\{(1,1),(4,2),(2,4),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	7.24	$\{(1,1),(2,3),(3,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
7.25	$\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	7.26	$\{(1,1),(4,3),(3,4),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
7.27	$\{(1,1),(1,4),(4,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$	7.28	$\{(1,1),(3,2),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
7.29	$\{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,4),(3,3),$ $(4,2),(4,3),(4,4)\}$	7.30	$\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,2),(4,4)\}$

8. A={1,2,3,4,5,6} жиынының бөліктеуі үшін сәйкес эквиваленттілік қатынасын құру керек. Ол неге эквиваленттілік қатынасы болады? Эквиваленттілік кластар мен фактор – жиындарды жазу керек.

№	$\mathcal{A}$	№	$\mathcal{A}$
8.1	{{1,2},{3,4},{5,6}}	8.2	{{1},{2},{3},{4,5},{6}}
8.3	{{1},{2,3},{4,5,6}}	8.4	{{1},{2,3,4},{5,6}}
8.5	{{1,2,3},{4},{5,6}}	8.6	{{1},{2,3},{4},{5,6}}
8.7	{{1},{2},{3,4},{5,6}}	8.8	{{1,2},{3},{4,5},{6}}
8.9	{{1,2,3,4},{5},{6}}	8.10	{{1,2,3,4},{5,6}}
8.11	{{1,2},{3},{4},{5,6}}	8.12	{{1},{2,3,4,5},{6}}
8.13	{{1},{2,3,4},{5},{6}}	8.14	{{1},{2},{3},{4},{5,6}}
8.15	{{1,2},{3,4}{5},{6}}	8.16	{{1},{2},{3,4},{5},{6}}
8.17	{{1},{2},{3},{4,5,6}}	8.18	{{1},{2},{3},{4},{5},{6}}
8.19	{{1},{2},{3,4,5},{6}}	8.20	{{1},{2},{3,4,5,6}}
8.21	{{1,2,3,4,5},{6}}	8.22	{{1,2,3},{4},{5},{6}}
8.23	{{1,2,3},{4,5,6}}	8.24	{{1},{2,3},{4,5},{6}}
8.25	{{1,2},{3,4,5,6}}	8.26	{{1},{2,3,4,5,6}}
8.27	{{1,2},{3},{4},{5},{6}}	8.28	{{2},{1,3,4,5},{6}}
8.29	{{1,2,3},{4,5},{6}}	8.30	{{3},{1,2,4,5},{6}}

9. A={a,d,c,d,e} немесе A={a,d,c,d} жиынында P қатынасының реттік қатынас ($P = \prec$) болатындығын дәлелдеу керек. Бұл қандай реттілік (бөліктеп қатаң емес, қатаң, сызықты)? Реттелген $(A, \prec)$ жиыны үшін Хассе диаграммасын құру керек.

№	P	№	P
9.1	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(b,c)}	9.2	{(a,c),(b,c),(b,d),(c,d),(a,d)}
9.3	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(b,c),(c,d), (a,d),(b,d)}	9.4	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(a,c), (a,e), (d,b),(e,b)}
9.5	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(a,c),(b,c), (b,d),(c,d),(a,d)}	9.6	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(c,a),(c,b), (c,e),(d,a),(d,b),(d,e),(e,a),(e,b)}
9.7	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(d,a),(d,b), (d,c),(e,a),(e,b),(e,c),(e,d)}	9.8	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(a,c), (e,d), (e,c)}
9.9	{(a,b),(c,a),(c,b,),(d,a),(d,b),(e,a),(e,b)}	9.10	{(a,b),(a,c),(b,c),(b,d),(c,d),(a,d)}
9.11	{(a,b),(c,b),(d,a),(d,b),(d,c),(d,e)}	9.12	{(c,a),(c,b),(c,e),(d,a),(d,b),(d,e),(e,a),(e,b)}
9.13	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(c,b), (d,a),(d,b),(d,c),(d,e)}	9.14	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(c,a), (c,b), (d,a),(d,b),(e,a),(e,b)}
9.15	{(a,b),(a,c),(a,e),(d,b),(e,b)}	9.16	{(a,b),(c,b),(a,c),(e,d,),(e,c),(e,b)}
9.17	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(b,c)}	9.18	{(a,c),(b,c),(b,d),(c,d),(a,d)}
9.19	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(b,c),(c,d), (a,d),(b,d)}	9.20	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(a,c), (a,e), (d,b),(e,b)}
9.21	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(a,c),(b,c), (b,d),(c,d),(a,d)}	9.22	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(c,a),(c,b), (c,e),(d,a),(d,b),(d,e),(e,a),(e,b)}
9.23	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(d,a),(d,b), (d,c),(e,a),(e,b),(e,c),(e,d)}	9.24	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(a,c), (e,d), (e,c)}
9.25	{(a,b),(c,a),(c,b,),(d,a),(d,b),(e,a),(e,b)}	9.26	{(a,b),(a,c),(b,c),(b,d),(c,d),(a,d)}
9.27	{(a,b),(c,b),(d,a),(d,b),(d,c),(d,e)}	9.28	{(c,a),(c,b),(c,e),(d,a),(d,b),(d,e),(e,a), (e,b)}
9.29	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(c,b), (d,a),(d,b),(d,c),(d,e)}	9.30	{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(c,a), (c,b),(d,a),(d,b),(e,a),(e,b)}

10. P және Q қатынастары берілген. Бұл қатынастардың функция болатындығын дәлелдеу керек. $P \circ Q$, $Q \circ P$ композицияларын табу керек. Бұл қатынастарға инъективтілік, сюръективтілік, биективтілік қасиеттері орындала ма?

10.1	$P=\{(x,x^2+1)/x\in R\}$ $Q=\{(x,x+3)/x\in R\}$	10.2	$P=\{(x,\sqrt{x^2+2})/x\in R\}$ $Q=\{(x,x^2+3)/x\in R\}$
10.3	$P=\{(x,e^x)/x\in R\}$ $Q=\{(x,3x-2)/x\in R\}$	10.4	$P=\{(x,3x^2+4)/x\in R\}$ $Q=\{(x,x-6)/x\in R\}$
10.5	$P=\{(x,e^x)/x\in R\}$ $Q=\{(x,2x+1)/x\in R\}$	10.6	$P=\{(x,\sin x)/x\in R\}$ $Q=\{(x,3x)/x\in R\}$
10.7	$P=\{(x,\sqrt[3]{x})/x\in R\}$ $Q=\{(x,x^2-6)/x\in R\}$	10.8	$P=\{(x,\cos x)/x\in R\}$ $Q=\{(x,1-x)/x\in R\}$
10.9	$P=\{(x,x^2+3)/x\in R\}$ $Q=\{(x,7x-2)/x\in R\}$	10.10	$P=\{(x,x^3)/x\in R\}$ $Q=\{(x,6x+2)/x\in R\}$
10.11	$P=\{(x,x^2+4)/x\in R\}$ $Q=\{(x,8x)/x\in R\}$	10.12	$P=\{(x,x^2+4)/x\in R\}$ $Q=\{(x,6x+2)/x\in R\}$
10.13	$P=\{(x,x^4)/x\in R\}$ $Q=\{(x,3x+5)/x\in R\}$	10.14	$P=\{(x,x^2+7)/x\in R\}$ $Q=\{(x,x-3)/x\in R\}$
10.15	$P=\{(x,x^2+6)/x\in R\}$ $Q=\{(x,4x+3)/x\in R\}$	10.16	$P=\{(x,x^2+4)/x\in R\}$ $Q=\{(x,2x-8)/x\in R\}$
10.17	$P=\{(x,\sin x)/x\in R\}$ $Q=\{(x,5x+3)/x\in R\}$	10.18	$P=\{(x,x^2-5)/x\in R\}$ $Q=\{(x,7x+1)/x\in R\}$
10.19	$P=\{(x,x^2+6)/x\in R\}$ $Q=\{(x,x+1)/x\in R\}$	10.20	$P=\{(x,e^x)/x\in R\}$ $Q=\{(x,5x+2)/x\in R\}$
10.21	$P=\{(x,x^2+8)/x\in R\}$ $Q=\{(x,2x-5)/x\in R\}$	10.22	$P=\{(x,e^x)/x\in R\}$ $Q=\{(x,2x+1)/x\in R\}$
10.23	$P=\{(x,x^2-4)/x\in R\}$ $Q=\{(x,5x+6)/x\in R\}$	10.24	$P=\{(x,x^3)/x\in R\}$ $Q=\{(x,7x+8)/x\in R\}$
10.25	$P=\{(x,x^2+4)/x\in R\}$ $Q=\{(x,2x-8)/x\in R\}$	10.26	$P=\{(x,\cos x)/x\in R\}$ $Q=\{(x,5x+1)/x\in R\}$
10.27	$P=\{(x,x^2+7)/x\in R\}$ $Q=\{(x,\frac{x+9}{4})/x\in R\}$	10.28	$P=\{(x,x^2+3)/x\in R\}$ $Q=\{(x,7x-2)/x\in R\}$
10.29	$P=\{(x,x^4)/x\in R\}$ $Q=\{(x,3x+5)/x\in R\}$	10.30	$P=\{(x,e^x)/x\in R\}$ $Q=\{(x,3x-2)/x\in R\}$

1.3 Типтік варианттың шешуі

1. а) $A=\{x:-3<x<4, x\in N\}$ жиынын элементтерін тізу арқылы жазу керек.

Шешуі: N={1,2,3,4,…} болғандықтан A={1,2,3}.

1. ә) $A=\left\{+\frac{2}{1},-\frac{4}{3},+\frac{6}{5},-\frac{8}{7}\right\}$ жиынын жалпы қасиеті бойынша арқылы жазу керек.

Шешуі:

$$A=\left\{x: x=(-1)^{n+1}\frac{2n}{2n-1},\ n\in N,\ n\le 4\right\}.$$

2. U={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} – универсал жиыны берілген болсын. Берілген A={1,2,3,8,9,10}, B={1,3,5,6,7,8}, C={2,4,6,7,8,9} жиындары үшін табу керек:

а) $A\cup C$; ә) $A\cap B$; б) $A\setminus B$; в) $A\oplus B$;

г) $\overline{A\cap B}$; ғ) $\overline{A}\cap\overline{B}$; д) $(A\cup C)\setminus B$; е) $(A\cap B)\cup C$.

Шешуі:

а) $A\cup C=\{1,2,3,4,6,7,8,9,10\}$;

ә) $A\cap B=\{1,3,8\}$;

б) $A\setminus B=\{2,9,10\}$;

в) $A\oplus B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=\{2,9,10\}\cup\{5,6,7\}=\{2,5,6,7,9,10\}$;

г) $\overline{A\cap B}=U\setminus(A\cap B)=\{2,4,5,6,7,9,10\}$;

ғ) $\overline{A}\cap\overline{B}=\{4,5,6,7\}\cap\{2,4,9,10\}=\{4\}$;

д) $(A\cup C)\setminus B=\{2,4,9,10\}$;

е) $(A\cap B)\cup C=\{1,2,3,4,6,7,8,9\}$.

3. U={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} – универсал жиыны берілген болсын. Берілген A={3,4,5} және B={6,7,9} жиындары үшін:

а) $A\times B$; ә) $B\times A$; б) A^2;

в) A жиынының булеанын (яғни ішкі жиындар жиынын);

г) A жиынының қандай да бір бүркеуін;

ғ) A жиынының қандай да бір бөліктеуін;

д) ішкі жиындардың кез келген A жиынын (булеан да емес, бүркеу де емес, бөліктеу де емес).

Шешуі:

а) $A\times B=\{(a,b): a\in A, b\in B\}=$

$=\{(3,6),(3,7),(3,9),(4,6),(4,7),(4,9),(5,6),(5,7),(5,9)\}$;

ә) $B\times A=\{(6,3),(6,4),(6,5),(7,3),(7,4),(7,5),(9,3),(9,4),(9,5)\}$;

б) $A^2=A\times A=\{(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(4,4),(4,5),(5,3),(5,4),(5,5)\}$;

в) A жиыны үш элементтен тұрғандықтан, оның $\mathscr{P}(A)$ булеаны $2^3=8$ элементтен тұрады: $\mathscr{P}(A)=\{\varnothing, A, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}\}$;

г) мысалы, $A_1=\{\{3,4\},\{4,5\},\{5\}\}$ - A-ның бүркеуі;

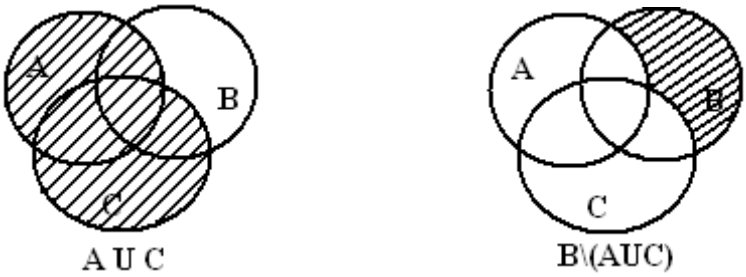
ғ) мысалы, $A_2=\{\{3\},\{4,5\}\}$- A-ның бөліктеуі;

д) мысалы, $A_3=\{\{4\},\{5\}\}$ - булеан да емес, бөліктеу де емес, бүркеу де емес.

4. $B\setminus(A\cup C)=(B\setminus A)\cap(B\setminus C)$ теңдігін Эйлер-Венн диаграммасы көмегімен дәлелдеу керек.

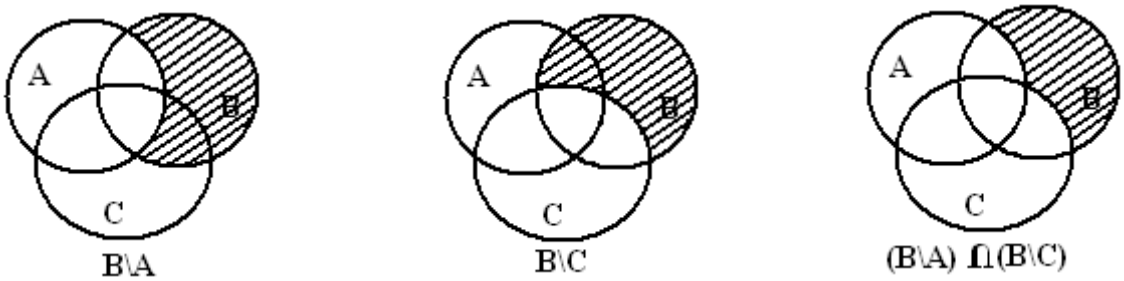
Шешуі: теңдіктің сол және оң жақтарын Эйлер-Венн диаграммасында бейнелейміз.

Сол жағы.



1.1 сурет- Эйлер –Венн диаграммасы

Оң жағы.



1.2 сурет- Эйлер –Венн диаграммасы

Сол және оң жақтарды бейнелейтін суреттерде жиындардың бірдей бөліктері белгіленген, бұл теңдікті дәлелдейді.

5. [P] =$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ және [Q] = $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ матрицалары қандай да бір бинарлық қатынастың матрицалары болсын. Табу керек [P$\cup$Q], [P$\cap$Q], [P$\circ$Q], [P^{-1}], [$\overline{P}$] . P$\subseteq$Q және Q$\subseteq$ P енулерінің орындалуын тексеру керек.

Шешуі: егер [P] = (p_{ij}), [Q] = (q_{ij}), онда [P$\cup$Q] =$(p_{ij}+q_{ij})$= [P]+[Q], мұндағы матрицалардың элементтері келесі ережелермен қосылады: 0+0=0, 1+0 = 0+1 = 1+1 =1; [P$\cap$Q] = =$(p_{ij}\cdot q_{ij})$= [P]*[Q], яғни сәйкес элементтер

кәдімгі ереже бойынша көбейтіледі: $0\cdot 0= 0\cdot 1= 1\cdot 0= 0$, $1\cdot 1= 1$; $[P\circ Q]=[P]\cdot[Q]$ - матрицалар кәдімгідей көбейтіледі, бірақ [P] және [Q] матрицаларының элементтері жоғарыда келтірілген ереже бойынша қосылып, көбейтіледі; $[P^{-1}]=[P]^T$, мұндағы P^{-1} қатынасы P қатынасына кері қатынас; $\overline{P}$ - P қатынасының толықтауышы және оның $[\overline{P}]$ матрицасы P қатынасының матрицасына тең, тек нөлдер бірмен, ал бірлер нөлдермен алмастырылған; егер $P\subseteq Q$, онда $p_{ij}\le q_{ij}\ \forall i,j$.

Біздің жағдайда:

$$[P\cup Q]=\begin{pmatrix}1+0 & 0+1\\ 1+1 & 0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix};$$

$$[P\cap Q]=\begin{pmatrix}1\cdot 0 & 0\cdot 1\\ 1\cdot 1 & 0\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix};$$

$$[P\circ Q]=\begin{pmatrix}1\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot 0\\ 1\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$[P^{-1}]=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix};$$

$$[\overline{P}]=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix};\quad \left.\begin{matrix}p_{11}=1; & q_{11}=0\\ p_{12}=0; & q_{12}=1\\ p_{21}=1; & q_{21}=1\\ p_{22}=0; & q_{22}=0\end{matrix}\right\}\to$$ мысалы, p_{11} элементінің мәні q_{11} элементінің мәнінен кіші не тең емес болғандықтан, $P\subseteq Q$ енуі орынды емес;

q_{12} элементінің мәні p_{12} элементінің мәнінен кіші не тең емес болғандықтан, $Q\subseteq P$ енуі де орынды емес.

6. A={a,b,c,d} ээне B={1,2,3,4} жиындары мен $P_1=\{(a,1),(a,2),(c,1),(c,2),(c,4),(d,4)\}$ және $P_2=\{(1,1),(2,1),(2,4),(3,3),(4,1),(4,3)\}$ $P_1\subseteq A\times B$, $P_2\subseteq B^2$ қатынастары үшін:

а) $[P_1]$ және $[P_2]$ қатынастарының матрицасын құру керек;

ә) қатынастарды графиктік түрде кескіндеу керек;

б) табу керек $P_1^{-1},\overline{P_1},P_1\circ P_2$;

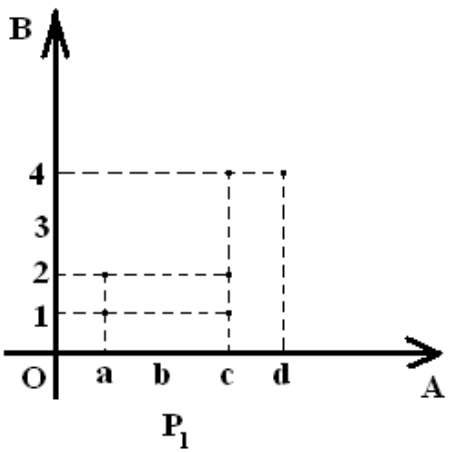
в) P_2 қатынасы үшін рефлексивтік, симметриялық, антисимметриялық транзитивтілік қасиеттері орындалатынын тексеру керек.

Шешуі:

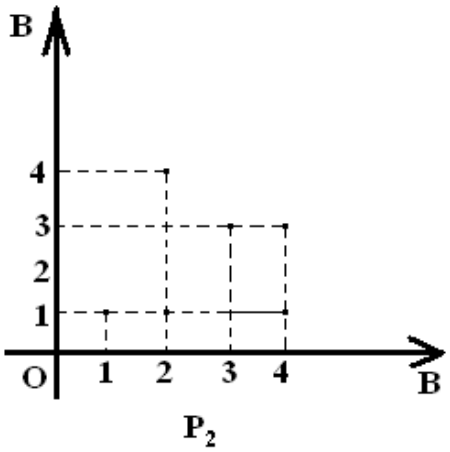
а) егер $p_{ij}=\begin{cases}1,(a_i,b_j)\in P\\ 0,(a_i,b_j)\notin P\end{cases}, i=1,2,...,m, j=1,2,...n$ болса, онда анықтама бойынша $[P]=(p_{ij})$ - P қатынасының матрицасы

Сонымен, $[P_1]=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $[P_2]=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}$;

ә) P_1 және P_2 қатынастарының графиктік түрде кескінделуі 3 және 4 суреттерінде көрсетілген.



1. 3 сурет - P_1 графигі



1.4 сурет - P_2 графигі

б) $P^{-1}=\{(b,a)/(a,b)\in P\}$ болғандықтан, онда

$P_1^{-1}=\{(1,a),(2,a),(1,c),(2,c),\ (4,c),(4,d)\}$, $P_1^{-1}\subseteq B\times A$.

$\overline{P}=\{(a,b)/(a,b)\notin P\}, \overline{P}\subseteq A\times B$ және

$A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(b,1),(b,1),(b,2),(b,3),(b,4)(c,1),(c,2),(c,3),(c,4),$ $(d,1),(d,2),(d,3),(d,4)\}$ ескерсек, онда P_1 -дің толықтауышы

$\overline{P_1}=\{(a,3),(a,4),(b,1),(b,1),(b,2),(b,3),(b,4),(c,3),(d,1),(d,2),(d,3)\}$ болады.

Анықтама бойынша $P_1\circ P_2$ = {(a,c)| a$\in$A, c$\in$C және $\exists$b$\in$B: (a,b)$\in$ P_1 және (b,c)$\in P_2$}, мұндағы $P_1\subseteq A\times B$, $P_2\subseteq B\times C$ онда

$P_1\circ P_2=\{(a,1),(a,4),(c,1),(c,4),(c,3),(d,1),(d,3)\}$;

в) P_2 қатынасының қасиеттерін оның матрицасы арқылы анықтаған қолайлы $[P_2]=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}$.

Бұл матрицаның бас диагоналінде тек бірлер ғана емес болғандықтан, P_2 қатынасы рефлексивті емес;

$[P_2]^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq [P_2]$, яғни $[P_2] \neq [P_2]^T$ болғандықтан, ол симметриялы емес. $[P_2] * [P_2]^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ матрицасының бас диагоналден басқа элементтердің бәрі нөлдер болғандықтан, P_2 қатынасы антисимметриялы; мысалы, $(2,4) \in P_2, (4,3) \in P_2$, бірақ $(2,3) \notin P_2$, онда P_2 транзитивті емес.

Айта кетелік, транзитивті не транзитивті еместігін қатынастың матрицасы арқылы анықтауға болады: $P \circ P \subseteq P$ орындалуы керек немесе егер $[P \circ P] = [P] \cdot [P] = (a_{ij})$, $[P] = (p_{ij})$, онда $a_{ij} \leq p_{ij}$.

7. $A = \{1,2,3,4\}$ жиынында $P = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),$ $(4,3),(4,4)\}$ қатынасының эквиваленттік қатынас болатындығын дәлелдеу керек. Эквиваленттік кластарын және фактор-жиынды құру керек.

Шешуі: егер E қатынасы рефлексивті, симметриялы, транзитивті болса, онда ол эквивалентті болады. P қатынасының матрицасын құрып, ол бойынша қасиеттерін анықтаймыз.

$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Бұл матрицаның бас диагоналінде тек бірлер болғандықтан, P қатынасы рефлексивті; $[P] = [P]^T$ болғандықтан, ол симметриялы.

$$[P \circ P] = [P] \cdot [P] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сонымен, $[P \circ P] = [P]$, бұл P-ның транзитивтілігін дәлелдейді.

P – рефлексивті, симметриялы, транзитивті, сондықтан ол эквивалентті қатынас болады.

$a \in A$ элементінің эквивалентті класы деп $[a]_E = [a] = \{x : (x,a) \in E\}$ жиыны айтылады. Барлық эквиваленттік кластар жиыны $A/E = \{[a]_E : a \in A\}$ A жиынының E-ге қатысты фактор-жиыны деп аталады.

A/E жиыны A жиынының бөліктеуі болып табылады.

$A = \{1,2,3,4\}$ жиынының әрбір элементі үшін эквивалентті кластары:

$[1]=\{x:(x,1)\in P\}=\{1;2\}$;
$[2]=\{x:(x,2)\in P\}=\{1;2\}$;
$[3]=\{x:(x,3)\in P\}=\{3;4\}$;
$[4]=\{x:(x,4)\in P\}=\{3;4\}$.
Сонымен, $[1]=[2], [3]=[4]$.

A жиынының P-ге қатысты фактор-жиыны: $A/P=\{\{1,2\},\{3,4\}\}$.

8. A={1,2,3,4,5,6} жиынының $\mathcal{A}$ = {{1,3},{2,4,5},{6}} бөліктеуі үшін сәйкес эквиваленттілік қатынасын құру керек. Ол неге эквиваленттілік қатынасы болады? Эквиваленттілік кластар мен фактор – жиындарды жазу керек.

Шешуі: $\mathcal{A}=\{A_1,A_2,...,A_n\}$– А жиынының бөліктеуі болсын, мұндағы $A_i\,(i=1,2,...,n)$ – А жиынының ішкі жиындары. Сонда $E=\{(x,y):x,y\in A_i, i=1,2,...,n\}$ – осы бөліктеуге сәйкес эквиваленттік қатынасы.

Сонымен, біздің жағдайда E ={(1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(2,2)(2,4),(2,5), (4,2),(4,4)(4,5),(5,2),(5,4),(5,5),(6,6)} – берілген бөліктеуге сәйкес эквиваленттік қатынасы. Бұл эквиваленттік қатынас екендігіне көз жеткізу үшін, оның матрицасын табамыз:

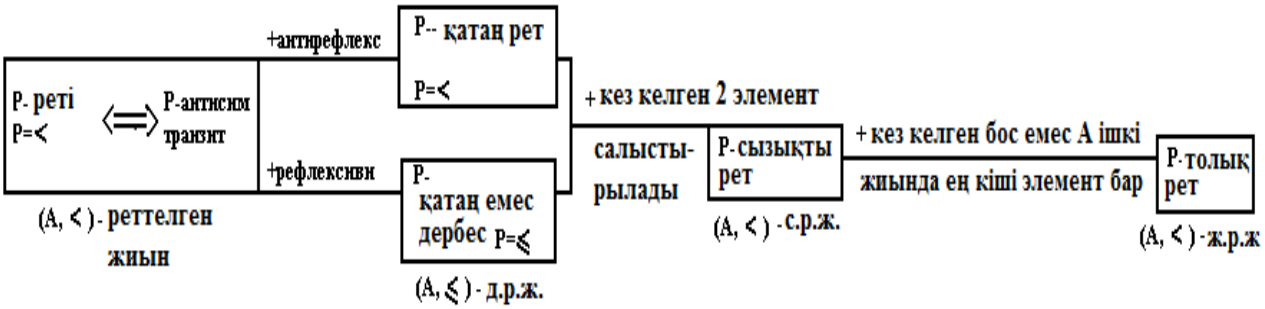
$$[E]=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&1&0\\1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&1&0\\0&1&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Матрица бойынша E рефлексивті екендігін анықтаймыз (бас диагоналда бәрі нөлдер), симметриялы ($[E]=[E]^T$), транзитивті ($[E\circ E]=[E]$). Сондықтан, E – эквиваленттік қатынас. Эквиваленттік кластары: [1]=[3]={1,3}, [2]=[4]=[5]={2,4,5}, [6]={6}. A жиынының E-ге қатысты фактор-жиыны берілген бөліктеу $\mathcal{A}=A/E$={{1,3},{2,4,5},{6}} болып табылады.

9. A={a,d,c,d,e} жиынында $P=\{(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,e),(c,e)\}$ қатынасының реттік қатынас ($P=\prec$) болатындығын дәлелдеу керек. Бұл қандай реттілік (бөліктеп қатаң емес, қатаң, сызықты)? Реттелген $(A,\prec)$ жиыны үшін Хассе диаграммасын құру керек.

Шешуі: қатынас ретінің терминологиясы мен классификациясы әр оқулықта әртүрлі екенін айта кетелік. Біз төменде келтірілген сұлбаны ұстанамыз. 5-суретте $P\subseteq A^2$ қатынасы қарастырылған. Д,р,ж,, с.р.ж., ж.р.ж

қысқартулары дербес, сызықты, жақсы реттелген жиындпрды белгілеу үшін қолданылды. Сонымен қатар, егер A ақырлы жиын болса, онда сызықты реттелген жиын жақсы реттелген жиын да болады.



1.5 сурет - Қатынас реті

Біздің қатынас үшін рефлексивті, симметриялы, антисимметриялы және транзитивті қасиеттерінің орындалуын тексереміз. Оны қатынастың матрица - сы арқылы тексерген қолайлы.

$$[P]=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ – берілген қатынастың матрицасы.

Бұл матрицаның бас диагоналінде тек бірлер емес болғандықтан, P қатынасы рефлексивті емес; $[P]^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\neq[P]$, яғни P симметриялы емес; $[P]*[P]^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, матрицасының бас диагоналден басқа элементтердің бәрі нөлдер болғандықтан, P қатынасы антисимметриялы; P қатынастың транзитивті болуы үшін, $P\circ P\subseteq P$ енуі немесе егер $[P\circ P]=(a_{ij})$, $[P]=(p_{ij})$, онда $a_{ij}\leq p_{ij}$.

Ол үшін

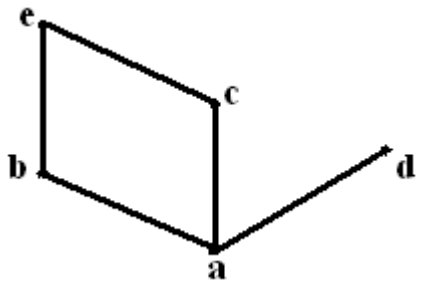
$$[P\circ P]==[P]\cdot[P]=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Бұдан $a_{ij}\le p_{ij}\ \ \forall i,j$, бұл P-ның транзитивтілігіне көз жеткізеді.

Сонымен, P рефлексивті емес, антисимметриялы және транзитивті, сондықтан бұл қатынас қатаң ретті болады. b және c, c және d, b және d элементтері салыстырылмайтын болғандықтан, P сызықты ретті емес. Егер ақырлы жиында анықталған реттілік сызықты болмаса, онда ол толық емес.

$(A,\prec)$- реттелген жиын болсын. Егер А ақырлы болса, онда $(A,\prec)$ жиынын сұлба ретінде (Хассе диаграммасы) бейнелеуге болады. Егер $x\prec y$ болса, онда x және y нүктелермен бейнеленеді, егер x элементі y-тен төмен болса, сызықпен қосылады.

Хассе диаграммасын құрайық. Реттік қатынастың транзитивтілігін ескерсек, мысалы, a және e элементтерін сызықпен қосудың қажеті жоқ, себебі егер $a\prec b$ және $b\prec e$, онда $a\prec e$.



1.6 сурет - Хассе диаграммасы

P рефлексивті болған жағдайда, яғни P дербес ретті немесе қатаң емес ретті болса, Хассе диаграммасында әрбір төбеде тұзақ пайда болады.

10. $P=\{(x,x^2+4):x\in R\}$ және $Q=\{(x,x^3+6):x\in R\}$ қатынастары берілген.

а) бұл қатынастардың функция болатындығын дәлелдеу керек;

ә) $P\circ Q,\ \ Q\circ P$ композицияларын табу керек;

б) бұл қатынастарға инъективті, сюръективті, биективті қасиеттері орындала ма?

Шешуі:

а) егер $[(x,y_1)\in P,(x,y_2)\in P]\Rightarrow y_1=y_2$ немесе кез келген $x\in A$ үшін $(x,y)\in P$ орындалатындай y жалғыз табылатын болса, $P\subseteq A\times B$ қатынасы функция болады.

Біздің жағдайда P және Q функциялар болады, себебі кез келген нақты x саны үшін, (x^2+4) және (x^3+6) сандары табылып, олар жалғыз болады;

ә) $P \circ Q = \{(x,(x^2+4)^3+6) : x \in R\}$, $Q \circ P = \{(x,(x^3+6)^2+4) : x \in R\}$;

б) берілген функцияларды инъективтілікке тексереміз. Егер $[(x_1, y) \in P, (x_2, y) \in P] \Rightarrow x_1 = x_2$ немесе $x_1 \neq x_2 \Rightarrow y(x_1) \neq y(x_2)$ болса, онда P функциясы инъективті деп аталады.

$P = \{(x, x^2+4) : x \in R\}$ функциясы үшін инъективтілік шарттары орындалмайды, себебі x-тің екі мәніне $(x_1 \neq x_2)$ y-тің жалғыз мәні сәйкес келеді. Мысалы, $x_1 = 1$, $x_2 = -1\,(x_1 \neq x_2)$, бірақ $y(1) = (1)^2 + 4 = 5$ және $y(-1) = (-1)^2 + 4 = 5$, яғни $y(1) = y(-1)$.

$Q = \{(x, x^3+6) : x \in R\}$ функциясы инъективті, себебі кез келген нақты x_1, x_2 $(x_1 \neq x_2)$ саны үшін $(x_1^3+6) \neq (x_2^3+6)$ орындалады.

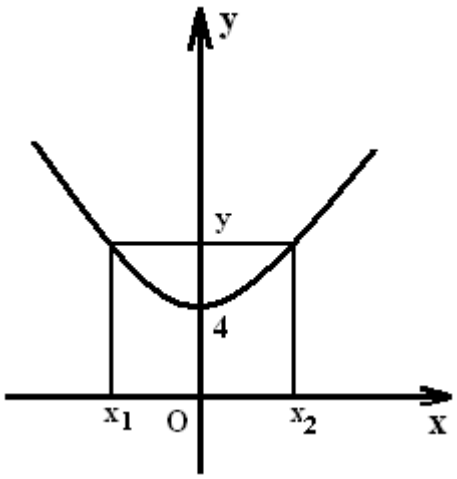
Функцияны сюръективтілікке тексереміз. Егер кез келген $y \in B$ үшін $(x, y) \in P$ орындалатындай $x \in A$ табылса, онда $P \subseteq A \times B$ функциясы сюръективті деп аталады немесе P қатынасының мәндерінің жиыны B $(E_p = B)$ жиынымен беттеседі.

$P = \{(x, x^2+4) : x \in R\}$, $P \subseteq R \times R$ функциясы сюръективті емес, себебі мәндерінің жиыны $E_p = [4; +\infty) \neq R$.

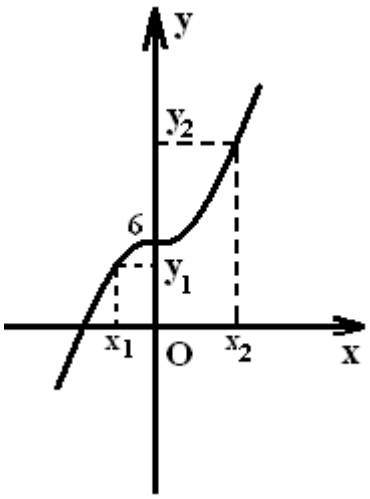
$Q = \{(x, x^3+6) : x \in R\}$, $Q \subseteq R \times R$ функциясы сюръективті, себебі $E_Q = R$

Егер функция әрі инъективті, әрі сюръективті болса, онда ол биективті деп аталады. Сондықтан $P-$ биективті емес функция, Q – биективті.

Инъективті, сюръективті және биективті қасиеттерді функцияның графигі бойынша анықтауға болады. Берілген функционалдық қатынастарды кәдімгі функция етіп жазамыз: $P : y = x^2 + 4$; $Q : y = x^3 + 6$. Бұл функциялардың графиктері 9 және 10 суреттерде кескінделген.



1.7 сурет - P графигі



1.8 сурет- Q графигі

2 Есептеу-сызба жұмыс №2. Математикалық логика элементтері

Мақсаты: математикалық логиканың негізгі ұғымдарымен таныстыру, олардың қасиеттері мен кейбір қолдануларын қарастыру.

2.1 Теориялық сұрақтар

1. Тұжырымдар логикасының негізгі ұғымдары. Тұжырымдар, негізгі логикалық қисаптар (операциялар).
2. Логикалық айнымалылар және формулалар. Логикалық қисаптар мен формулалардың ақиқаттық кестесі.
3. Логика алгебрасының функциялары. Логика функцияларының берілу тәсілдері.
4. Формулалардың эквиваленттілігі. Логика алгебрасының негізгі эквивалентті қарым қатынастар.
5. Логикалық функциялардың толық жүйесі. Логикалық функцияларды ДҚФ, КҚФ келтіру.
6. Мүлтіксіз ДҚФ және КҚФ (МДҚФ және МКҚФ).
7. ДҚФ класында минимизациялау. Карно картасы.
8. Коммутациялық сұлбалар.
9. Екі жақтылық. Буль алгебрасы және жиындар теориясы.

2.2 Есептік тапсырмалар

f(x,y) функциясы формуламен берілген.

1. Логикалық қисаптардың орындалу реті туралы келісуді қолданып *f(x,y)* формуласында жақшаларды қою керек.

2. Осы функцияны:

а) ақиқаттық кестесімен;

ә) бірлік және нөлдік жиынтықтармен;

б) мәндерінің векторымен жазу керек.

3.Формуланы тек теріске шығару, конъюнкция және дизъюнкция қисаптары көмегімен жазу керек; осы формуланы қысқарту керек.

№	*f*(*x*,*y*)	№	*f*(*x*,*y*)
1	$x \vee \bar{y} \leftrightarrow x \oplus y$	2	$x \oplus \bar{y} \to x \downarrow y$
3	$x \to \bar{y} \mid x \oplus y$	4	$x \leftrightarrow \bar{y} \to x \oplus y$
5	$x \to y \wedge x \downarrow \bar{y}$	6	$x \leftrightarrow y \to x \downarrow \bar{y}$
7	$x \oplus y \vee \bar{x} \to y$	8	$y \to \bar{x} \mid y \oplus x$
9	$x \leftrightarrow y \wedge x \to \bar{y}$	10	$x \mid y \to \bar{x} \oplus y$
11	$x \downarrow \bar{y} \oplus x \vee y$	12	$x \wedge y \leftrightarrow \bar{x} \downarrow y$
13	$x \downarrow y \mid \bar{x} \vee y$	14	$x \vee y \to \bar{x} \downarrow y$

15	$x \oplus \bar{y} \leftrightarrow x \vee y$	16	$x \mid y \leftrightarrow x \wedge \bar{y}$
17	$\bar{x} \downarrow y \vee x \mid y$	18	$x \vee \bar{y} \mid x \oplus y$
19	$x \leftrightarrow \bar{y} \wedge x \rightarrow y$	20	$x \rightarrow \bar{y} \downarrow x \vee y$
21	$x \oplus \bar{y} \rightarrow x \leftrightarrow y$	22	$x \oplus y \rightarrow x \leftrightarrow \bar{y}$
23	$x \wedge \bar{y} \downarrow y \rightarrow x$	24	$x \oplus y \mid \bar{x} \wedge y$
25	$x \vee \bar{y} \leftrightarrow x \downarrow y$	26	$x \wedge y \leftrightarrow x \downarrow \bar{y}$
27	$x \vee \bar{y} \downarrow x \rightarrow y$	28	$x \leftrightarrow \bar{y} \wedge x \downarrow y$
29	$x \mid \bar{y} \oplus x \vee y$	30	$x \wedge \bar{y} \leftrightarrow x \downarrow y$

4. $f_1(x,y,z)$ және $f_2(x,y,z)$ формулаларын эквиваленттілікке тексеру керек:

а) ақиқаттық кестесі көмегімен;

ә) формулаларды эквивалентті түрлендіру көмегімен МДҚФ немесе МКҚФ-ке келтіру арқылы.

№	$f_1(x,y,z)$	$f_2(x,y,z)$
4.1	$x \rightarrow (y \oplus z)$	$(x \rightarrow y) \oplus (x \rightarrow z)$
4.2	$x \mid (y \rightarrow z)$	$(x \mid y) \rightarrow (x \mid z)$
4.3	$x \wedge (y \oplus z)$	$(x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$
4.4	$x \wedge (y \rightarrow z)$	$(x \wedge y) \rightarrow (x \wedge z)$
4.5	$x \wedge (y \leftrightarrow z)$	$(x \wedge y) \leftrightarrow (x \wedge z)$
4.6	$x \wedge (y \mid z)$	$(x \wedge y) \mid (x \wedge z)$
4.7	$x \vee (y \rightarrow z)$	$(x \vee y) \rightarrow (x \vee z)$
4.8	$x \vee (y \mid z)$	$(x \vee y) \mid (x \vee z)$
4.9	$x \vee (y \leftrightarrow z)$	$(x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z)$
4.10	$x \oplus (y \leftrightarrow z)$	$(x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z)$
4.11	$x \oplus (y \rightarrow z)$	$(x \oplus y) \rightarrow (x \oplus z)$
4.12	$x \oplus (y \mid z)$	$(x \oplus y) \mid (x \oplus z)$
4.13	$x \downarrow (y \leftrightarrow z)$	$(x \downarrow y) \leftrightarrow (x \downarrow z)$
4.14	$x \mid (y \oplus z)$	$(x \mid y) \oplus (x \mid z)$
4.15	$x \rightarrow (y \mid z)$	$(x \rightarrow y) \mid (x \rightarrow z)$
4.16	$x \rightarrow (y \leftrightarrow z)$	$(x \rightarrow y) \leftrightarrow (x \rightarrow z)$
4.17	$x \vee (y \oplus z)$	$(x \vee y) \oplus (x \vee z)$
4.18	$x \mid (y \leftrightarrow z)$	$(x \mid y) \leftrightarrow (x \mid z)$
4.19	$x \downarrow (y \oplus z)$	$(x \downarrow y) \oplus (x \downarrow z)$
4.20	$x \leftrightarrow (y \oplus z)$	$(x \leftrightarrow y) \oplus (x \leftrightarrow z)$
4.21	$x \rightarrow (y \downarrow z)$	$(x \rightarrow y) \downarrow (x \rightarrow z)$
4.22	$x \downarrow (y \mid z)$	$(x \downarrow y) \mid (x \downarrow z)$

4.23	$x \leftrightarrow (y \mid z)$	$(x \leftrightarrow y) \mid (x \leftrightarrow z)$
4.24	$x \to (y \leftrightarrow z)$	$(x \to y) \leftrightarrow (x \to z)$
4.25	$x \wedge (y \leftrightarrow z)$	$(x \wedge y) \leftrightarrow (x \wedge z)$
4.26	$x \wedge (y \mid z)$	$(x \wedge y) \mid (x \wedge z)$
4.27	$x \vee (y \to z)$	$(x \vee y) \to (x \vee z)$
4.28	$x \vee (y \mid z)$	$(x \vee y) \mid (x \vee z)$
4.29	$x \vee (y \leftrightarrow z)$	$(x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z)$
4.30	$x \oplus (y \leftrightarrow z)$	$(x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z)$

Берілген *f(A,B,C)* функциясы үшін:

5. Ақиқаттық кестесін.
6. ДҚФ-ке келтіру.
7. МДҚФ құру керек (екі әдіспен).
8. Карно картасы көмегімен минималды ДҚФ.
9. Минималды ДҚФ-тан КҚФ-ке көшу керек.
10. МКҚФ табу керек (екі әдіспен).
11. Карно картасы бойынша екі әдіспен минималды КҚФ табу керек.
12. f функциясына қосалқы f^* функциясын табу керек.

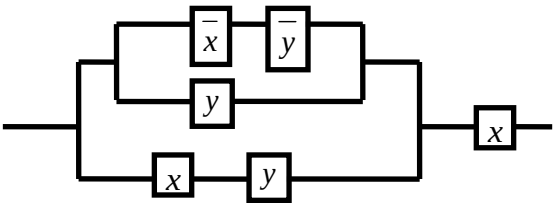
№	*f*(*A*,*B*,*C*)	№	*f*(*A*,*B*,*C*)
1	$(A \vee \overline{B}) \to (\overline{C} \oplus \overline{A})$	2	$\overline{(A \vee \overline{B}) \to (C \oplus \overline{A})}$
3	$((A \downarrow B) \to \overline{C}) \leftrightarrow B$	4	$(\overline{A} \vee \overline{B}) \to \overline{(C \oplus A)}$
5	$(A \vee \overline{B}) \to \overline{(C \leftrightarrow \overline{A})}$	6	$\overline{(A \vee \overline{B}) \to (C \leftrightarrow \overline{A})}$
7	$\overline{(A \mid \overline{B})} \oplus (C \to \overline{A})$	8	$(A \mid \overline{B}) \to (C \oplus \overline{A})$
9	$(A \mid B) \oplus (\overline{C} \to B)$	10	$\overline{(C \to A) \leftrightarrow (B \mid A)}$
11	$(A \mid \overline{B}) \oplus (\overline{C} \to A)$	12	$(\overline{C} \to A) \leftrightarrow (\overline{A} \mid B)$
13	$(C \to A) \oplus (A \mid \overline{B})$	14	$((A \downarrow B) \to C) \oplus B$
15	$\overline{((A \mid B) \to C)} \oplus B$	16	$(A \vee B) \to (\overline{C} \leftrightarrow B)$
17	$\overline{((A \downarrow B) \to \overline{C})} \oplus \overline{B}$	18	$(\overline{(A \downarrow B)} \to \overline{C}) \leftrightarrow B$
19	$((A \leftrightarrow B) \mid \overline{C}) \oplus B$	20	$(A \downarrow B) \to (C \leftrightarrow \overline{A})$
21	$(\overline{(A \leftrightarrow B)} \to \overline{C}) \mid B$	22	$\overline{A \vee \overline{B}} \to (\overline{C} \leftrightarrow B)$
23	$\overline{((A \downarrow B) \to \overline{C}) \leftrightarrow B}$	24	$(\overline{(A \downarrow B)} \to \overline{C}) \oplus B$
25	$\overline{(A \vee B) \to (\overline{C} \leftrightarrow B)}$	26	$\overline{(A \mid B) \oplus (\overline{C} \to B)}$
27	$\overline{((A \downarrow B) \to C) \leftrightarrow A}$	28	$(\overline{A} \vee B) \to \overline{\overline{C} \leftrightarrow A)}$
29	$(\overline{(A \leftrightarrow B) \mid \overline{C}}) \oplus \overline{B}$	30	$\overline{(A \downarrow B)} \to (C \leftrightarrow \overline{B})$

13. Мәндерінің векторымен берілген $f(x,y,z,t)$, функциясы үшін МДҚФ, МКҚФ, минималды ДҚФ, минималды КҚФ табу керек.

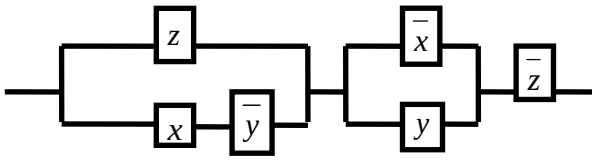
№	$f(x,y,z,t)$	№	$f(x,y,z,t)$
13.1	(1101 1101 0011 0011)	13.2	(1111 1100 1011 1011)
13.3	(1110 0101 0011 0101)	13.4	(1101 0011 1101 0011)
13.5	(1100 1011 1111 1011)	13.6	(0101 0101 1110 0011)
13.7	(0011 0011 1101 1101	13.8	(1011 1011 1100 1111)
13.9	(0101 0011 0101 1110)	13.10	(0011 1101 0011 1100)
13.11	(1011 1111 1011 1100)	13.12	(0011 1110 0101 0101)
13.13	(0011 0011 1100 1111)	13.14	(1100 0101 0011 0011)
13.15	(0010 0111 1010 1101)	13.16	(0011 1111 0011 1100)
13.17	(0101 0011 1100 0011)	13.18	(0111 1101 0010 1010)
13.19	(1111 1100 0011 0011)	13.20	(0011 0011 0101 1100)
13.21	(1110 1001 0111 0001)	13.22	(0001 0011 1100 1110)
13.23	(0011 1100 0011 0101)	13.24	(1010 0010 1101 0111)
13.25	(0101 0101 1110 0011)	13.26	(1101 1101 0011 0011)
13.27	(1111 1100 1011 1011)	13.28	(1110 0101 0011 0101)
13.29	(1101 0011 1101 0011)	13.30	(1100 1011 1111 1011)

14. Берілген сұлба бойынша ауыстырып-қосқыш функциясын құрып, оны қысқарту керек. Қысқартылған функцияның сұлбасын салу керек.

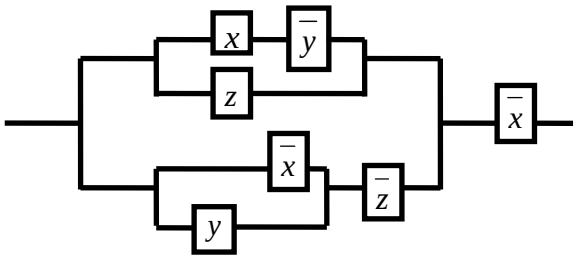
14.1



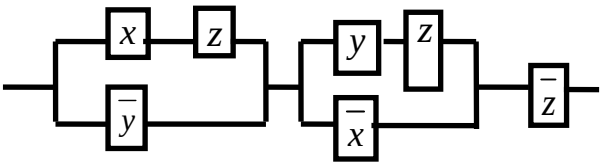
14.2



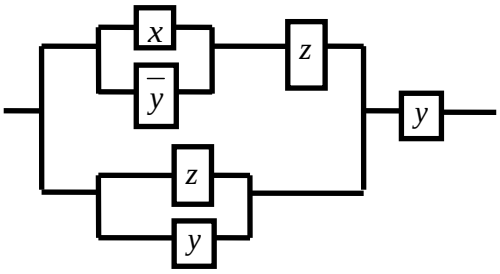
14.3



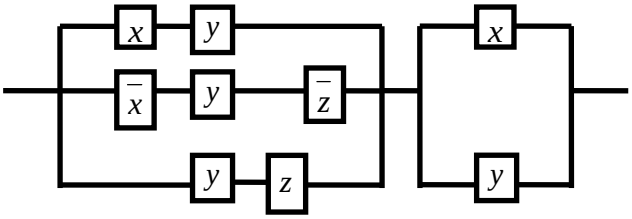
14.4



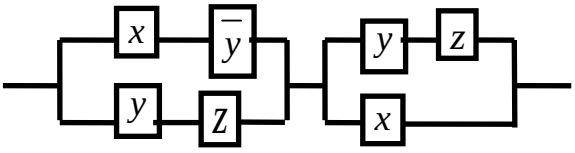
14.5



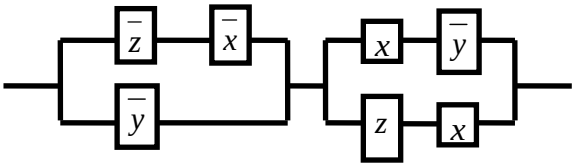
14.6



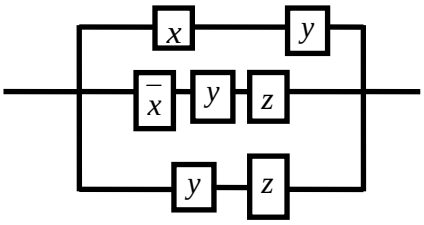
14.7



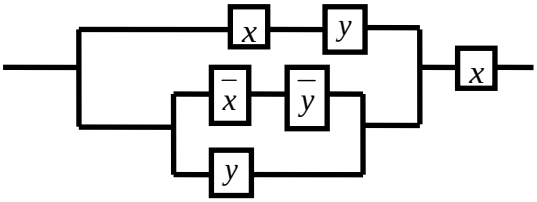
14.8



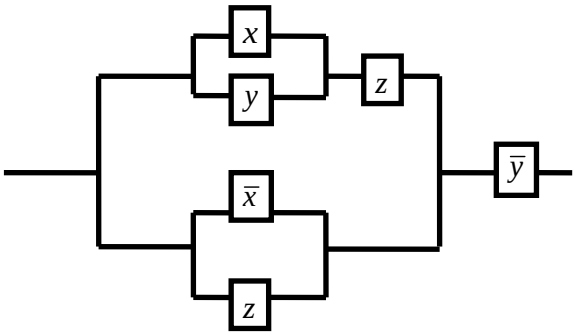
14.9



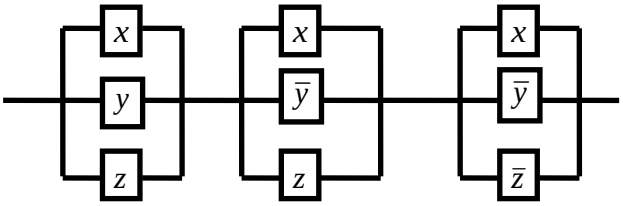
14.10



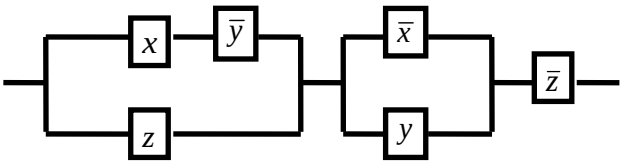
14.11



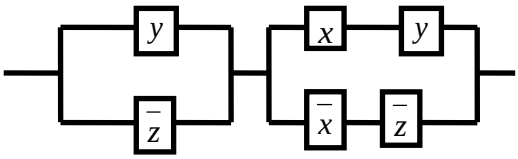
14.12



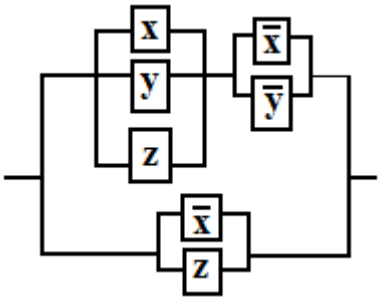
14.13



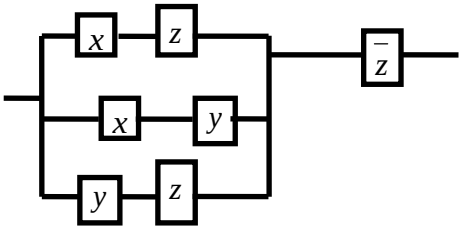
14.14



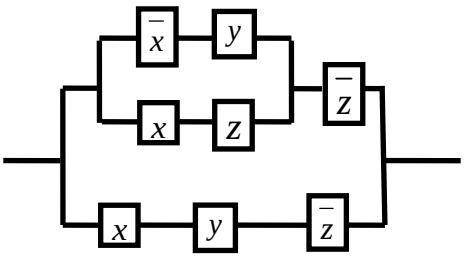
14.15



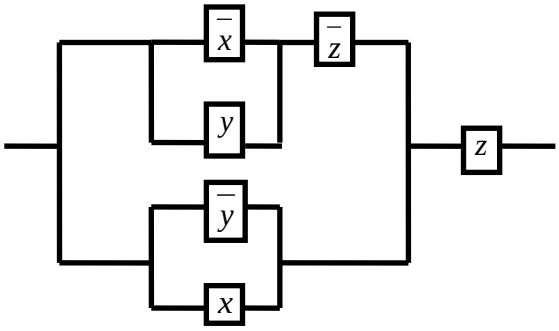
14.16



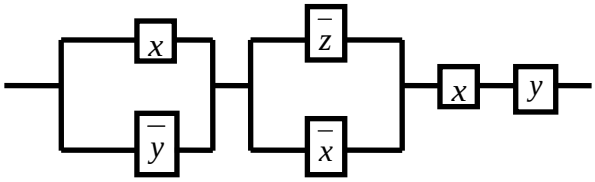
14.17



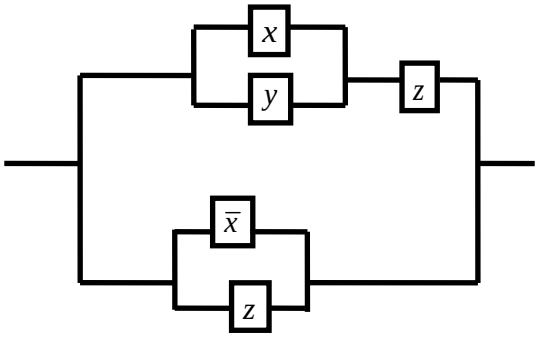
14.18



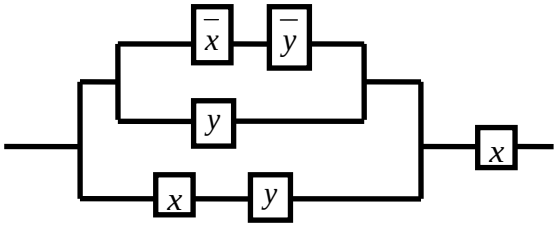
14.19



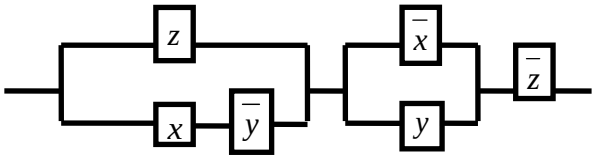
14.20



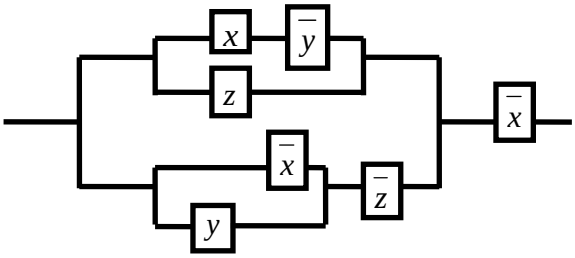
14.21



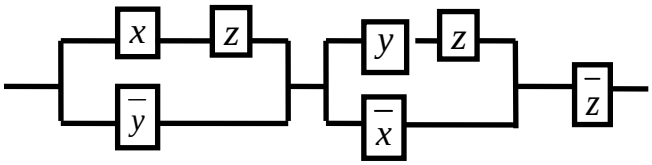
14.22



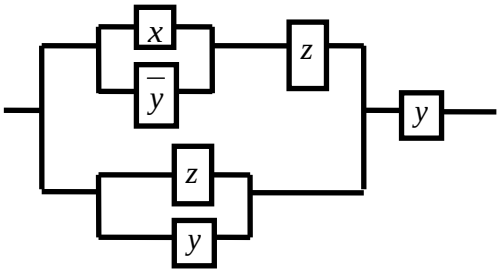
14.23



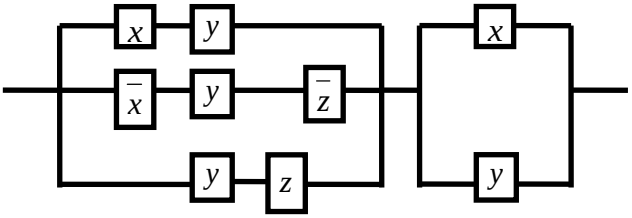
14.24



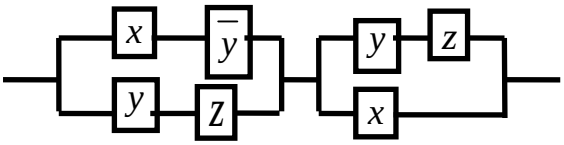
14.25



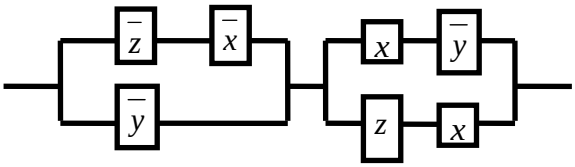
14.26



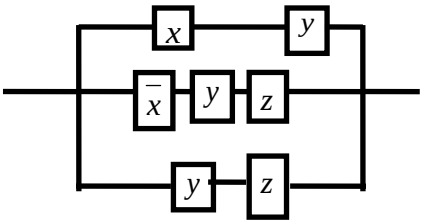
14.27



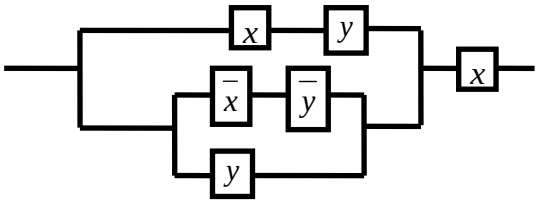
14.28



14.29



14.30



2.3 Типтік варианттың шешуі

f(x,y) функциясы *f*(*x*,*y*)= $x \wedge \bar{y} \to x \downarrow y$ формуламен берілген.

1. Логикалық қисаптардың орындалу реті туралы келісуді қолданып *f(x,y)* формуласында жақшаларды қою керек.

2. Осы функцияны:

а) ақиқаттық кестесімен;

ә) бірлік және нөлдік жиынтықтармен;

б) мәндерінің векторымен жазу керек.

3. Формуланы тек теріске шығару, конъюнкция және дизъюнкция қисаптары көмегімен жазу керек; осы формуланы қысқарту керек.

Шешуі:

1. Логикалық қисаптардың орындалу реті туралы келісу бойынша $\{\neg, (\wedge, |, \downarrow), \vee, \to, (\leftrightarrow, \oplus)\}$ біздің формулада жақшалар былай қойылады: $x \wedge \bar{y} \to x \downarrow y = (x \wedge \bar{y}) \to (x \downarrow y)$.

2. а) **ақиқаттық кестесі**:

x	y	$\bar{y}$	$x \downarrow y$	$x \wedge \bar{y}$	$f(x,y)$
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1

ә) бірлік жиынтықтар: 1=*f*(0,0)=*f*(0,1)=*f*(1,1);

нөлдік жиынтық: *f*(1,0);

б) мәндерінің векторы: (1101).

3. Жақша қойылған формуланы қысқартамыз:

$$(x \wedge \bar{y}) \to (x \downarrow y) = |\,15, 16\,| = \overline{x \wedge \bar{y}} \vee \overline{x \vee y} = |\,6\,| = (\bar{x} \vee y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) = |\,1\,|$$
$$= y \vee \bar{x} \vee \bar{x}\bar{y} = |\,5\,| = y \vee \bar{x}.$$

Түрлендіру кезінде тік жақша ішінде анықтама материалынан қолданылған формуланың нөмірі көрсетілген. Формуланы қысқарту деп айнымалы саны аз формуланы алу деп түсінеміз.

4. $f_1(x,y,z) = x \to (y \wedge z)$ және $f_2(x,y,z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$ формулаларын эквиваленттілікке тексеру керек:

а) ақиқаттық кестесі көмегімен;

ә) формулаларды эквивалентті түрлендіру көмегімен МДҚФ немесе МКҚФ-ке келтіру арқылы.

Шешуі:

а) $f_1(x,y,z)$ және $f_2(x,y,z)$ ақиқаттық кестесі:

x	y	z	$y \wedge z$	f_1	$x \to y$	$x \to z$	f_2
0	0	0	0	**1**	1	1	**1**
0	0	1	0	**1**	1	1	**1**
0	1	0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	1	1	**1**	1	1	**1**
1	0	0	0	**0**	0	0	**0**
1	0	1	0	**0**	0	1	**0**
1	1	0	0	**0**	1	0	**0**
1	1	1	1	**1**	1	1	**1**

$f_1(x,y,z)$ және $f_2(x,y,z)$ формулаларының баған мәндері тең болғандықтан, бұл формулалар эквивалентті;

ә) логикалық қисаптардың белгілі қасиеттерін қолданып, алдымен формуланы ДҚФ – дизъюнктивті қалыпты формаға, содан соң тарқату заңын пайдаланып мүлтіксіз дизъюнктивті қалыпты формаға (МДҚФ) келтіреміз:

$$f_1(x,y,z) = x \to (y \wedge z) = |\,15\,| = \bar{x} \vee yz = |\text{ ДҚФ},10\,a\,| =$$

$$= \bar{x}y \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee xyz \vee \bar{x}yz = \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee xyz \vee \bar{x}yz = |\,4\,| =$$

$$= \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee xyz \text{ - МДҚФ;}$$

$$f_2(x,y,z) = (x \to y) \wedge (x \to z) = |\,15\,| = (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee z) = |\,3\,| =$$

$$= \bar{x}\,\bar{x} \vee \bar{x}z \vee y\bar{x} \vee yz = |\,4{,}10\,a\,| = \bar{x}y \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}zy \vee \bar{x}z\bar{y} \vee y\bar{x}z \vee y\bar{x}\,\bar{z} \vee yzx \vee yz\bar{x} =$$

$$= |1{,}10\text{a}\,| = \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}\,\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}zy \vee \bar{x}z\bar{y} \vee y\bar{x}z \vee y\bar{x}\,\bar{z} \vee yzx \vee yz\bar{x} = |\,1{,}4\,| =$$

$$= \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee xyz \text{ - МДҚФ.}$$

Егер ауыстырымдылық заңды басқаша қолдансақ – «жақшаны ашпай», ал «жақша сыртына шығарсақ», онда түрлендіру қысқа болады:

$$f_2(x,y,z) = (x \to y) \wedge (x \to z) = |\,15\,| =$$

$$= (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee z) = |\,3\,| = \bar{x} \vee yz = |\,10a\,| = \ldots = \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee xyz\,.$$

Екі формуланың МДҚФ-ы тең болғандықтан, бұл формулалар эквивалентті.

5. Берілген $f(A,B,C)=(A\leftrightarrow\overline{B})\downarrow(C\oplus B)$ функциясы үшін ақиқаттық кестесін құру керек.

Шешуі:

$f(A,B,C)=(A\leftrightarrow\overline{B})\downarrow(C\oplus B)$ функциясы үшін ақиқаттық кестесі:

A	B	C	$\overline{B}$	$A\leftrightarrow\overline{B}$	$C\oplus B$	f
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1

6. Берілген $f(A,B,C)=(A\leftrightarrow\overline{B})\downarrow(C\oplus B)$ функцияны ДҚФ-ке келтіру келтіру керек.

Шешуі:

$$f(A,B,C)=(A\leftrightarrow\overline{B})\downarrow(C\oplus B)=|\,15{,}16\,|=\overline{(A\overline{B}\vee\overline{A}B)\vee\overline{(CB\vee\overline{C}\,\overline{B})}}=|\,6,\,7\,|=$$

$$=\overline{A\overline{B}\vee\overline{A}B}\wedge(CB\vee\overline{C}\,\overline{B})=\overline{A\overline{B}}\wedge\overline{\overline{A}B}\wedge(CB\vee\overline{C}\,\overline{B})=$$

$$=(\overline{A}\vee B)\wedge(A\vee\overline{B})\wedge(CB\vee\overline{C}\,\overline{B})=|\,3\,|=(\overline{A}A\vee\overline{A}\overline{B}\vee AB\vee B\overline{B})\wedge(CB\vee\overline{C}\overline{B})=$$

$=|\,9{,}3\,|=\overline{A}\overline{B}CB\vee\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{B}\vee ABCB\vee AB\overline{C}\overline{B}=|\,4{,}9\,|=\overline{A}\overline{B}\overline{C}\vee ABC$ - ДҚФ (әрі МДҚФ).

7. Берілген $f(A,B,C)=(A\leftrightarrow\overline{B})\downarrow(C\oplus B)$ функциясы үшін МДҚФ табу керек.

Шешуі: функцияның ақиқаттық кестесі бойынша оның бірлік жиынтығын жазамыз: $1=f(0,0,0)=f(1,1,1)$. Енді $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ функциясының баған мәнінде қанша бір болса, МДҚФ-да сонша конъюнкт бар болатындығы белгілі. Әрбір бірлік жиынтығының нөлдері мен бірлеріне $(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)$ барлық айнымалылардың конъюнктасы сәйкес келеді, мұнда егер $\delta_i=0$ болса, онда x_i терістеуімен, ал егер $\delta_i=1$ болса, онда өзгеріссіз жазылады.

Сонымен, біздің формуланың МДҚФ-ы екі конъюнкттың дизъюнкциясынан тұрады: $f=\overline{A}\overline{B}\overline{C}\vee ABC$ ($\wedge$ таңбасы алынып тасталынған). Айта кетелік, МДҚФ алдыңғы пунктте элементар түрлендіру әдісімен де алынған болатын.

8. Берілген $f(A,B,C)=(A\leftrightarrow\overline{B})\downarrow(C\oplus B)$ функциясы үшін Карно картасын құру керек; Карно картасы көмегімен минималды ДҚФ табу керек.

Шешуі: үш айнымалылы функцияның Карно картасы $2^3=8$ ұяшықтан тұратын кесте болады (үш айнымалылы функцияның 0 мен 1 мүмкін жиынтықтар санына тең). Көрші ұяшықтар бір айнымалы мәніне ерекшеленетіндей жолдар мен бағандар айнымалының мәніне немесе терісіне сәйкес келеді. Минималды ДҚФ алу үшін функцияның МДҚФ-ң әрбір конъюнктасы Карно картасының сәйкес ұяшығында бірмен белгіленеді:

	B		$\overline{B}$	
A	1			
$\overline{A}$			1	
	C	$\overline{C}$		C

Минималды ДҚФ алу үшін тік және көлденең жолдарда қатар тұрған бірлерді блоктарға біріктіру керек, олар 2, 4 және т.б. ұяшықтардан тұрады (блокқа бұрышта тұрған бірлерді де біріктіруге болады). Біздің Карно картасында тек екі бірлік бар, олар блокқа бірікпейді, сондықтан минималды ДҚФ МДҚФ-қа тең: $f=\overline{A}\overline{B}\overline{C}\vee ABC$.

9. Берілген $f(A,B,C)=(A\leftrightarrow\overline{B})\downarrow(C\oplus B)$ функциясы үшін минималды ДҚФ-тан КҚФ-ке көшу керек.

Шешуі: элементар түрлендіру көмегімен, логикалық қисаптар қасиеттерін пайдаланып (тік жақшада формула нөмірі көрсетілген), формуланы КҚФ-ке түрлендіреміз:

$$f=\overline{A}\overline{B}\overline{C}\vee ABC=|7|=\overline{\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}\vee ABC}}=|6|=\overline{\overline{ABC}\wedge\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}}}=$$

$$=\overline{(\overline{A}\vee\overline{B}\vee\overline{C})\wedge(A\vee B\vee C)}=|3|=$$

$$=\overline{\overline{A}A\vee\overline{A}B\vee\overline{A}C\vee\overline{B}A\vee\overline{B}B\vee\overline{B}C\vee\overline{C}A\vee\overline{C}B\vee\overline{C}C}=|9,8,6|=$$

$$=\overline{\overline{A}B}\wedge\overline{\overline{A}C}\wedge\overline{\overline{B}A}\wedge\overline{\overline{B}C}\wedge\overline{\overline{C}A}\wedge\overline{\overline{C}B}=|6|=$$

$$=(A\vee\overline{B})\wedge(A\vee\overline{C})\wedge(\overline{A}\vee B)\wedge(B\vee\overline{C})\wedge(\overline{A}\vee C)\wedge(\overline{B}\vee C)\text{- КНФ.}$$

10. Берілген $f(A,B,C)=(A\leftrightarrow\overline{B})\downarrow(C\oplus B)$ функциясы үшін МКҚФ табу керек.

Шешуі:

Бірінші тәсіл: элементар түрлендіру көмегімен.

Тарқату заңын қолданып, алдыңғы пунктте алынған КҚФ-ты МКҚФ-ке келтіреміз:

$$f=(A\vee\overline{B})\wedge(A\vee\overline{C})\wedge(\overline{A}\vee B)\wedge(B\vee\overline{C})\wedge(\overline{A}\vee C)\wedge(\overline{B}\vee C)=|\,10a\,|=$$

$$=(A\vee\overline{B}\vee C)\wedge(A\vee\overline{B}\vee\overline{C})\wedge(A\vee\overline{C}\vee B)\wedge(A\vee\overline{C}\vee\overline{B})\wedge(\overline{A}\vee B\vee C)\wedge$$

$$\wedge(\overline{A}\vee B\vee\overline{C})\wedge(B\vee\overline{C}\vee A)\wedge(B\vee\overline{C}\vee\overline{A})\wedge(\overline{A}\vee C\vee B)\wedge(\overline{A}\vee C\vee\overline{B})\wedge$$

$$\wedge(\overline{B}\vee C\vee A)\wedge(\overline{B}\vee C\vee\overline{A})=|1,4\,|=(A\vee\overline{B}\vee C)\wedge(A\vee\overline{B}\vee\overline{C})\wedge(A\vee B\vee\overline{C})\wedge$$

$$\wedge(\overline{A}\vee B\vee C)\wedge(\overline{A}\vee B\vee\overline{C})\wedge(\overline{A}\vee\overline{B}\vee C)\text{ - МКҚФ.}$$

Екінші тәсіл: ақиқаттық кестесі көмегімен.

Ереже бойынша ақиқаттық кестесінде f мәндер бағанында қанша нөлдер болса, сонша МКҚФ-те дизъюнкт болады. Әрбір нөлдік жиынтықтың $(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)$ нөлдері мен бірлерінің орнына келесі дизъюнкт сәйкес келеді: егер $\delta_i=1$ болса, онда айнымалы терісімен, ал егер $\delta_i=0$ болса, онда теріске шығарылмай айнымалының өзі алынады. Алынған МКҚФ:

$$f=(A\vee\overline{B}\vee C)\wedge(A\vee\overline{B}\vee\overline{C})\wedge(A\vee B\vee\overline{C})\wedge(\overline{A}\vee B\vee C)\wedge$$
$$\wedge(\overline{A}\vee B\vee\overline{C})\wedge(\overline{A}\vee\overline{B}\vee C).$$

11. Берілген $f(A,B,C)=(A\leftrightarrow\overline{B})\downarrow(C\oplus B)$ функциясы үшін Карно картасы бойынша екі тәсілмен минималды КҚФ табу керек.

Шешуі: бірінші тәсіл: минималды КҚФ алу үшін минималды ДҚФ алған сияқты Карно картасын қолдануға болады. Бұл картада айнымалыларды олардың терістеріне айырбастау керек және керісінше; бос жерлерге 0 қойып, 1 алып тастау керек. Содан соң картада 2 немесе 4-тен тұратын көрші нөлдік ұяшықтарды максималды блоктарға біріктіру керек. Біздің жағдайда екі айнымалылы қысқартылған дизъюнкттерге 2 ұяшықтан 3 блок сәйкес келеді. Айта кетелік, ұяшықтарды қалауымызшы таңдауымызға болады. Біз варианттардың бірін таңдап алдық.

	$\overline{B}$		B	
$\overline{A}$		0	0	0
A	0	0		0
	$\overline{C}$	C		$\overline{C}$

Бұл карта бойынша формуланың минималды КҚФ:

$$f=(\overline{A}\vee C)\wedge(A\vee\overline{B})\wedge(B\vee\overline{C}).$$

Екінші тәсіл: кәдімгі Карно картасында МКҚФ-тың дизъюнкттарына сәйкес келетін ұяшықтарға нөлдерді қойып шығамыз. Содан соң 2 немесе 4-тен тұратын көрші нөлдік ұяшықтарды максималды блоктарды белгілеу керек Функцияның МКҚФ-ы

$f=(A\vee\overline{B}\vee C)\wedge(A\vee\overline{B}\vee\overline{C})\wedge(A\vee B\vee\overline{C})\wedge(\overline{A}\vee B\vee C)\wedge$
$\wedge(\overline{A}\vee B\vee\overline{C})\wedge(\overline{A}\vee\overline{B}\vee C)$ болғандықтан, Карно картасында белгіленген блоктар мына түрде болады

	B		$\overline{B}$	
A		0	0	0
$\overline{A}$	0	0		0
	C	$\overline{C}$		C

Сонымен, функцияның МКҚФ-ы: $f=(\overline{A}\vee C)\wedge(A\vee\overline{B})\wedge(B\vee\overline{C})$. Бұл блоктарды бірінші жағдайдағы МКҚФ түрінде алу үшін топтастырдық. Басқа блоктарды топтастырсақ, басқа МКҚФ алар едік.

12. f функциясына қосалқы f^* функциясын табу керек.

Шешуі:

бірінші тәсіл: анықтама бойынша $f^*(x_1,x_2,...,x_n)=\overline{f(\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_n)}$.

Берілген функциямызды мүлтіксіз ДҚФ түрінде қарастырайық $f=\overline{A}\overline{B}\overline{C}\vee ABC$. Осы функция үшін жоғарыда көрсетілген формула бойынша

$$f^*=\overline{\overline{\overline{A}}\overline{\overline{B}}\overline{\overline{C}}\vee\overline{A}\overline{B}\overline{C}}=|7|=\overline{ABC\vee\overline{A}\overline{B}\overline{C}}=|6|=\overline{ABC}\wedge\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}}=|6,7|=$$
$$=(\overline{A}\vee\overline{B}\vee\overline{C})\wedge(A\vee B\vee C);$$

екінші тәсіл: $f=\overline{A}\overline{B}\overline{C}\vee ABC$ формуласы буль түрінде жазылғандықтан, яғни конъюнкция, дизъюнкция және теріcтеу операциялары арқылы өрнектелген. Қосалқылық принципі бойынша буль алгебрасында қосалқы функцияны алу үшін берілген формулада барлық конъюнкцияларды дизъюнкцияларға, дизъюнкцияларды конъюнкцияға, 1-ді 0-ге, 0-ді 1-ге ауыстырамыз. Сонымен, осы принцип бойынша

$$f=\overline{A}\overline{B}\overline{C}\vee ABC\ \rightarrow\ f^*=(\overline{A}\vee\overline{B}\vee\overline{C})\wedge(A\vee B\vee C);$$

үшінші тәсіл: f –тің ақиқат кестесінде барлық мәндерді қарама-қарсыларына ауыстырсақ, f^*:

A	B	C	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

A	B	C	f^*
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

f^* үшін аударылған түрде ақиқат кестесін аламыз:

A	B	C	f^*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Соңғы кестеден нөлдік жиынтықты теріп жазамыз:

0= $f^*(1,1,1) = f^*(0,0,0)$.

Олардың көмегімен мүлтіксіз КҚФ жазуға болады. Соңғы формула ізделінді қосалқы функция $f^* = (\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}) \wedge (A \vee B \vee C)$.

13. (0011 1101 0010 1100) мәндерінің векторымен берілген $f(x,y,z,t)$ функциясы үшін МДҚФ, МКҚФ, минималды ДҚФ пен КҚФ табу керек.

Шешуі: мәндерінің векторы бойынша ақиқаттық кестесін құрамыз:

x	y	z	t	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Бірлік жиынтық: f(0,0,1,0)=f(0,0,1,1)=f(0,1,0,0)=f(0,1,0,1)=f(0,1,1,1)= =f(1,0,1,0)=f(1,1,0,0)=f(1,1,0,1)=1;

Нөлдік жиынтық: f(0,0,0,0)=f(0,0,0,1)= =f(0,1,1,0) = f(1,0,0,0)=f(1,0,0,1)=f(1,0,1,1)=f(1,1,1,0)=f(1,1,1,1)=0.

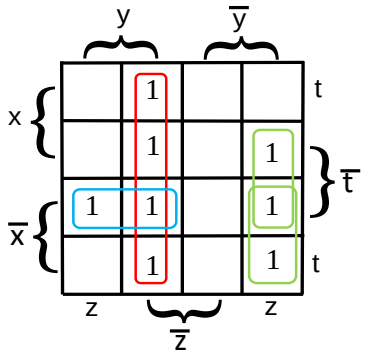
Бірлік және нөлдік жиынтық бойынша Шеннон теоремасына негізделген ережеге сай МДҚФ пен МКҚФ аламыз:

МДҚФ: $f(x,y,z,t) = \bar{x}\,\bar{y}z\bar{t} \vee \bar{x}\,\bar{y}zt \vee \bar{x}y\bar{z}\,\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}yzt \vee x\bar{y}z\bar{t} \vee xy\bar{z}\,\bar{t} \vee xy\bar{z}t;$

МКҚФ: $f(x,y,z,t) = (x \vee y \vee z \vee t) \wedge (x \vee y \vee z \vee \bar{t}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee t) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z \vee t) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z \vee \bar{t}) \wedge$

$\wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{t}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee t) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t}).$

ДҚФ пен КҚФ табу үшін Карно картасын қолданамыз МДҚФ-тағы әрбір элементар конъюнкцины Карно картасында бірмен белгілейміз; бірлері бар екі немесе төрт көрші тұрған ұяшықтарды блоктарға біріктіреміз:

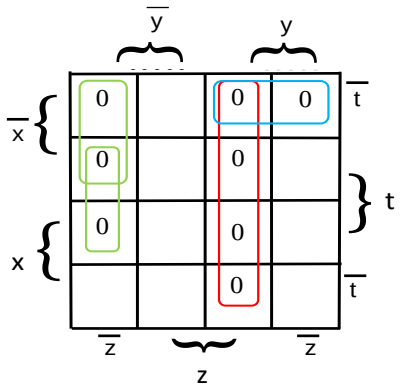


Блоктарға сәйкес келетін элементар конъюнкциялардың дизъюнкциялары қысқартылады. Қысқартылғаннан соң алынған минималды ДҚФ:

$$f(x,y,z,t) = y\bar{z} \vee \bar{x}yt \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{y}z\bar{t}.$$

Минималды КҚФ табу үшін екі тәсіл қолдануға болады:

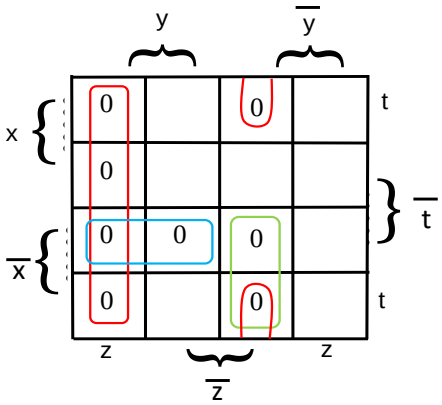
I тәсіл: минималды КҚФ табу үшін Карно картасын қолданамыз. Картада айнымалының орына терісін қоямыз және керісінше, бос орындарға 0 жазамыз, ал 1 алып тастаймыз; содан соң 0 бар екі немесе төрт көрші тұрған ұяшықтарды блоктарға біріктіреміз; блоктарға қысқартылған элементар дизъюнкциялардың конъюнкциясы сәйкес келеді.



Сонымен, минималды КҚФ:

$$f(x,y,z,t) = (y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{t}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z} \vee t) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

II тәсіл: МКҚФ пен Карно картасын қолданамыз. Ол үшін МКҚФ-тағы элементар дизъюнкцияға сәйкес ұяшыққа 0 қоямыз және т.с.с.

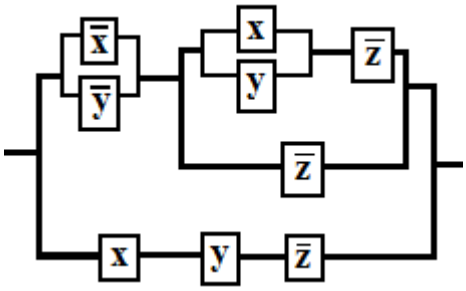


Дәл сол минималды КҚФ алдық:

$$f(x,y,z,t) = (y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{t}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z} \vee t) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

Айта кетелік, блокқа басқа нөлдерді біріктірсек те болады, онда басқа минималды КҚФ алынар еді.

14. Берілген сұлба бойынша ауыстырып-қосқыш функциясын құрып, оны қысқарту керек. Қысқартылған сұлбаны салу керек.



Шешуі: берілген сұлба бойынша ауыстырып-қосқыш функциясын құрамыз:

$$f(x,y,z)=(\bar{x}\vee\bar{y})\wedge(((x\vee y)\wedge\bar{z})\vee\bar{z})\vee(x\wedge y\wedge\bar{z}).$$

Бұл функцияны қысқарту үшін екі әдіс қолданамыз. Элементар түрлендіру әдісі бойынша:

$$f(x,y,z)=|\,3\,|=(\bar{x}\vee\bar{y})\wedge((x\bar{z}\vee y\bar{z})\vee\bar{z})\vee xy\bar{z}=|\,5\,|=(\bar{x}\vee\bar{y})\bar{z}\vee xy\bar{z}=$$

$$=|3|=(\bar{x}\vee\bar{y}\vee xy)\bar{z}=|12|=(\bar{x}\vee\bar{y}\vee x)\bar{z}=|8{,}9|=1\wedge\bar{z}=|8|=\bar{z}.$$

Көрнекілік үшін $\wedge$ таңбасы алынып тасталынған.

Карно картасы көмегімен минимизациялау үшін алдымен МДҚФ алу керек:

$$f=(\bar{x}\vee\bar{y})\wedge(x\bar{z}\vee y\bar{z}\vee\bar{z})\vee xy\bar{z}=|\,5\,|=(\bar{x}\vee\bar{y})\bar{z}\vee xy\bar{z}=|\,3\,|=\bar{x}\,\bar{z}\vee\bar{y}\,\bar{z}\vee xy\bar{z}=$$

$$=|\,10a\,|=\bar{x}\,\bar{z}y\vee\bar{x}\,\bar{z}\bar{y}\vee\bar{y}\,\bar{z}x\vee\bar{y}\bar{z}\bar{x}\vee xy\bar{z}=|\,1,4\,|=\bar{x}\,y\bar{z}\vee\bar{x}\,\bar{y}\bar{z}\vee x\bar{y}\,\bar{z}\vee xy\bar{z}$$ - МДҚФ.

Карно каптасында конъюнкттарды бірлермен белгілейміз, қатар тұрған бірлерді блоктарға біріктіріп минималды ДҚФ аламыз.

	y		ȳ	
x		1	1	
x̄		1	1	
	z	z̄		z

Минималды ДҚФ: $f=\bar{z}$.

Қысқартылған формулаға келесі сұлба сәйкес келеді:

2.4 Анықтама материалы. Логикалық операциялар және олардың ақиқаттық кестесі

1. Конъюнкция – ($x \wedge y$), оқылуы «х және у».

2. Дизъюнкция – ($x \vee y$), оқылуы «х немесе у».

3. Теріске шығару (инверсия) – ($\bar{x}$), оқылуы « х емес».

4. Импликация - ($x \to y$), оқылуы «егер х, онда у».

5. Эквиваленция – ($x \leftrightarrow y$), оқылуы «тек егер у болғанда ғана х».

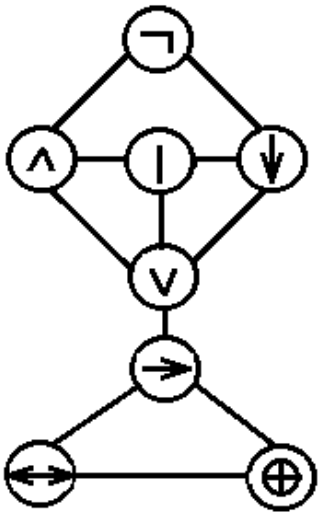
6. Шеффер штрихы – ($x|y$), конъюнкцияның терісі ретінде анықталады, оқылуы «х және у емес».

7. Пирс стрелкасы – ($x \downarrow y$), дизъюнкцияның терісі ретінде анықталады, оқылуы «х немесе у емес».

8. Сақиналы қосынды – ($x \oplus y$), эквиваленцияның терісі ретінде анықталады, оқылуы «немесе х, немесе у».

x	y	$\bar{x}$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$	$x\|y$	$x \downarrow y$	$x \oplus y$
0	0	1	0	0	1	1	1	1	0
0	1		0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1		1	1	1	1	0	0	0

Логикалық қисаптардың орындалу ретінің сұлбасы: $\{\neg, (\wedge, |, \downarrow), \vee, \to, (\leftrightarrow, \oplus)\}$. Бұл сұлбада қисаптардың таңбасы кему ретімен орналасқан, ал дөңгелек жақшаларда бірдей мәнділері көрсетілген. Логикалық қисаптардың орындалу ретінің сұлбасын былай құруға болады:



2.1 сурет -Қисаптардың орындалу реті

Бұл сұлбада жоғары орналасқан таңба төмен орналасқан таңбаға қарағанда күші басым, бір деңгейдегілер – күштері бірдей.

Негізгі эквивалентті қарым-қатынастар (заңдар)

1	Ауыстырымдылық (коммутативтік)	$x \wedge y = y \wedge x$	$x \vee y = y \vee x$
2	Ассоциативтік	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
3	Үлестірімділік (дистрибутивтік)	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
4	Идемпотенттік	$x \wedge x = x$	$x \vee x = x$
5	Сіңіру заңы	$x \wedge (x \vee y) = x$	$x \vee (x \wedge y) = x$
6	Де-Морган заңы	$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$	$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$
7	Екі рет теріске шығару	$\bar{\bar{x}} = x$	
8	Константалар қасиеті	$x \wedge 1 = x$ $x \wedge 0 = 0$	$x \vee 1 = 1$ $x \vee 0 = x$
9	$x \wedge \bar{x} = 0$ - қарама-қайшылық заңы		$x \vee \bar{x} = 1$- жойылған үшінші заңы

Басқа да пайдалы эквивалентті қарым-қатынастар

10	Жапсыру заңы	$(x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) = x$
10а	Тарқату заңы	$x = (x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y})$
11	Жалпыланған жапсыру	$(x \wedge z) \vee (y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y) = (x \wedge z) \vee (y \wedge \bar{z})$
12	$x \vee (\bar{x} \wedge y) = x \vee y$	$\bar{x} \vee (x \wedge y) = \bar{x} \vee y$
13	$x \wedge (\bar{x} \vee y) = x \wedge y$	$\bar{x} \wedge (x \vee y) = \bar{x} \wedge y$
14	$(x \to y) = \bar{x} \vee y$	$x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x) = (\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) = xy \vee \bar{x}\bar{y}$
15	$x \mid y = \overline{x \wedge y}$	$x \downarrow y = \overline{x \vee y}$
16	$x \oplus y = \overline{x \leftrightarrow y}$	

3 Есептік-графикалық жұмыс 3. Графтар теориясының элементтері

Мақсаты: графтар теориясының негізгі ұғымдарымен таныстыру, графтардың кейбір қолдануларын қарастыру.

3.1 Теориялық сұрақтар

1. Графтар теориясының негізгі ұғымдары мен анықтамалары.
2. Графтардың берілу жолдары.
3. Графтарға қолданылатын қисаптар, граф бөліктері.
4. Маршруттар, шынжыр, жолдар, циклдар, контурлар.
5. Байланыстылық. Байланыстылық компоненталары.
6. Графтағы ара қашықтық
7. Өлшенген графтар. Салмақ матрицасы.
8. Ең қысқа жолды табу.
9. Ағаштар, орман. Граф діңгегі.
10. Цикломатикалық сан, коранг. Графтағы діңгекті ағаштар саны.
11. Ең аз салмақты діңгек ағашты анықтау.
12. Кодтау.

3.2 Есептік тапсырмалар

Бағытталмаған *G* графы (н-граф) қабырғалар тізімімен берілген.

1. Осы *G* графын:
   а) екі жиынмен: *V* төбелер және *E* қабырғалар;
   ә) графиктік жолмен;
   б) сыбайластық матрицасы көмегімен;
   в) инциденттік матрицасы көмегімен беру керек.

2. Графтың ара қашықтық матрицасын, төбелерінің эксцентриситтерін, диаметрін және радиусын табу керек.

3. Графтың эйлерлік шартын тексеру керек, эйлер циклін табу керек.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Қабырға	Төбе	Төбе	Төбе	Төбе	Төбе	Төбе	Төбе	Төбе	Төбе	Төбе
a	1,2	1,2	1,2	1,4	1,2	1,4	1,4	1,2	1,2	1,4
b	1,5	1,4	1,4	1,5	1,4	1,5	1,6	1,4	1,3	1,5
c	2,4	2,3	2,4	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	1,4	2,4
d	3,5	2,4	3,4	2,5	2,4	2,5	2,5	2,4	1,5	2,5
e	3,6	2,5	3,5	3,5	2,5	3,6	3,5	2,5	2,3	3,4
f	4,5	3,6	4,5	4,5	3,5	4,5	4,5	3,4	2,4	3,5
g	5,6	5,6				5,6	5,6	4,5	2,5	4,5

№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Қабырға	Төбе	Төбе	Төбе	Төбе	Төбе	Төбе	Төбе	Төбе	Төбе	Төбе
a	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,4	1,2
b	1,3	1,5	1,4	1,4	1,4	1,5	1,4	1,4	1,5	1,4
c	1,4	2,3	2,3	2,3	2,3	2,4	2,3	2,4	2,3	2,3
d	1,5	2,4	2,5	2,4	2,4	3,5	2,4	3,4	2,5	2,4
e	2,4	2,5	2,6	2,5	2,5	3,6	2,5	3,5	3,5	2,5
f	3,4	3,4	3,6	4,5	3,4	4,5	3,6	4,5	4,5	3,5
g	4,5		4,5		4,5	5,6	5,6			
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Қабырға	Төбе	Төбе	Төбе	Төбе	Төбе	Төбе	Төбе	Төбе	Төбе	Төбе
a	1,4	1,4	1,2	1,2	1,4	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2
b	1,5	1,6	1,4	1,3	1,5	1,3	1,5	1,4	1,4	1,4
c	2,3	2,3	2,3	1,4	2,4	1,4	2,3	2,3	2,3	2,3
d	2,5	2,5	2,4	1,5	2,5	1,5	2,4	2,5	2,4	2,4
e	3,6	3,5	2,5	2,3	3,4	2,4	2,5	2,6	2,5	2,5
f	4,5	4,5	3,4	2,4	3,5	3,4	3,4	3,6	4,5	3,4
g	5,6	5,6	4,5	2,5	4,5	4,5		4,5		4,5

$V=\{1,2,3,4\}$ төбелері мен $E=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ доғалар жиынынан тұратын бағытталған $G=(V,E)$ графы берілген. Доғалар бастапқы және соңғы төбелерімен анықталған.

4. Осы графты салыңыз:
а) графиктік жолмен;
ә) сыбайластық матрицасы көмегімен;
б) инциденттік матрицасы көмегімен;
в) доғаларының тізімімен;

5. Графтың төбелерінің кіру және шығу дәрежесін, сонымен қатар сәйкес н-графтың төбелерінің дәрежесін табу керек. Графтың төбелерінің дәрежесі мен қабырғалар санының байланысын өрнектейтін теңдеуді жазыңыз

6. Графқа сәйкес бинарлы қатынасты анықтаңыз. Берілген қатынас қандай қасиеттерге ие болады (рефлексивтік, симметриялық және т.б.)?

7. Егер бар болса, екі қолжетерлік және екі қолжетпейтін төбелерге мысалдар келтіру керек. Граф байланысқан ба, әлде мықты байланысқан ба? Оның мықты байланыстық компонентасын табу керек.

№	*E*	№	*E*
1	{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,3)}	2	{(1,1),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)}
3	{(1,1),(1,2),(2,2),(3,2),(3,4),(3,3),(4,1),(4,2)}	4	{(1,4),),(2,1),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,4)}
5	{(1,2),(2,1),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,3),(4,4)}	6	{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(3,2),(4,3)}
7	{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(4,3),(4,4)}	8	{(1,1),(2,1),(2,2),(2,3),(1,4),(3,4),(3,3),(2,4)}
9	{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(3,1),(3,4),(4,1),(4,3)}	10	{(1,1),(1,4),(2,3),(2,2),(3,2),(3,3),(4,1),(4,4)}
11	{(1,1),(2,4),(2,1),(3,3),(4,1),(4,2),(1,3),(2,3)}	12	{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,2),(3,1),(4,4)}
13	{(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3),(4,3),(4,4)}	14	{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,3),(4,4)}
15	{(1,1),(1,4),(2,1),(2,3),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3)}	16	{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)}
17	{(1,3),(1,2),(2,2),(2,3),(3,2),(1,1),(4,1),(4,2)}	18	{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,2),(4,3),(4,2),(4,4)}
19	{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(3,2),(4,1),(4,4)}	20	{(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,1),(4,4)}
21	{(1,1),(1,3),(2,4),(4,4),(3,3),(3,1),(4,2),(4,3)}	22	{(1,1),(1,4),(2,3),(4,1),(2,2),(4,3),(3,4),(3,3)}
23	{(1,1),(2,4),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3)}	24	{(1,1),(2,2),(1,2),(3,3),(4,4),(4,1),)3,2),(1,3)}
25	{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4),(4,2)}	26	{(1,1),(2,2),(2,4),(2,3),(4,4),(4,2),(3,3),(3,4)}
27	{(1,4),(2,2),(2,3),(2,1),(3,3),(3,4),(4,3),(4,1)}	28	{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,3),(3,1),(4,2),(4,3)}
29	{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,1)}	30	{(1,1),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(3,2),(4,3),(4,4)}

Өлшенген граф суретте кескінделген.

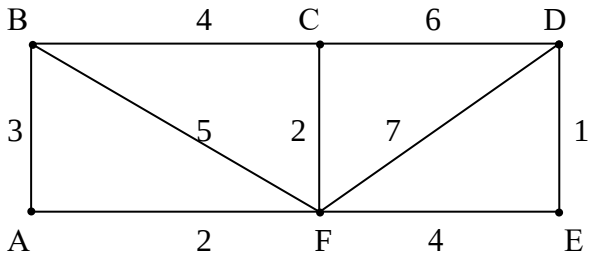
8. Оның салмақ матрицасын, *A* төбесінен қалған төбелерге дейінгі ең қысқа маршрутты табу керек.

9. Цикломатикалық санды, коранг, графтағы діңгекті ағаштар санын табу керек.

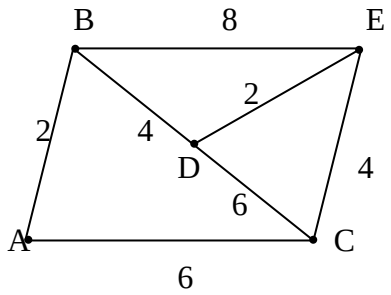
10. Графтың ең аз салмақты ағашты және оның салмағын табу керек.

11. А төбесінен ұзындығы екіге тең барлық маршрутты табу керек.

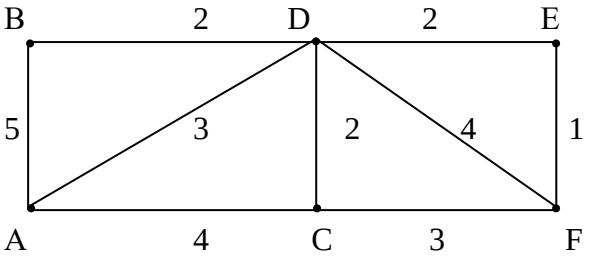
1.



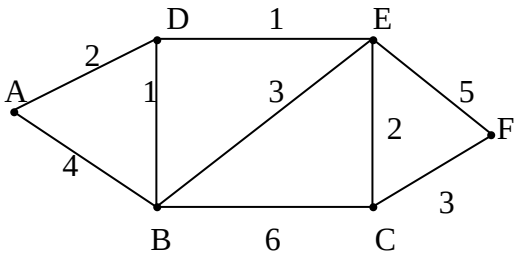
2.



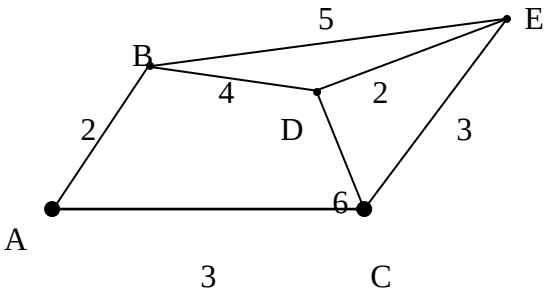
3.


B
2
D
2
E
5
3
2
4
1
A
4
C
3
F

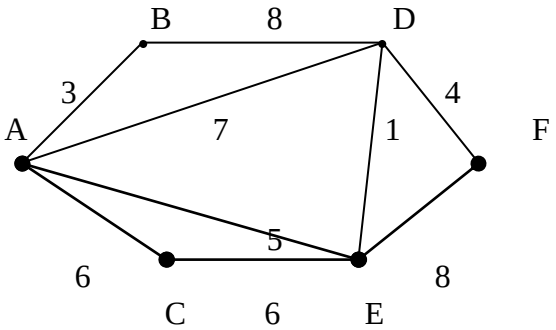
4.


D
1
E
2
A
1
3
5
2
F
4
3
B
6
C

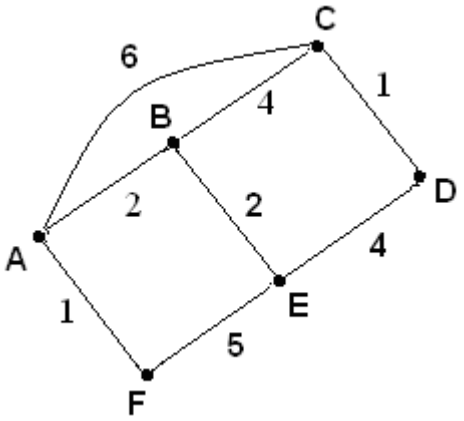
5.


5
E
B
4
2
2
D
3
6
A
3
C

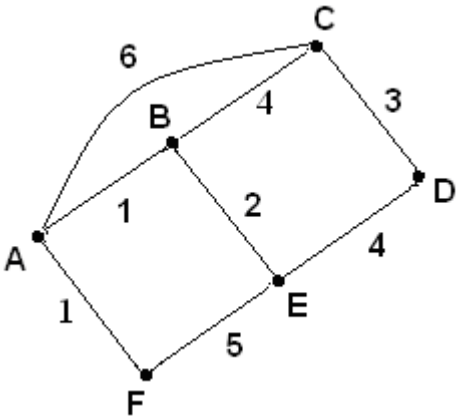
6.


B
8
D
3
4
A
7
1
F
5
6
8
C
6
E

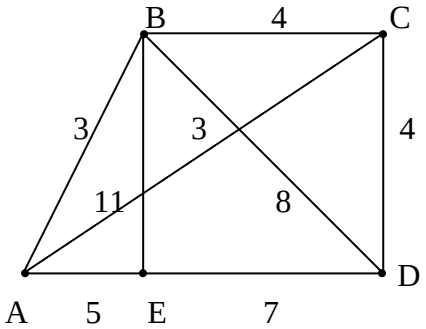
7.


C
6
1
B
4
D
2
2
A
4
E
1
5
F

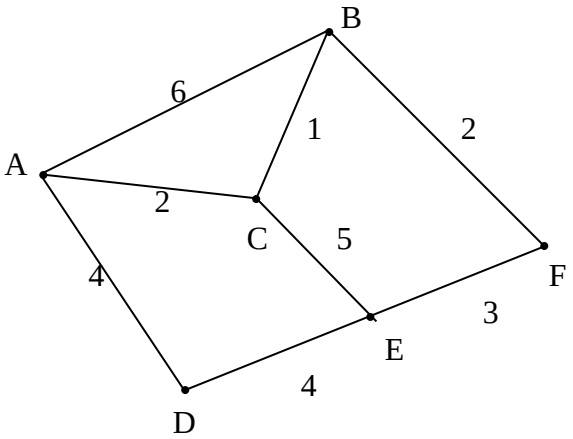
8.


C
6
3
B
4
D
1
2
A
4
E
1
5
F

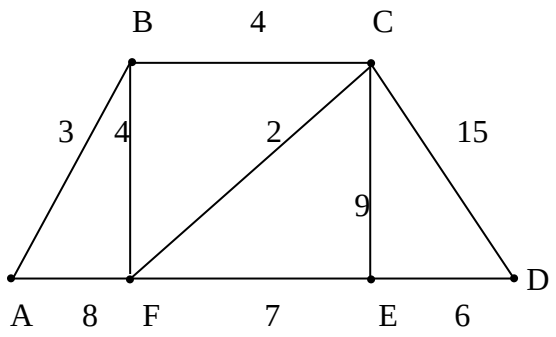
9.


B
4
C
3
3
4
11
8
D
A
5
E
7

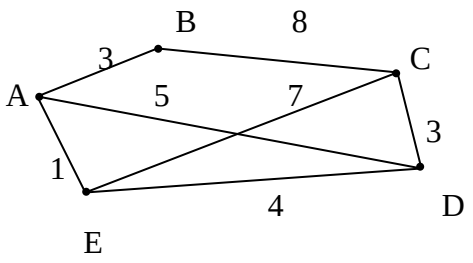
10.


B
6
1
2
A
2
C
5
F
4
3
E
4
D

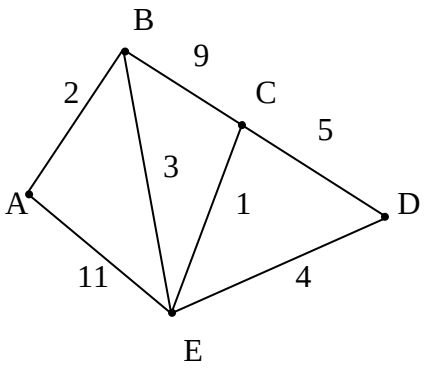
11.



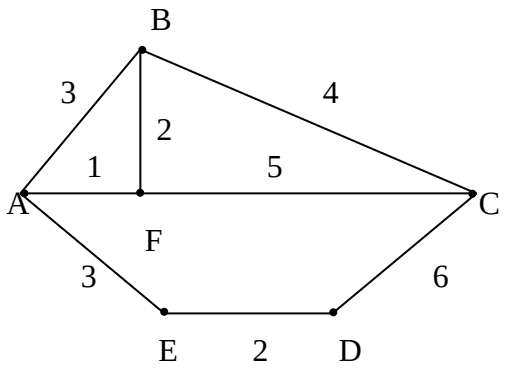
12.



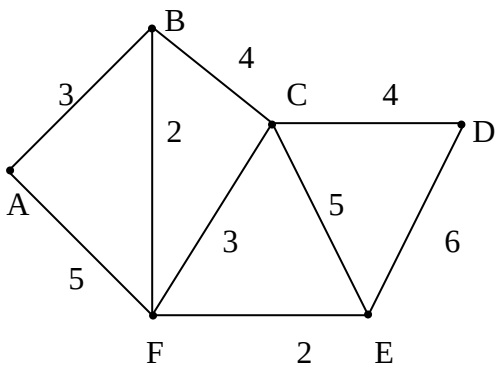
13.



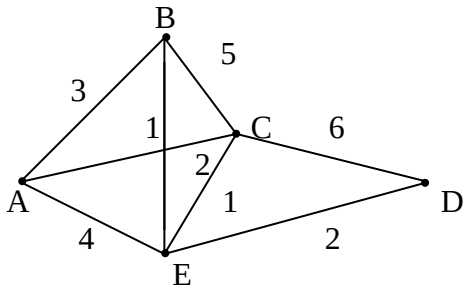
14.



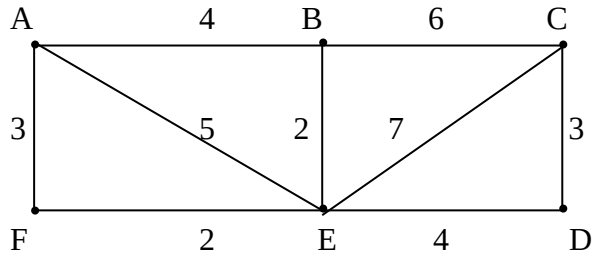
15.



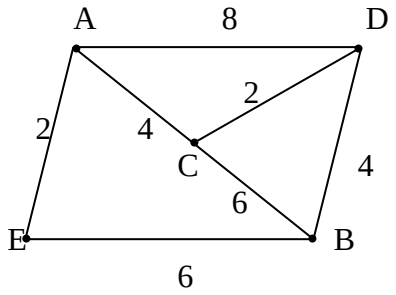
16.



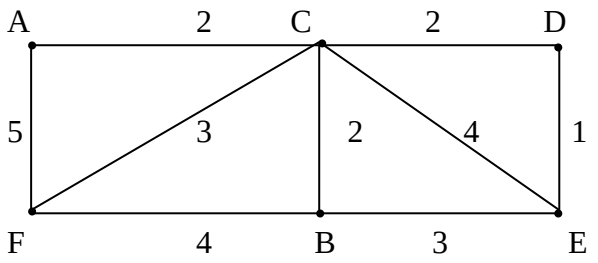
17.



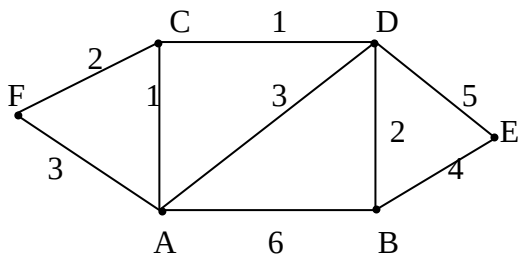
18.



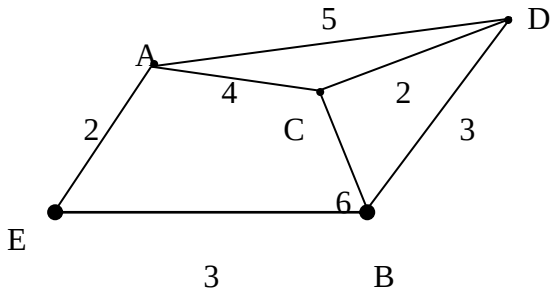
19.



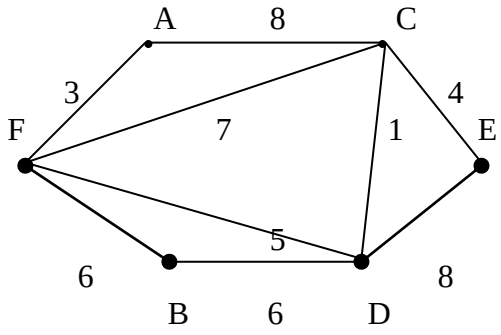
20.



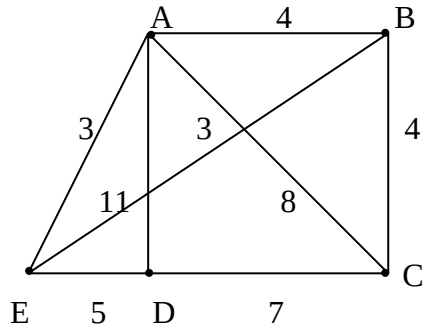
21.



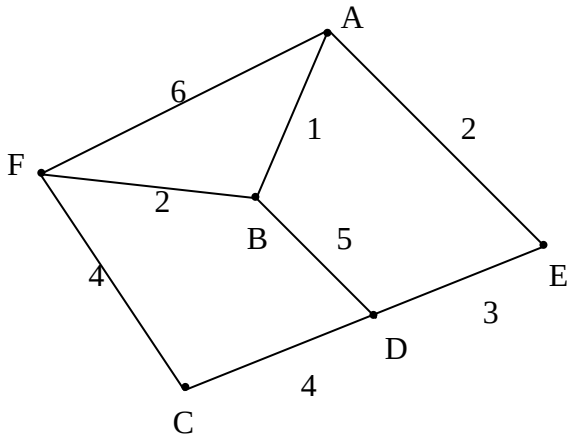
22.



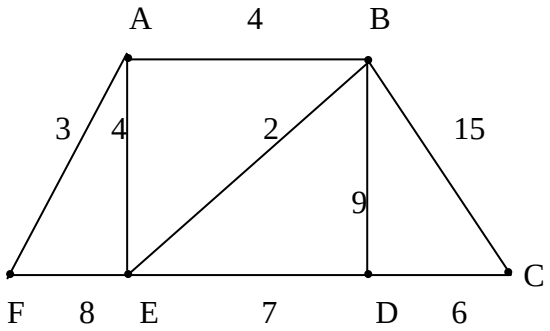
23.



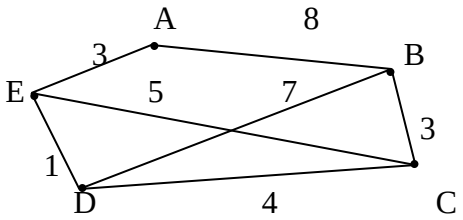
24.



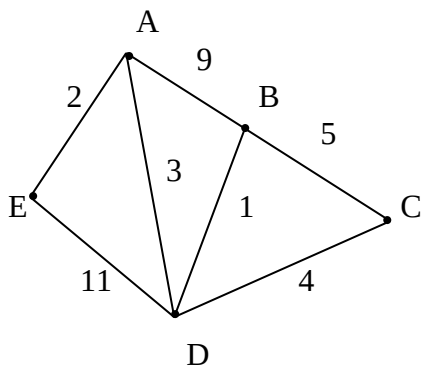
25.



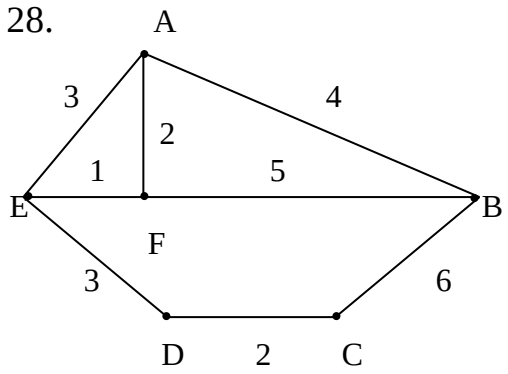
26.



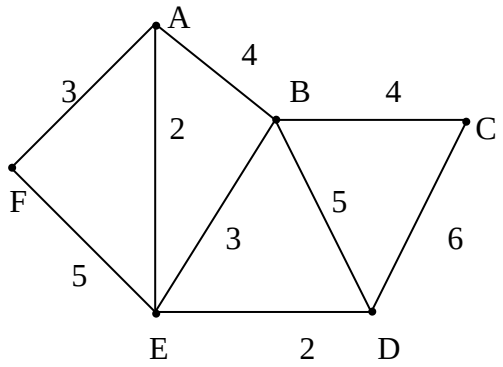
27.



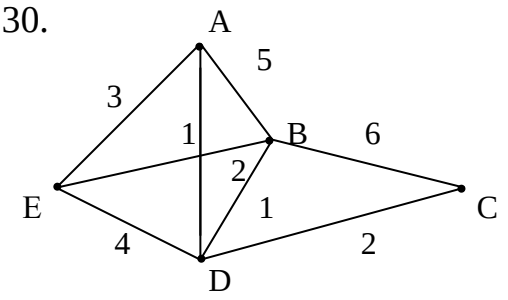
28.



29.



30.



10. Әріптер мен олардың жиілігі берілген:

а) Хаффман ағашын салу керек; ә) Хаффман кодын анықтау керек;

б) кодтың салмағын табу керек; в) α сөзін кодтау керек;

г) β сөзін декодтау керек.

№	Әріптер және жиіліктер						α	β
1	*е*	*м*	*к*	*ә*	*л*	*р*	*әлем*	10011011100
	12	8	4	2	7	3		
2	*т*	*р*	*ұ*	*м*	*л*	*а*	*тұмар*	0010110001111
	7	2	10	8	4	9		
3	*т*	*н*	*а*	*о*	*ж*	*ғ*	*тоғжан*	1010110111100
	4	8	12	7	2	3		
4	*а*	*с*	*т*	*р*	*м*	*л*	*марс*	10111101111010
	14	5	6	9	10	2		
5	*с*	*и*	*м*	*а*	*л*	*р*	*лира*	1000110111100
	8	12	6	14	3	4		
6	*м*	*і*	*е*	*р*	*з*	*ә*	*әмір*	101111001010100
	8	2	10	4	5	13		
7	*ә*	*ұ*	*р*	*м*	*т*	*а*	*мұрат*	100101100111010
	12	5	3	10	7	17		
8	*й*	*м*	*н*	*а*	*ш*	*р*	*айша*	1000111010110
	10	6	8	14	12	3		
9	*и*	*ш*	*н*	*р*	*к*	*е*	*ширек*	1101001111101
	2	14	12	10	8	5		

10	*н*	*и*	*а*	*я*	*ұ*	*ж*	*жания*	110010110100111
	5	11	12	8	9	2		
11	*т*	*к*	*қ*	*н*	*а*	*у*	*қанат*	10010111100
	7	8	4	2	12	3		
12	*а*	*р*	*ұ*	*м*	*қ*	*т*	*атамұра*	0111111001111101
	7	2	10	8	4	9		
13	*ғ*	*ұ*	*р*	*м*	*т*	*ы*	*тұғыр*	01101100111010
	12	5	3	10	7	16		
14	*м*	*л*	*т*	*р*	*с*	*а*	*самат*	011100111010
	10	2	6	9	5	14		
15	*р*	*і*	*е*	*м*	*с*	*к*	*серік*	00011011011101
	4	2	10	8	5	13		
16	*ш*	*с*	*р*	*е*	*б*	*м*	*семсер*	11011010011011
	19	5	4	10	2	8		
17	*р*	*ұ*	*а*	*м*	*т*	*ә*	*мәрт*	100101100111010
	3	5	16	10	7	12		
18	*й*	*м*	*н*	*а*	*ш*	*р*	*айман*	011011010
	10	6	8	14	12	3		
19	*р*	*и*	*н*	*к*	*ш*	*е*	*инеш*	101101111110100
	10	2	12	8	14	5		
20	*қ*	*п*	*е*	*м*	*л*	*а*	*мақпал*	1011110011100
	4	2	10	8	5	13		
21	*м*	*ы*	*қ*	*н*	*а*	*з*	*заман*	10011101101101011
	7	8	4	2	12	3		
22	*ұ*	*а*	*р*	*м*	*л*	*т*	*мұра*	0110001111100
	10	7	2	8	4	9		
23	*а*	*р*	*ұ*	*м*	*л*	*т*	*алмұрт*	11111010011101
	7	2	10	8	4	9		
24	*ы*	*у*	*т*	*р*	*қ*	*а*	*тарау*	101011011011100
	5	2	6	9	10	14		
25	*р*	*ғ*	*ы*	*м*	*с*	*а*	*сағым*	0001100011011
	4	2	10	8	5	13		
26	*т*	*і*	*е*	*з*	*с*	*м*	*мезет*	100011011101000
	15	2	10	4	5	8		
27	*ж*	*ұ*	*а*	*м*	*т*	*қ*	*жақұт*	011011101011100
	3	5	16	10	7	12		
28	*з*	*м*	*н*	*е*	*й*	*р*	*немере*	11111011101000
	12	6	8	14	10	3		
29	*и*	*ш*	*н*	*р*	*к*	*е*	*кешен*	101100001101111
	2	14	12	10	8	5		
30	*қ*	*п*	*е*	*м*	*л*	*а*	*мақал*	1011110011100
	4	2	10	9	5	13		

3.3 Типтік варианттың шешуі

Ескерту. Келесі теориялық түсініктемелерде келесі белгілеулерді қолданамыз: $V=\{v_1,v_2,...,v_i,...\}$ - графтың төбелер жиыны, $E=\{e_1,e_2,...,e_i,...\}$- графтың қабырғалар және доғалар тізімі.

G(*V*,*E*) н-графы қабырғалар және доғалар тізімімен берілген:

Қабырға	a	b	c	d	e	f	g	h
Төбелер	1,4	1,6	2,3	2,6	3,4	4,5	4,6	5,6

1. *G* графын:

а) екі жиынмен: *V* төбелер және *E* қабырғалар;

ә) графиктік жолмен;

б) сыбайластық матрицасы көмегімен;

в) инциденттік матрицасы көмегімен беру керек.

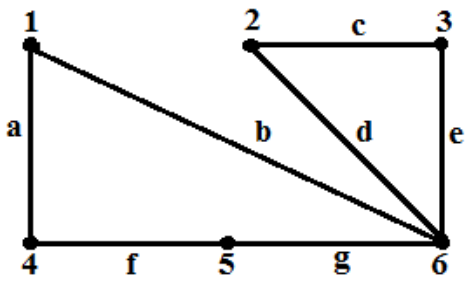
2. Графтың ара қашықтық матрицасын, төбелерінің эксцентриситтерін, диаметрін және радиусын табу керек.

3. Графтың эйлерлік шартын тексеру керек, эйлер циклін табу керек.

Шешуі:

1. а) *G*(*V*,*E*) графының екі жиынмен: төбелер *V*={1,2,3,4,5,6} және қабырғалар *E*= ={*a*,*b*,*c*,*d*,*e*,*f*,*g*} = $\{(1,4),(1,6),(2,3),(2,6),(3,6),(4,5),(5,6)\}$;

ә) графиктік жолмен *G*:



3.1 сурет - *G* графы

б) н-графтың с m төбелі сыбайластық матрицасы $A=(a_{ij})_{m\times m}$, мұндағы:

$$a_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ егер } v_i,v_j \text{ сыбайлас болса} \\ 0, \text{ егер } v_i,v_j \text{ сыбайлас болмаса} \end{cases};$$

сонымен, $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) m төбелі және n қабырғалы н- граф үшін инциденттік матрицасы келесі түрде жазылады $B = (b_{ij})_{m\times m}$ мұндағы:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{егер } v_i \textit{ төбесі } e_j \textit{ кабырғасына инцидентті болса}, \\ 0, \textit{ карсы жагдайда} \end{cases},$$

олай болса $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $D = (d_{ij})$- ара қашықтық матрицасы, мұндағы $d_{ij} = d(v_i, v_j)$- v_i және v_j төбелерінің арасындағы ара қашықтық, яғни v_i және v_j төбелі қарапайым шынжырдың минималды ұзындығы. Сонымен, $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$- графтың ара қашықтық матрицасы; v_i төбесінің эксцентриситеті (белгілеуі $e(v_i)$) деп осы төбеден алшақ орналасқан төбеге дейінгі ара қашықтықты түсінеміз. Олай болса $e(v_i)$ ара қашықтық матрицасындағы *i*- ші жолда тұрған ең үлкен санға тең. Сонымен, *e*(1)=2, *e*(2)=3, *e*(3)=3, *e*(4)=3, *e*(5)=2, *e*(6)=2. Графтың диаметрі $d(G) = \max\{e(v) | v \in V\}$=3; радиусы - $r(G) = \min\{e(v) | v \in V\}$=2.

Егер $e(v_i) = d(G)$, онда v_i төбесі алшақ орналасқан, егер $e(v_i) = r(G)$, онда ол орталық төбе делінеді. Сонымен, 2, 3, 4 төбелері – алшақ орналасқан, 1, 5, 6- орталық.

3. Графтың эйлерлік болуының критерийі: егер байланысқан графтың барлық төбелерінің дәрежесі жұп болса ғана ол граф эйлерлік болады.

Эйлерлік графтар үшін Флери алгоритмі орындалады. Ол алгоритм бойынша бір эйлер циклін құруға болады:

а) v_1 төбесіне инцидентті кез келген v_1 төбесі мен e_1 қабырғасын таңдаймыз.

$e_1 = \{v_1, v_2\}$ қабырғасы арқылы v_2 төбесіне көшеміз. e_1 қабырғасына 1 нөмірін береміз, оны өтілген қабырға деп, сызып тастаймыз;

ә) мүмкін болса v_i төбесінде тұрып, v_i-ді жалғастыратын қабырғаны іздеудің қажеті жоқ;

б) v_i төбесінде тұрып, төстік болатын қабырғаны таңдаудың қажеті жоқ, яғни ол қабырғаны алып тастағанда граф сызылып тасталмаған қабырғаларымен екі байланыстық компонентасына бөлінеді, олардың әрқайсысында ең болмағанда бір қабырға бар;

в) графта барлық қабырғалар нөмірленгеннен кейін эйлер циклі құрылады. Айта кетелік, соңында басталған төбеге келеміз. Нөмірлеу реті қабырғаларды айналып өту тізбегіне сәйкес келеді.

Біздің граф эйлерлік, себебі барлық төбелерінің дәрежесі жұп: $\rho(1)=\rho(2)=\rho(3)=\rho(4)=\rho(5)=2$, $\rho(6)=4$. Осы графта эйлер циклін құрайық: 1 төбесі мен $a=\{1,4\}$ қабырғасын таңдаймыз да, оған 1 нөмірін жазамыз, 4 төбесіне көшеміз; 4 төбесінен 5 төбесіне $f=\{4,5\}$ (2 нөмірі) қабырғасымен жалғыз жол; 5 төбесінен 6 төбесіне $g=\{5,6\}$ (3 нөмірі) қабырғасымен жалғыз жол; 6 төбесінде тұрып, 6 төбесін бірінші 1 төбесін жалғастыратын өтілген g және b қабырғаларын таңдамаймыз, осы төбеге инцидентті қалған қабырғалардың арасында ешқайсысы төстік (перешейка) болмайды, сондықтан кез келгенін таңдаймыз, мысалы, $e=\{3,6\}$, 4 нөмірін жазамыз және 3 төбесіне көшеміз; осылай жалғастыра отырып қабырғаларды келесі ретпен айналып өтеміз: $c=\{2,3\}$, $d=\{2,6\}$, $b=\{1,6\}$ (5, 6, 7 нөмірлері), сонымен, барлық қабырғалар өтілді. Сонымен, эйлер циклі алынды: a, f, g, e, c, d, b.

V={*1,2,3,4,5,6*} төбелері мен *E*={*a,b,c,d,e,f,g,h*}=$\{(1,2),(1,4),(2,3),(3,2),(4,5),(4,6)\}$ доғалар жиынынан тұратын бағытталған *G*=(*V,E*) графы берілген. Доғалар бастапқы және соңғы төбелерімен анықталған.

4. Осы графты салыңыз:

а) графиктік жолмен;

ә) сыбайластық матрицасы көмегімен;

б) инциденттік матрицасы көмегімен;

в) доғаларының тізімімен.

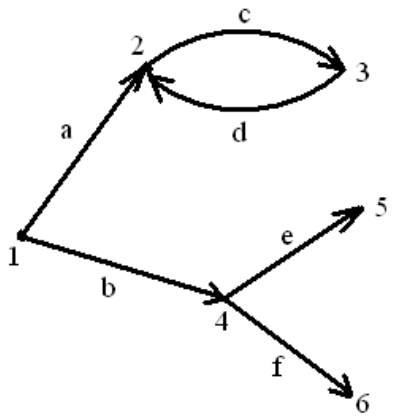
5. Графтың төбелерінің кіру және шығу дәрежесін, сонымен қатар сәйкес н-графтың төбелерінің дәрежесін табу. Графтың төбелерінің дәрежесі мен қабырғалар санының байланысын өрнектейтін теңдеуді жазыңыз

6. Графқа сәйкес бинарлы қатынасты анықтаңыз. Берілген қатынас қандай қасиеттерге ие болады (рефлексивтік, симметриялық және т.б.)?

7. Егер бар болса, екі қолжетерлік және екі қолжетпейтін төбелерге мысалдар келтіру керек. Граф байланысқан ба, әлде мықты байланысқан ба? Оның мықты байланыстық компонентасын табу керек.

Шешуі:

4. а) *G* графиктік жолмен берілуі:



3.2 сурет - *G* графы

ә) *m* төбелі орграф үшін сыбайластық матрицасы келесі түрде жазылады $A = (a_{ij})_{m \times m}$ мұндағы

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{егер басы } v_i - \textit{де, соны } v_j - \textit{де болатын дога бар болса} \\ 0, \textit{ карсы жагдайда} \end{cases}.$$

Сонымен, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

б) *m* төбелі және *n* доғалы орграф үшін инциденттік матрицасы келесі түрде жазылады $B = (b_{ij})_{m \times n}$, мұндағы:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ егер } e_j \text{ доғасы } v_i \text{ төбесінен шықса,} \\ -1, \text{ егер } e_j \text{ доғасы } v_i \text{ төбесіне енсе,} \\ 2, \text{ егер } e_j - v_i \text{ төбесіне инцидентті тұзақ болса,} \\ 0, \text{ қарсы жағдайда;} \end{cases}$$

Сонымен, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

в) доғалар тізімі

Доғалар	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
Төбелер	1,2	1,4	2,3	3,2	4,5	4,6

5. $\rho(v)$ - v төбесінің дәрежесі, v төбесіне инцидентті қабырлар санына тең. $\sum_{v \in G} \rho(v) = 2n$, n- қабырлар саны.

Орграф үшін $\rho_1(v)$- v төбесінің шығу дәрежесі, ол бастауы v болатын доғалар санына тең; $\rho_2(v)$ - төбесінің кіру дәрежесі, ол соңы v болатын доғалар санына тең. $\rho(v) = \rho_1(v) + \rho_2(v)$, $\sum_{v \in G} \rho_1(v) = \sum_{v \in G} \rho_2(v) = n$.

Біздің есепте шығу дәрежесі: $\rho_1(1) = 2$, $\rho_1(2) = 1$, $\rho_1(3) = 1$, $\rho_1(4) = 2$, $\rho_1(5) = \rho_1(6) = 0$; кіру дәрежесі: $\rho_2(1) = 0$, $\rho_2(2) = 2$, $\rho_2(3) = \rho_2(4) = \rho_2(5) = \rho_2(6) = 1$.

Сәйкес н-графтың төбелерінің дәрежелері $\rho(1) = \rho_1(1) + \rho_2(1) = 2$, $\rho(2) = \rho_1(2) + \rho_2(2) = 3$, $\rho(3) = \rho_1(3) + \rho_2(3) = 2$, $\rho(4) = \rho_1(4) + \rho_2(4) = 3$, $\rho(5) = \rho_1(5) + \rho_2(5) = 1$, $\rho(6) = \rho_1(6) + \rho_2(6) = 1$.

Көрнекілік үшін есептеу нәтижелерін кестеге енгіземіз:

Төбелер	$\rho_1(v)$	$\rho_2(v)$	$\rho(v) = \rho_1(v) + \rho_2(v)$
1	2	0	2
2	1	2	3
3	1	1	2
4	2	1	3
5	0	1	1
6	0	1	1
$\sum$	6	6	12

Графтың төбелер дәрежесі мен қабырғалар санын байланыстыратын теңдіктер: $\sum_{v \in G} \rho_1(v) + \sum_{v \in G} \rho_2(v) = \sum_{v \in G} \rho(v) = 2 \cdot 6 = 12$.

6. Берілген графқа сәйкес бинарлы қатынас

$P=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 4,6\rangle\}$, оның матрицасы графтың сыбайлас матриасына тең $[P]=A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$[P]$ бас диагоналінде бірлер жоқ, тек нөлдер болғандықтан, P қатынасы рефлексивті емес және P антирефлексивті;

$[P]\neq[P]^T$ орын алғандықтан, P симметриялы емес; мысалы, $(1,2)\in P,\ (2,3)\in P$, бірақ $(1,3)\notin P$, олай болса P транзитивті емес.

7. Егер басы u және соңы v болатын жол бар болса, онда v төбесі u төбесінен жетерлік болады. Сонымен біздің графта 2 және 3 төбелері өзара жетерлік; 3, 5, 6 төбелері 1 төбесінен қолжетерлік; 1 төбесі ешқандай төбеден жетерлік емес.

Сәйкес н-граф байланысқан болғандықтан (яғни оның кез келген төбесі өзара жетерлік), берілген орграф та байланысқан болады. Бірақ мықты байланысқан болмайды, себебі бұл орграфта кез келген екі төбесі өзара қолжетерлік емес. Мықты байланыстылығының компонентасын анықтау үшін үш матрица құраймыз:

а) жетерлік матрицасы $C=\underset{m\times m}{(c_{ij})}$, мұндағы

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ егер } j \text{ төбесі } i\text{-ші төбеден қолжетерлік болса} \\ 0, \text{ қарсы жағдайда;} \end{cases}$$

ә) жетерлік емес матрицасын $(q_{ij})=Q=C^T$;

б) $(s_{ij})=S=C*Q$ матрицасын, мұндағы $s_{ij}=c_{ij}\cdot q_{ij}$.

S матрицасының бірінші жолының бірлері V_1 мықты байланыстылығының компонентасына енетін төбелерге сәйкес келеді. Ойша осы төбеге сәйкес келетін элемент тұрған жол мен бағанды сызып тастаймыз. Қалған матрицадағы бірінші жолдағы бірлер V_2 екінші мықты байланыстылығының компонентасына енетін төбелерге сәйкес келеді, т.с.с. $K(G)$- графтың саны. Егер $K(G)$=1, онда орграф мықты байланысқан, егер $K(G)$>1, онда мықты байланыспаған. Мықты байланыстылық компоненталарының төбелер жиыны граф төбелерінің жиынының бөлікшесін құрайды: $V=\{V_1,V_2,\ldots,V_k\}$.

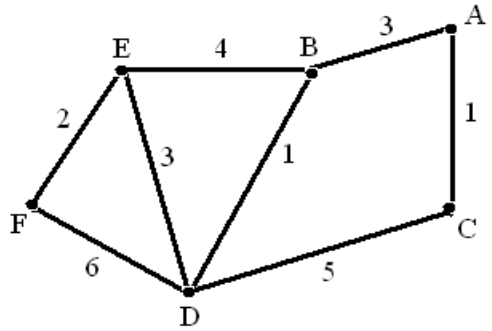
Біздің граф үшін аталған матрицаларды құрайық.

$$C=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&1\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$ – жетерлік матрицасы.

$$Q=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\\1&0&0&1&0&0\\1&0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0&1\end{pmatrix}$$ – жетерлік емес матрицасы. $$S=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

S матрицасының бірінші жолында жалғыз бір бар, ол 1 төбесіне сәйкес келеді. Сонымен, $V_1=\{1\}$ мықты байланыстылығының бірінші компонентасы. Бірінші жол мен бірінші бағанды сызып тастағаннан кейін қалған бірінші жолда 2 және 3 төбелеріне сәйкес келетін екі бір бар, яғни $V_2=\{2,3\}$ – мықты байланыстылығының екінші компонентасы. Ойымызды осылай жалғастырсақ, тағы да үш мықты байланыстылығының компонентасын аламыз $V_3=\{4\}$, $V_4=\{5\}$, $V_5=\{6\}$. Мықты байланыстық компонентасының саны $K(G)$=5. Граф төбелерінің жиынының бөлікшелері $V=\{\{1\},\{2,3\},\{4\},\{5\},\{6\}\}$.

Өлшенген граф суретте кескінделген.



3.3 сурет – Өлшенген граф

8. Графтың салмақ матрицасын, A төбесінен қалған төбелерге дейінгі ең қысқа маршрутты табу керек.

9. Цикломатикалық санды, коранг, графтағы діңгекті ағаштар санын табу керек.

10. Графтың ең аз салмақты ағашты және оның салмағын табу керек.

11. А төбесінен ұзындығы екіге тең барлық маршрутты табу керек.

Шешуі:

8. $W=(w_{ij})$- салмақ матрицасы, мұндағы w_{ij}- (v_i,v_j) доғасының салмағы. Егер мұндай доға болмаса сәйкес салмақ орнына 0 немесе ∞ қоямыз (егер төбелер сыбайлас болмаса, онда ∞). Берілген граф үшін салмақ матрицасы

$$W=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ 3 & 0 & \infty & 1 & 4 & \infty \\ 1 & \infty & 0 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 5 & 0 & 3 & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

А төбесінен басқа төбелерге ең қысқа маршрут Дейкстра алгоритмі бойынша осы мысал төңірегінде табамыз:

1 қадам. А- бастамасы , $T_1=V-\{A\}=\{B,C,D,E,F\}$, $D^{(1)}=\left(0,\hat{3},\hat{\underline{1}},\infty,\infty,\infty\right)$.

2 қадам. $D^{(1)}$-де ^ таңбасымен белгіленген элементтердің ішінен (яғни бастамасына сәйкес келетін элементтен басқалары) ең кішісін іздейміз және оның астын сызып қоямыз. T_1-ден асты сызылған элементке сәйкес келетін төбені алып тастаймыз (бұл С төбесі).

$T_2=T_1-\{C\}=\{B,D,E,F\}$ саламыз. $D^{(2)}$-ні анықтау үшін қосымша жазу жүргіземіз: W матрицасынан С-ға сәйкес жолды жазамыз, сосын оның барлық элементтеріне (бірінші мен үшіншіден басқа) таңбаланған 1 санын қосамыз.

$\begin{Bmatrix} 1 & \infty & 0 & 5 & \infty & \infty \\ & 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \infty & & 6 & \infty & \infty \end{Bmatrix}$. Қосу келесі ережемен жүргізіледі $a+\infty=\infty$, $\infty+\infty=\infty$, $\min(a,\infty)=a$, $\min(\infty,\infty)=\infty$. Алынған сандарды $D^{(1)}$-мен салыстырамыз және $D^{(2)}$ -де сәйкес орындарға ең аздарын қоямыз: $D^{(2)}=(0,\hat{\underline{3}},1,\hat{6},\infty,\infty)$.

3 қадам.

$$T_3=T_2-\{B\}=\{D,E,F\},\ \begin{Bmatrix} 3 & 0 & \infty & 1 & 4 & \infty \\ & & & 3 & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & 4 & 7 & 8 \end{Bmatrix},\ D^{(3)}=\left(0,3,1,\underline{4},7,\infty\right).$$

4 қадам.

$$T_4 = T_3 - \{D\} = \{E, F\}, \quad \left\{ \begin{matrix} \infty & 1 & 5 & 0 & 3 & 6 \\ & & & & 4 & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & 7 & 10 \end{matrix} \right\}, \; D^{(4)} = \left(0,3,1,4,\underline{7},10\right).$$

5 қадам. $T_5 = T_4 - \{E\} = \{F\}$, $\left\{ \begin{matrix} \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & 2 \\ & & & & & 7 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & 9 \end{matrix} \right\}$, $D^{(5)} = \left(0,3,1,4,7,9\right)$.

n=6, n-1=5, яғни бұл соңғы қадам. $D^{(5)}$ түріне қарап, А төбесінен қалған төбелерге дейінгі салмақты ара қашықтықтарды білуге болады $d_w(A,A) = 0$, $d_w(A,B) = 3$, $d_w(A,C) = 1$, $d_w(A,D) = 4$, $d_w(A,E) = 7$, $d_w(A,F) = 9$.

9. $\nu(G) = m - n + k$ саны цикломатикалық сан деп аталынады (немесе цикломатикалық ранг), мұндағы m – қабырғалар саны, n – төбелер саны, k – байланысты компоненталар саны. Ол діңгек алу үшін қанша қабырға алып тастау керектігін анықтайды. $\nu^*(G) = n - k$ саны коранг деп аталынады және діңгектегі қабырғалар санын анықтайды. Біздің жағдайда $\nu(G) = 8 - 6 + 1 = 3$, $\nu^*(G) = 6 - 1 = 5$. Графтағы діңгек ағаштар санын Кирхгоф матрицасы арқылы табуға болады. Кирхгоф матрицасын былай табамыз: $K = (k_{ij})$, мұндағы

$$k_{ij} = \begin{cases} -1, \textit{егер } v_i \textit{ мен } v_j \textit{ сыбайлас}, \\ 0, \textit{егер } v_i \textit{ мен } v_j \textit{ сыбайлас емес}, \\ \rho(v_i), \;\; \rho(v_i) - v_i \textit{ төбесінің дәрежесі}, \; i = j \end{cases}.$$

Кирхгоф теоремасы бойынша n төбелі ($n \geq 2$) байланысқан графта діңгек ағаштар сан Кирхгофа матрицасындағы кез келген элементтің алгебралық толықтауышына тең.

Берілген графтың төбелерінің дәрежесін табамыз: $\rho(A) = \rho(C) = \rho(F) = 2$, $\rho(D) = 4$, $\rho(B) = \rho(E) = 3$.

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$ - Кирхгоф матрицасы.

Мысалыға k_{11} элементтің алгебралық толықтауышын алайық:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = ... = 29.$$

Сонымен, бұл графта 29 діңгек ағаш бар.

10. Ең аз салмақты ағаш (діңгек) салу үшін Краскаль алгоритмін қолданамыз: G(V,E) графы берілген.

V төбелер жиынынан және ең аз салмақты e_1 қабырғасынан тұратын T_1 графын саламыз (яғни $T_1 = (V, E_1)$, мұндағы $E_1 = \{e_1\}$).

Егер T_i графы салынған болса және $i < v^* = n - k$, онда T_i қабырғалар жиынына T_i-ға енбейтін қабырғалардың ішінде ең аз салмақты e_{i+1} қабырғасын қоса отырып T_{i+1} графын саламыз (яғни $T_{i+1} = (V, E_{i+1})$, мұндағы $E_{i+1} = E_i \cup \{e_{i+1}\}$).

$i = v^* = n - k$ болғанда алгоритм аяқталады және $T_{n-k} = (V, E_{n-k})$ - ең аз салмақты діңгек, оның салмағы қабырғаларының салмақтарының қосындысына тең.

Берілген граф үшін Краскаль алгоритмі: $V = \{A, B, C, D, E, F\}$.

1) $T_1 = (V, E_1)$, $E_1 = \{\{A, C\}\}$;

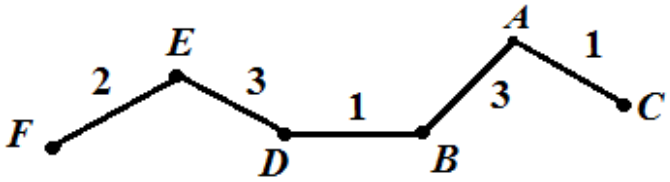
2) $T_2 = (V, E_2)$, $E_2 = E_1 \cup \{\{B, D\}\}$;

3) $T_3 = (V, E_3)$, $E_3 = E_2 \cup \{\{E, F\}\}$;

4) $T_4 = (V, E_4)$, $E_4 = E_3 \cup \{\{D, E\}\}$;

5) $T_5 = (V, E_5)$, $E_5 = E_4 \cup \{\{A, B\}\}$, $n - k = 6 - 1 = 5$, алгоритм аяқталды.

T_5 - ең аз салмақты діңгек (6 сурет), оның салмағы 1+3+1+3+2=10. Айта кетелік, ең аз салмақты діңгекті салуды T_1, T_2-ды анықтаумен қатар жүргізу керек. Әрі қарай әрбір қадамда бір қабырғадан қосып отыру керек.



3.4 сурет - Ең аз салмақты діңгек

11. А төбесінен ұзындығы екіге тең барлық маршрутты табу үшін A^2 матрицасын табамыз:

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0&0\\1&0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&1\\0&1&0&1&0&1\\0&0&0&1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&1&0&0&0\\1&0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&1\\0&1&0&1&0&1\\0&0&0&1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0&2&1&0\\.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.\end{pmatrix}.$$

Тек А төбесінен ұзындығы екіге тең барлық маршрутты табу керек болғандықтан, A^2 матрицасының бірінші жолын ғана қарастырамыз:

$a_{11}{}^2=2$, олай болса А төбесінен А төбесіне ұзындығы екіге тең екі маршрут бар;

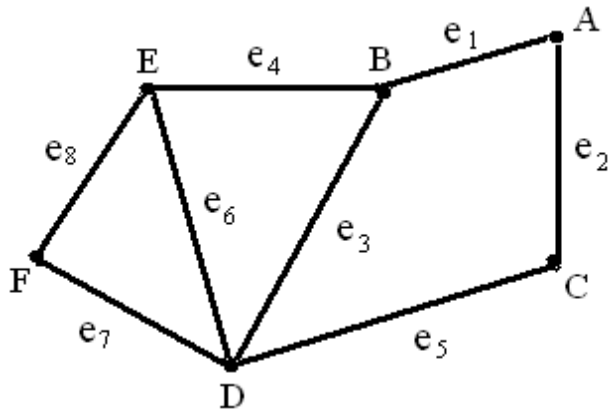
$a_{14}{}^2=2\rightarrow$ А төбесінен D төбесіне ұзындығы екіге тең екі маршрут бар;

$a_{15}{}^2=1\rightarrow$ А төбесінен Е төбесіне ұзындығы екіге тең бір маршрут бар.

Әрбір маршрут қай қабырғалар арқылы өтетінін анықтау үшін көмекші матрица құрамыз:

$$A'=\begin{pmatrix}0&e_1&e_2&0&0&0\\e_1&0&0&e_3&e_4&0\\e_2&0&0&e_5&0&0\\0&e_3&e_5&0&e_6&e_7\\0&e_4&0&e_6&0&e_8\\0&0&0&e_7&e_8&0\end{pmatrix}.$$

Бұл матрица А матрицасындағы әрбір элементті сәйкес қабырғаға айырбастау арқылы алынды.



3.5 сурет - Граф

Келесі матрицаны есептейік:

$$A'^2 = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & e_3 & e_4 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & e_5 & 0 & 0 \\ 0 & e_3 & e_5 & 0 & e_6 & e_7 \\ 0 & e_4 & 0 & e_6 & 0 & e_8 \\ 0 & 0 & 0 & e_7 & e_8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & e_3 & e_4 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & e_5 & 0 & 0 \\ 0 & e_3 & e_5 & 0 & e_6 & e_7 \\ 0 & e_4 & 0 & e_6 & 0 & e_8 \\ 0 & 0 & 0 & e_7 & e_8 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e_1e_1 + e_2e_2 & 0 & 0 & e_1e_3 + e_2e_5 & e_1e_4 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

$a'^{\,2}_{11} = e_1e_1 + e_2e_2$ болғандықтан, A төбесінен A төбесіне ұзындығы екіге тең екі маршрут бар: Ae_1Ae_1A және Ae_2Ae_2A;

$a'^{\,2}_{14} = e_1e_3 + e_2e_5$ болғандықтан, A төбесінен D төбесіне ұзындығы екіге тең екі маршрут бар: Ae_1Be_3D және Ae_2Ce_5D;

$a'^{\,2}_{15} = e_1e_4$ болғандықтан, A төбесінен E төбесіне ұзындығы екіге тең бір маршрут бар: Ae_1Be_4E.

12. Әріптер мен олардың жиілігі берілген:

р	*а*	*с*	*л*	*ю*	*т*
5	14	10	12	9	8

а) Хаффман ағашын салу керек;

ә) Хаффман кодын анықтау керек;

б) $\alpha =$ *люстра* сөзін кодтау керек;

в) β=1111000110011 сөзін декодтау керек

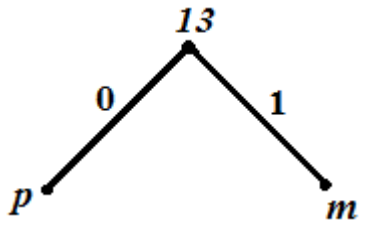
Шешуі:

а) Хаффман ағашын Хаффман алгоритмі бойынша саламыз, оны осы мысалмен көрсетеміз:

- жиілікті өсу ретімен кестеге жазамыз:

р	*т*	*ю*	*с*	*л*	*а*
5	8	9	10	12	14

- бинарлы ағаш құрамыз, мұндағы *р* және *т* жапырақтар, *р* – сол жапырақ, *т* - оң жапырақ, 5+8=13 ата-аналар жиілігі; сол ұлына 0, оң ұлына -1 сандарын береміз; бұл ағашты G_1 деп белгілейміз:

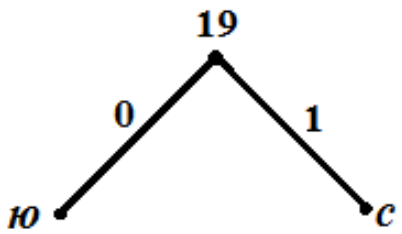


3.6 сурет - G_1 ағашы

Жиіліктер тізімдеі ең кіші екі жиілікті олардың қосындысымен ауыстырамыз. Содан соң жиіліктерді өсу ретімен қайта жазып, жаңа кестеге жазамыз:

ю	*с*	*л*	G_1	*а*
9	10	12	13	14

- ағаш құрамыз, мұндағы ұлдар ретінде жиіліктері ең кіші *ю* және *с* әріптері болады, олардың жиіліктерінің қосындысы 9+10=19; жаңа ағаш G_2:

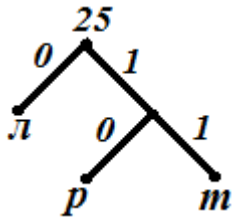


3.7 сурет - G_2 ағашы

Жаңа кесте:

л	G_1	*а*	G_2
12	13	14	19

- ағаш құрамыз, мұндағы ұлдар ретінде жиіліктері ең кіші *л* әріпі және жоғарыда құрылған G_1 ағашы болады, олардың жиіліктерінің қосындысы 12+13=25; жаңа ағаш G_3:

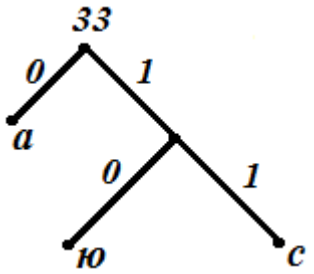


3.8 сурет - G_3 ағашы

Жаңа кесте:

а	G_2	G_3
14	19	25

- соңғы кесте бойынша G_4 ағашын құрамыз (оның салмағы 14+19=33):

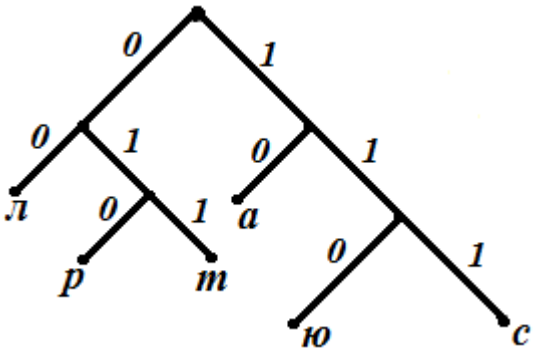


3.9 сурет - G_4 ағашы

Жаңа кесте:

G_3	G_4
25	33

- соңғы кесте бойынша G ағашын құрамыз (оның салмағы 25+33=58) – Хаффман ағашы:



3.10 сурет - Хаффман ағашы

ә) Хаффман ағашының әрбір жапырағына (әріпіне) 0 және 1 –ден тұратын жалғыз жол бар. Әрбір әріптің жолындағы 0 және 1 – бұл оның жолбастар немесе элементар коды. Хаффман ағашының әрбір жапырағына (әріпіне) сәйкес келетін жолбастар коды кодтардың префикті, қолайлы жиынын құрайды. Сонымен, қолайлы кодтаудың ізделінді сұлбасы (Хаффман коды):

$\Sigma =$

р	*а*	*с*	*л*	*ю*	*т*
010	10	111	00	110	011

б) код салмағы – бұл Хаффман ағашының салмағы: $w = 58$;

в) сөзді кодтау үшін сөздің әрбір әріпін оның кодымен айырбастау керек: $\alpha = люстра \rightarrow \beta = 0011011101101010$;

Әдебиеттер тізімі

1 Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Элементы дискретной математики. – М.: ИНФРА-М, Новосибирск: изд-во НГТУ, 2002.

2 Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. Учебник для вузов. 2-е изд. – СПб.: Питер, 2004. – 364 с.: ил. (серия «Учебник для вузов»).

3 Андерсон Д. Дискретная математика и комбинаторика.: Пер. с англ. – М.: Издатель- ский дом «Вильямс», 2004. – 960 с.: ил.–Парал. тит. англ.

4 Шапорев С.Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006.

5 Палий И.А. Дискретная математика. Курс лекций. – М.: Эксмо, 2008. – 352. (Техническое образование).

6 Жетпісов Қ. Математикалық логика және дискретті математика. - Алматы, 2011.

7 Галушкина Ю.И., Марьямов А.Н. Конспект лекций по дискретной математике. – М.: Айрис – пресс, 2007. – 176 с. (Высшее образование).

8 Досанбай П.Т. Математикалық логика. Оқулық. - Алматы, 2011.

9 Байсалова М.Ж. Дискрет математика: оқу құралы. – Алматы, АЭжБИ. 2007. - 76 бет.

10 Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Дискретті математика. 5В100200 - Ақпараттық қауіпсіздік жүйелер, 5В070400- Есептеу техникасы және бағдарламалық қамтамасыз ету мамандықтары студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар. - Алматы: АЭжБУ, 2018. - 40 б.

Мазмұны

2022 ж. жиынтық жоспары, реті 101

Астраханцева Людмила Николаевна
Байсалова Мәншүк Жұмамұратқызы

ДИСКРЕТТІ МАТЕМАТИКА

6В06104 - «Ақпараттық қауіпсіздендіру жүйелері»,
6В06103 - Есептеу техникасы және бағдарламалық қамтамасыз ету,
6В06102 – «Ақпараттық жүйелер» білім беру бағдарламасы бойынша оқитын студенттер үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар

Редактор: Изтелеуова Ж.Н.
Стандарттау бойынша маман: Ануарбек Ж.А.

Басылымға қол қойылды __.__.__. Пішімі 60х84 1/16
Таралымы 50 дана. Баспаханалық қағаз№ 1
Көлем – 4,0 оқу- бас.ә. Тапсырыс Бағасы 2000 тг.

«Ғұмарбек Дәукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірме – көбейту бюросы
050013 Алматы, Байтұрсынұлы көшесі, 126/1